Trigonometri III, triangelsatserna

Wanmin Liu

Ma3c

- Areasatsen
- Sinussatsen
- Cosinussatsen

Beviset i boken är inte fullständigt. Ni är välkomna att läsa igenom det själva. Jag kommer inte att gå igenom alla bevis under lektionstid.

Natation. Vi betecknar alltid triangeln ABC med vinklarna A, B och C och den motstående sidorna med längderna a, b, c. Så vi har relationen

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Vi har också $0 < A < 180^\circ$, $0 < B < 180^\circ$, $0 < A < 180^\circ$ och a, b, c är positiva.

Areasatsen

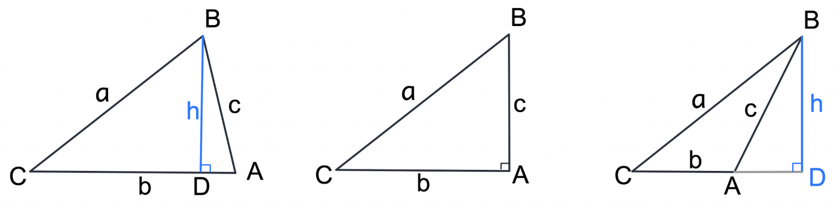
Vi kan beräkna triangelns area med formeln

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2}$$

Med natationen ovan har vi arean av triangeln ABC med följande formler:

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Bevis



A är spetsig. A är rät. A är trubbig.

- Fall 1. A är en spetsig vinkel. Höjden $h = c \sin A$ och basen $= b$.

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 2. A är en rät vinkel så $\sin A = 1$. $\text{Höjden} = c$ och basen $= b$.

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 3. A är en trubbig vinkel. Då blir vinkel $BAD = 180^\circ - A$. Vinklen BAD är spetsig.
  Vi vet att $\sin(180^\circ - A) = \sin A$.
  $\text{Höjden} = c \sin(BAD) = c \sin(180^\circ - A) = c \sin(A)$ och basen $= b$.

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

Därför har vi alltid

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

På samma sätt kan vi bevisa de andra två ekvationerna.

Detta är slutet på beviset.

Sinussatsen

Med natationen ovan har vi följande formler i triangeln ABC:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Bevis

Metod 1. (Använd areasatsen.) Vi använder areasatsen direkt.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Observera att ingen av de tre sidlängderna kan vara 0. Därför är abc inte 0. Vi dividerar sedan abc för ovanstående ekvation och multiplicerar med 2. Vi får

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin A}{abc} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{abc} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{abc},$$

dvs

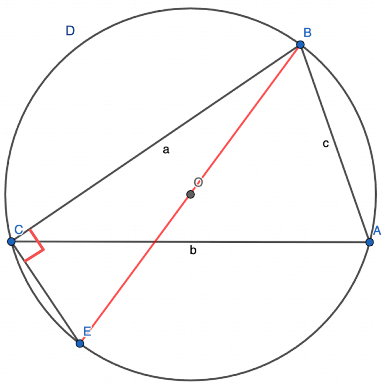
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Observera att $\sin(A)$, $\sin(B)$ och $\sin(C)$ inte alla är noll, så vi kan skriva om proportionen ovan. Vi får

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Detta är slutet på beviset.

Metod 2. (Använd randvinkelsatsen) För triangeln ABC ritar vi dess omskrivna cirkel, vilket betyder att punkterna A, B och C ligger på en cirkel med radien R. Linjen som går genom punkt B och cirkelns centrum O skär cirkeln i en punkt, betecknad som punkt E.



Vi använder en följdsats från **randvinkelsatsen**: **En randvinkel på en halvcirkelbåge är alltid 90°.**

BE är diametern, därför är vinkeln ECB en rät vinkel. I den rätvinkliga triangeln ECB har vi

$$\sin(CEB) = \frac{CB}{BE} = \frac{a}{2R}. \qquad (1)$$

Vi använder andra följdsats från **randvinkelsatsen**: **Alla randvinklar på samma cirkelbåge är lika stora.**

För cirkelbåge CDB är randvinklar $CAB = CEB$. Då blir

$$\sin(A) = \sin(CAB) = \sin(CEB) \qquad (2).$$

Med hjälp av formlerna (1) och (2) får vi $\frac{a}{\sin(A)} = 2R$. På liknande sätt får vi $\frac{b}{\sin(B)} = 2R$ och $\frac{c}{\sin(C)} = 2R$. Således har vi bevisat

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R,$$

och

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

Detta är slutet på beviset.

