Trigonometri

Wanmin Liu

20251120

Ma3c

Rum 3083.

Planering.

Pass 1.

- Förkunskapen i Ma1c.
    - Rätvinklig triangel
    - Pythagoras sats
    - sinus och cosinus funktioner i en rätvinklig triangel
    - Beräkna vinklar med tangens
- Uppgifter

Pass 2.

- Enhetscirkeln
- Allmänna positiva och negativa vinklar
- Definitioner av sinus-, cosinus- och tangentfunktioner
- Aktiviter i par: Beräkning av funktionsvärden för vissa speciella vinklar.

Pass 1. 8.30 - 9.30.

Förkunskapen i Ma1c.

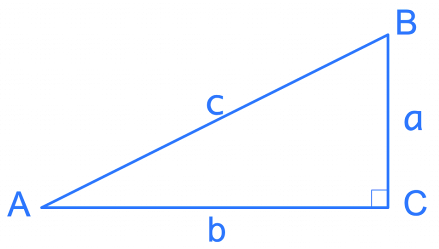
I en rätvinklig triangel ABC, där C är den räta vinkeln ($C = 90^\circ$), har vi relationer

$$A + B = 90^\circ,$$

eftersom $A + B + C = 180^\circ$, och Pythagoras sats

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Vi definerar tre funktionerna:



$$\sin A = \frac{a}{c},$$
$$\cos A = \frac{b}{c},$$
$$\tan A = \frac{a}{b}.$$

Kanten a kallas **motstående katet** av vinkel A. Kanten b kallas **närliggande katet** av vinkel A. Kanten c kallas **hypotenusa**.

Om vi tittar från vinkel B har vi också

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A,$$
$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A,$$
$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan A}.$$

Exempel 1. Trigonometriska ettan. Använd **Pythagoras sats** för att visa att

$$(\sin(A))^2 + (\cos(A))^2 = 1^2.$$

Detta samband kan vi förenklat skriva som

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1,$$

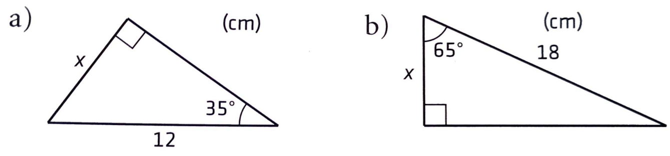
där $\sin^2(A)$ betyder $(\sin(A))^2 = \sin(A) \cdot \sin(A)$.

I en allmän triangel ABC har vi alltid $0 < A < 180^\circ$.

Motivationsfrågor.

1. Hur kan vi generera begreppet vinkel, till exempel 720° eller -45°?
2. Hur kan vi generalisera de tre funktionerna för mer generella vinklar?
3. Kan vi uttrycka vinklar på andra sätt? Vinklar på grader och *radianer* (*Matematik 4*).

Exempel 2. Beräkna längden av sidorna markerade med x, med hjälp av de trigonometriska sambanden.



Lösning (a) Med definition av sinus funktion har vi

$$\sin(35^\circ) = \frac{x}{12}.$$

Så $x = 12 \cdot \sin(35^\circ) \approx 6,9.$

Svar: Den sökta sidan är ungefär 6,9 cm.

(b) Med definition av cosinus funktion har vi

$$\cos(65^\circ) = \frac{x}{18}.$$

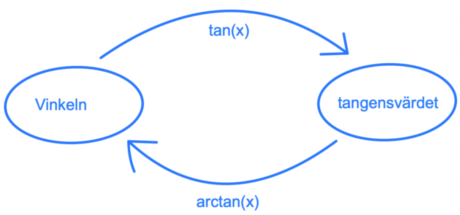
Så $x = 18 \cdot \cos(65^\circ) \approx 7,6.$

Svar: Den sökta sidan är ungefär 7,6 cm.

