**一元二次方程及其解法（一）直接开平方法—知识讲解**

**【学习目标】**

1．理解一元二次方程的概念和一元二次方程根的意义，会把一元二次方程化为一般形式；  
2．掌握直接开平方法解方程，会应用此判定方法解决有关问题；  
3．理解解法中的降次思想，直接开平方法中的分类讨论与换元思想.

**【要点梳理】**

要点一、一元二次方程的有关概念   
1．一元二次方程的概念：  
　　通过化简后，只含有一个未知数(一元)，并且未知数的最高次数是2(二次)的整式方程，叫做一元二次方程．  
**要点诠释：**

识别一元二次方程必须抓住三个条件：（1）整式方程；（2）含有一个未知数；（3）未知数的最高次数是2.不满足其中任何一个条件的方程都不是一元二次方程，缺一不可.  
2．一元二次方程的一般形式：  
　　一般地，任何一个关于x的一元二次方程，都能化成形如image001，这种形式叫做一元二次方程的一般形式．其中image002是二次项，image003是二次项系数；bx是一次项，b是一次项系数；c是常数项．  
**要点诠释：**  
　　(1)只有当image004时，方程image005才是一元二次方程；  
　　(2)在求各项系数时，应把一元二次方程化成一般形式，指明一元二次方程各项系数时注意不要漏掉前面的性质符号.  
3.一元二次方程的解：  
　　使一元二次方程左右两边相等的未知数的值叫做一元二次方程的解，也叫做一元二次方程的根.  
4.一元二次方程根的重要结论

（1）若a+b+c=0,则一元二次方程image001必有一根x=1；反之也成立，即若x=1是一元二次方程image001的一个根，则a+b+c=0.

（2）若a-b+c=0,则一元二次方程image001必有一根x=-1；反之也成立，即若x=-1是一元二次方程image001的一个根，则a-b+c=0.

（3）若一元二次方程image001有一个根x=0，则c=0；反之也成立，若c=0，则一元二次方程image001必有一根为0.

要点二、一元二次方程的解法  
1．直接开方法解一元二次方程：  
　　(1)直接开方法解一元二次方程：  
　　　 利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的解的方法称为直接开平方法.  
　　(2)直接开平方法的理论依据：  
　　　 平方根的定义.  
　　(3)能用直接开平方法解一元二次方程的类型有两类：  
　　　 ①形如关于x的一元二次方程image006，可直接开平方求解.  
　　　 　若image007，则image008；表示为image009，有两个不等实数根；  
　　　 　若image010，则x=O；表示为image011，有两个相等的实数根；  
　　　 　若image012，则方程无实数根．  
　　　 ②形如关于x的一元二次方程image013，可直接开平方求解，两根是  
　　　　 image014.  
**要点诠释：**

用直接开平方法解一元二次方程的理论依据是平方根的定义，应用时应把方程化成左边是含未知数的完全平方式，右边是非负数的形式，就可以直接开平方求这个方程的根.

**【典型例题】**

类型一、关于一元二次方程的判定   
mb04_0803171．判定下列方程是否关于x的一元二次方程：  
 　　(1)a2(x2-1)+x(2x+a)=3x+a； 　　(2)m2(x2+m)+2x=x(x+2m)-1．

【答案与解析】

(1)经整理，得它的一般形式  
　　　　　 (a2+2)x2+(a-3)x-a(a+1)=0，  
　　　　　 其中，由于对任何实数a都有a2≥0，于是都有a2+2＞0，由此可知a2+2≠0，所以可以判定：  
　　　　　 对任何实数a，它都是一个一元二次方程．  
　　　　(2)经整理，得它的一般形式  
　　　　　 (m2-1)x2+(2-2m)x+(m3+1)=0，  
　　　　　 其中，当m≠1且m≠-1时，有m2-1≠0，它是一个一元二次方程；当m=1时方程不存在，  
　　　　　 当m=-1时，方程化为4x=0，它们都不是一元二次方程．  
【总结升华】对于含有参数的一元二次方程，要十分注意二次项系数的取值范围，在作为一元二次方程进行 研究讨论时，必须确定对参数的限制条件．如在第(2)题，对参数image009的限定条件是m≠±1．  
　　例如，一个关于x的方程，若整理为(m-4)x2+mx-3=0的形式，仅当m-4≠0，即m≠4时，才是一元二次方程(显然，当m=4时，它只是一个一元一次方程4x-3=0)．又如，当我们说：“关于x的一元二次方程(a-1)x2+(2a+1)x+a2-1=0……”时，实际上就给出了条件“a-1≠0”，也就是存在一个条件“a≠1”．由于这个条件没有直接注明，而是隐含在其他的条件之中，所以称它为“隐含条件”．

