AREAFORMEL FÖR REGELBUNDEN FEMHÖRNING – ETT ELEMENTÄRT BEVIS

WANMIN LIU
wanminliu@gmail.com

13 februari 2025

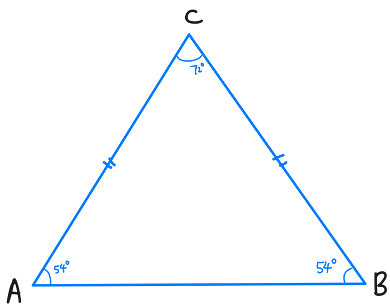
Abstract

Vi presenterar ett elementärt bevis för formeln för arean av en likbent triangel med en basvinkel på 54 grader. Beviset leder också till en formel för arean av en regelbunden femhörning med sidolängd a. Notera att vi inte har använt några trigonometriska funktioner i detta bevis.

Nyckelord: Pythagoras sats, area, likbent triangel, regelbunden femhörning.

1 PROBLEM: AREAN AV EN LIKBENT TRIANGEL MED EN BASVINKEL PÅ 54 GRADER

Exempel 1.1. I triangeln $\triangle ABC$ är sidorna AC och BC lika långa. AB längd är $4,5$ cm. Vinkeln B är 54 grader. Beräkna triangelns area.



Detta problem förekommer inom matematik för årskurs 9 i Sverige. Enligt *Kursplan i Matematik* [1] och det centrala innehållet för årskurs 7–9 kan vi inte använda trigonometriska funktioner, eftersom dessa inte behandlas i kursen. Vi presenterar därför ett elementärt bevis för formeln för arean av en likbent triangel. Beviset bygger på tre viktiga egenskaper:

- En likbent triangel har lika stora basvinklar.
- Likformighet: Förhållandet mellan motsvarande sidor i likformiga trianglar är lika.
- Pythagoras sats.

2 FÖRESLAGEN LÖSNING

Steg 1. Två grundläggande egenskaper hos likbenta trianglar

Vi börjar med att granska två grundläggande egenskaper hos likbenta trianglar. För att tydligt representera längder använder vi symbolen $|AC|$ för längden av linjesegmentet AC.

Lemma 2.1. *För en likbent triangel $\triangle ABC$ där $|AC| = |BC|$ gäller att $\angle BAC = \angle ABC$.*

Lemma 2.2. *Låt triangeln $\triangle ABC$ vara en likbent triangel där $|AC| = |BC|$. Om en vinkelrät linje dras från C till AB, med skärningspunkten D, så är CD bisektrisen av vinkeln $\angle ACB$. Det innebär att vinkeln $\angle ACD$ är lika med vinkeln $\angle DCB$.*

I det här exemplet vet vi att $\angle ABC = \angle BAC = 54°$ och $\angle ACB = 180° - 2 \cdot 54° = 72°$. Enligt Lemma 2.2 kan vi därför dra slutsatsen att vinkeln $\angle ACD = 36°$.

Vi vet också att:

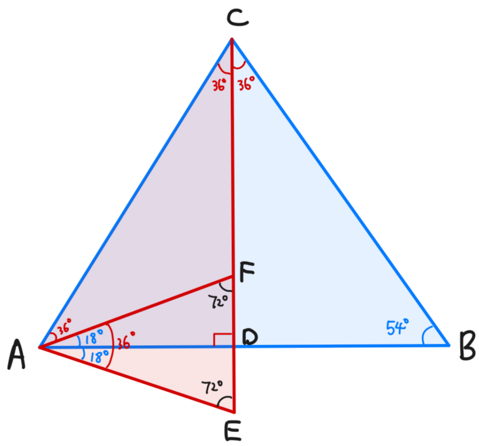
$$|AD| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{9}{4} \quad (\text{cm}).$$

Arean av $\triangle ABC$ ges av:

$$\triangle ABC = |AD| \cdot |DC| \quad (\text{cm}^2).$$

Steg 2. Konstruktion av tre likbenta trianglar

Vi förlänger linjesegmentet CD till E så att $|CA| = |CE|$. På så sätt bildas en likbent triangel $\triangle ACE$. Med hjälp av Lemma 2.1 och det faktum att vinkeln $\angle ACE = 36°$, får vi att $\angle AEC = \angle EAC = 72°$.



