Trigonometri

Wanmin Liu

20251120

Ma3c

Rum 3083.

Planering.

Pass 1.

- Förkunskapen i Ma1c.
  - Rätvinklig triangel
  - Pythagoras sats
  - sinus och cosinus funktioner i en rätvinklig triangel
  - Beräkna vinklar med tangens

- Uppgifter

Pass 2.

- Enhetscirkeln
- Allmänna positiva och negativa vinklar
- Definitioner av sinus-, cosinus- och tangentfunktioner
- Uppgifter i boken
- Aktiviter i par: Beräkning av funktionsvärden för vissa speciella vinklar.

Pass 1. 8.30 - 9.30.

Förkunskapen i Ma1c.

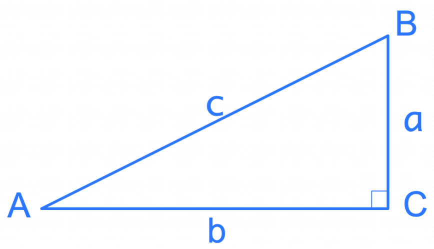
I en rätvinklig triangel ABC, där C är den räta vinkeln ($C = 90^\circ$), har vi relationer

$$A + B = 90^\circ,$$

eftersom $A + B + C = 180^\circ$, och Pythagoras sats

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Vi definerar tre funktionerna:



$$\sin A = \frac{a}{c},$$
$$\cos A = \frac{b}{c},$$
$$\tan A = \frac{a}{b}.$$

Kanten a kallas **motstående katet** av vinkel A. Kanten b kallas **närliggande katet** av vinkel A. Kanten c kallas **hypotenusa**.

Om vi tittar från vinkel B har vi också

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A,$$
$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A,$$
$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan A}.$$

Exempel 1. Trigonometriska ettan. Använd **Pythagoras sats** för att visa att

$$(\sin(A))^2 + (\cos(A))^2 = 1^2.$$

Detta samband kan vi förenklat skriva som

$$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1,$$

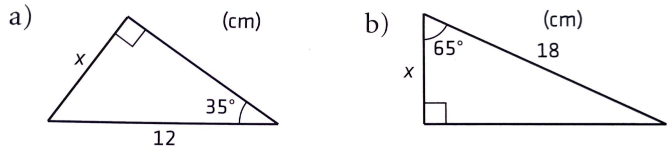
där $\sin^2(A)$ betyder $(\sin(A))^2 = \sin(A) \cdot \sin(A)$.

I en allmän triangel ABC har vi alltid $0 < A < 180^\circ$.

Motivationsfrågor.

1. Hur kan vi generera begreppet vinkel, till exempel 720° eller -45°?
2. Hur kan vi generalisera de tre funktionerna för mer generella vinklar?
3. Kan vi uttrycka vinklar på andra sätt? Vinklar på grader och *radianer* (*Matematik 4*).

Exempel 2. Beräkna längden av sidorna markerade med x, med hjälp av de trigonometriska sambanden.



Lösning (a) Med definition av sinus funktion har vi

$$\sin(35^\circ) = \frac{x}{12}.$$

Så $x = 12 \cdot \sin(35^\circ) \approx 6,9.$

Svar: Den sökta sidan är ungefär 6,9 cm.

(b) Med definition av cosinus funktion har vi

$$\cos(65^\circ) = \frac{x}{18}.$$

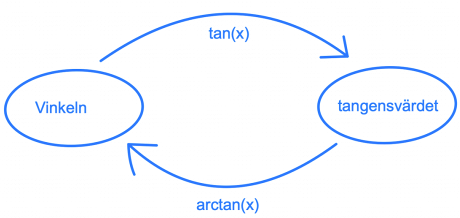
Så $x = 18 \cdot \cos(65^\circ) \approx 7,6.$

Svar: Den sökta sidan är ungefär 7,6 cm.

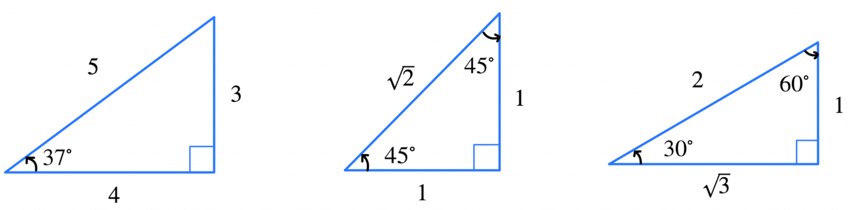
Tips: På miniräknare väljer vi **Degree** symbolen (inte RAD) till vinkeln.

Beräkna vinklar med tangens

Använder vi funktionsbegreppet så är $y = \arctan(x)$ en **invers funktion** till $y = \tan(x)$ och tvärtom.

