

# Tillämpningar av derivatan

Wanmin Liu

2025-10-06

# Del 1. Repetition och tillämpningar av derivatan.

14.35 - 14.55. Repetition.

- Definition av derivatan
- Derivatan Tabell
- Definition av talet  $e$ .
- Definition av naturlig logaritm
- Varje exponentialfunktion  $y = a^x$  (med  $a > 0$ ) kan skrivas på formen  $y = e^{kx}$ .

14.55 - 15.05 Exempel.

15.05 - 15.35 Tre uppgifter i boken.

# Definition av derivatan

Låt  $y = f(x)$  vara en funktion.

Vi skriver

- $\Delta x = (x + h) - x = h$
- $\Delta y = f(x + h) - f(x)$

$$D(f(x)) = f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

## Definition av talet $e$ .

Vi **definierar** talet  $e$  så att gränsvärdet är  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ .

Det är en indirekt definition. Så  $e$  är bara en speciell konstant så att

$$D(e^x) = e^x, \quad \text{eller } (e^x)' = e^x.$$

En ekvivalent definition är följande

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7$$

# Definition av naturlig logaritm

Om  $x = e^y$ , så **definierar** vi  $y = \ln x$ , dvs  $\ln x$  är talet så att

$$e^{\ln x} = x.$$

- Eftersom  $x = e^y$ , så är  $x$  alltid positiv. Dvs Definitionsmängd av funktion  $y = \ln x$  är alla positiva tal  $\{x | x > 0\}$ .
- Värdemängden är alla reella tal.

Till exempel:

- $\ln 1 = 0$  eftersom  $e^0 = 1$ .
- $\ln e = 1$  eftersom  $e^1 = e$ .
- $\ln e^{-1} = -1$  eftersom  $e^{\ln e^{-1}} = e^{-1}$ .
- Om  $a > 0$ , då är  $a = e^{\ln a}$ .

# Graf för den naturliga logaritmfunktionen

Den naturliga logaritmfunktionen  $y = \ln x$  definieras som reella tal  $\ln x$  sådana att  $e^{\ln x} = x$ .

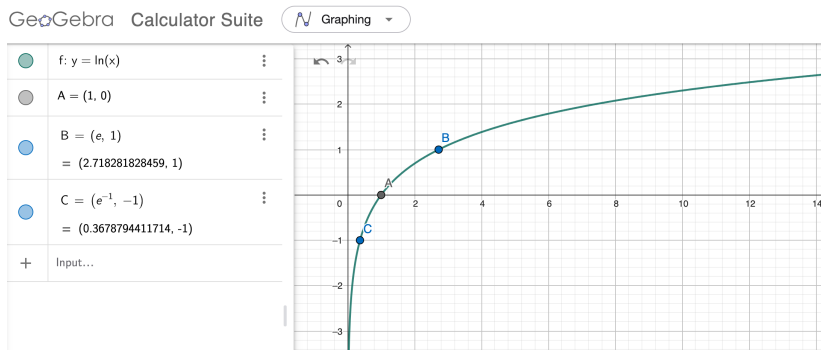


Figure 1: Den naturliga logaritmfunktionen

# En generell logaritmisk funktion

En generell logaritmisk funktion med basen  $a$  ( $a$  är ett positivt tal) betecknas med notationen  $\log_a(x)$ , med den definierade ekvationen  $a^{\log_a(x)} = x$ .

- Definitionsmängd av funktion  $y = \log_a(x)$  är alla positiva tal  $\{x|x > 0\}$ .
- Värdemängden av  $\log_a(x)$  är alla reella tal.
- $\ln(x)$  är förkortningen för  $\log_e(x)$  med basen  $e$ .
- $\lg(x)$  är förkortningen för  $\log_{10}(x)$  med basen 10, t.ex  $\lg(100) = 2$ ,  $\lg(0,1) = -1$ .

Varje exponentialfunktion  $y = a^x$  (med  $a > 0$ ) kan skrivas på formen  $y = e^{kx}$ .

