Trigonometri II

Wanmin Liu

20251124, 1127.

Ma3c

Rum 2027.

Planering.

Pass 1.

- Repetition.
  - Enhetscirkeln
  - Definitioner av sinus-, cosinus- och tangentfunktioner
  - Trigonometriska ettan.

- Cirkelns ekvation

Pass 2.

- Areasatsen
- Sinussatsen
- Cosinussatsen

Pass 1. 14.35 - 17.00.

Repetition.

En enhetscirkel är en cirkel med radie 1 och centrum i origo O.

Punkt P på cirkeln har koordinaten $(x = \cos v,\ y = \sin v)$, där v är vinkeln från den positiva x-axeln till linjen OP.

$$\text{Positiv vinkel} \iff \text{moturs} \qquad \text{Negativ vinkel} \iff \text{medurs}$$

Exempel. Trigonometriska ettan.

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1,$$

där $\sin^2(A)$ betyder $(\sin(A))^2 = \sin(A) \cdot \sin(A)$.

Cirkelns ekvation

Enhetscirkel har ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1,$$

det vill säga, för varje punkt $P(x, y)$ på cirkeln uppfyller dess koordinater ekvationen $x^2 + y^2 = 1$.

Fråga: Vad är ekvationen för en cirkel med radie r och medelpunkten P_0 med koordinater (x_0, y_0)?

Om vi betecknar punkten P på cirkeln med koordinaterna (x, y), då är avståndet $PP_0 = r$.

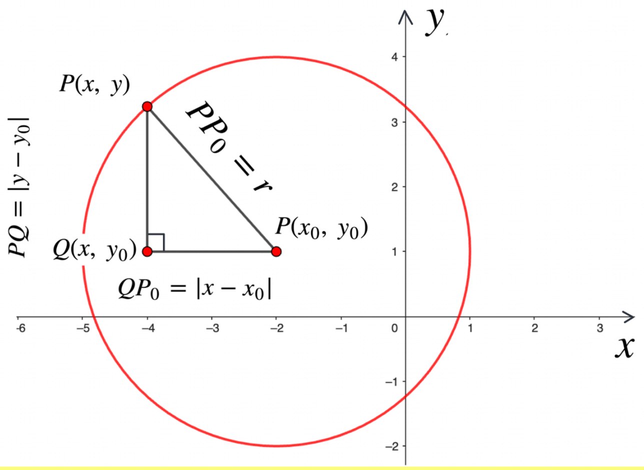
Beteckna Q med koordinaterna $(x,\ y_0)$. Då är PQP_0 en rätvinklig triangel. Vi kan använda Pythagras sats.

$$QP_0^2 + PQ^2 = PP_0^2,$$

där $QP_0 = |x - x_0|$, $PQ = |y - y_0|$ och $PP_0 = r$.

En cirkel med radien r och medelpunkten i (x_0, y_0) beskrivs av ekvationen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$



Pythagoras sats		**Cirkelns ekvation**
$QP_0^2 + PQ^2 = PP_0^2$	$\Longleftrightarrow$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$

Exempel. (NpMa3c vt 2015, n.11, (2/0/0))
En cirkel har ekvationen $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 64$. Undersök om punkten $(10,\ 6)$ ligger på cirkeln.

Lösning. Vi sätter in $(10,\ 6)$ i ekvationen.

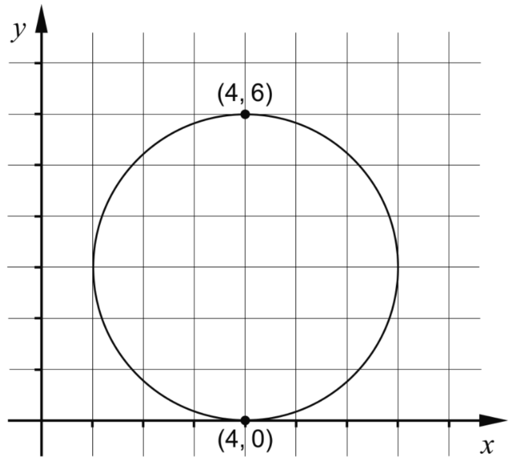
$$\text{VL} = (10-3)^2 + (6-2)^2 = 49 + 16 = 65 \neq \text{HL}.$$

Svar: Punkten med koordinaterna $(10,\ 6)$ ligger *inte* på cirkeln.

Exempel. (Ma3c-vt13-5, (1/0/0))

NpMa3c vt 2013

5. I figuren visas en cirkel som tangerar x-axeln i punkten $(4, 0)$.
Punkten $(4, 6)$ ligger på cirkeln. Ange cirkelns ekvation.



