

# Trigonometri II

---

Wanmin Liu

20251124, 1127.

Ma3c

Rum 2027.

Planering.

Pass 1.

- Repetition.
  - Enhetscirkeln
  - Definitioner av sinus-, cosinus- och tangentfunktioner
  - Trigonometriska ettan.
- Cirkelns ekvation

Pass 2.

- Areasatsen
- Sinussatsen
- Cosinussatsen

---

Pass 1. 14.35 - 17.00.

## **Repetition.**

En enhetscirkel är en cirkel med radie 1 och centrum i origo  $O$ .

Punkt  $P$  på cirkeln har koordinaten  $(x = \cos v, y = \sin v)$ , där  $v$  är vinkeln från den positiva  $x$ -axeln till linjen  $OP$ .

Positiv vinkel  $\iff$  moturs

Negativ vinkel  $\iff$  medurs

**Exempel. Trigonometriska ettan.**

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1,$$

där  $\sin^2(A)$  betyder  $(\sin(A))^2 = \sin(A) \cdot \sin(A)$ .

## Cirkels ekvation

Enhetscirkel har ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1,$$

det vill säga, för varje punkt  $P(x, y)$  på cirkeln uppfyller dess koordinater ekvationen  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Fråga:** Vad är ekvationen för en cirkel med radie  $r$  och medelpunkten  $P_0$  med koordinater  $(x_0, y_0)$ ?

Om vi betecknar punkten  $P$  på cirkeln med koordinaterna  $(x, y)$ , då är avståndet  $PP_0 = r$ .

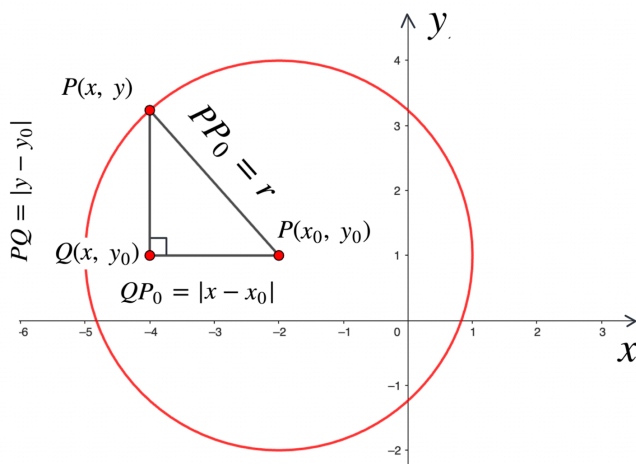
Beteckna  $Q$  med koordinaterna  $(x, y_0)$ . Då är  $PQP_0$  en rätvinklig triangel. Vi kan använda Pythagoras sats.

$$QP_0^2 + PQ^2 = PP_0^2,$$

där  $QP_0 = |x - x_0|$ ,  $PQ = |y - y_0|$  och  $PP_0 = r$ .

En cirkel med radien  $r$  och medelpunkten i  $(x_0, y_0)$  beskrivs av ekvationen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$



**Pythagoras sats**

$$QP_0^2 + PQ^2 = PP_0^2$$



**Cirkels ekvation**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

**Exempel.** (NpMa3c vt 2015, n.11, (2/0/0))

En cirkel har ekvationen  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 64$ . Undersök om punkten  $(10, 6)$  ligger på cirkeln.

**Lösning.** Vi sätter in  $(10, 6)$  i ekvationen.

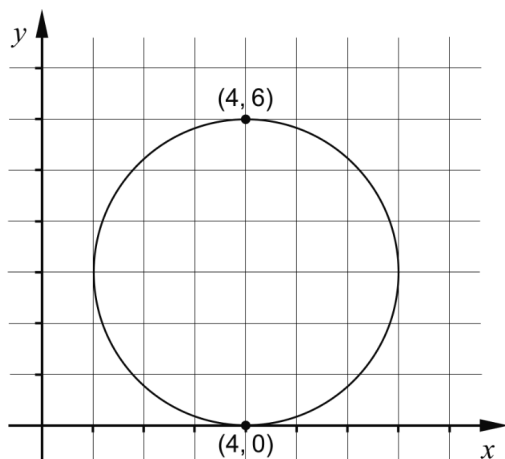
$$VL = (10 - 3)^2 + (6 - 2)^2 = 49 + 16 = 65 \neq HL.$$

**Svar:** Punkten med koordinaterna  $(10, 6)$  ligger *inte* på cirkeln.

**Exempel.** (Ma3c-vt13-5, (1/0/0))

NpMa3c vt 2013

5. I figuren visas en cirkel som tangerar  $x$ -axeln i punkten  $(4, 0)$ . Punkten  $(4, 6)$  ligger på cirkeln. Ange cirkelns ekvation.