类型二、一元二次方程的一般形式、各项系数的确定

mb04_0803172. 已知关于y的一元二次方程m2(y2+m)-3my=y(8y-1)+1，求出它各项的系数，并指出参数m的取值范围．

【答案与解析】

将原方程整理为一般形式，得(m2-8)y2-(3m-1)y+m3-1=0，  
　　　　由于已知条件已指出它是一个一元二次方程，所以存在一个隐含条件  
　　　　m2-8≠0，即 m≠±image014．  
　　　　可知它的各项系数分别是  
　　　　a=m2-8(m≠±image014)，b=-(3m-1)，c=m3-1．  
　　　　参数m的取值范围是不等于±image014的一切实数．  
【总结升华】在含参数的方程中，要认定哪个字母表示未知数，哪个字母是参数，才能正确处理有关的问题．

**举一反三：**

【**高清ID号：388447**

**关联的位置名称（播放点名称）：一元二次方程的系数与解—练习1(3)】**

【变式】关于x的方程的一次项系数是-1，则a **.**

【答案】原方程化简为x2-ax+1=0,则-a=-1,a=1.

类型三、一元二次方程的解（根）

mb04_0803173. （2016•大庆）若x0是方程ax2+2x+c=0（a≠0）的一个根，设M=1﹣ac，N=（ax0+1）2，则M与N的大小关系正确的为（　　）

A．M＞N B．M=N C．M＜N D．不确定

【思路点拨】把x0代入方程ax2+2x+c=0得ax02+2x0=﹣c，作差法比较可得．

【答案】B；

【解析】解：∵x0是方程ax2+2x+c=0（a≠0）的一个根，

∴ax02+2x0+c=0，即ax02+2x0=﹣c，

则N﹣M=（ax0+1）2﹣（1﹣ac）

=a2x02+2ax0+1﹣1+ac

=a（ax02+2x0）+ac

=﹣ac+ac

=0，

∴M=N，

故选：B．

【总结升华】本题主要考查一元二次方程的解得概念及作差法比较大小，熟练掌握能使方程成立的未知数的值叫做方程的解是根本，利用作差法比较大小是解题的关键．

**举一反三：**

**【高清ID号：388447**

**关联的位置名称（播放点名称）：一元二次方程的系数与解——练习2】**

【变式】（1）x=1是的根，则a= .

（2）已知关于x的一元二次方程 有一个根是0，求m的值.

【答案】（1）当x=1时，1-a+7=0,解得a=8.

（2）由题意得

类型四、用直接开平方法解一元二次方程

mb04_0803174.解方程(x-3)2=49．  
【答案与解析】

把x-3看作一个整体，直接开平方，得  
　　 　　x-3=7或x-3=-7．  
　　　　 由x-3=7，得 x=10．  
　　　　 由x-3=-7，得 x=-4．  
　　　　 所以原方程的根为x=10或x=-4．  
【总结升华】应当注意，如果把x+m看作一个整体，那么形如(x+m)2=n(n≥0)的方程就可看作形如x2=k的方

程，也就是可用直接开平方法求解的方程；这就是说，一个方程如果可以变形为这个形式，就可用直接开平方法求出这个方程的根．所以，(x+m)2=n可成为任何一元二次方程变形的目标．

**举一反三：**

【变式】解方程： (1) （2014秋•宝安区期末）（3x+2）2=4（x﹣1）2；

(2) （2014•锡山区期中） （x-2）2=25.

