EN TILLÄMPNING AV PYTHAGORAS SATS

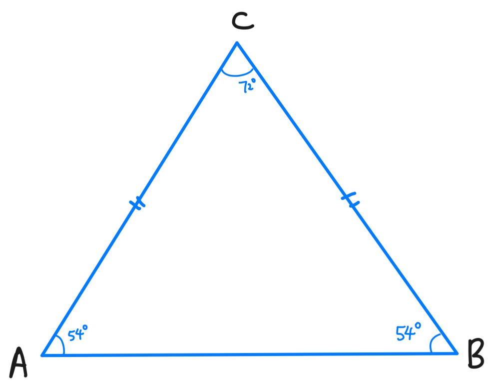
WANMIN LIU
wanminliu@gmail.com

7 februari 2025

Nyckelord: Pythagoras sats, area, likbent triangel, regelbunden femhörning.

1 PROBLEM: AREAN AV EN LIKBENT TRIANGEL MED EN BASVINKEL PÅ 54 GRADER

Exempel 1.1. I triangeln $\triangle ABC$ är sidorna AC och BC lika långa. AB längd är $4,5$ cm. Vinkeln B är 54 grader. Beräkna triangelns area.



2 FÖRESLAGEN LÖSNING.

Steg 1. Två grundläggande egenskaper hos likbenta trianglar.

Vi granskar två grundläggande egenskaper hos likbenta trianglar. vi använder symbolen $|AC|$ för att representera längden på linjesegment AC.

Lemma 2.1. *För likbent triangel $\triangle ABC$ med $|AC| = |BC|$ har vi $\angle BAC = \angle ABC$.*

Lemma 2.2. *Om en vinkelrät linje ritas från C till AB, med skärningspunkten D, så är CD bisektrisen av vinkeln $\angle ACB$, det vill säga vinkeln $\angle ACD$ är lika med vinkeln $\angle DCB$.*

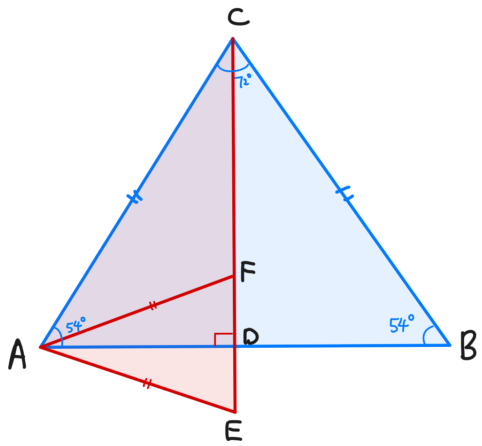
Med den givna informationen i detta exempel vet vi att $\angle ABC = \angle BAC = 54°$ och $\angle ACB = 180° - 2 \cdot 54° = 72°$. Enligt Lemma 2.2 kan vi veta att vinkeln $\angle ACD = 36°$.

Vi vet att $|AD| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{9}{4}$ (cm).

Area $\triangle ABC = |AD| \cdot |DC|$ (cm^2).

Steg 2. Konstruktion av två likbenta trianglar.

Vi förlänger linjesegment CD till E så att $|CA| = |CE|$. Så vi får en likbent triangel $\triangle ACE$. Genom att använda Lemma 2.1 och det faktum att vinkel $\angle ACE = 36°$ får vi vinkel $\angle AEC = \angle EAC = 72°$.

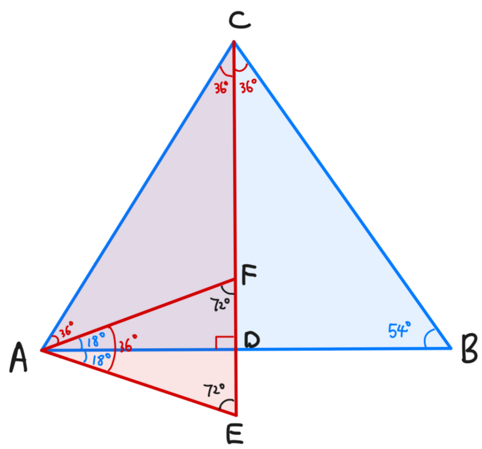


Vi utelämnar enheten cm. Beteckna $x := |AC|$ och $y := |AE|$. Eftersom vinkel $\angle AEC$ är större än vinkel $\angle ACE$ har vi

$$x > y. \tag{2.1}$$

Låt punkten F vara på linjen CD så att $|DE| = |DF|$. Då är triangeln $\triangle EAF$ också en likbent triangel med $y = |AE| = |AF|$. Genom att använda Lemma 2.1 igen får vi $\angle AFE = \angle AEF = 72°$.

Eftersom $\angle FAC + \angle FCA = \angle AFE$, har vi $\angle FAC = \angle AEF - \angle FCA = 72° - 36° = 36°$. Därför är triangeln $\triangle AFC$ också en likbent triangel med sidolängden $|CF| = |AF| = y$.