\_\_\_\_\_ (1/0/0)

**Lösning** Cirkeln med radie 3 och medelpunkten  $(4, 3)$ . Cirkelns ekvationen är

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2.$$

### Cirklarnas ekvation i icke-standardform.

Om cirkelns ekvation inte är i standardformen ovan måste vi använda formlerna

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

för att komplettera kvadraten och skriva om ekvationerna till standardform.

**Exempel** (6153 c.) Bestäm medelpunkt och radie för den cirkel

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0.$$

**Lösning.** Vi observerar att  $x^2 - 4x = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x$ . För att komplettera kvadratformeln för  $x^2 - 4x$  måste vi addera  $2^2$  på båda sidor av ekvationen.

Samma idé för uttrycket  $y^2 + 6y = y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y$ . För att komplettera kvadraten måste vi addera  $3^2$  på båda sidor av ekvationen.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 &= 0, \\
 x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + y^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 + 4 &= 2^2 + 3^2, \\
 (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 4 &= 2^2 + 3^2, \\
 (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 &= 3^2.
 \end{aligned}$$

**Svar:** Medelpunkten är  $(2, -3)$  och radien är 3.

## Triangelsatserna

**Notation.** Vi betecknar alltid triangeln  $ABC$  med vinklarna  $A, B$  och  $C$  och den motstående sidorna med längderna  $a, b, c$ . Så vi har relationen

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Vi har också  $0 < A < 180^\circ, 0 < B < 180^\circ, 0 < C < 180^\circ$  och  $a, b, c$  är positiva.

### Areasatsen

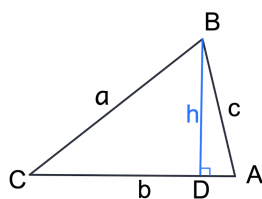
Vi kan beräkna triangelns area med formeln

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2}$$

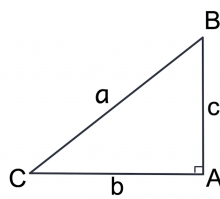
Med notationen ovan har vi arean av triangeln  $ABC$  med följande formler:

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

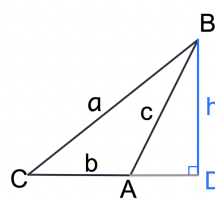
### Bevis



$A$  är spetsig.



$A$  är rät.



$A$  är trubbig.

- Fall 1.  $A$  är en spetsig vinkel. Höjden  $h = c \sin A$  och basen  $= b$ .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 2.  $A$  är en rät vinkel så  $\sin A = 1$ . Höjden  $= c$  och basen  $= b$ .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

- Fall 3.  $A$  är en trubbig vinkel. Då blir vinkel  $BAD = 180^\circ - A$ . Vinklen  $BAD$  är spetsig. Vi vet att  $\sin(180^\circ - A) = \sin A$ .  
Höjden  $= c \sin(BAD) = c \sin(180^\circ - A) = c \sin(A)$  och basen  $= b$ .

$$\text{Area} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

Därför har vi alltid

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}.$$

På samma sätt kan vi bevisa de andra två ekvationerna.

Detta är bevisets slut.

## Sinussatsen

Med notationen ovan har vi följande formler i triangeln  $ABC$ :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

## Bevis

**Metod 1.** (Använd areasatsen.) Vi använder areasatsen direkt.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Observera att ingen av de tre sidlängderna kan vara 0. Därför är  $abc$  inte 0. Vi dividerar sedan  $abc$  för ovanstående ekvation och multiplicerar med 2. Vi får

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin A}{abc} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{abc} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{abc},$$

dvs

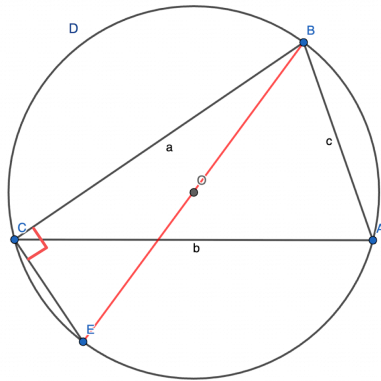
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Observera att  $\sin(A)$ ,  $\sin(B)$  och  $\sin(C)$  inte alla är noll, så vi kan skriva om proportionen ovan. Vi får

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Detta är bevisets slut.