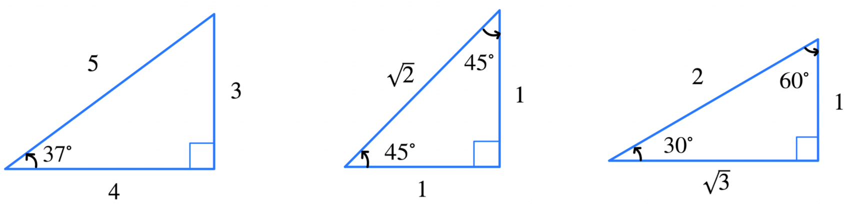
Tips: På miniräknare väljer vi **Degree** symbolen (inte RAD) till vinkeln.

Beräkna vinklar med tangens

Använder vi funktionsbegreppet så är $y = \arctan(x)$ en **invers funktion** till $y = \tan(x)$ och tvärtom.

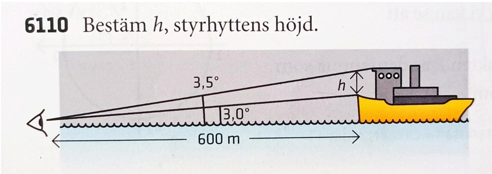


Exempel 3. 3-4-5-triangeln, likbent rätvinklig triangel (45°) och 30°-rätvinklig triangel.

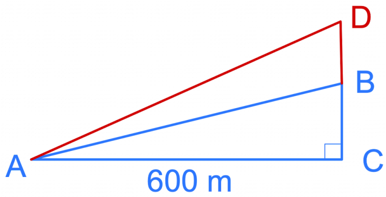


$$\arctan(\frac{3}{4}) \approx 36.8698976^\circ \approx 37^\circ,$$
$$\tan(37^\circ) \approx 0.753554 \approx \frac{3}{4}.$$

Exempel 4. Uppgift 6110.



Ger en ledtråd med bilden.



Lösning Vi ritar bilden med punkterna A, B, C, D. Vinkeln CAB är 3°. Vinkeln CAD är $3,5^\circ$. Höjden h är längden på BD.

Vi har

$$\tan(CAB) = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{600},$$
$$\tan(CAD) = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{600}.$$

Så är $BC = 600\tan(3^\circ)$, och $DC = 600\tan(3,5^\circ)$.

$$h = DC - BC = 600 \cdot \tan(3,5^\circ) - 600 \cdot \tan(3^\circ) \approx 36,7 - 31,4 = 5,3.$$

Svar: Höjden är 5,3 meter.

Uppgifter i boken. Tips på miniräknare: Välj vinklar **Degree**, *inte Radianer*.

s 194-195. Nivå 1. 6101 (b), 6102 (b), 6103, 6104. Nivå 2. 6109, 6110, 6116.

Pass 2. 9.50 - 10.55

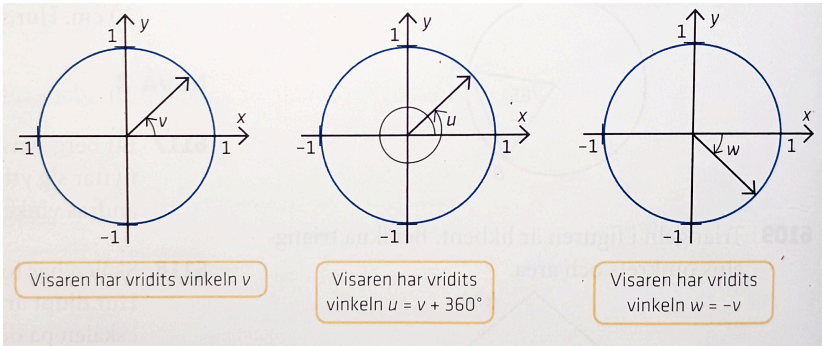
Enhetscirkeln

En enhetscirkel är en cirkel med radie 1 och centrum i origo.

