

# Trigonometri III, triangelsatserna

---

Wanmin Liu

Ma3c

- Areasatsen
- Sinussatsen
- Cosinussatsen

*Beviset i boken är inte fullständigt. Ni är välkomna att läsa igenom det själva. Jag kommer inte att gå igenom alla bevis under lektionstid.*

**Natation.** Vi betecknar alltid triangeln  $ABC$  med vinklarna  $A$ ,  $B$  och  $C$  och den motstående sidorna med längderna  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Så vi har relationen

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Vi har också  $0 < A < 180^\circ$ ,  $0 < B < 180^\circ$ ,  $0 < C < 180^\circ$  och  $a, b, c$  är positiva.

## Areasatsen

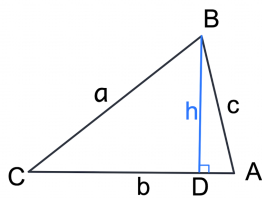
Vi kan beräkna triangelns area med formeln

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2}$$

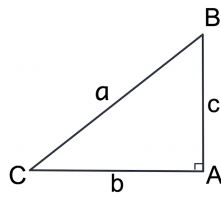
Med notationen ovan har vi arean av triangeln  $ABC$  med följande formler:

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

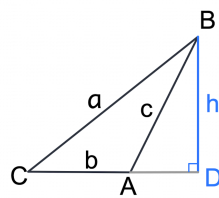
## Bevis



A är spetsig.



A är rät.



A är trubbig.

- Fall 1.  $A$  är en spetsig vinkel. Höjden  $h = c \sin A$  och basen  $= b$ .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 2.  $A$  är en rät vinkel så  $\sin A = 1$ . Höjden  $= c$  och basen  $= b$ .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 3.  $A$  är en trubbig vinkel. Då blir vinkel  $BAD = 180^\circ - A$ . Vinkeln  $BAD$  är spetsig. Vi vet att  $\sin(180^\circ - A) = \sin A$ .

Höjden  $= c \sin(BAD) = c \sin(180^\circ - A) = c \sin(A)$  och basen  $= b$ .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

Därför har vi alltid

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

På samma sätt kan vi bevisa de andra två ekvationerna.

Detta är slutet på beviset.

## Sinussatsen

Med notationen ovan har vi följande formler i triangeln  $ABC$ :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

## Bevis

**Metod 1.** (Använd areasatsen.) Vi använder areasatsen direkt.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Observera att ingen av de tre sidlängderna kan vara 0. Därför är  $abc$  inte 0. Vi dividerar sedan  $abc$  för ovanstående ekvation och multiplicerar med 2. Vi får

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin A}{abc} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{abc} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{abc},$$

dvs

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

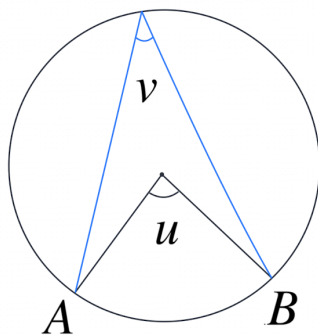
Observera att  $\sin(A)$ ,  $\sin(B)$  och  $\sin(C)$  inte alla är noll, så vi kan skriva om proportionen ovan. Vi får

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Detta är slutet på beviset.

Innan vi ger det andra beviset måste vi komma ihåg

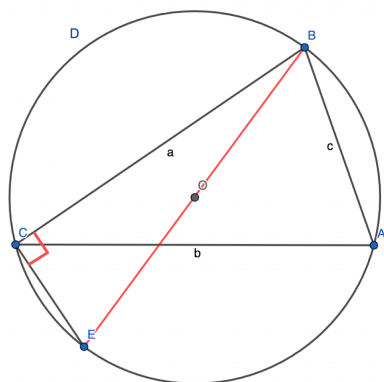
**Randvinkelsatsen:** Medelpunktsvinkeln  $u$  till cirkelbågen  $AB$  är dubbelt så stor som randvinkeln  $v$  som står på samma cirkelbåge  $AB$ , alltså att  $u = 2v$ .