Vi utelämnar enheten "cm" för enkelhetens skull och betecknar $x := |AC|$ och $y := |AE|$. Eftersom vinkeln $\angle AEC$ är större än vinkeln $\angle ACE$, gäller:

$$x > y. \tag{2.1}$$

Låt punkten F ligga på linjen CD så att $|DE| = |DF|$. Då är triangeln $\triangle EAF$ också en likbent triangel med $y = |AE| = |AF|$. Genom att återigen använda Lemma 2.1 får vi att $\angle AFE = \angle AEF = 72°$.

Eftersom $\angle FAC + \angle FCA = \angle AFE$, har vi:

$$\angle FAC = \angle AFE - \angle FCA = 72° - 36° = 36°.$$

Därför är triangeln $\triangle AFC$ också en likbent triangel, och sidolängden $|CF|$ är lika med $|AF|$, det vill säga $|CF| = |AF| = y$.

Steg 3. Likformighet

Två trianglar är likformiga om två vinklar i den ena triangln är lika stora som två vinklar i den andra triangeln. Vi kan konstatera att trianglarna $\triangle ACE$ och $\triangle EAF$ är likformiga. Därför gäller att förhållandet mellan motsvarande sidor är lika:

$$\frac{|CA|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|EF|}.$$

Vi utelämnar enheten "cm" och skriver $|EF| = |CE| - |CF| = x - y$. Därmed får vi

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}. \tag{2.2}$$

Steg 4. Pythagoras sats

För den rätvinkliga triangeln $\triangle ADC$ använder vi Pythagoras sats, vilket ger:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2.$$

Vi beräknar längden av $|DC|$: $|DC| = |CF| + |FD| = |CF| + \frac{1}{2}|EF| = y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}$.

Beteckna längden av AB med a (cm). Då är $|AD| = \frac{a}{2}$.

Genom att sätta in dessa värden i Pythagoras sats får vi följande formel:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \tag{2.3}$$

Steg 5. Beräkningen

Vi beräknar arean av $\triangle ABC$ enligt följande:

$$\text{Arean av } \triangle ABC = |AD| \cdot |CD| = \frac{a}{2} \cdot \frac{x+y}{2}, \tag{2.4}$$

med hjälp av ekvationerna (2.2) och (2.3).

Från ekvationen (2.2) får vi:

$$x^2 = xy + y^2.$$

Beteckna

$$x = \phi y \tag{2.5}$$

för ett tal ϕ. Då får vi ekvationen

$$\phi^2 y^2 = \phi y^2 + y^2.$$

Eftersom $y \neq 0$, kan vi förenkla detta till:

$$\phi^2 = \phi + 1. \tag{2.6}$$

Kom ihåg relationen i (2.1), vilket ger att $\phi > 1$. Vi löser denna andragradsekvation och får:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2.7}$$

Från ekvationen (2.3) får vi:

$$4x^2 = a^2 + (x+y)^2.$$

Sätt in relationen $x = \phi y$ i ekvationen ovan. Vi får

$$4\phi^2 y^2 = a^2 + (1+\phi)^2 y^2 = a^2 + \phi^4 y^2, \tag{2.8}$$

där vi använder relationen (2.6) i den sista ekvationen.

För att lösa för y har vi

$$\left(4\phi^2 - \phi^4\right) y^2 = a^2,$$

vilket ger

$$\phi^2(4-\phi^2)y^2 = a^2.$$

Genom att använda ekvationen (2.6) får vi att $4-\phi^2 = 4-(1+\phi) = 3-\phi$. Så vi får

$$y = \frac{a}{\phi\sqrt{3-\phi}}. \tag{2.9}$$

Därför är arean av $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}\text{Arean av } \triangle ABC = |AD|\cdot|CD| &= \frac{a}{2}\cdot\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{(1+\phi)y}{2} \\ &= \frac{a^2}{4}\frac{1+\phi}{\phi\sqrt{3-\phi}} = \frac{a^2}{4}\frac{\phi^2}{\phi\sqrt{3-\phi}} \\ &= \frac{a^2}{4}\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

där ϕ ges av (2.7) och $a = \frac{9}{2}$ cm.

Lösning. Arean av $\triangle ABC$ är

$$\frac{81}{16}\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}} \quad \text{cm}^2$$

där $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Med hjälp av en miniräknare är arean av triangeln $\triangle ABC$ ungefär lika med 7 kvadratcentimeter. □

Anmärkning 2.3. Vi kan också göra följande beräkningar, men detta är inte nödvändigt eller viktigt.

