

Trigonometri III, triangelsatserna

Wanmin Liu

Ma3c

- Areasatsen
- Sinussatsen
- Cosinussatsen

Beviset i boken är inte fullständigt. Ni är välkomna att läsa igenom det själva. Jag kommer inte att gå igenom alla bevis under lektionstid.

Natation. Vi betecknar alltid triangeln ABC med vinklarna A , B och C och den motstående sidorna med längderna a , b , c . Så vi har relationen

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Vi har också $0 < A < 180^\circ$, $0 < B < 180^\circ$, $0 < C < 180^\circ$ och a, b, c är positiva.

Areasatsen

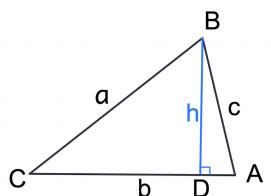
Vi kan beräkna triangelns area med formeln

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2}$$

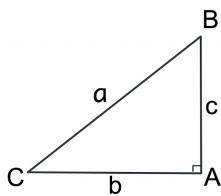
Med natationen ovan har vi arean av triangeln ABC med följande formler:

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

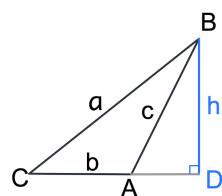
Bevis



A är spetsig.



A är rät.



A är trubbig.

- Fall 1. A är en spetsig vinkel. Höjden $h = c \sin A$ och basen = b .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 2. A är en rät vinkel så $\sin A = 1$. Höjden = c och basen = b .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 3. A är en trubbig vinkel. Då blir vinkel $BAD = 180^\circ - A$. Vinklen BAD är spetsig.
Vi vet att $\sin(180^\circ - A) = \sin A$.
Höjden = $c \sin(BAD) = c \sin(180^\circ - A) = c \sin(A)$ och basen = b .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

Därför har vi alltid

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

På samma sätt kan vi bevisa de andra två ekvationerna.

Detta är slutet på beviset.

Sinussatsen

Med notationen ovan har vi följande formler i triangeln ABC:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Bevis

Metod 1. (Använd areasatsen.) Vi använder areasatsen direkt.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Observera att ingen av de tre sids längderna kan vara 0. Därför är abc inte 0. Vi dividerar sedan abc för ovanstående ekvation och multiplicerar med 2. Vi får

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin A}{abc} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{abc} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{abc},$$

dvs

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

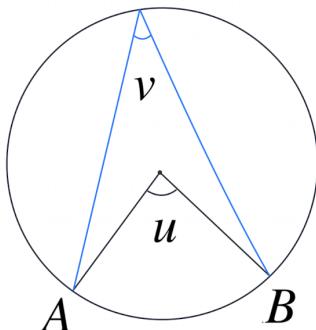
Observera att $\sin(A)$, $\sin(B)$ och $\sin(C)$ inte alla är noll, så vi kan skriva om proportionen ovan. Vi får

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Detta är slutet på beviset.

Innan vi ger det andra beviset måste vi komma ihåg

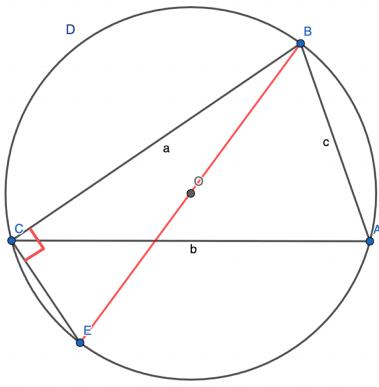
Randvinkelsatsen: Medelpunktsvinkeln u till cirkelbågen AB är dubbelt så stor som randvinkeln v som står på samma cirkelbåge AB , alltså att $u = 2v$.



Randvinkelsatsen

$$u = 2v$$

Metod 2. (Använd randvinkelsatsen) För triangeln ABC ritar vi dess omskrivna cirkel, vilket betyder att punkterna A , B och C ligger på en cirkel med radien R . Linjen som går genom punkt B och cirkelns centrum O skär cirkeln i en punkt, betecknad som punkt E .



Vi använder en följdssats från **randvinkelsatsen**: **En randvinkel på en halvcirkelbåge är alltid 90° .**

BE är diametern, därför är vinkelns ECB en rät vinkel. I den rätvinkliga triangeln ECB har vi

$$\sin(CEB) = \frac{CB}{BE} = \frac{a}{2R}. \quad (1)$$

Vi använder andra följdssats från **randvinkelsatsen**: **Alla randvinklar på samma cirkelbåge är lika stora.**

För cirkelbåge CDB är randvinklar $CAB = CEB$. Då blir

$$\sin(A) = \sin(CAB) = \sin(CEB) \quad (2).$$

Med hjälp av formlerna (1) och (2) får vi $\frac{a}{\sin(A)} = 2R$. På liknande sätt får vi $\frac{b}{\sin(B)} = 2R$ och $\frac{c}{\sin(C)} = 2R$. Således har vi bevisat

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R,$$

och

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

Detta är slutet på beviset.