Hur? Vi skriver om  $a$ :

$$a = e^{\ln(a)}.$$

Då är  $y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln(a)x} = e^{kx}$  med  $k = \ln a$ .

Exponentialfunktioner kan allmänt skrivas

$$f(x) = C \cdot e^{kx}$$

för vissa konstanter  $k$  och  $C$ .



# Derivatan Tabell

$f(x)$	$D(f(x)) = f'(x)$	Anmärkningar
$k$	$0$	$k$ är en konstant.
$x^n$	$nx^{n-1}$	$n$ är ett naturligt tal.
$x^a$	$ax^{a-1}$	$a$ är ett reellt tal.
$e^x$	$e^x$	Detta är definitionen av talet $e$ .
$e^{kx}$	$ke^{kx}$	$k$ är en konstant.
$a^{kx}$	$a^{kx} \cdot k \cdot \ln(a)$	$k$ är en konstant och $a$ är ett positivt tal.
$a \cdot g(x)$	$ag'(x)$	$a$ är reella tal.
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$	

## Exempel 1.

Värdet av en samling antika mynt som köptes för 8 år sedan ökar exponentiellt med tiden. Inköpspriset var 23 000 kr och nu är den värd 27 000 kr.

- a) Bestäm en exponetialfunktion som beskriver myntsamlingens värdeökning under  $t$  år.
- b) Vid vilken tidpunkt kommer värdet att öka med 1 000 kr per år?

## Exempel 1. Ledtråd.

- a) Vi kan skriva en generell exponentialfunktion som

$$f(t) = C \cdot e^{kt},$$

för vissa konstanter  $k$  och  $C$ .

Vi vet att  $f(0) = 23000$  och  $f(8) = 27000$ .

Vi skulle kunna använda dessa två villkor för att hitta värdena på  $k$  och  $C$ .

- b) Vi skulle lösa ekvationen

$$f'(t) = 1000$$

för tiden  $t$ .

# Exempel 1.

## Lösning.

Vi kan skriva en generell exponentialfunktion som

$$f(t) = C \cdot e^{kt},$$

för vissa konstanter  $k$  och  $C$ .

Vi vet att  $f(0) = 23000$  och  $f(8) = 27000$ .

Då är  $f(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C \cdot e^0 = C \cdot 1 = C$ . Så får vi  $C = 23000$ .

Nu är

$$f(8) = 23000 \cdot e^{k \cdot 8} = 27000.$$

Vi dividerar båda leden med 23000 och får

$$e^{k \cdot 8} = \frac{27000}{23000}.$$

Det vill säga

$$e^{8k} = \frac{27}{23}.$$

## Exempel 1.

För denna ekvation tar vi den naturliga logaritmen för båda sidor och får

$$\ln(e^{8k}) = \ln\left(\frac{27}{23}\right).$$

Med definitionen av den naturliga logaritmen får vi  $\ln(e^{8k}) = 8k$ . Så får vi ekvationen

$$8k = \ln\left(\frac{27}{23}\right)$$

och

$$k = \frac{\ln\left(\frac{27}{23}\right)}{8} \approx 0,02.$$

**Svar:** Myntsamlingens värde under  $t$  år är

$$f(t) = 23000 \cdot e^{0,02t}.$$

## Exempel 1.

- ⓑ Vi skulle lösa ekvationen

$$f'(t) = 1000$$

för tiden  $t$ .

Enligt deriveringsreglerna får vi

$$f'(t) = C \cdot e^{kt} \cdot k = 23000 \cdot e^{0,02t} \cdot 0,02 = 460 \cdot e^{0,02t}.$$

Sätt

$$f'(t) = 1000.$$

Vi får

$$460 \cdot e^{0,02t} = 1000.$$

Vi dividerar 460 på båda sidor av ekvationen och får

$$e^{0,02t} = \frac{1000}{460}.$$

## Exempel 1.

Vi tar den naturliga logaritmen för båda sidor och får

$$\ln(e^{0,02t}) = \ln\left(\frac{1000}{460}\right).$$

Dvs,

$$0,02t = \ln\left(\frac{1000}{460}\right),$$

och

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1000}{460}\right)}{0,02} \approx 38,82 \approx 39.$$

**Svar:** Ungefär 39 år efter inköpet kommer värdet att öka med 1 000 kr per år.

Sidan 106 - 107, 3230, 3231, 3237

Ledtråd till 3237:  $e^{0,017} \approx 1,017$ .