______________________ (1/0/0)

Lösning Cirkeln med radie 3 och medelpunkten $(4, 3)$. Cirkelns ekvationen är

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2.$$

Cirklarnas ekvation i icke-standardform.

Om cirkelns ekvation inte är i standardformen ovan måste vi använda formlerna

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

för att komplettera kvadraten och skriva om ekvationerna till standardform.

Exempel (6153 c.) Bestäm medelpunkt och radie för den cirkel

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0.$$

Lösning. Vi observerar att $x^2 - 4x = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x$. För att komplettera kvadratformeln för $x^2 - 4x$ måste vi addera 2^2 på båda sidor av ekvationen.

Samma idé för uttrycket $y^2 + 6y = y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y$. För att komplettera kvadraten måste vi addera 3^2 på båda sidor av ekvationen.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 &= 0, \\
x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 + 4 &= 2^2 + 3^3. \\
(x-2)^2 + (y+3)^2 + 4 &= 2^2 + 3^2. \\
(x-2)^2 + (y-(-3))^2 &= 3^2.
\end{aligned}
$$

Svar: Medelpunkten är $(2, \ -3)$ och radien är 3.

Triangelsatserna

Natation. Vi betecknar alltid triangeln ABC med vinklarna A, B och C och den motstående sidorna med längderna a, b, c. Så vi har relationen

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Vi har också $0 < A < 180^\circ$, $0 < B < 180^\circ$, $0 < A < 180^\circ$ och a, b, c är positiva.

Areasatsen

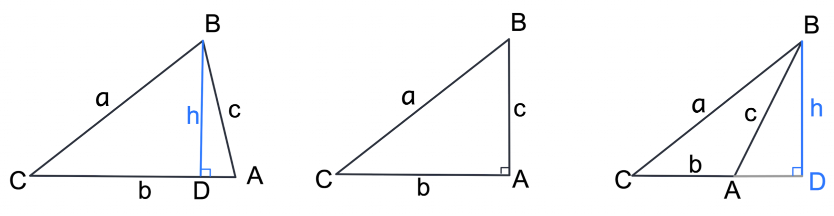
Vi kan beräkna triangelns area med formeln

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2}$$

Med natationen ovan har vi arean av triangeln ABC med följande formler:

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Bevis



A är spetsig. A är rät. A är trubbig.

- Fall 1. A är en spetsig vinkel. Höjden $h = c \sin A$ och basen $= b$.

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 2. A är en rät vinkel så $\sin A = 1$. Höjden $= c$ och basen $= b$.

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 3. A är en trubbig vinkel. Då blir vinkel $BAD = 180^\circ - A$. Vinklen BAD är spetsig. Vi vet att $\sin(180^\circ - A) = \sin A$.
  $\text{Höjden} = c \sin(BAD) = c \sin(180^\circ - A) = c \sin(A)$ och $\text{basen} = b$.

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

Därför har vi alltid

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

På samma sätt kan vi bevisa de andra två ekvationerna.

Detta är bevisets slut.

Sinussatsen

Med natationen ovan har vi följande formler i triangeln ABC:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Bevis

Metod 1. (Använd areasatsen.) Vi använder areasatsen direkt.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Observera att ingen av de tre sidlängderna kan vara 0. Därför är abc inte 0. Vi dividerar sedan abc för ovanstående ekvation och multiplicerar med 2. Vi får

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin A}{abc} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{abc} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{abc},$$

dvs

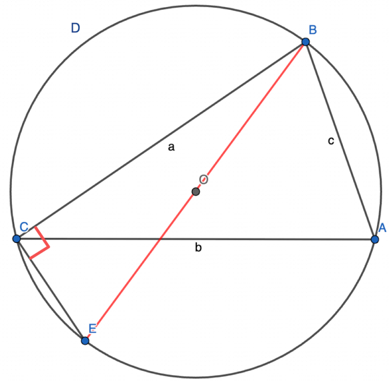
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Observera att $\sin(A)$, $\sin(B)$ och $\sin(C)$ inte alla är noll, så vi kan skriva om proportionen ovan. Vi får

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Detta är bevisets slut.

Metod 2. (Använd randvinkelsatsen) För triangeln ABC ritar vi dess omskrivna cirkel, vilket betyder att punkterna A, B och C ligger på en cirkel med radien R. Linjen som går genom punkt B och cirkelns centrum O skär cirkeln i en punkt, betecknad som punkt E.