**Randvinkelsatsen**

$$u = 2v$$

**Metod 2.** (Använd randvinkelsatsen) För triangeln  $ABC$  ritas vi dess omskrivna cirkel, vilket betyder att punkterna  $A$ ,  $B$  och  $C$  ligger på en cirkel med radien  $R$ . Linjen som går genom punkt  $B$  och cirkelns centrum  $O$  skär cirkeln i en punkt, betecknad som punkt  $E$ .



Vi använder en följsats från **randvinkelsatsen**: **En randvinkel på en halvcirkelbåge är alltid  $90^\circ$ .**

$BE$  är diametern, därför är vinkeln  $ECB$  en rät vinkel. I den rätvinkliga triangeln  $ECB$  har vi

$$\sin(CEB) = \frac{CB}{BE} = \frac{a}{2R}. \quad (1)$$

Vi använder andra följsats från **randvinkelsatsen**: **Alla randvinklar på samma cirkelbåge är lika stora.**

För cirkelbåge  $CDB$  är randvinklar  $CAB = CEB$ . Då blir

$$\sin(A) = \sin(CAB) = \sin(CEB) \quad (2).$$

Med hjälp av formlerna (1) och (2) får vi  $\frac{a}{\sin(A)} = 2R$ . På liknande sätt får vi  $\frac{b}{\sin(B)} = 2R$  och  $\frac{c}{\sin(C)} = 2R$ . Således har vi bevisat

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R,$$

och

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

Detta är slutet på beviset.

## Cosinussatsen

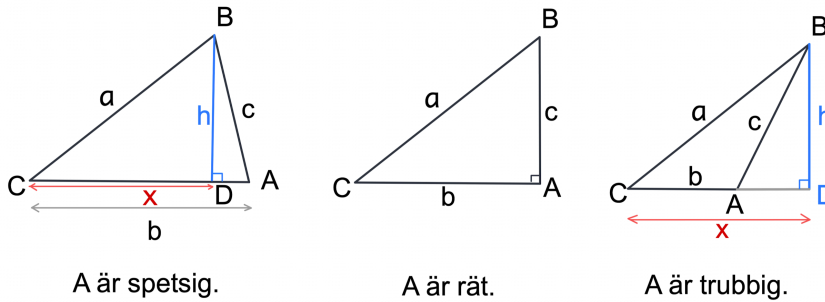
Med notationen ovan har vi följande formler i triangeln  $ABC$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

## Bevis



Vi fokuserar på vinkeln  $C$  och bevisar att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

- Fall 1.  $C$  är en spetsig vinkel.
  - Delfall 1.1.  $A$  är en spetsig vinkel. Pythagoras sats i den vänstra triangeln  $CDB$  ger  $h^2 + x^2 = a^2$ . Pythagoras sats i den högra triangeln  $BDA$  ger  $h^2 + (b - x)^2 = c^2$ . Dessa två uttryck för  $h$  sätts lika. Vi vet att  $\cos C = \frac{x}{a}$ . Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b - x)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

- Delfall 1.2.  $A$  är en rät vinkel. Vi vet  $a \cos C = b$  och  $c^2 = a^2 - b^2$ .

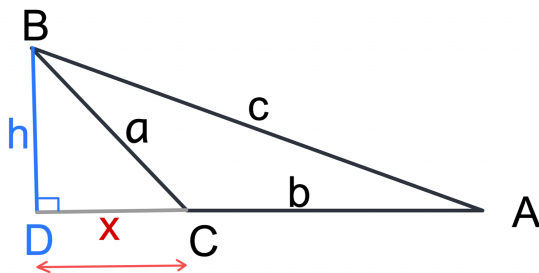
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos(C) &= a^2 + b^2 - 2b(a \cos C) \\ &= a^2 + b^2 - 2b \cdot b = a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

- Delfall 1.3.  $A$  är en trubbig vinkel. Pythagoras sats i den triangeln  $CDB$  ger  $h^2 + x^2 = a^2$ . Pythagoras sats i den triangeln  $BDA$  ger  $h^2 + (x - b)^2 = c^2$ . Dessa två uttryck för  $h$  sätts lika. Vi vet att  $\cos C = \frac{x}{a}$ . Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (x - b)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2xb + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

- Fall 2.  $C$  är en rät vinkel. Vi har  $\cos C = 0$ . Pythagoras sats ger  $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .

- Fall 3.  $C$  är en trubbig vinkel.



$C$  är trubbig.