Cosinussatsen

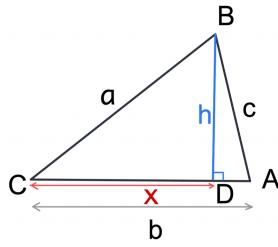
Med natationen ovan har vi följande formler i triangeln ABC :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

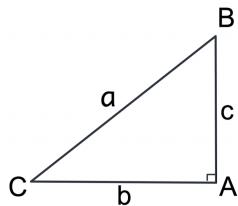
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

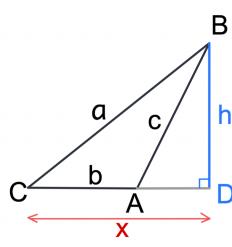
Bevis



A är spetsig.



A är rät.



A är trubbig.

Vi fokuserar på vinkeln C och bevisar att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

- Fall 1. C är en spetsig vinkel.

- Delfall 1.1. A är en spetsig vinkel. Pythagoras sats i den vänstra triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den högra triangeln BDA ger $h^2 + (b - x)^2 = c^2$. Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $\cos C = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b - x)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

- Delfall 1.2. A är en rät vinkel. Vi vet $a \cos C = b$ och $c^2 = a^2 - b^2$.

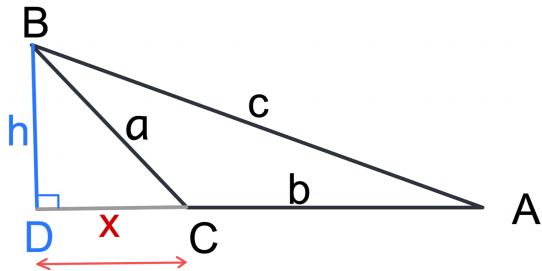
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos(C) &= a^2 + b^2 - 2b(a \cos C) \\ &= a^2 + b^2 - 2b \cdot b = a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

- Delfall 1.3. A är en trubbig vinkel. Pythagoras sats i den triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den triangeln BDA ger $h^2 + (x - b)^2 = c^2$. Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $\cos C = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (x - b)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2xb + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

- Fall 2. C är en rät vinkel. Vi har $\cos C = 0$. Pythagoras sats ger $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

- Fall 3. C är en trubbig vinkel.



C är trubbig.

Vi vet att $\cos C < 0$ och $\cos DCB = \cos(180^\circ - C) = -\cos C > 0$. Pythagoras sats i den triangeln CDB ger $h^2 + x^2 = a^2$. Pythagoras sats i den triangeln BDA ger $h^2 + (x + b)^2 = c^2$. Dessa två uttryck för h sätts lika. Vi vet att $-\cos C = \cos DCB = \frac{x}{a}$. Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + x)^2 \\ &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{x}{a} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

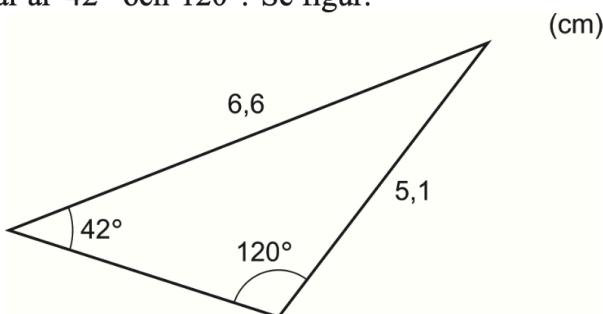
Så har vi bevisat

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

De andra två formlerna följer på samma sätt. Detta är slutet på beviset.

Exempel 1. (Ma3c-vt22-20, (2/0/0))

20. I en triangel är en sida 6,6 cm och en annan sida 5,1 cm. Två av triangelns vinklar är 42° och 120° . Se figur.



Bestäm triangelns area genom att använda någon eller några av triangelnsatserna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen).

(2/0/0)

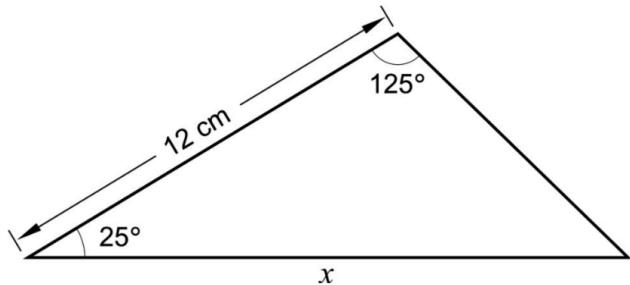
Lösning. Den tredje vinkeln är $180^\circ - 120^\circ - 42^\circ = 18^\circ$. Vi använder areasatsen

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot 6,6 \cdot 5,1 \cdot \sin(18^\circ) \approx 5,2.$$

Svar: Arean är cirka $5,2 \text{ cm}^2$.