Cosinussatsen

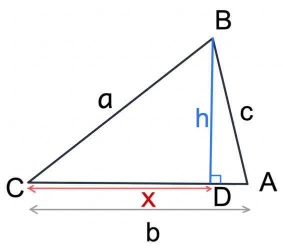
Med natationen ovan har vi följande formler i triangeln ABC:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

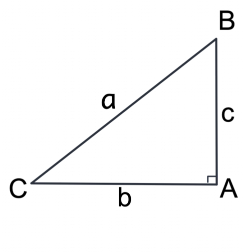
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

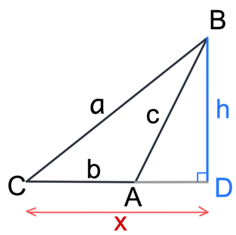
Bevis



A är spetsig.



A är rät.



A är trubbig.

Vi fokuserar på vinkeln C och bevisar att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

- Fall 1. C är en spetsig vinkel.
  - Delfall 1.1. A är en spetsig vinkel. Pythagoras sats i den vänstra triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den högra triangeln BDA ger $h^2 + (b-x)^2 = c^2$. Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $\cos C = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b-x)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C). \end{aligned}$$

- Delfall 1.2. A är en rät vinkel. Vi vet $a\cos C = b$ och $c^2 = a^2 - b^2$.

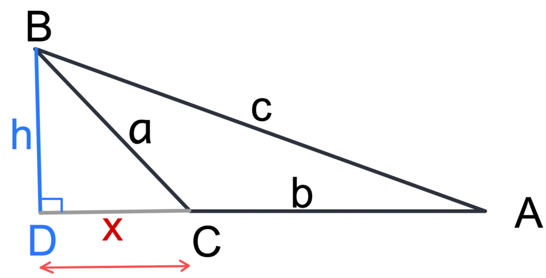
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab\cos(C) &= a^2 + b^2 - 2b(a\cos C) \\ &= a^2 + b^2 - 2b \cdot b = a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

- Delfall 1.3. A är en trubbig vinkel. Pythagoras sats i den triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den triangeln BDA ger $h^2 + (x-b)^2 = c^2$. Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $\cos C = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (x-b)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2xb + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C). \end{aligned}$$

- Fall 2. C är en rät vinkel. Vi har $\cos C = 0$. Pythagoras sats ger $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

- Fall 3. C är en trubbig vinkel.



C är trubbig.

Vi vet att $\cos C < 0$ och $\cos DCB = \cos(180^\circ - C) = -\cos C > 0$. Pythagoras sats i den triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den triangeln BDA ger $h^2 + (x+b)^2 = c^2$. Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $-\cos C = \cos DCB = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b+x)^2 \\ &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{x}{a} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C). \end{aligned}$$

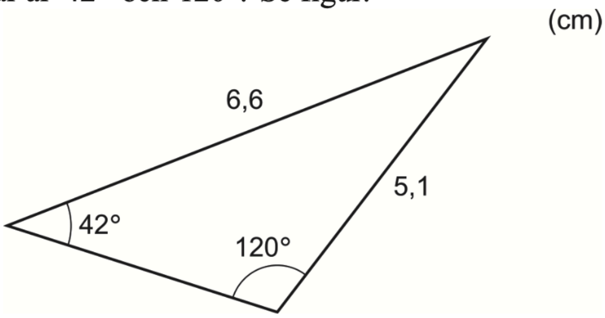
Så har vi bevisat

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

De andra två formlerna följer på samma sätt. Detta är slutet på beviset.

Exempel 1. (Ma3c-vt22-20, (2/0/0))

20. I en triangel är en sida 6,6 cm och en annan sida 5,1 cm. Två av triangelns vinklar är $42°$ och $120°$. Se figur.



Bestäm triangelns area genom att använda någon eller några av triangelsatserna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen). (2/0/0)

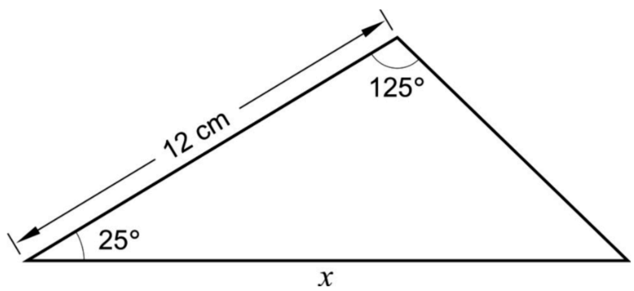
Lösning. Den tredje vinkeln är $180^\circ - 120^\circ - 42^\circ = 18^\circ$. Vi använder areasatsen

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot 6,6 \cdot 5,1 \cdot \sin(18^\circ) \approx 5,2.$$

Svar: Arean är cirka 5,2 cm^2.