Vi vet att  $\cos C < 0$  och  $\cos DCB = \cos(180^\circ - C) = -\cos C > 0$ . Pythagoras sats i den triangeln  $CDB$  ger  $h^2 + x^2 = a^2$ . Pythagoras sats i den triangeln  $BDA$  ger  $h^2 + (x + b)^2 = c^2$ . Dessa två uttryck för  $h$  sätts lika. Vi vet att  $-\cos C = \cos DCB = \frac{x}{a}$ . Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + x)^2 \\ &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{x}{a} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

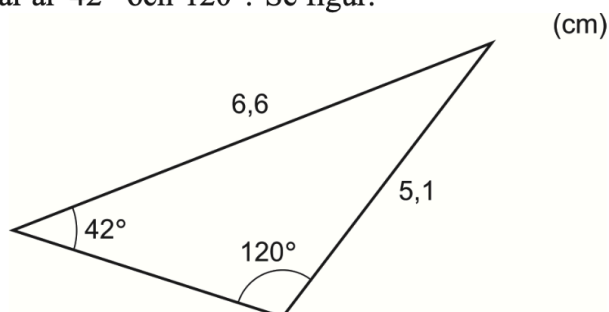
Så har vi bevisat

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

De andra två formlerna följer på samma sätt. Detta är slutet på beviset.

#### Exempel 1. (Ma3c-vt22-20, (2/0/0))

20. I en triangel är en sida 6,6 cm och en annan sida 5,1 cm. Två av triangelns vinklar är  $42^\circ$  och  $120^\circ$ . Se figur.



Bestäm triangelns area genom att använda någon eller några av triangelnsatserna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen).

(2/0/0)

**Lösning.** Den tredje vinkeln är  $180^\circ - 120^\circ - 42^\circ = 18^\circ$ . Vi använder areasatsen

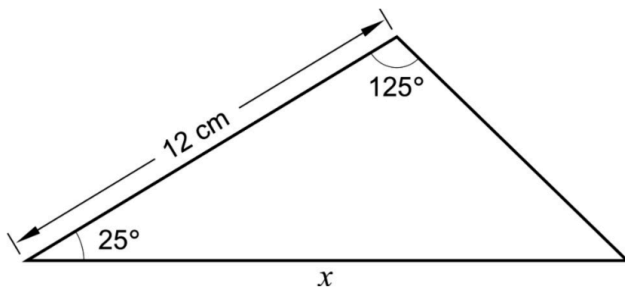
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot 6,6 \cdot 5,1 \cdot \sin(18^\circ) \approx 5,2.$$

**Svar:** Arealen är cirka  $5,2 \text{ cm}^2$ .

**Exempel 2.** (Ma3c-vt16-18, (2/0/0))

18. Beräkna längden på sidan  $x$  i triangeln.

(2/0/0)



**Lösning.** Den tredje vinkeln är  $180^\circ - 125^\circ - 25^\circ = 30^\circ$ . Vi använder sinussatsen

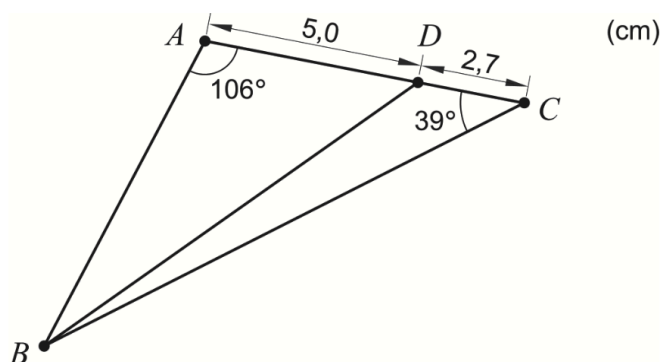
$$\frac{x}{\sin(125^\circ)} = \frac{12}{\sin(30^\circ)}.$$

$$x = \frac{12}{\sin(30^\circ)} \cdot \sin(125^\circ) \approx 19,66.$$

**Svar:** Längden på  $x$  är cirka  $19,66 \text{ cm}$ .

**Exempel 3.** (Ma3c-vt22-24, (0/3/0))

24. Figuren visar triangeln  $ABC$  där en punkt  $D$  är markerad på sidan  $AC$ . Några mått och vinklar finns givna i figuren.