Exempel 2. (Ma3c-vt16-18, (2/0/0))

18. Beräkna längden på sidan x i triangeln. (2/0/0)



Lösning. Den tredje vinkeln är $180^\circ - 125^\circ - 25^\circ = 30^\circ$. Vi använder sinussatsen

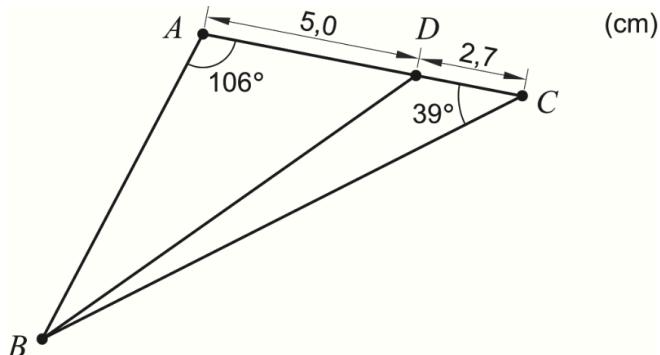
$$\frac{x}{\sin(125^\circ)} = \frac{12}{\sin(30^\circ)}.$$

$$x = \frac{12}{\sin(30^\circ)} \cdot \sin(125^\circ) \approx 19,66.$$

Svar: Längden på x är cirka 19,66 cm.

Exempel 3. (Ma3c-vt22-24, (0/3/0))

24. Figuren visar triangeln ABC där en punkt D är markerad på sidan AC . Några mått och vinklar finns givna i figuren.



Bestäm längden av sträckan BD genom att använda någon eller några av triangelsatserna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen). (0/3/0)

Lösning. Vinklen ABC är $180^\circ - 106^\circ - 39^\circ = 35^\circ$.

Vi använder sinussatsen till triangeln ABC och får

$$\frac{AB}{\sin(ACB)} = \frac{AC}{\sin(ABC)},$$

dvs

$$\frac{AB}{\sin(39^\circ)} = \frac{5,0 + 2,7}{\sin(35^\circ)}.$$

Vi får $AB = \frac{5,0 + 2,7}{\sin(35^\circ)} \cdot \sin(39^\circ) \approx 8,499$.

Vi använder cosinussatsen till triangeln ABD och får

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos(106^\circ) \\ &= (8,499)^2 + 5^2 - 2 \cdot 8,499 \cdot 5 \cos(106^\circ) \\ &\approx 119,564. \end{aligned}$$

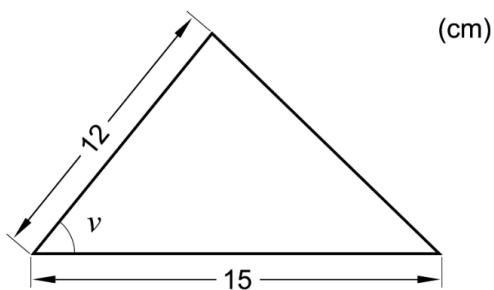
och

$$BD \approx \sqrt{119,564} \approx 10.93.$$

Svar: Längden på BD är cirka 11 cm.

Exempel 4. (Ma3c-vt17-21, (2/1/0))

21. Figuren visar en triangel där två av sidorna är 12 cm och 15 cm. Den mellanliggande vinkeln v är spetsig. Triangeln har arean 75 cm^2 .



Bestäm den tredje sidans längd.

(2/1/0)

Lösning.

Vi använder areasatsen till triangeln och får

$$75 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \sin(v),$$

dvs

$$\sin(v) = \frac{5}{6}.$$

Vi använder trigonometriska ettan och får

$$\sin^2(v) + \cos^2(v) = 1,$$

dvs

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cos^2(v) = 1.$$

Då får vi

$$\cos^2(v) = \frac{11}{36}.$$

Eftersom vinkeln v är spetsig, har vi $\cos(v) > 0$. Så vi får $\cos(v) = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Beteckna längden motsatt vinkeln v med x . Så $x > 0$. Vi använder cosinussatsen till triangeln och får

$$\begin{aligned}x^2 &= 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos(v) \\&= 144 + 225 - 360 \cdot \cos(v) \\&= 369 - 360 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \\&\approx 170,\end{aligned}$$

och $x \approx \sqrt{170} \approx 13$.

Svar: Längden på x är cirka 13 cm.

Kommentarer. Vi använder GeoGebra och får $v = \sin^{-1}(\frac{5}{6}) = 56,44^\circ$. Då blir

$$x^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos(56,44^\circ) \approx 170.$$

Sammanfattning

Natation. Vi betecknar alltid triangeln ABC med vinklarna A, B och C och den motstående sidorna med längderna a, b, c . Vi har $0 < A < 180^\circ$, $0 < B < 180^\circ$, $0 < C < 180^\circ$ och a, b, c är positiva.

För en rätvinkelig triangel ABC , där C är den räta vinkeln, gäller följande tre samband:

1. Pythagoras sats: $c^2 = a^2 + b^2$.
2. $A + B = 90^\circ$.
3. $\sin(A) = \cos(B) = \frac{a}{c}$, $\cos(A) = \sin(B) = \frac{b}{c}$

För en allmän triangel ABC gäller följande fyra samband:

1. $A + B + C = 180^\circ$.

2. Areasatsen.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

3. Sinussatsen.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

4. Cosinussatsen.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$