15.35 - 15.55

Del 2: 15.55 - 17.00.

15.55 - 16.25

- Tangent- och normallinjer i en punkt på en kurva
- Tangentlinjens lutning
- Normallinjens lutning
- Exempel.

16.25 - 17.00

- Tre uppgifter i boken.

# Tangent- och normallinjer i en punkt på en kurva

Givet en kurva  $y = f(x)$  och en punkt  $P$  på kurvan med koordinaterna  $(x_0, y_0)$ . Vi vill beräkna ekvationerna för tangent- och normallinjerna till kurvan vid punkt  $P$ .

Enligt definitionen av derivata ges tangentens lutning vid punkten  $P$  av  $k_{\text{tangent}} = f'(x_0)$ .

**Definition.** En *normal* till en kurva är en linje som bildar *rät vinkel* mot kurvans tangent i en viss punkt.

Om  $k_{\text{tangent}} \neq 0$ , så har vi

$$k_{\text{tangent}} \cdot k_{\text{normal}} = -1 \quad \text{eller} \quad k_{\text{normal}} = \frac{-1}{k_{\text{tangent}}}.$$

Om  $k_{\text{tangent}} = 0$ , så är den normala linjen en vertikal (lodrätt) linje  $x = x_0$ .

## Exempel 2.

Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan  $y = e + 7^x$  där  $x = 0$ .

### Ledtråd

- Vilka är tangentpunktens koordinater?
- Vad är tangentens lutning?
- Vad är normalens lutning?

## Exempel 2.

### Lösning.

Steg 1. Vi skriver koordinaterna för tangentpunkten.

Låt oss kalla tangentpunkten  $P$ .  $y(0) = e + 7^0 = e + 1$ . Så koordinaterna för punkt  $P$  är  $(0, e + 1)$ .

Steg 2. Vi hittar tangentens lutning och normalens lutning.

$$y' = 0 + 7^x \cdot \ln 7 = 7^x \cdot \ln 7.$$

$$k_{\text{tangent}} = y'(0) = 7^0 \cdot \ln 7 = \ln 7.$$

$$k_{\text{normal}} = \frac{-1}{k_{\text{tangent}}} = \frac{-1}{\ln 7}.$$

## Exempel 2.

Steg 3. Vi hittar tangentens ekvation. Tangenten har ekvationen

$$y = (\ln 7)x + m.$$

Punkt  $P$  ligger på tangentlinjen, så koordinaterna för  $P$  uppfyller också tangentlinjens ekvation. Dvs

$$e + 1 = (\ln 7) \cdot 0 + m,$$

och  $m = e + 1$ . Vi har ekvationen för tangentlinjen till kurvan i  $x = 0$ :

$$y = (\ln 7)x + e + 1.$$

## Exempel 2.

Steg 4. Vi hittar normalens ekvation. Normalen har ekvationen

$$y = \frac{-1}{\ln 7} \cdot x + m.$$

Punkt  $P$  ligger också på normallinjen, så koordinaterna för  $P$  uppfyller också normallinjens ekvation. Dvs

$$e + 1 = \frac{-1}{\ln 7} \cdot 0 + m,$$

och  $m = e + 1$ . Vi har ekvationen för normallinjen till kurvan i  $x = 0$ :

$$y = \frac{-1}{\ln 7} \cdot x + e + 1.$$

S. 107: 3239, 3241

S. 115: 32. Tangenten till kurvan  $y = ae^{2x} + bx$  i punkten  $(0, 4)$  har lutningen  $k = 3$ . Bestäm talen  $a$  och  $b$ .

Ledtråd: Tangentpunkten  $(0, 4)$  ligger också på kurvan, så dess koordinater uppfyller kurvans ekvation. Vi vet också  $y'(0) = 3$ .