Steg 3. Liknande likbenta trianglar. Vi finner att likbent triangel $\triangle ABC$ liknar likbent triangel $\triangle EAF$. Därför har vi liknande sidoförhållanden:

$$\frac{|CA|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|EF|}.$$

Vi utelämnar enheten cm och skriver $|EF| = |CE| - |CF| = x - y$. Vi får

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x - y}. \tag{2.2}$$

Steg 4. Pythagoras sats.

För rätvinklig $\triangle ADC$ använder vi Pythagoras sats. Vi får

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2.$$

Vi räknar ut $|DC| = |CF| + \frac{1}{2}|EF| = y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}$. Då får vi formeln

$$x^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \tag{2.3}$$

Steg 5. Beräkningen.

Vi beräknar

$$\text{Arean av } \triangle ABC = |AD| \cdot |CD| = \frac{9}{4} \cdot \frac{x+y}{2}, \tag{2.4}$$

med hjälp av ekvationerna (2.2) och (2.3).

Genom ekvation (2.2) får vi

$$x^2 = xy + y^2.$$

Beteckna $x = \phi y$ för ett tal ϕ. Då får vi ekvationen

$$\phi^2 y^2 = \phi y^2 + y^2.$$

Eftersom $y \neq 0$ får vi ekvationen

$$\phi^2 = \phi + 1. \tag{2.5}$$

Kom ihåg förhållandet (2.1). Så $\phi > 1$. Vi löser denna andragradsekvation och får

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2.6}$$

Ekvationen (2.3) ger

$$16x^2 = 81 + 4(x+y)^2.$$

Sätt in relationen $x = \phi y$ i den. Vi får

$$16\phi^2 y^2 = 81 + 4(1+\phi)^2 y^2 = 81 + 4\phi^4 y^2, \tag{2.7}$$

där vi i den sista ekvationen använder relationen (2.5).

För att lösa y har vi

$$\left(16\phi^2 - 4\phi^4\right) y^2 = 81,$$

dvs

$$4\phi^2(4-\phi^2)y^2 = 81.$$

Genom att använda ekvationen (2.5) får vi $4 - \phi^2 = 4 - (1+\phi) = 3 - \phi$. Så vi får

$$y = \frac{9}{2 \cdot \phi\sqrt{3-\phi}}.$$

Därför är

$$\begin{aligned} \text{Arean av } \triangle ABC = |AD| \cdot |CD| &= \frac{9}{4} \cdot \frac{x+y}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{(1+\phi)y}{2} \\ &= \frac{81}{16} \frac{1+\phi}{\phi\sqrt{3-\phi}} = \frac{81}{16} \frac{\phi^2}{\phi\sqrt{4-\phi^2}} = \frac{81}{16} \frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}}. \end{aligned}$$

där ϕ ges av (2.6).

Lösning. Arean av $\triangle ABC$ är $\frac{81}{16} \frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}}$ cm^2 med $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Kommentar 2.3. Vi kan också göra följande beräkningar. Men detta är inte nödvändigt eller viktigt. Beräkningen använder formlerna $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, och $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$$\begin{aligned}
\text{Arean av } \triangle ABC &= \frac{81}{16}\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}} = \frac{81}{16}\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{3-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{81}{16}\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{12-2(1+\sqrt{5})}}\\
&= \frac{81}{16}\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}} = \frac{81}{16}\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{(10^2-(2\sqrt{5})^2)}}\\
&= \frac{81}{16}\frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} = \frac{81}{16}\frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}}\\
&= \frac{81}{16}\sqrt{\frac{80+32\sqrt{5}}{80}} = \frac{81}{16}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\\
&= \frac{81}{16}\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})5}}{5} = \frac{81}{16}\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}.
\end{aligned}$$

Kommentar 2.4. Om vi kan använda trigonometriska funktioner är

$$\tan(\angle DAC) = \frac{|DC|}{|AD|}, \quad \text{dvs} \quad |DC| = |AD|\tan(54°). \tag{2.8}$$

Sedan har vi

$$\text{Arean av } \triangle ABC = |AD||DC| = |AD|^2\tan(54°) = \frac{81}{16}\tan(54°).$$

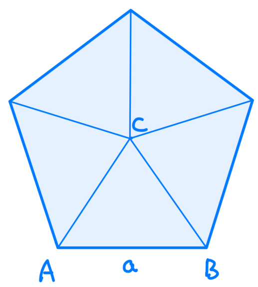
Ovanstående beräkning beräknar faktiskt

$$\tan(54°) = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}. \tag{2.9}$$

Att beräkna $\tan(54°)$ i en exakt form (2.9) är en standardövning i trigonometriska formler.

Kommentar 2.5. Ekvationen (2.5) kallas för det gyllene snittet ekvation, och lösningen $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kallas det gyllene snittet. Den har många applikationer, till exempel för att beräkna Fibonaccis talföljd.

Kommentar 2.6. Vinkel $\angle ACB$ är 72 grader. Vi kan få en regelbunden femhörning (regel pentagon) med sidolängd a. I ovanstående $a = 4,5$ (cm).



Vi får att arean av en regelbunden femhörning med sidolängd a är

$$\text{Area } \pentagon = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Det är möjligt att använda egenskaperna hos regelbunden femhörning för att hitta ett nytt bevis på arean $\triangle ABC$.