**Metod 2.** (Använd randvinkelsatsen) För triangeln  $ABC$  ritar vi dess omskrivna cirkel, vilket betyder att punkterna  $A$ ,  $B$  och  $C$  ligger på en cirkel med radien  $R$ . Linjen som går genom punkt  $B$  och cirkelns centrum  $O$  skär cirkeln i en punkt, betecknad som punkt  $E$ .



Vi använder en följsats från **randvinkelsatsen**: **En randvinkel på en halvcirkelbåge är alltid  $90^\circ$ .**

$BE$  är diametern, därför är vinkeln  $ECB$  en rät vinkel. I den rätvinkliga triangeln  $ECB$  har vi

$$\sin(CEB) = \frac{CB}{BE} = \frac{a}{2R}. \quad (1)$$

Vi använder andra följsats från **randvinkelsatsen**: **Alla randvinklar på samma cirkelbåge är lika stora.**

För cirkelbåge  $CDB$  är randvinklar  $CAB = CEB$ . Då blir

$$\sin(A) = \sin(CAB) = \sin(CEB) \quad (2).$$

Med hjälp av formlerna (1) och (2) får vi  $\frac{a}{\sin(A)} = 2R$ . På liknande sätt får vi  $\frac{b}{\sin(B)} = 2R$  och  $\frac{c}{\sin(C)} = 2R$ . Således har vi bevisat

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R,$$

och

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

Detta är bevisets slut.

## Cosinussatsen

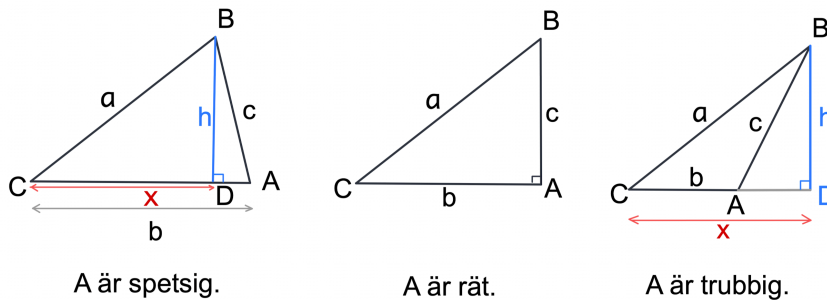
Med notationen ovan har vi följande formler i triangeln  $ABC$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

### Bevis



Vi fokuserar på vinkeln  $C$  och bevisar att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

- Fall 1.  $C$  är en spetsig vinkel.
  - Delfall 1.1.  $A$  är en spetsig vinkel. Pythagoras sats i den vänstra triangeln  $CDB$  ger  $h^2 + x^2 = a^2$ . Pythagoras sats i den högra triangeln  $BDA$  ger  $h^2 + (b - x)^2 = c^2$ . Dessa två uttryck för  $h$  sätts lika. Vi vet att  $\cos C = \frac{x}{a}$ . Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b - x)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

- Delfall 1.2.  $A$  är en rät vinkel. Vi vet  $a \cos C = b$  och  $c^2 = a^2 - b^2$ .

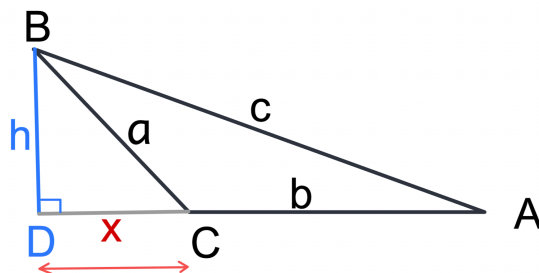
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos(C) &= a^2 + b^2 - 2b(a \cos C) \\ &= a^2 + b^2 - 2b \cdot b = a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2b^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

- Delfall 1.3.  $A$  är en trubbig vinkel. Pythagoras sats i den triangeln  $CDB$  ger  $h^2 + x^2 = a^2$ . Pythagoras sats i den triangeln  $BDA$  ger  $h^2 + (x - b)^2 = c^2$ .

Dessa två uttryck för  $h$  sätts lika. Vi vet att  $\cos C = \frac{x}{a}$ . Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (x - b)^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2xb + x^2 \\ &= h^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{x}{a} + x^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

- Fall 2.  $C$  är en rät vinkel. Vi har  $\cos C = 0$ . Pythagoras sats ger  $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .
- Fall 3.  $C$  är en trubbig vinkel.



$C$  är trubbig.