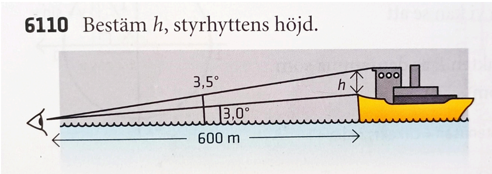


Exempel 3. 3-4-5-triangeln, likbent rätvinklig triangel (45°) och 30°-rätvinklig triangel.

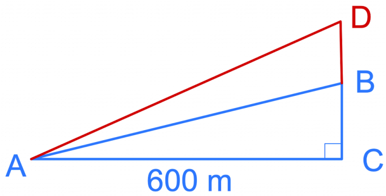


$$\arctan(\frac{3}{4}) \approx 36.8698976^\circ \approx 37^\circ,$$
$$\tan(37^\circ) \approx 0.753554 \approx \frac{3}{4}.$$

Exempel 4. Uppgift 6110.



Ger en ledtråd med bilden.



Lösning Vi ritar bilden med punkterna A, B, C, D. Vinkeln CAB är 3°. Vinkeln CAD är $3,5^\circ$. Höjden h är längden på BD.

Vi har

$$\tan(CAB) = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{600},$$
$$\tan(CAD) = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{600}.$$

Så är $BC = 600\tan(3^\circ)$, och $DC = 600\tan(3,5^\circ)$.

$$h = DC - BC = 600 \cdot \tan(3,5^\circ) - 600 \cdot \tan(3^\circ) \approx 36,7 - 31,4 = 5,3.$$

Svar: Höjden är 5,3 meter.

Uppgifter i boken. s 194. Nivå 1. 6101 (b), 6102 (b), 6103, 6104, 6105. Nivå 2. 6109, 6111, 6116.

Pass 2. 9.50 - 10.55

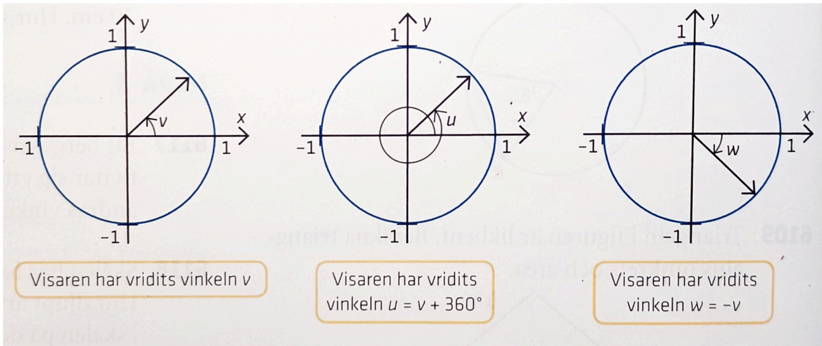
Enhetscirkeln

En enhetscirkel är en cirkel med radie 1 och centrum i origo.

En vinkel (med positivt/plus tecken) innebär en vridning **moturs** runt origo från den positiva x-axeln.

En vinkel med negativt/minus tecken innebär en vridning **medurs** runt origo från den positiva x-axeln.

Till exempel representerar -90° en rotation på 90° **medurs** runt origo från den positiva x-axeln.



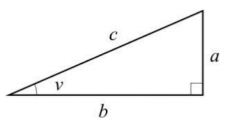
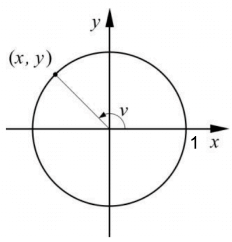
$$\text{Positiv vinkel} \iff \text{moturs} \qquad \text{Negativ vinkel} \iff \text{medurs}$$

Exempel 1. Varje morgon när jag lämnar mitt barn i skolan säger jag: "Jag ska krama dig och snurra dig tre varv." Men egentligen snurrar jag honom fyra varv moturs (åt vänster) och ett varv medurs (åt höger). Hur många grader snurrade jag mitt barn totalt?

Svar: Ett varv är 360 grader. Det är totalt

$$360^\circ \cdot (4-1) = 360^\circ \cdot 3 = 1080^\circ.$$

Definition av sinus, cosinus och tangens

Definitioner	Rätvinklig triangel	Enhetscirkel
		
	$\sin v = \frac{a}{c}$	$\sin v = y$
	$\cos v = \frac{b}{c}$	$\cos v = x$
	$\tan v = \frac{a}{b}$	$\tan v = \frac{y}{x}$

Vinkeln v bestämmer en punkt $P(x, y)$ på enhetscirkeln. Vi har Pythagoras sats

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Definiera att

$$\sin v = y\text{-koordinaten för punkt } P,$$

$$\cos v = x\text{-koordinaten för punkt } P,$$

och

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \quad \text{om } \cos v \neq 0.$$

Dvs punkten P har koordinater

$$(\cos v, \ \sin v),$$

och det finns **trigonometriska ettan** för vilken vinkel v som helst

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1,$$

där $\sin^2 v$ betyder $(\sin v)^2 = \sin v \cdot \sin v$ och $\cos^2 v$ betyder $(\cos v)^2 = \cos v \cdot \cos v$.