Bestäm längden av sträckan  $BD$  genom att använda någon eller några av triangelsetsarna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen).

(0/3/0)

**Lösning.** Vinkeln  $ABC$  är  $180^\circ - 106^\circ - 39^\circ = 35^\circ$ .

Vi använder sinussatsen till triangeln  $ABC$  och får

$$\frac{AB}{\sin(ACB)} = \frac{AC}{\sin(ABC)},$$

dvs

$$\frac{AB}{\sin(39^\circ)} = \frac{5,0 + 2,7}{\sin(35^\circ)}.$$

Vi får  $AB = \frac{5,0+2,7}{\sin(35^\circ)} \cdot \sin(39^\circ) \approx 8,499$ .

Vi använder cosinussatsen till triangeln  $ABD$  och får

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos(106^\circ) \\ &= (8,499)^2 + 5^2 - 2 \cdot 8,499 \cdot 5 \cos(106^\circ) \\ &\approx 119,564. \end{aligned}$$

och

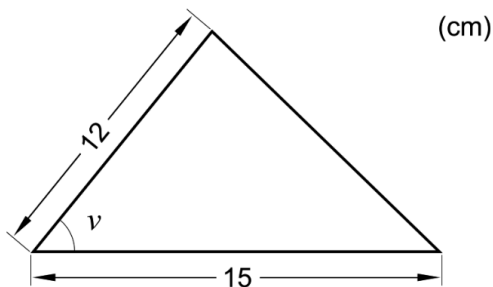
$$BD \approx \sqrt{119,564} \approx 10.93.$$

**Svar:** Längden på  $BD$  är cirka 11 cm.

---

**Exempel 4.** (Ma3c-vt17-21, (2/1/0))

- 21.** Figuren visar en triangel där två av sidorna är 12 cm och 15 cm. Den mellanliggande vinkeln  $v$  är spetsig. Triangeln har arean  $75 \text{ cm}^2$ .



Bestäm den tredje sidans längd.

(2/1/0)

**Lösning.**

Vi använder areasatsen till triangeln och får

$$75 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \sin(v),$$

dvs



$$\sin(v) = \frac{5}{6}.$$

Vi använder trigonometriska ettan och får

$$\sin^2(v) + \cos^2(v) = 1,$$

dvs

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cos^2(v) = 1.$$

Då får vi

$$\cos^2(v) = \frac{11}{36}.$$

Eftersom vinkeln  $v$  är spetsig, har vi  $\cos(v) > 0$ . Så vi får  $\cos(v) = \frac{\sqrt{11}}{6}$ .

Beteckna längden motsatt vinkeln  $v$  med  $x$ . Så  $x > 0$ . Vi använder cosinussatsen till triangeln och får

$$\begin{aligned} x^2 &= 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos(v) \\ &= 144 + 225 - 360 \cdot \cos(v) \\ &= 369 - 360 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \\ &\approx 170, \end{aligned}$$

och  $x \approx \sqrt{170} \approx 13$ .

**Svar:** Längden på  $x$  är cirka 13 cm.

Kommentarer. Vi använder GeoGebra och får  $v = \sin^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = 56,44^\circ$ . Då blir

$$x^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos(56,44^\circ) \approx 170.$$

## Sammanfattning

**Notation.** Vi betecknar alltid triangeln  $ABC$  med vinklarna  $A$ ,  $B$  och  $C$  och den motstående sidorna med längderna  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Vi har  $0 < A < 180^\circ$ ,  $0 < B < 180^\circ$ ,  $0 < C < 180^\circ$  och  $a, b, c$  är positiva.

**För en rätvinklig triangel  $ABC$ , där  $C$  är den räta vinkeln, gäller följande tre samband:**

1. Pythagoras sats:  $c^2 = a^2 + b^2$ .
2.  $A + B = 90^\circ$ .
3.  $\sin(A) = \cos(B) = \frac{a}{c}$ ,  $\cos(A) = \sin(B) = \frac{b}{c}$

**För en allmän triangel  $ABC$  gäller följande fyra samband:**

1.  $A + B + C = 180^\circ$ .
2. Areasatsen.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

3. Sinussatsen.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

4. Cosinussatsen.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$