Vi vet att  $\cos C < 0$  och  $\cos DCB = \cos(180^\circ - C) = -\cos C > 0$ . Pythagoras sats i den triangeln  $CDB$  ger  $h^2 + x^2 = a^2$ . Pythagoras sats i den triangeln  $BDA$  ger  $h^2 + (x + b)^2 = c^2$ . Dessa två uttryck för  $h$  sätts lika. Vi vet att  $-\cos C = \cos DCB = \frac{x}{a}$ . Vi får

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + x)^2 \\ &= h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{x}{a} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \end{aligned}$$

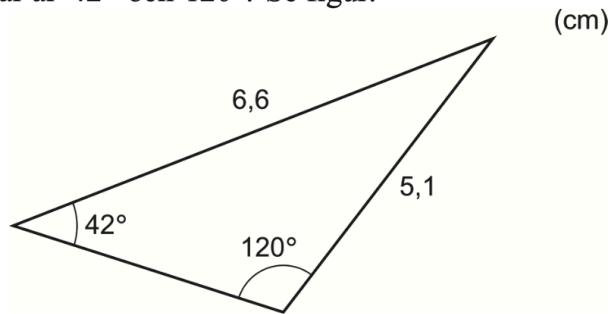
Detta är bevisets slut.

////////////////////////////////////

**Exempel.** (Ma3c-vt22-20, (2/0/0))



20. I en triangel är en sida 6,6 cm och en annan sida 5,1 cm. Två av triangelns vinklar är  $42^\circ$  och  $120^\circ$ . Se figur.



Bestäm triangelns area genom att använda någon eller några av triangelnsatserna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen).

(2/0/0)

**Lösning.** Den tredje vinkeln är  $180^\circ - 120^\circ - 42^\circ = 18^\circ$ . Vi använder areasatsen

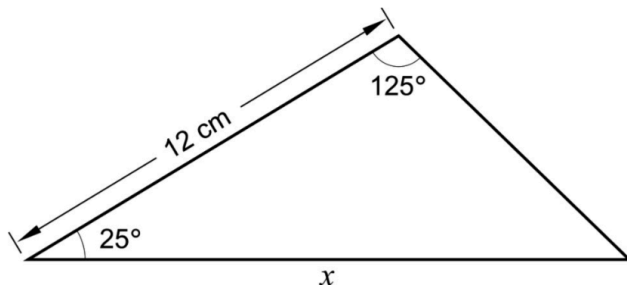
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot 6,6 \cdot 5,1 \cdot \sin(18^\circ) \approx 5,2.$$

**Svar:** Arealen är cirka  $5,2 \text{ cm}^2$ .

**Exempel.** (Ma3c-vt16-18, (2/0/0))

18. Beräkna längden på sidan  $x$  i triangeln.

(2/0/0)



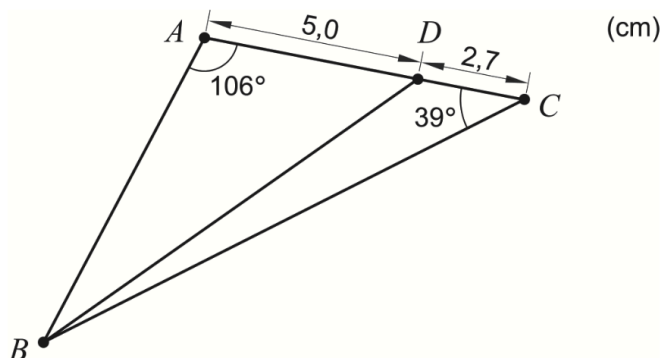
**Lösning.** Den tredje vinkeln är  $180^\circ - 125^\circ - 25^\circ = 30^\circ$ . Vi använder sinussatsen

$$\frac{x}{\sin(125^\circ)} = \frac{12}{\sin(30^\circ)}.$$
$$x = \frac{12}{\sin(30^\circ)} \cdot \sin(125^\circ) \approx 19,66.$$

**Svar:** Längden på  $x$  är cirka 19,66 cm.

**Exempel.** (Ma3c-vt22-24, (0/3/0))

24. Figuren visar triangeln  $ABC$  där en punkt  $D$  är markerad på sidan  $AC$ . Några mått och vinklar finns givna i figuren.



Bestäm längden av sträckan  $BD$  genom att använda någon eller några av triangelsetsarna (sinussatsen, cosinussatsen och areasatsen).

