title	author	theme	date
Tillämpningar av derivatan	Wanmin Liu	Copenhagen	2025-10-06

Del 1. Repetition och tillämpningar av derivatan.

14.35 - 14.55. Repetition.

- Definition av derivatan
- Definition av talet e.
- Definition av naturlig logaritm
- Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$.
- Derivatan Tabell

14.55 - 15.05 Exempel.

15.05 - 15.35 Tre uppgifter i boken.

Definition av derivatan

Låt $y = f(x)$ vara en funktion.

Vi skriver

- $\Delta x = (x + h) - x = h$
- $\Delta y = f(x + h) - f(x)$

$D(f(x)) = f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Definition av talet e.

Vi **definierar** talet e så att gränsvärdet är $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$.

Det är en indirekt definition. Så e är bara en speciell konstant så att

$$D(e^x) = e^x, \quad \text{eller } (e^x)' = e^x.$$

En ekvivalent definition är följande

$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2.7$

Definition av naturlig logaritm

Om $x = e^y$, så **definerar** vi $y = \ln x$, dvs $\ln x$ är talet så att

$$e^{\ln x} = x.$$

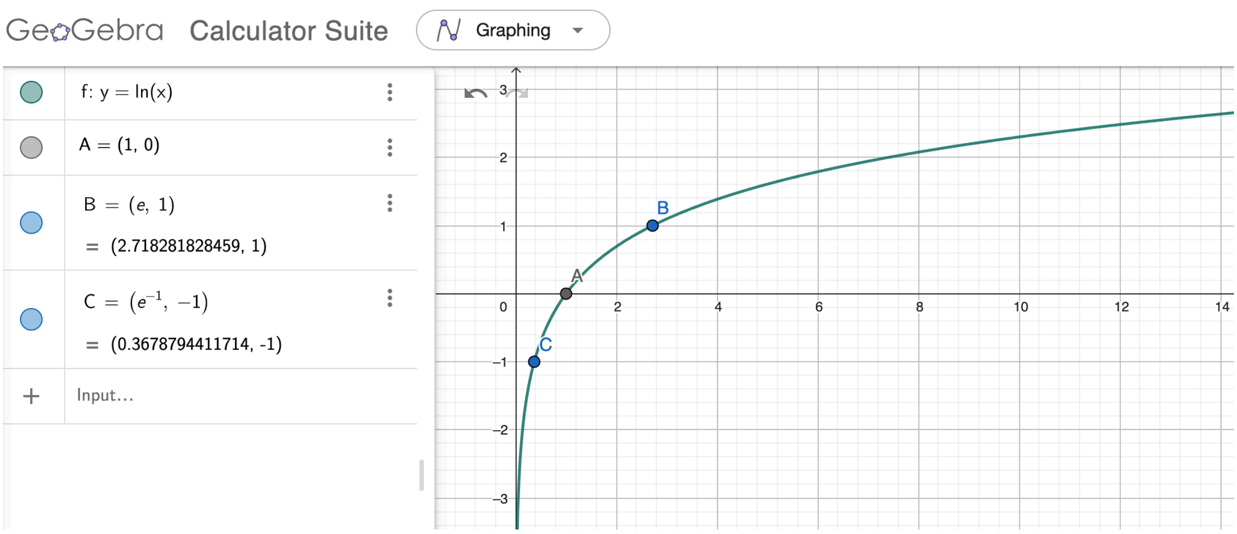
- Eftersom $x = e^y$, så är x alltid positiv. Dvs Definitionsmängd av funktion $y = \ln x$ är alla positiva tal $\{x|x > 0\}$.
- Värdemängden är alla reella tal.

Till exempel:

- $\ln 1 = 0$ eftersom $e^0 = 1$.
- $\ln e = 1$ eftersom $e^1 = e$.
- $\ln e^{-1} = -1$ eftersom $e^{\ln e^{-1}} = e^{-1}$.
- Om $a > 0$, då är $a = e^{\ln a}$.

Graf för den naturliga logaritmfunktionen

Den naturliga logaritmfunktionen $y = \ln x$ definieras som reella tal $\ln x$ sådana att $e^{\ln x} = x$.



En generell logaritmisk funktion

En generell logaritmisk funktion med basen a (a är ett positivt tal) betecknas med notationen $\log_a(x)$, med den definierade ekvationen $a^{\log_a(x)} = x$.