Vi använder en följdsats från **randvinkelsatsen**: **En randvinkel på en halvcirkelbåge är alltid** 90° **.**

BE är diametern, därför är vinkeln ECB en rät vinkel. I den rätvinkliga triangeln ECB har vi

$$\sin(CEB) = \frac{CB}{BE} = \frac{a}{2R}. \qquad (1)$$

Vi använder andra följdsats från **randvinkelsatsen**: **Alla randvinklar på samma cirkelbåge är lika stora.**

För cirkelbåge CDB är randvinklar $CAB = CEB$. Då blir

$$\sin(A) = \sin(CAB) = \sin(CEB) \qquad (2).$$

Med hjälp av formlerna (1) och (2) får vi $\frac{a}{\sin(A)} = 2R$. På liknande sätt får vi $\frac{b}{\sin(B)} = 2R$ och $\frac{c}{\sin(C)} = 2R$. Således har vi bevisat

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R,$$

och

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

Detta är bevisets slut.

Cosinussatsen

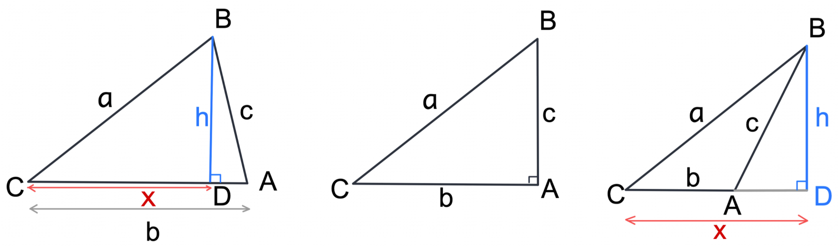
Med natationen ovan har vi följande formler i triangeln ABC:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Bevis



A är spetsig. A är rät. A är trubbig.

Vi fokuserar på ängeln C och bevisar att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

- Fall 1. C är en spetsig vinkel.
  - Delfall 1.1. A är en spetsig vinkel. Pythagoras sats i den vänstra triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den högra triangeln BDA ger $h^2 + (b-x)^2 = c^2$. Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $\cos C = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b-x)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C). \end{aligned}$$

  - Delfall 1.2. A är en rät vinkel. Vi vet $a \cos C = b$ och $c^2 = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab\cos(C) &= a^2 + b^2 - 2b(a\cos C) \\ &= a^2 + b^2 - 2b \cdot b = a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

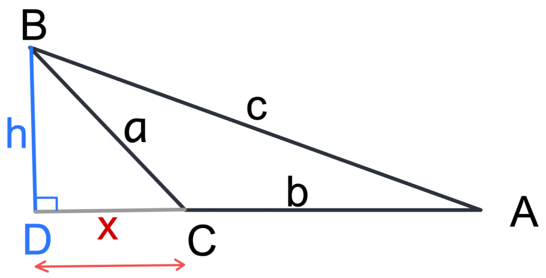
  - Delfall 1.3. A är en trubbig vinkel. Pythagoras sats i den triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den triangeln BDA ger $h^2 + (x-b)^2 = c^2$.

Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $\cos C = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (x-b)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2xb + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C). \end{aligned}$$

- Fall 2. C är en rät vinkel. Vi har $\cos C = 0$. Pythagoras sats ger $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

- Fall 3. C är en trubbig vinkel.



C är trubbig.

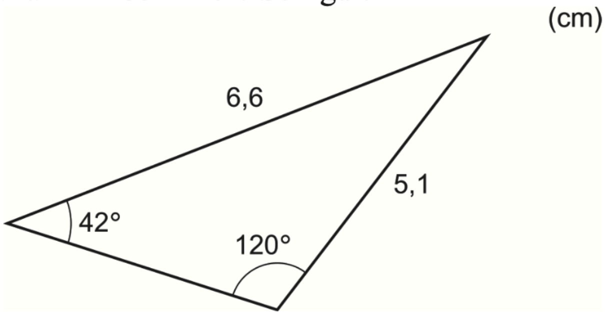
Vi vet att $\cos C < 0$ och $\cos DCB = \cos(180^\circ - C) = -\cos C > 0$. Pythagoras sats i den triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den triangeln BDA ger $h^2 + (x+b)^2 = c^2$. Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $-\cos C = \cos DCB = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b+x)^2 \\ &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{x}{a} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C). \end{aligned}$$

Detta är bevisets slut.

Exempel. (Ma3c-vt22-20, (2/0/0))

20. I en triangel är en sida 6,6 cm och en annan sida 5,1 cm. Två av triangelns vinklar är $42°$ och $120°$. Se figur.



Bestäm triangelns area genom att använda någon eller några av triangelsatserna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen). (2/0/0)

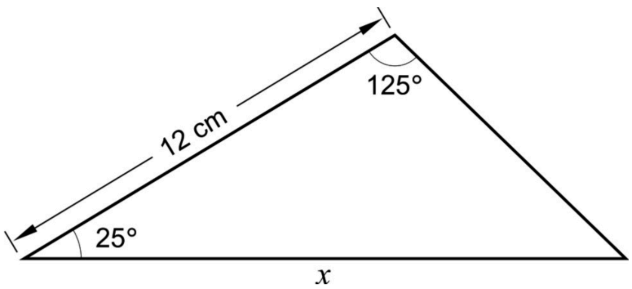
Lösning. Den tredje vinkeln är $180^\circ - 120^\circ - 42^\circ = 18^\circ$. Vi använder areasatsen

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot 6,6 \cdot 5,1 \cdot \sin(18^\circ) \approx 5,2.$$

Svar: Arean är cirka 5,2 cm^2.

