

Wanmin Liu, 2025-10-06

Del 1. Repetition och tillämpningar av derivatan.

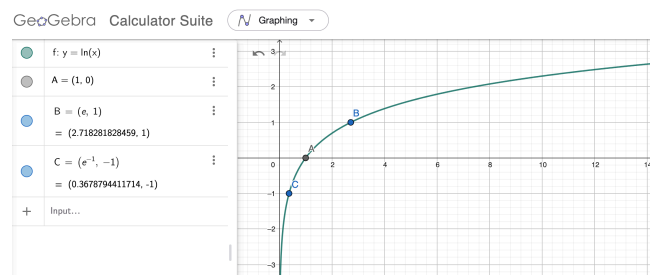
$$D(f(x)) = f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vi **definierar** talet e så att

$$D(e^x) = e^x, \quad \text{eller } (e^x)' = e^x.$$

Det är en indirekt definition. Så e är bara en speciell konstant och $e \approx 2.7$.

Graf för den naturliga logaritmfunktionen $y = \ln x$ definieras som reella tal $\ln x$ sådana att $e^{\ln x} = x$ för positiv x .



$$(x^a)' = ax^{a-1} \text{ för reella tal } a. \quad (e^{kx})' = ke^{kx}. \quad \text{För } a > 0 \text{ är } (a^{kx})' = a^{kx} \cdot k \cdot \ln(a). \\ (ag(x) + bh(x))' = ag'(x) + bh'(x)$$

Exempel 1. Värdet av en samling antika mynt som köptes för 8 år sedan ökar exponentiellt med tiden. Inköpspriset var 23 000 kr och nu är den värd 27 000 kr.

(a) Bestäm en exponentialfunktion som beskriver myntsamlingens värdeökning under t år.

(b) Vid vilken tidpunkt kommer värdet att öka med 1 000 kr per år?

Ledtråd.

(a) Vi kan skriva en generell exponentialfunktion som

$$f(t) = C \cdot e^{kt},$$

för vissa konstanter k och C .

Vi vet att $f(0) = 23000$ och $f(8) = 27000$.

Vi skulle kunna använda dessa två villkor för att hitta värdena på k och C .

(b) Vi skulle lösa ekvationen $f'(t) = 1000$ för tiden t .

Uppgift

Sidan 106 - 107, 3230, 3231, 3237 (Ledtråd till 3237: $e^{0,017} \approx 1,017$.)

Del 2. Tangent- och normallinjer i en punkt på en kurva

Givet en kurva $y = f(x)$ och en punkt P på kurvan med koordinaterna (x_0, y_0) .

Tangentens lutning vid punkten P är $k_{\text{tangent}} = f'(x_0)$.

Definition. En *normal* till en kurva är en linje som bildar *rät vinkel* mot kurvans tangent i en viss punkt.

Om $k_{\text{tangent}} \neq 0$, så har vi

$$k_{\text{tangent}} \cdot k_{\text{normal}} = -1 \quad \text{eller} \quad k_{\text{normal}} = \frac{-1}{k_{\text{tangent}}}.$$

Om $k_{\text{tangent}} = 0$, så är den normala linjen en vertikal (lodrätt) linje $x = x_0$.

Exempel 2. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $y = e + 7^x$ där $x = 0$.

Ledtråd Vilka är tangentpunktens koordinater? Vad är tangentens lutning? Vad är normalens lutning?

Tre metoder att skriva linjens ekvation.

Med geometrin (t. ex. tangent, normal, parallell, derivata ...) kan vi hitta lutningen k .

Lutningen på linjen som går genom två kända punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
(Det står i formelblad.)

Motod 1. Skriv $y = kx + m$ och $y_0 = kx_0 + m$ för att hitta m .

Motod 2. $k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ eftersom linjens lutning är k . (Det står i formelblad.)

Motod 3. $y - y_0 = k(x - x_0)$. Det är linjens ekvation genom punkten (x_0, y_0) där vi känner lutningen k .

Uppgift

S. 107: 3239, 3241. S. 115: 32.