

Exponentialfunktioner och deras derivator

Wanmin Liu 2025-10-02 MAT3cTE24DC

Lektion 1

- Vad betyder talet e , som är ungefär 2,7.
- Derivatan av e^x .
- Derivatan av a^x för ett positivt tal a .

Potenslagar

Basen a ska vara **positiv** i funktion $y = a^x$.

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(ab)^x = a^x b^x$ $a^0 = 1$

Derivatan av exponentialfunktion

Låt a vara ett positivt tal och $y = f(x) = a^x$.

- $\Delta x = h$
- $\Delta y = f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x = a^x \cdot a^h - a^x = a^x(a^h - 1)$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

$$\text{Om } x = 0, \text{ så är } f'(0) = a^0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Definition av talet e .

Vi definierar talet e så att gränsvärdet är $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Detta är en indirekt definition.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7$$

Med definitionen av talet e har vi $D(e^x) = e^x$.

Uppgifter

S.98 - 99 3202, 3204, 3207, 3209, 3213 Hög nivå: 3216

Lektion 2

- Derivatan av e^{kx} för en konstant k : $D(e^{kx}) = ke^{kx}$
- Naturlig logaritm $y = \ln x$ för $x > 0$.
- Derivatan av a^x (för ett positivt tal a).
- Derivatan av a^{kx} för en konstant k och $a > 0$.

Om $x = e^y$, så är naturlig logaritm $y = \ln x$, dvs $\ln x$ är talet så att $e^{\ln x} = x$.

Definitionsmängd av funktion $y = \ln x$ är alla positiva tal $\{x|x > 0\}$.

Till exempel:

- $\ln 1 = 0$ eftersom $e^0 = 1$.
- Om $a > 0$, då är $a = e^{\ln a}$.

Varje exponentialfunktion $y = a^x$ (med $a > 0$) kan skrivas på formen $y = e^{kx}$.

Hur? Vi skriver om $a = e^{\ln(a)}$.

Då är $y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln(a)x}$ med $k = \ln(a)$.

$$D(a^x) = D(e^{kx}) = ke^{kx} = ka^x = a^x \cdot \ln a.$$

På samma sätt har vi $D(a^{kx}) = a^{kx} \cdot \ln(a) \cdot k$.

Uppgifter

S 102 - 103. 3218 a), c). 3221, 3224. Hög nivå: 3227

Exit-tickets

1. $D(e^x) = e^x$ eftersom _____.
2. $D(e^{3x}) =$ _____.
3. Vi skriver om en positiv tal a som $a = e^{\square}$ genom definition av naturlig logaritm $e^{\ln x} = x$.
4. $\ln 1 =$ _____ eftersom $e^{\square} = 1$.
5. Låt $a > 0$. Med hjälp av formel $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$ och $D(x^a) = a \cdot x^{a-1}$ har vi $D(\pi^x + x^\pi) =$ _____.