Exempel. (Ma3c-vt16-18, (2/0/0))

18. Beräkna längden på sidan x i triangeln. (2/0/0)



Lösning. Den tredje vinkeln är $180^\circ - 125^\circ - 25^\circ = 30^\circ$. Vi använder sinussatsen

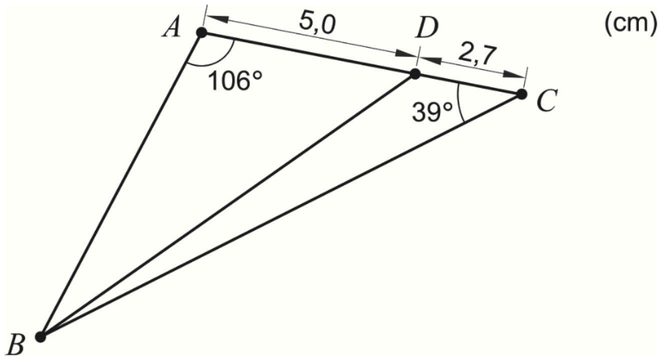
$$\frac{x}{\sin(125^\circ)} = \frac{12}{\sin(30^\circ)}.$$

$$x = \frac{12}{\sin(30^\circ)} \cdot \sin(125^\circ) \approx 19,66.$$

Svar: Längden på x är cirka 19,66 cm.

Exempel. (Ma3c-vt22-24, (0/3/0))

24. Figuren visar triangeln ABC där en punkt D är markerad på sidan AC.
Några mått och vinklar finns givna i figuren.



Bestäm längden av sträckan BD genom att använda någon eller några av triangelsatserna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen). (0/3/0)

Lösning. Vinklen ABC är $180^\circ - 106^\circ - 39^\circ = 35^\circ$.

Vi använder sinussatsen till trianglen ABC och får

$$\frac{AB}{\sin(ACB)} = \frac{AC}{\sin(ABC)},$$

dvs

$$\frac{AB}{\sin(39^\circ)} = \frac{5,0 + 2,7}{\sin(35^\circ)}.$$

Vi får $AB = \frac{5,0+2,7}{\sin(35^\circ)} \cdot \sin(39^\circ) \approx 8,499.$

Vi använder cosinussatsen till trianglen ABD och får

$$=$$

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos(106^\circ) \\ &= (8,499)^2 + 5^2 - 2 \cdot 8,499 \cdot 5 \cos(106^\circ) \\ &\approx 119,564. \end{aligned}$$

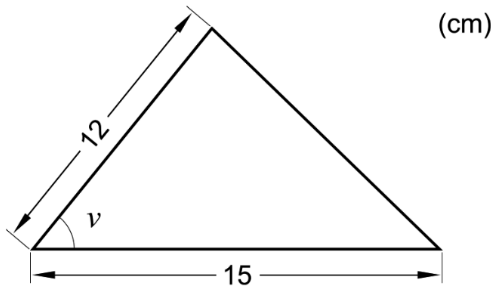
och

$$BD \approx \sqrt{119,564} \approx 10.93.$$

Svar: Längden på BD är cirka 11 cm.

Exempel. (Ma3c-vt17-21, (2/1/0))

21. Figuren visar en triangel där två av sidorna är 12 cm och 15 cm.
Den mellanliggande vinkeln v är spetsig. Triangeln har arean 75 cm^2.



Bestäm den tredje sidans längd. (2/1/0)

Lösning.

Vi använder areasatsen till triangeln och får

$$75 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \sin(v),$$

dvs

$$\sin(v) = \frac{5}{6}.$$

Vi använder GeoGebra och får $v = \sin^{-1}(\frac{5}{6}) = 56,44^\circ$.

Beteckna längden motsatt vinkeln v med x. Så $x > 0$. Vi använder cosinussatsen till triangeln och får

$$\begin{aligned} x^2 &= 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos(v) \\ &= 144 + 225 - 90 \cos(v) \\ &= 369 - 90\sqrt{1 - (\frac{5}{6})^2} \\ &\approx 319,25, \end{aligned}$$

och $x \approx \sqrt{319,25} \approx 17,9$.

Svar: Längden på x är cirka 17,9 cm.