【答案】解：(1) 3x+2=±2（x﹣1），

∴3x+2=2x﹣2或3x+2=﹣2x+2，

∴x1=﹣4；x2=0．  
　 　 (2) (x-2)=±5  
　　 　　　∴x-2=5或x-2=-5  
　　 　　　∴x1=7,x2=-3.

**一元二次方程及其解法（一）直接开平方法—巩固练习（基础）**

**【巩固练习】**

一、选择题  
1. 若是关于x的一元二次方程，则( )

A．p≠1 B．p≠0且p≠1 C．p≠0 D．p≠0且p≠1

2．（2015•江岸区校级模拟）如果x=﹣3是一元二次方程ax2=c的一个根，那么该方程的另一个根是（　　）

A．3 B．-3 C．0 D．1

3．（2016•重庆模拟）已知x=﹣1是关于x的方程x2﹣x+m=0的一个根，则m的值为（　　）

A．﹣2 B．﹣1 C．0 D．2

4．若，是方程的两根，则的值是 ( )

A．8 B． 4 C．2 D．0

5．若为方程式的一根，为方程式的一根，且、都是正数，则之值为何?( )

A．5 B．6 C． D．

6．已知方程有一个根是-a(a≠0)，则下列代数式的值恒为常数的是( )

A．ab B． C．a+b D．a-b

二、填空题

7. 方程(2x+1)(x-3)＝x2+1化成一般形式为\_\_\_\_ \_ \_\_\_，二次项系数是\_\_\_\_ \_\_\_\_，

一次项系数是\_\_\_\_\_\_\_\_，常数项是\_\_\_\_\_\_\_\_．

8．（1）关于x的方程是一元二次方程，则m ；

（2）关于x的方程是一元一次方程，则m .

9．下列关于x的方程中是一元二次方程的是\_\_\_\_ \_\_\_\_(只填序号)．

(1)x2+1＝0； (2)； (3)；

(4)； (5) ； (6)(x-2)(x-3)＝5.

10．下列哪些数是方程的根?答案： .

0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10．

11．（2016•泰州）方程2x﹣4=0的解也是关于x的方程x2+mx+2=0的一个解，则m的值为　　．

12．（2014秋•营山县校级月考）若方程（x﹣4）2=a有实数解，则a的取值范围是\_\_\_ \_\_\_\_\_．

三、解答题

13．（2014•济宁）若一元二次方程ax2=b（ab＞0）的两个根分别是m+1与2m﹣4，求的值．

14. 用直接开平方法解下列方程．

(1)； (2)．

15．教材或资料会出现这样的题目：把方程化为一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项．

现把上面的题目改编为下面的两个小题，请解答．

(1)下列式子中，有哪几个是方程所化的一元二次方程的一般形式?(答案只写序号)\_\_\_\_\_\_ \_\_．

①； ②； ③；

④； ⑤.

(2)方程化为一元二次方程的一般形式后，它的二次项系数，一次项系数，常数项之间具有什么关系?

**【答案与解析】**

一、选择题  
1．【答案】C；

【解析】方程是一元二次方程的条件是a≠0，b、c可以是任意实数．

2.【答案】A；

【解析】ax2=c， 即x2=菁优网-jyeoo， x=±菁优网-jyeoo，

∵x=﹣3是一元二次方程ax2=c的一个根，

∴该方程的另一个根是x=3，故选A．

3.【答案】A.

【解析】把x=﹣1代入x2﹣x+m=0得1+1+m=0，解得m=﹣2．故选A．

4．【答案】D；

【解析】直接开方可得，，∴ .

5.【答案】B；

【解析】由得，∴ ，，

又是正数且是此方程的根，

∴ ．同理，

∴ ．

6.【答案】D；

【解析】将代入方程得．∴ ，又a≠0．

方程两边同除以a得a-b+1＝0，∴ a-b＝-1，即a-b的值恒为常数．

二、填空题

7．【答案】x2-5x-4＝0，1，-5，-4．

8．【答案】（1）；（2）.

【解析】（1）因为关于x的方程是一元二次方程，

所以

（2）因为关于x的方程是一元一次方程，

所以.

9．【答案】(1)，(6).