En vinkel (med positivt/plus tecken) innebär en vridning **moturs** runt origo från den positiva x-axeln.

En vinkel med negativt/minus tecken innebär en vridning **medurs** runt origo från den positiva x-axeln.

Till exempel representerar -90° en rotation på 90° **medurs** runt origo från den positiva x-axeln.



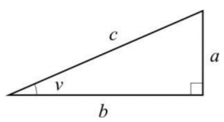
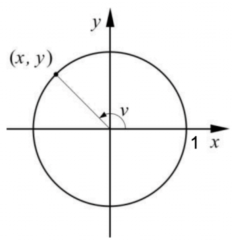
$$\text{Positiv vinkel} \iff \text{moturs} \qquad \text{Negativ vinkel} \iff \text{medurs}$$

Exempel 1. Varje morgon när jag lämnar mitt barn i skolan säger jag: "Jag ska krama dig och snurra dig tre varv." Men egentligen snurrar jag honom fyra varv moturs (åt vänster) och ett varv medurs (åt höger). Hur många grader snurrade jag mitt barn totalt?

Svar: Ett varv är 360 grader. Det är totalt

$$360^\circ \cdot (4-1) = 360^\circ \cdot 3 = 1080^\circ.$$

Definition av sinus, cosinus och tangens

Definitioner	Rätvinklig triangel	Enhetscirkel
		
	$\sin v = \frac{a}{c}$	$\sin v = y$
	$\cos v = \frac{b}{c}$	$\cos v = x$
	$\tan v = \frac{a}{b}$	$\tan v = \frac{y}{x}$

Vinkeln v bestämmer en punkt $P(x, y)$ på enhetscirkeln. Vi har Pythagoras sats

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Definiera att

$$\sin v = y\text{-koordinaten för punkt } P,$$

$$\cos v = x\text{-koordinaten för punkt } P,$$

och

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \quad \text{om } \cos v \neq 0.$$

Dvs punkten P har koordinater

$$(\cos v, \ \sin v),$$

och det finns **trigonometriska ettan** för vilken vinkel v som helst

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1,$$

där $\sin^2 v$ betyder $(\sin v)^2 = \sin v \cdot \sin v$ och $\cos^2 v$ betyder $(\cos v)^2 = \cos v \cdot \cos v$.

Exempel 2. (Också i Enhetscirkeln blad.)

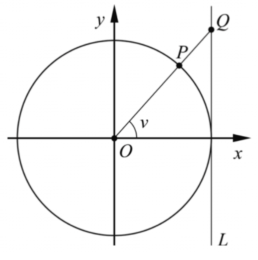
$$\cos 0^\circ = 1, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 90^\circ = 0.$$

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 90^\circ = 1.$$

Vad är $\tan 0^\circ$? Vad är $\tan 60^\circ$? Vad är $\tan 90^\circ$?

Exempel 3. Punkten $P(\cos v, \sin v)$ ligger på enhetscirkeln.

- F1. Skriv ner linjeekvationen för OP.
- F2. Linjen OP skär linjen $x = 1$ i punkten Q. Beräkna koordinaterna för punkten Q.



Lösning. Lutningen för OP ges av formeln

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sin v - 0}{\cos v - 0} = \tan v.$$

Lutningen för linjen OP är exakt $\tan v$.

Linjen OP har k-värdet $\tan v$ och m-värdet 0. Så linjens ekvation ges av

$$y = (\tan v) \cdot x.$$

Punkten T har x-koordinat 1. Punkten Q ligger också på linjen OP, så dess koordinater uppfyller linjens ekvation. Vi sätter in $x = 1$ i linjens ekvation för OP och får $y = (\tan v) \cdot 1 = \tan v$.

Svar: Linjen OP har ekvation

$$y = (\tan v) \cdot x.$$

Punkten Q har koordinaterna $(0, \tan v)$.

Det är två **geometriska förklaringar** till tangenten:

- 1. lutningen på linjen OP.
- 2. y-koordinaten för skärningspunkten Q, dvs. skärningspunkten mellan OP och cirkelns *tangent* linje vid $x = 1$.

Egenskaper hos trigonometriska funktioner

Periodicitet.

$$\sin(v) = \sin(v + 360^\circ),$$
$$\cos(v) = \cos(v + 360^\circ),$$
$$\tan(v) = \tan(v + 180^\circ).$$

Nästa gång går vi igenom fler egenskaper hos trigonometriska funktioner

---

Exempel 4. (6122)

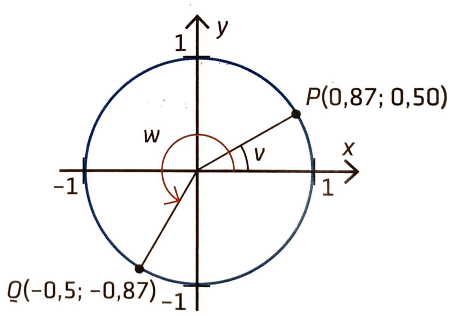
6122 Punkterna P och Q ligger på enhetscirkeln. Bestäm

a) $\sin v$

b) $\cos v$

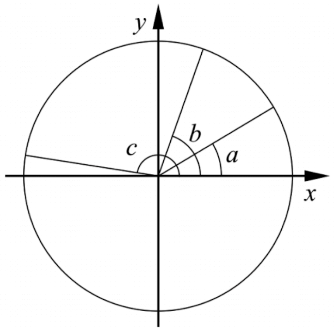
c) $\sin w$

d) $\cos w$



Exempel 5. (Ma3c-NP-ht-13, (0/1/0))

7. I enhetscirkeln nedan är tre vinklar a, b och c markerade.



Ordna $\sin a$, $\cos b$ och $\sin c$ i storleksordning. Börja med det minsta värdet.

_______, _______, _______ (0/1/0)

Exempel 6. Innan aktiviteten tittar vi tillsammans på enhetscirkeln i GeoGebra.

Enhetscirkeln. Exakta värden för grader och radianer

Aktivitet

Fyll i följande tabell parvis med hjälp av enhetscirkeln.

- Tips 1. En rak linje representerar 180° .

I enhetscirkeln låter vi punkten P motsvara vinkeln v och punkten Q motsvara vinkeln w.

- Tips 2. Om $v + w = 180^\circ$, så har punkt P och punkt Q samma y-koordinat, dvs

$$\sin(v) = \sin(w) = \sin(180^\circ - v).$$

- Tips 3. Om $v + w = 0^\circ$, så har punkterna P och Q samma x-koordinat men motsatta y-koordinater, dvs

$$\cos(-v) = \cos(w) = \cos(v),$$

$$\sin(-v) = \sin(w) = -\sin(v).$$

Sammanfattning.

- Punkten P i enhetscirkeln har koordinaten $(x = \cos v, y = \sin v)$, där vinkeln v är vinkeln mellan x-axeln och linjen OP.

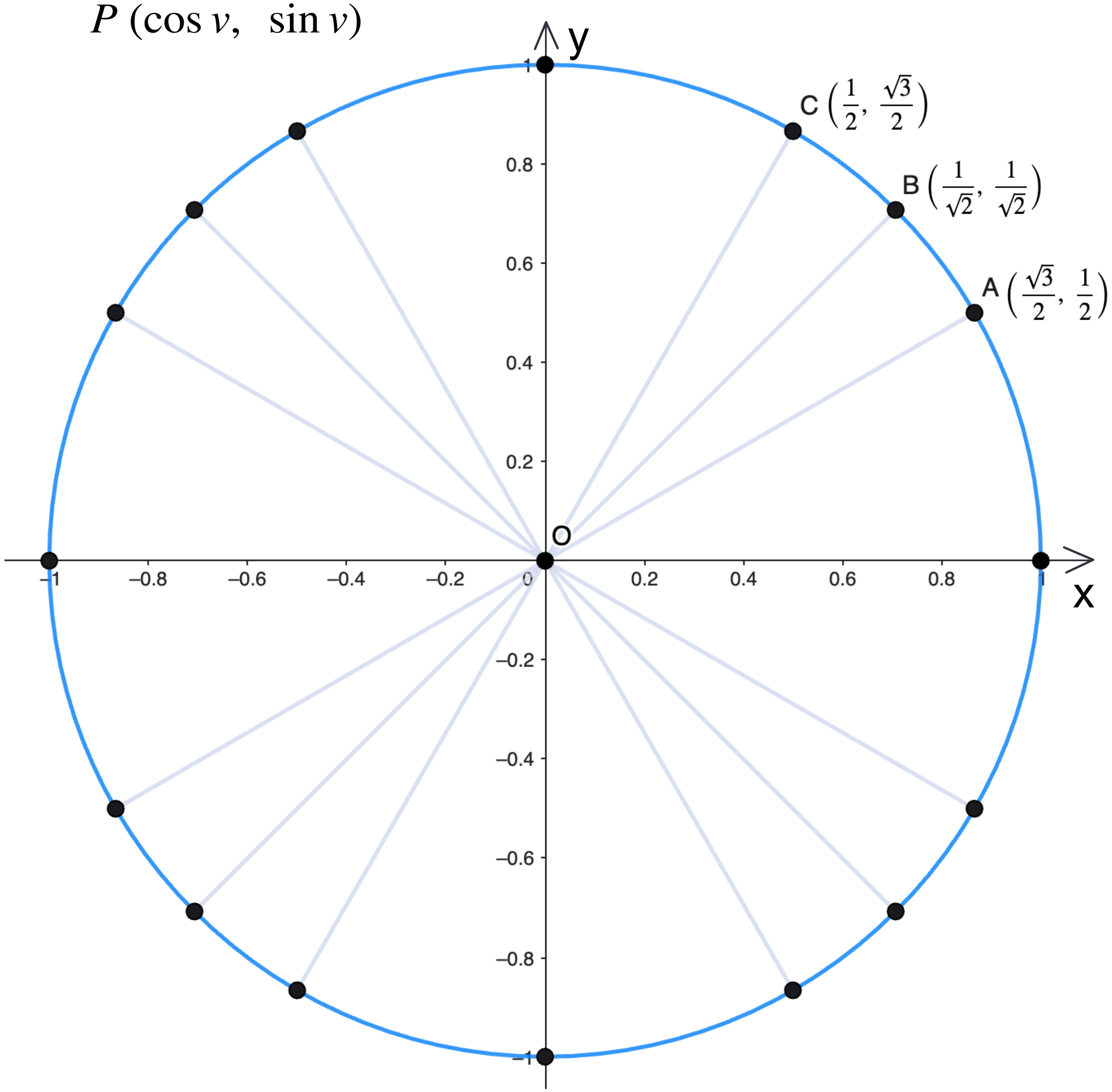
- $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ är **lutningen** för OP.
- **Trigonometriska ettan** $(\sin(A))^2 + (\cos(A))^2 = 1$. (Pythagoras sats)
- Positiv vinkel $\Longleftrightarrow$ moturs, Negativ vinkel $\Longleftrightarrow$ medurs.

Namn 1: ____________

Namn 2: ____________

Fyll i följande tabell parvis med hjälp av enhetscirkeln.

$P\,(\cos v,\ \sin v)$



v	$\sin v$	$\cos v$	$\tan v$
0°	0	1	0
30°		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
60°		$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	–
120°			
135°			
150°			
180°			
210°			
225°			
270°			
300°			
-45°			
-60°			

$P\,(\cos v,\ \sin v)$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \quad \text{om } \cos v \neq 0.$$