- Definitionsmängd av funktion $y = \log_a(x)$ är alla positiva tal $\{x|x > 0\}$.
- Värdemängden av $\log_a(x)$ är alla reella tal.
- $\ln(x)$ är förkortningen för $\log_e(x)$ med basen e.
- $\lg(x)$ är förkortningen för $\log_{10}(x)$ med basen 10, t.ex $\lg(100) = 2$, $\lg(0,1) = -1$.

Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$.

Hur? Vi skriver om a:

$a = e^{\ln(a)}$.

Då är $y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln(a)x} = e^{kx}$ med $k = \ln a$.

Exponentialfunktioner kan allmänt skrivas

$$f(x) = C \cdot e^{kx}$$

för vissa konstanter k och C.

Derivatan Tabell

$f(x)$	$D(f(x)) = f'(x)$	**Anmärkningar**
k	0	k är en konstant.
x^n	nx^{n-1}	n är ett naturligt tal.
x^a	ax^{a-1}	a är ett reellt tal.
e^x	e^x	Detta är definitionen av talet e.
e^{kx}	ke^{kx}	k är en konstant.
a^{kx}	$a^{kx} \cdot k \cdot \ln(a)$	k är en konstant och a är ett positivt tal.
$a \cdot g(x)$	$ag'(x)$	a är reella tal.
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$	

Exempel 1.

Värdet av en samling antika mynt som köptes för 8 år sedan ökar exponentiellt med tiden. Inköpspriset var 23 000 kr och nu är den värd 27 000 kr.

(a) Bestäm en exponetialfunktion som beskriver myntsamlingens värdeökning under t år.

(b) Vid vilken tidpunkt kommer värdet att öka med 1 000 kr per år?

Exempel 1. Ledtråd.

(a) Vi kan skriva en generell exponentialfunktion som

$$f(t) = C \cdot e^{kt},$$

för vissa konstanter k och C.

Vi vet att $f(0) = 23000$ och $f(8) = 27000$.

Vi skulle kunna använda dessa två villkor för att hitta värdena på k och C.

(b) Vi skulle lösa ekvationen

$$f'(t) = 1000$$

för tiden t.

Exempel 1.

Lösning.

Vi kan skriva en generell exponentialfunktion som

$$f(t) = C \cdot e^{kt},$$

för vissa konstanter k och C.

Vi vet att $f(0) = 23000$ och $f(8) = 27000$.

Då är $f(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C \cdot e^0 = C \cdot 1 = C$. Så får vi $C = 23000$.

Nu är

$$f(8) = 23000 \cdot e^{k \cdot 8} = 27000.$$

Vi deviderar båda leden med 23000 och får

$$e^{k \cdot 8} = \frac{27000}{23000}.$$

Det vill säga

$$e^{8k} = \frac{27}{23}.$$

För denna ekvation tar vi den naturliga logaritmen för båda sidor och får

$$\ln(e^{8k}) = \ln(\frac{27}{23}).$$

Med definitionen av den naturliga logaritmen får vi $\ln(e^{8k}) = 8k$. Så får vi ekvationen

$$8k = \ln(\frac{27}{23})$$

och

$$k = \frac{\ln(\frac{27}{23})}{8} \approx 0,02.$$

Svar: Myntsamlingens värde under t år är

$$f(t) = 23000 \cdot e^{0,02t}.$$

(b) Vi skulle lösa ekvationen

$$f'(t) = 1000$$

för tiden t.

Enligt deriveringsreglerna får vi

$$f'(t) = C \cdot e^{kt} \cdot k = 23000 \cdot e^{0,02t} \cdot 0,02 = 460 \cdot e^{0,02t}.$$

Sätt

$$f'(t) = 1000.$$

Vi får

$$460 \cdot e^{0,02t} = 1000.$$

Vi dividerar 460 på båda sidor av ekvationen och får

$$e^{0,02t} = \frac{1000}{460}.$$

Vi tar den naturliga logaritmen för båda sidor och får

$$\ln(e^{0,02t}) = \ln(\frac{1000}{460}).$$

Dvs,

$$0,02t = \ln(\frac{1000}{460}),$$

och

$$t = \frac{\ln(\frac{1000}{460})}{0,02} \approx 38,82 \approx 39.$$

Svar: Ungefär 39 år efter inköpet kommer värdet att öka med 1 000 kr per år.