Exempel 2. (Ma3c-vt16-18, (2/0/0))

18. Beräkna längden på sidan x i triangeln. (2/0/0)



Lösning. Den tredje vinkeln är $180^\circ - 125^\circ - 25^\circ = 30^\circ$. Vi använder sinussatsen

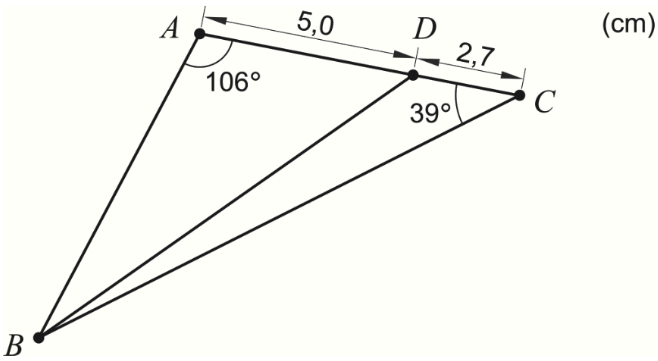
$$\frac{x}{\sin(125^\circ)} = \frac{12}{\sin(30^\circ)}.$$

$$x = \frac{12}{\sin(30^\circ)} \cdot \sin(125^\circ) \approx 19,66.$$

Svar: Längden på x är cirka 19,66 cm.

Exempel 3. (Ma3c-vt22-24, (0/3/0))

24. Figuren visar triangeln ABC där en punkt D är markerad på sidan AC. Några mått och vinklar finns givna i figuren.



Bestäm längden av sträckan BD genom att använda någon eller några av triangelsatserna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen). (0/3/0)

Lösning. Vinklen ABC är $180^\circ - 106^\circ - 39^\circ = 35^\circ$.

Vi använder sinussatsen till triangeln ABC och får

$$\frac{AB}{\sin(ACB)} = \frac{AC}{\sin(ABC)},$$

dvs

$$\frac{AB}{\sin(39^\circ)} = \frac{5,0+2,7}{\sin(35^\circ)}.$$

Vi får $AB = \frac{5,0+2,7}{\sin(35^\circ)} \cdot \sin(39^\circ) \approx 8,499$.

Vi använder cosinussatsen till triangeln ABD och får

$$=$$

$$
\begin{aligned}
BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos(106^\circ) \\
&= (8,499)^2 + 5^2 - 2 \cdot 8,499 \cdot 5 \cos(106^\circ) \\
&\approx 119,564.
\end{aligned}
$$

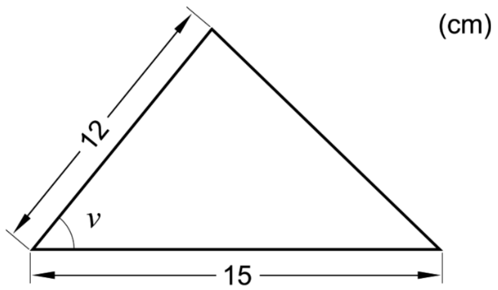
och

$$BD \approx \sqrt{119,564} \approx 10.93.$$

Svar: Längden på BD är cirka 11 cm.

Exempel 4. (Ma3c-vt17-21, (2/1/0))

21. Figuren visar en triangel där två av sidorna är 12 cm och 15 cm. Den mellanliggande vinkeln v är spetsig. Triangeln har arean 75 cm^2.



Bestäm den tredje sidans längd. (2/1/0)

Lösning.

Vi använder areasatsen till triangeln och får

$$75 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \sin(v),$$

dvs

$$\sin(v) = \frac{5}{6}.$$

Vi använder trigonometriska ettan och får

$$\sin^2(v) + \cos^2(v) = 1,$$

dvs

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cos^2(v) = 1.$$

Då får vi

$$\cos^2(v) = \frac{11}{36}.$$

Eftersom vinkeln v är spetsig, har vi $\cos(v) > 0$. Så vi får $\cos(v) = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Beteckna längden motsatt vinkeln v med x. Så $x > 0$. Vi använder cosinussatsen till triangeln och får

$$\begin{aligned} x^2 &= 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos(v) \\ &= 144 + 225 - 360 \cdot \cos(v) \\ &= 369 - 360 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \\ &\approx 170, \end{aligned}$$

och $x \approx \sqrt{170} \approx 13$.

Svar: Längden på x är cirka 13 cm.

Kommentarer. Vi använder GeoGebra och får $v = \sin^{-1}(\frac{5}{6}) = 56,44^\circ$. Då blir

$$x^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos(56,44^\circ) \approx 170.$$

Sammanfatting

Natation. Vi betecknar alltid triangeln ABC med vinklarna A, B och C och den motstående sidorna med längderna a, b, c. Vi har $0 < A < 180^\circ$, $0 < B < 180^\circ$, $0 < A < 180^\circ$ och a, b, c är positiva.

För en rätvinklig triangel ABC, där C är den räta vinkeln, gäller följande tre samband:

1. Pythagoras sats: $c^2 = a^2 + b^2$.
2. $A + B = 90^\circ$.
3. $\sin(A) = \cos(B) = \frac{a}{c}$, $\cos(A) = \sin(B) = \frac{b}{c}$

För en allmän triangel ABC gäller följande fyra samband:

1. $A + B + C = 180^\circ$.

2. Areasatsen.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

3. Sinussatsen.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

4. Cosinussatsen.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$