Egenskaper hos trigonometriska funktioner

Periodicitet.

$$\sin(v) = \sin(v + 360^\circ),$$
$$\cos(v) = \cos(v + 360^\circ),$$
$$\tan(v) = \tan(v + 180^\circ).$$

Nästa gång går vi igenom fler egenskaper hos trigonometriska funktioner

Aktivitet

Fyll i följande tabell parvis med hjälp av enhetscirkeln.

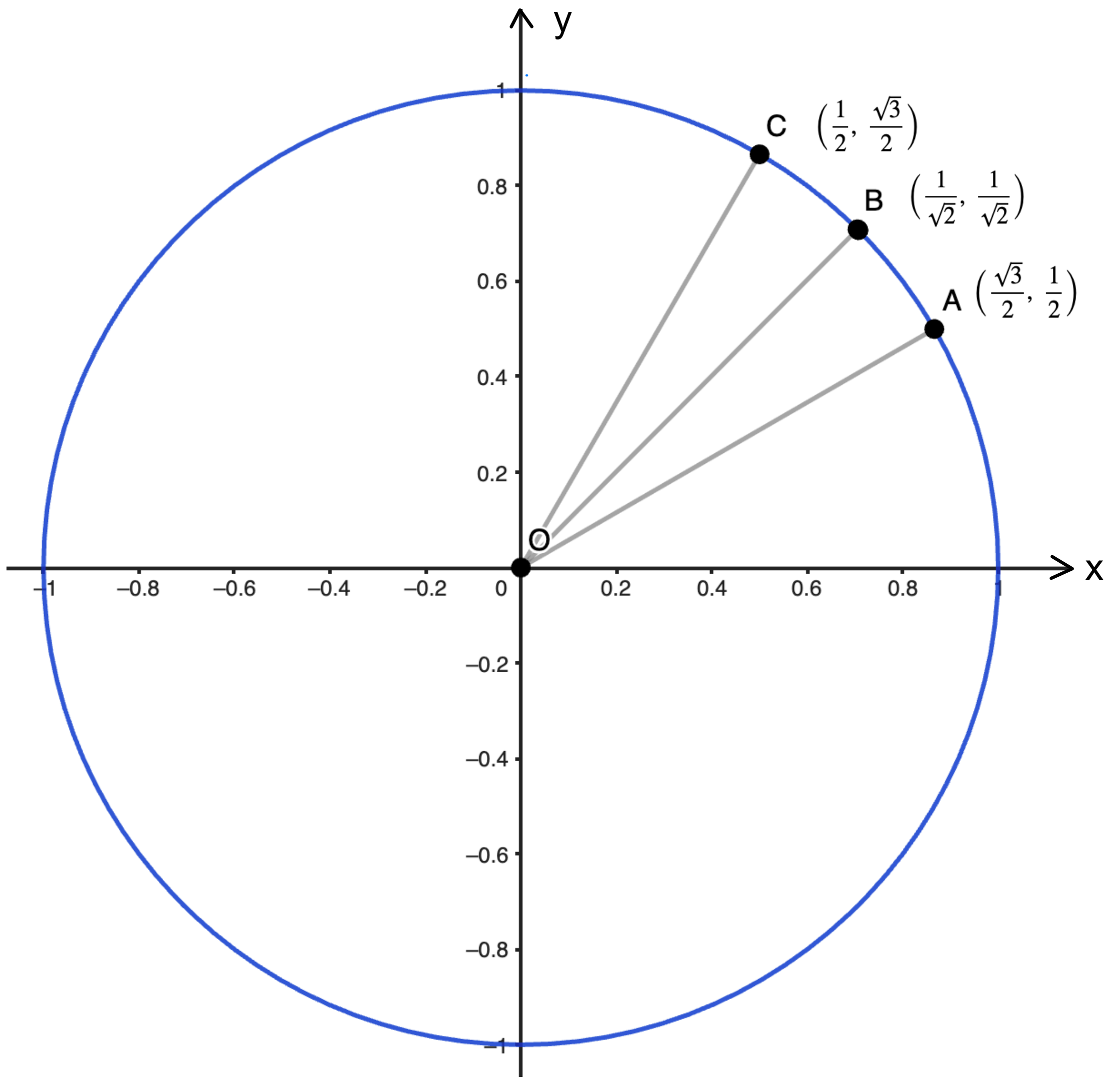
Uppgifter i boken.

s 198. Nivå 1. 6122, 6123, 6124, 6104, 6105. Nivå 2. 6109, 6111, 6116.

Namn 1: ____________

Namn 2: ____________

Fyll i följande tabell parvis med hjälp av enhetscirkeln.



v	$\sin v$	$\cos v$	$\tan v$
0°	0	1	0
30°		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
60°		$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	–
120°			
135°			
150°			
180°			
210°			
225°			
270°			
300°			
−45°			
−60°