(0/3/0)

**Lösning.** Vinklen  $ABC$  är  $180^\circ - 106^\circ - 39^\circ = 35^\circ$ .

Vi använder sinussatsen till triangeln  $ABC$  och får

$$\frac{AB}{\sin(ACB)} = \frac{AC}{\sin(ABC)},$$

dvs

$$\frac{AB}{\sin(39^\circ)} = \frac{5,0 + 2,7}{\sin(35^\circ)}.$$

Vi får  $AB = \frac{5,0+2,7}{\sin(35^\circ)} \cdot \sin(39^\circ) \approx 8,499$ .

Vi använder cosinussatsen till triangeln  $ABD$  och får

=

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos(106^\circ) \\ &= (8,499)^2 + 5^2 - 2 \cdot 8,499 \cdot 5 \cos(106^\circ) \\ &\approx 119,564. \end{aligned}$$

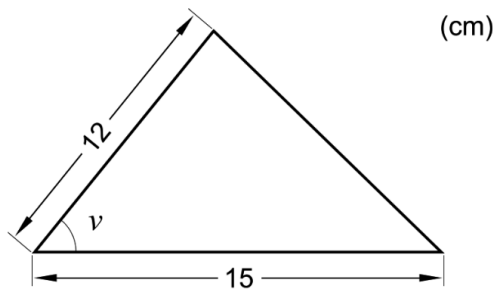
och

$$BD \approx \sqrt{119,564} \approx 10,93.$$

**Svar:** Längden på  $BD$  är cirka 11 cm.

**Exempel.** (Ma3c-vt17-21, (2/1/0))

21. Figuren visar en triangel där två av sidorna är 12 cm och 15 cm. Den mellanliggande vinkeln  $v$  är spetsig. Triangeln har arean  $75 \text{ cm}^2$ .



Bestäm den tredje sidans längd.

(2/1/0)

### Lösning.

Vi använder areasatsen till triangeln och får

$$75 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \sin(v),$$

dvs

$$\sin(v) = \frac{5}{6}.$$

Vi använder GeoGebra och får  $v = \sin^{-1}(\frac{5}{6}) = 56,44^\circ$ .

Beteckna längden motsatt vinkeln  $v$  med  $x$ . Så  $x > 0$ . Vi använder cosinussatsen till triangeln och får

$$\begin{aligned} x^2 &= 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos(v) \\ &= 144 + 225 - 90 \cos(v) \\ &= 369 - 90 \sqrt{1 - (\frac{5}{6})^2} \\ &\approx 319,25, \end{aligned}$$

och  $x \approx \sqrt{319,25} \approx 17,9$ .

**Svar:** Längden på  $x$  är cirka 17,9 cm.

---

### Sammanfattning

**Notation.** Vi betecknar alltid triangeln  $ABC$  med vinklarna  $A$ ,  $B$  och  $C$  och den motstående sidorna med längderna  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Vi har  $0 < A < 180^\circ$ ,  $0 < B < 180^\circ$ ,  $0 < C < 180^\circ$  och  $a, b, c$  är positiva.

**För en rätvinklig triangel  $ABC$ , där  $C$  är den räta vinkeln, gäller följande tre samband:**

1. Pythagoras sats:  $c^2 = a^2 + b^2$ .
2.  $A + B = 90^\circ$ .
3.  $\sin(A) = \cos(B) = \frac{a}{c}$ ,  $\cos(A) = \sin(B) = \frac{b}{c}$

**För en allmän triangel  $ABC$  gäller följande fyra samband:**

1.  $A + B + C = 180^\circ$ .
2. Areasatsen.

$$\text{Area} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

3. Sinussatsen.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

och

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

4. Cosinussatsen.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

## Trigonometrisk funktioner

1. trigonometriska ettan.

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1.$$

2. Periodicitet.

$$\sin(v) = \sin(v + 360^\circ),$$

$$\cos(v) = \cos(v + 360^\circ),$$

$$\tan(v) = \tan(v + 180^\circ).$$

3. **Symmetri.** Punkten  $P$  i enhetscirkeln med koordinater  $(x, y) = (\cos(v), \sin(v))$ .

- Symmetripunkten med y-axeln är  $(-x, y) = (-\cos(v), \sin(v))$ .

$$\cos(180^\circ - v) = -\cos(v),$$

$$\sin(180^\circ - v) = \sin(v).$$

- Symmetripunkten med x-axeln är  $(x, -y) = (\cos(v), -\sin(v))$ .

$$\cos(-v) = \cos(v),$$

$$\sin(-v) = -\sin(v).$$

4.  $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$  är **lutningen** för  $OP$ , där  $O$  är origo.