【解析】根据一元二次方程的定义，要判断一个方程是否是一元二次方程要看它是否符合定义的三个必备条件：①只含一个未知数；②未知数的最高次数是2；③是整式方程．当然对有些方程必须先整理后再看．(1)是；(2)含有分式；(3)含有两个未知数；(4)未知数最高次数为3；(5)方程整理得-10x-4＝0，不是一元二次方程；(6)方程整理得x2-5x+1＝0是一元二次方程，所以(1)、(6)是一元二次方程．

10．【答案】2，4．

【解析】把0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10分别代入方程x2-6x+8＝0，发现当x＝2和x＝4时，方程x2-6x+8＝0左右两边相等，所以x＝2，x＝4是方程x2-6x+8＝0的根．

11.【答案】-3.

【解析】2x﹣4=0，解得：x=2，把x=2代入方程x2+mx+2=0得：4+2m+2=0，解得：m=﹣3．

12．【答案】a≥0；

【解析】∵方程（x﹣4）2=a有实数解，∴x﹣4=±菁优网-jyeoo，∴a≥0；．

三、解答题

13.【答案与解析】

解：∵x2=菁优网-jyeoo（ab＞0），

∴x=±菁优网-jyeoo，

∴方程的两个根互为相反数，

∴m+1+2m﹣4=0，解得m=1，

∴一元二次方程ax2=b（ab＞0）的两个根分别是2与﹣2，

∴4a=b

∴菁优网-jyeoo=4．

故答案为：4．

14.【答案与解析】

(1)移项，得，根据平方根的定义，得．即，．

(2)根据平方根的定义，得，即，．

15.【答案与解析】

(1)观察可知方程①、②、③、④、⑤的各项系数分别是原方程各项系数

乘以1，-1，2，-2，得到的，其中①、②、④、⑤是一般形式，③不是一般形式．

(2)二次项系数、一次项系数与常数项之比为，即，

若设二次项系数为，则一次项系数为，常数项为．

　　 　　　

**一元二次方程的解法（二）配方法—知识讲解（基础）**

**【学习目标】**

1．了解配方法的概念，会用配方法解一元二次方程；

2．掌握运用配方法解一元二次方程的基本步骤；

3．通过用配方法将一元二次方程变形的过程，进一步体会转化的思想方法，并增强数学应用意识和能力.

**【要点梳理】**  
知识点一、一元二次方程的解法---配方法  
1．配方法解一元二次方程：  
　　(1)配方法解一元二次方程：  
　　　 将一元二次方程配成image015的形式，再利用直接开平方法求解，这种解一元二次方程的方法叫配方法**.**  
　　(2)配方法解一元二次方程的理论依据是公式：image016**.**  
　　(3)用配方法解一元二次方程的一般步骤：  
　　　①把原方程化为image001的形式；  
　　　②将常数项移到方程的右边；方程两边同时除以二次项的系数，将二次项系数化为1；  
　　　③方程两边同时加上一次项系数一半的平方；  
　　　④再把方程左边配成一个完全平方式，右边化为一个常数；  
　　　⑤若方程右边是非负数，则两边直接开平方，求出方程的解；若右边是一个负数，则判定此方程无实数解.  
**要点诠释：**

（1）配方法解一元二次方程的口诀：一除二移三配四开方；

（2）配方法关键的一步是“配方”，即在方程两边都加上一次项系数一半的平方.

（3）配方法的理论依据是完全平方公式．

**知识点二**、**配方法的应用**

**1．用于比较大小：**

在比较大小中的应用，通过作差法最后拆项或添项、配成完全平方，使此差大于零（或小于零）而比较出大小.