Låt oss göra beräkningen $\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}}$ först. Beräkningen använder formlerna $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ och $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned}\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}} &= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{3-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{12-2(1+\sqrt{5})}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}} = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{(10^2-(2\sqrt{5})^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} \\ &= \sqrt{\frac{80+32\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})5}}{5} \\ &= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\text{Arean av } \triangle ABC = \frac{a^2}{4}\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}} = \frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}. \tag{2.12}$$

Anmärkning 2.4. Om vi kan använda trigonometriska funktioner, så är

$$\tan(\angle DAC) = \frac{|DC|}{|AD|}, \quad \text{dvs} \quad |DC| = |AD|\tan(54°). \tag{2.13}$$

Sedan har vi

$$\text{Arean av } \triangle ABC = |AD|\cdot|DC| = |AD|^2\tan(54°) = \frac{a^2}{4}\tan(54°).$$

Ovanstående beräkning ger faktiskt

$$\tan(54°) = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}. \tag{2.14}$$

Att beräkna $\tan(54°)$ i exakt form som i (2.14) är en standardövning i trigonometriska formler.

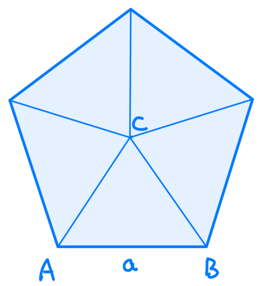
Anmärkning 2.5. Ekvationen (2.6) kallas för den gyllene snittets ekvation, och lösningen $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kallas det gyllene snittet. Detta tal har många applikationer, till exempel för att beräkna Fibonaccis talföljd.

3 AREAFORMEL FÖR REGELBUNDEN FEMHÖRNING

Sats 3.1. Arean av en regelbunden femhörning med sidolängd a är

$$\text{Arean av } \pentagon = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}. \tag{3.1}$$

Bevis. Låt C vara mitten av den regelbundna femhörningen. Dra linjer från punkt C till varje hörn för att skapa fem identiska trianglar. Låt en av dessa trianglar ha basen AB som är en sida av femhörningen. Då är vinkeln $\angle ACB = \frac{360°}{5} = 72°$. Vinklarna $\angle CAB$ och $\angle CBA$ är lika och har värdet $(180° - 72°)/2 = 54°$. Vi får triangeln $\triangle ABC$ som är precis som i Exempel 1.1. Genom ekvationerna (2.10) och (2.12) kan vi beräkna arean av triangeln



$\triangle ABC$. Därför ges arean av den regelbundna femhörningen av formeln

$$\text{Arean av } \pentagon = 5\cdot\text{Arean av } \triangle ABC = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}. \qquad \square$$

Anmärkning 3.2. Med hjälp av en miniräknare kan vi beräkna att arean för en regelbunden femhörning med sidlängd a kan approximeras som:

$$\text{Arean av } \pentagon \approx 1{,}72a^2. \tag{3.2}$$

Anmärkning 3.3. Om vi betecknar längden av CA med r, och kallar det radien av regelbunden femhörning, har vi då $r = x = \phi y = \frac{a}{\sqrt{3-\phi}}$, som bara är en omskrivning av ekvationen (2.9). Vi får då arean av regelbunden femhörningen med radien r

$$\text{Arean av } \pentagon = \frac{(3-\phi)r^2}{4}\frac{5\phi}{\sqrt{3-\phi}} = \frac{5\phi\sqrt{3-\phi}}{4} \cdot r^2.$$

Med samma teknik som att beräkna (2.11) kan vi hitta att

$$\text{Arean av } \pentagon = \frac{5\phi\sqrt{3-\phi}}{4} \cdot r^2 = \frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}r^2 \approx 2{,}38r^2.$$

Övning 3.4. På liknande sätt bevisa att arean av *regelbunden sexhörning* med radie r är :

$$\text{Arean av } \hexagon = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 \approx 2{,}6r^2.$$

Övning 3.5. Bevisa att arean av *regelbunden tiohörning* med radie r är :

$$\text{Arean } = \frac{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}r^2 \approx 2{,}94r^2.$$

Tips. Man kan beräkna arean av $\triangle ACE$ och sedan multiplicera den med 10.

Man kan visa att arean av *regelbunden månghörning/regelbunden polygon* är proportionell mot dess kvadrat av radien.

Man kan tänka sig att när antalet sidor av en regelbunden polygon ökar, blir polygonen mer som en cirkel. Arean av en cirkel med radien r ges av $\pi r^2 \approx 3{,}14r^2$.

REFERENCES

[1] 'Läroplan (Lgr22) för grundskolan samt för förskoleklassen och fritidshemmet'. https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr22-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet.