

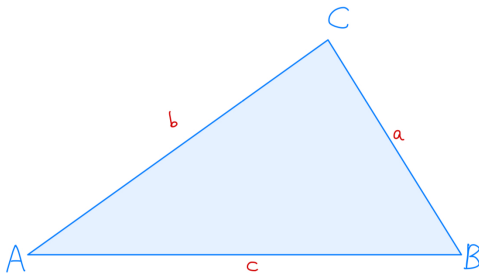
Pythagoras sats, sambandet mellan geometri och algebra

Wanmin Liu

23 maj, 2025

Vad är Pythagoras sats?

Låt längderna på motsatta sidor av triangeln $\triangle ABC$ i planet vara a, b, c .



Vinkel C är **rät** vinkel $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$
geometri \Leftrightarrow **algebra**

Pythagorean theorem water demo Youtube.

Varför är Pythagoras sats?

Förkunskaper i algebra

Den första kvadreringsregeln.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Den andra kvadreringsregeln.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Förkunskaper i geometri

Kvadratens area.

En kvadrat är en geometrisk figur där alla fyra sidor är lika långa (till exempel längden c) och alla vinklar är 90° , dvs de är räta.

$$Area = bas \cdot höjd = c \cdot c = c^2.$$

Triangelns area.

$$Area = bas \cdot höjd/2$$

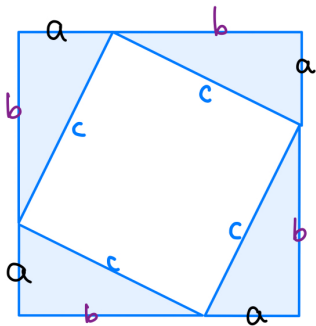
Spel med fyra identiska rätvinkliga trianglar.

Spelregler: (5 min)

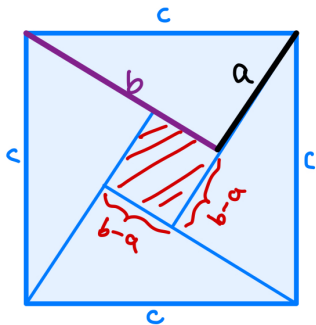
- 1 Sex elever i en grupp.
- 2 Skriv titeln **Pythagoras sats** på ett A3-papper.
- 3 Placera de fyra trianglarna så att de bildar en **kvadrat med sidlängden c** .
- 4 Använd lim för att fästa de arrangerade trianglarna på A3-pappret.
- 5 Diskutera med varandra och se om ni kan **upptäcka** Pythagoras sats.

Två sätt att placera

Varför är det kvadrat med sidlängden c ?



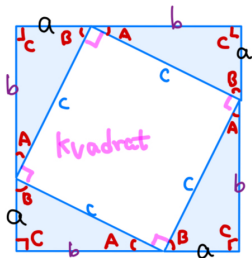
(i)



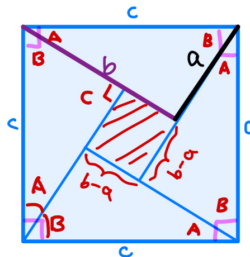
(ii) (Antag $b > a$)

Figure 2: Pythagoras sats

Två sätt att placera



(i)



(ii) (Antag $b > a$)

Vinkel C är rät $\Rightarrow A + B = 90^\circ$

\Rightarrow kvadrat med sidlängden c

Bevis av Pythagoras sats från geometri till algebra.

Metod 1. Två sätt att beräkna arean i figur (i)

- 1 Areal av en kvadrat med längden $a + b$.

$$Area = (a + b)^2.$$

- 2 Areal av de fyra triangelarna plus arean av den mittersta kvadraten med sidlängden c .

$$Area = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2.$$

Då får vi

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2.$$

Genom att använda den första kvadreringsregeln får vi

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Bevis av Pythagoras sats från geometri till algebra.

Metod 2. Två sätt att beräkna arean i figur (ii).

- 1 Areal av en kvadrat med längden c .

$$Area = c^2.$$

- 2 Areal av de fyra triangelarna plus arean av den mittersta kvadraten med sidlängden $(b - a)$.

$$Area = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b - a)^2.$$

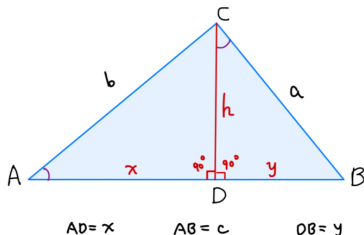
Då får vi

$$c^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b - a)^2.$$

Genom att använda den andra kvadreringsregeln får vi

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Bevis av Pythagoras sats från algebra till geometri.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{y}{h} \Rightarrow \angle DAC = \angle DCB$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \text{vinkel } C \text{ är rät}$$

$$\textcircled{1}: a^2 = h^2 + y^2, \quad b^2 = x^2 + h^2, \quad c^2 = (x+y)^2$$
$$\underbrace{h^2 + y^2}_{a^2} + \underbrace{x^2 + h^2}_{b^2} = \underbrace{(x+y)^2}_{c^2} = x^2 + 2xy + y^2.$$

$$\textcircled{2} \quad \angle DCB + \angle DBC = 90^\circ \Rightarrow A + B = 90^\circ \Rightarrow C = 90^\circ.$$