2**．用于求待定字母的值：**

配方法在求值中的应用，将原等式右边变为0，左边配成完全平方式后，再运用非负数的性质求出待定字母的取值．

**3．用于求最值：**

“配方法”在求最大（小）值时的应用，将原式化成一个完全平方式后可求出最值．

**4．用于证明：**

“配方法”在代数证明中有着广泛的应用，我们学习二次函数后还会知道“配方法”在二次函数中也有着广泛的应用．

**要点诠释：**

“配方法”在初中数学中占有非常重要的地位，是恒等变形的重要手段，是研究相等关系，讨论不等关系的常用技巧，是挖掘题目当中隐含条件的有力工具，同学们一定要把它学好．

**【典型例题】**

类型一、用配方法解一元二次方程

mb04_0803171. （2016•淄博）解方程：x2+4x﹣1=0．  
【思路点拨】首先进行移项，得到x2+4x=1，方程左右两边同时加上4，则方程左边就是完全平方式，右边是常数的形式，再利用直接开平方法即可求解．

【答案与解析】

解：∵x2+4x﹣1=0

∴x2+4x=1

∴x2+4x+4=1+4

∴（x+2）2=5

∴x=﹣2±

∴x1=﹣2+，x2=﹣2﹣．

【总结升华】配方法的一般步骤：

（1）把常数项移到等号的右边；

（2）把二次项的系数化为1；

（3）等式两边同时加上一次项系数一半的平方．

选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为1，一次项的系数是2的倍数．

举一反三：  
【**变式**】用配方法解方程.  
　 　(1)x2-4x-2=0； 　 (2)x2+6x+8=0.   
【答案】(1)方程变形为x2-4x=2．  
　　　　　 两边都加4，得x2-4x+4=2+4．  
　　　　　 利用完全平方公式，就得到形如(x+m)2=n的方程，即有(x-2)2=6．  
　　　　　 解这个方程，得x-2=image046或x-2=-image046．  
　　　　　 于是，原方程的根为x=2+image046或x=2-image046．  
　　 　(2)将常数项移到方程右边x2+6x=-8．  
　　　　　 两边都加“一次项系数一半的平方”image053=32，得 x2+6x+32=-8+32，  
　　　　　 ∴ (x+3)2=1．  
　　　　　 用直接开平方法，得x+3=±1，  
　　　　　 ∴ x=-2或x=-4．

类型二、配方法在代数中的应用

mb04_0803172．若代数式，，则的值（　　）

Ａ．一定是负数 Ｂ．一定是正数 Ｃ．一定不是负数 Ｄ．一定不是正数

【答案】B；

【解析】（作差法）



．故选Ｂ．

【总结升华】本例是“配方法”在比较大小中的应用，通过作差法最后拆项、配成完全平方，使此差大于零而比较出大小.

mb04_0803173．（2014•甘肃模拟）用配方法证明：二次三项式﹣8x2+12x﹣5的值一定小于0．

【答案与解析】

解：﹣8x2+12x﹣5=﹣8（x2﹣菁优网-jyeoox）﹣5

=﹣8[x2﹣菁优网-jyeoox+（菁优网-jyeoo）2]﹣5+8×（菁优网-jyeoo）2

=﹣8（x﹣菁优网-jyeoo）2﹣菁优网-jyeoo，

∵（x﹣菁优网-jyeoo）2≥0，

∴﹣8（x﹣菁优网-jyeoo）2≤0，

∴﹣8（x﹣菁优网-jyeoo）2﹣菁优网-jyeoo＜0，

即﹣8x2+12﹣5的值一定小于0．

【总结升华】利用配方法将代数式配成完全平方式后，再分析代数式值的符号. 注意在变形的过程中不要改变式子的值．

举一反三：

**【高清ID号：388499**

**关联的位置名称（播放点名称）：配方法与代数式的最值—例4变式1**】

【**变式**】求代数式 x2+8x+17的最小值

【答案】x2+8x+17= x2+8x+42-42+17=（x+4）2+1

∵（x+4）2≥0，

∴当（x+4）2=0时，代数式 x2+8x+17的最小值是1.

mb04_0803174．已知，求的值．

【思路点拨】

解此题关键是把拆成 ，可配成两个完全平方式．

【答案与解析】

将原式进行配方，得

，

即，

∴ 且，

∴ ，．

∴ ．

【总结升华】本题可将原式用配方法转化成平方和等于0的形式，进而求出a．b的值．

**一元二次方程的解法（二）配方法—巩固练习（基础）**

**【巩固练习】**

一、选择题  
1. （2016•贵州）用配方法解一元二次方程x2+4x﹣3=0时，原方程可变形为（　　）

A．（x+2）2=1 B．（x+2）2=7 C．（x+2）2=13 D．（x+2）2=19

2．下列各式是完全平方式的是（ ）

A． B． C． D．

3．若x2+6x+m2是一个完全平方式，则m的值是（ ）

A．3 B．-3 C． D．以上都不对

4．用配方法将二次三项式a2-4a+5变形，结果是（ ）

A．（a-2）2+1 B．（a+2）2-1 C．（a+2）2+1 D．（a-2）2-1

5．把方程x2+3=4x配方，得（ ）

A．（x-2）2=7 B．（x+2）2=21 C．（x-2）2=1 D．（x+2）2=2

6．用配方法解方程x2+4x=10的根为（ ）

A．2± B．-2± C．-2+ D．2-

二、填空题

7．（1）x2+4x+ =（x+ ）2；（2）x2-6x+ =（x- ）2；（3）x2+8x+ =（x+ ）2.

8．（2016春•长兴县月考）用配方法将方程x2-6x+7=0化为（x+m）2=n的形式为　 　．

9．若是一个完全平方式，则m的值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

10．求代数式2x2-7x+2的最小值为 .

11．（2014•资阳二模）当x=　 　时，代数式﹣x2﹣2x有最大值，其最大值为　 　．

12．已知a2+b2-10a-6b+34=0，则的值为 ．

三、解答题

13. 用配方法解方程

（1） （2）

14. （2014秋•西城区校级期中）已知a2+b2﹣4a+6b+13=0，求a+b的值．

15．已知a，b，c是△ABC的三边，且．

(1)求a，b，c的值；

(2)判断三角形的形状．

**【答案与解析】**

一、选择题

1.【答案】B．

【解析】x2+4x=3，x2+4x+4=7，（x+2）2=7．

2．【答案】C；

【解析】．

3.【答案】C；

【解析】 若x2+6x+m2是一个完全平方式，则m2=9,解得m=；

4.【答案】A；

【解析】a2-4a+5= a2-4a+22-22+5=（a-2）2+1 ；

5.【答案】C；

【解析】方程x2+3=4x化为x2-4x=-3，x2-4x+22=-3+22，（x-2）2=1.

6.【答案】B；

【解析】方程x2+4x=10两边都加上22得x2+4x+22=10+22，x=-2±.

二、填空题

7．【答案】（1）4；2； （2）9；3； （3）16；4.

【解析】配方:加上一次项系数一半的平方.

8.【答案】（x﹣3）2=2．

【解析】移项，得x2﹣6x=﹣7，在方程两边加上一次项系数一半的平方得，x2﹣6x+9=﹣7+9，

（x﹣3）2=2．

9．【答案】±3；

【解析】．∴ .

10．【答案】-；

【解析】∵2x2-7x+2=2（x2-x）+2=2（x-）2-≥-，∴最小值为-，

11．【答案】-1,1

【解析】∵﹣x2﹣2x=﹣（x2+2x）=﹣（x2+2x+1﹣1）=﹣（x+1）2+1，

∴x=﹣1时，代数式﹣x2﹣2x有最大值，其最大值为1；

故答案为：﹣1，1．

【解析】 -3x2+5x+1=-3（x-）2+≤，

∴最大值为．

12．【答案】4.

【解析】∵a2+b2-10a-6b+34=0  
∴a2-10a+25+b2-6b+9=0  
∴（a-5）2+（b-3）2=0，解得a=5，b=3，  
∴=4．

三、解答题

13.【答案与解析】

（1）

x2-4x-1=0

x2-4x+22=1+22

(x-2)2=5

x-2=

x1=

x2=

(2) 















14.【答案与解析】

解：∵a2+b2﹣4a+6b+13=0，

∴a2﹣4a+4+b2+6b+9=0，

∴（a﹣2）2+（b+3）2=0，

∴a﹣2=0，b+3=0，

∴a=2，b=﹣3，

∴a+b=2﹣3=﹣1．

15.【答案与解析】

（1）由，得

又，，，

∴ ，，，

∴ ，，．

（2）∵  即，

∴ △ABC是以c为斜边的直角三角形．