Uppgift

Sidan 106 - 107, 3230, 3231, 3237

Ledtråd till 3237: $e^{0,017} \approx 1,017.$

Paus

15.35 - 15.55

Del 2: 15.55 - 17.00.

Del 2.

15.55 - 16.25

- Tangent- och normallinjer i en punkt på en kurva
- Tangentlinjens lutning
- Normallinjens lutning
- Exempel.

16.25 - 17.00

- Tre uppgifter i boken.

Tangent- och normallinjer i en punkt på en kurva

Givet en kurva $y = f(x)$ och en punkt P på kurvan med koordinaterna (x_0, y_0). Vi vill beräkna ekvationerna för tangent- och normallinjerna till kurvan vid punkt P.

Enligt definitionen av derivata ges tangentens lutning vid punkten P av $k_{\text{tangent}} = f'(x_0)$.

Definition. En *normal* till en kurva är en linje som bildar *rät vinkel* mot kurvans tangent i en viss punkt.

Om $k_{\text{tangent}} \neq 0$, så har vi

$$k_{\text{tangent}} \cdot k_{\text{normal}} = -1 \quad \text{eller } k_{\text{normal}} = \frac{-1}{k_{\text{tangent}}}.$$

Om $k_{\text{tangent}} = 0$, så är den normala linjen en vertikal (lodrätt) linje $x = x_0$.

Exempel 2.

Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan $y = e + 7^x$ där $x = 0$.

Ledtråd

- Vilka är tangentpunktens koordinater?
- Vad är tangentens lutning?
- Vad är normalens lutning?

Tre metoder att skriva linjens ekvation.

Med geometrin (t. ex. tangent, normal, parallell, derivata ...) kan vi hitta lutningen k.

Lutningen på linjen som går genom två kända punkter $(x_1,\ y_1)$ och $(x_2,\ y_2)$ är $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. (Det står i formelblad.)

Motod 1. Skriv $y = kx + m$ och $y_0 = kx_0 + m$ för att hitta m.

Motod 2. $k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ eftersom linjens lutning är k. (Det står i formelblad.)

Motod 3. $y - y_0 = k(x - x_0)$. Det är linjens ekvation genom punkten $(x_0,\ y_0)$ där vi känner lutningen k.

Exempel 2.

Lösning.

Steg 1. Vi skriver koordinaterna för tangentpunkten.

Låt oss kalla tangentpunkten P. $y(0) = e + 7^0 = e + 1$. Så koordinaterna för punkt P är $(0, e + 1)$.

Steg 2. Vi hittar tangentens lutning och normalens lutning.

$$y' = 0 + 7^x \cdot \ln 7 = 7^x \cdot \ln 7.$$

$$k_{\text{tangent}} = y'(0) = 7^0 \cdot \ln 7 = \ln 7.$$

$$k_{\text{normal}} = \frac{-1}{k_{\text{tangent}}} = \frac{-1}{\ln 7}.$$

Steg 3. Vi hittar tangentens ekvation. Tangenten har ekvationen

$$y = (\ln 7)x + m.$$

Punkt P ligger på tangentlinjen, så koordinaterna för P uppfyller också tangentlinjens ekvation. Dvs

$$e + 1 = (\ln 7) \cdot 0 + m,$$

och $m = e + 1$. Vi har ekvationen för tangentlinjen till kurvan i $x = 0$:

$$y = (\ln 7)x + e + 1.$$

Steg 4. Vi hittar normalens ekvation. Normalen har ekvationen

$$y = \frac{-1}{\ln 7} \cdot x + m.$$

Punkt P ligger också på normallinjen, så koordinaterna för P uppfyller också normallinjens ekvation. Dvs

$$e + 1 = \frac{-1}{\ln 7} \cdot 0 + m,$$

och $m = e + 1$. Vi har ekvationen för normallinjen till kurvan i $x = 0$:

$$y = \frac{-1}{\ln 7} \cdot x + e + 1.$$

Uppgift

S. 107: 3239, 3241

S. 115: 32. Tangenten till kurvan $y = ae^{2x} + bx$ i punkten $(0, 4)$ har lutningen $k = 3$. Bestäm talen a och b.

Ledtråd: Tangentpunkten $(0, 4)$ ligger också på kurvan, så dess koordinater uppfyller kurvans ekvation. Vi vet också $y'(0) = 3$.