Diskriminant och antal lösningar till en andragradsekvation

Faktum: för vilket reellt tal t som helst har vi alltid $t \cdot t \geq 0$.

Tecken $\pm$ betyder: $+$ **ELLER** $-$.

Definition av kvadratrot

- Om $a > 0$ definieras kvadratroten ur a som **det positiva talet** (skrivs $\sqrt{a}$) vars kvadrat är a, dvs $\sqrt{a} > 0$ och $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. T.ex $\sqrt{4} = 2$.
- Om $a = 0$ defineras $\sqrt{0} = 0$.
- Om $a < 0$ saknar $\sqrt{a}$ betydelse som reellt tal. T.ex Kvadratroten ur -1, $\sqrt{-1}$ har ingen betydelse som ett reellt tal eftersom för vilket reellt tal t som helst har vi alltid $t \cdot t \geq 0$.

Exempel.

a). Lös ekvationen $(x-1)^2 = 4$.

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 4 \\ (x-1) &= \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ x &= 1 \pm 2 \end{aligned}$$

Det finns två lösningar: $x = 1 + 2 = 3$ eller $x = 1 - 2 = -1$.

b). Lös ekvationen $(x-1)^2 = 0$.

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 0 \\ (x-1) &= \pm\sqrt{0} = \pm 0 = 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Det finns en lösning: $x = 1$.

c). Lös ekvationen $(x-1)^2 = -1$.
Vi har alltid $(x-1)^2 \geq 0$. Det finns ingen lösning med reella tal.

Andragradsekvation i pq-form och lösningar.

$$x^2 + px + q = 0.$$

Hur kan man lösa ekvationen? Formelblad

$$x = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kvadratkomplettering

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Antalet lösningar till en andragradsekvation beror på uttrycket $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Vi ger detta uttryck ett namn: **diskriminant** (i pq-formen). Det är uttrycket under rottecken i formelblad.

Vi kan se direkt hur många lösningar **utan att lösa ekvationen**.

Diskriminant och antal lösningar till en andragradsekvation

- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, finns två reella lösningar.
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, finns en enda reell lösning.
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, finns ingen reell lösning.

Geometriförklaring av diskriminant.

Grafen för andragradfunktion

$$y = f(x) = x^2 + px + q$$

är en parabel som öppnar sig uppåt, dvs en glad mun.

- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, skär parabeln x-axeln i två punkter.
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ skär parabeln x-axeln endast i en punkt (och tangerar den).
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ skär parabeln x-axeln inte i några punkter och ligger ovanför x-axeln.

Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ finns det två icke-reella lösningar (komplexa tal)

$$x = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

där i är den imaginära enheten, dvs $i^2 = -1$.

Uppgift

Matematik origo 2b. S.56: 2218, 2219, 2220, 2223, 2224.

Grafers skärningspunkter och ekvationssystem

Graf av funktionen $y = f(x)$

Grafen är alla punkter (x, y) som uppfyller $y = f(x)$, dvs $(x, f(x))$ för alla x i definitionsmängden.

Exempel: Linjär funktion $y = kx + m$ med k och m konstanter och $k \neq 0$.

Grafen är en linje med lutningen k och skärningspunkten på y-axeln med koordinaten $(0,\ m)$. Varje punkt på linjen har koordinaten $(x,\ f(x)) = (x,\ kx + m)$.

Exempel: Andragradfunktion

$$y = f(x) = x^2 + px + q.$$

Denna graf är en parabel pekar uppåt, dvs en glad mun.

Vad är skärningspunkter mellan grafer till $y = f(x)$ och $y = g(x)$?

Skärningspunkterna mellan graferna till $y = f(x)$ och $y = g(x)$ är de punkter (x, y) som ligger på båda graferna samtidigt. Det betyder att både $y = f(x)$ och $y = g(x)$ gäller för samma x-värde. Alltså måste $f(x) = g(x)$. Lös ekvationen

$$f(x) = g(x).$$

Vi får de x-värden där graferna möts.

Vi kan också representera skärningspunkterna med hjälp av ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Exempel: Bestäm skärningspunkterna mellan parabeln $y = 2x^2 - 5x + 1$ och den räta linjen $y = 3x - 5$.

Lösning. Metod 1. Grafisk metod. Antag att vi har grafer.

Metod 2. Algebraisk metod.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$$

Vi använder substitutionsmetoden. Genom att substituera y av formen i den andra ekvationen i den första ekvationen får vi $2x^2 - 5x + 1 = 3x - 5$, dvs

$$2x^2 - 8x + 6 = 0.$$

Den koefficienten framför x^2 är 2, dvs det är inte i pq-formen.

Vi dividerar på båda sidor med 2. Så vi får

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Då är

$$p = -4, \quad \frac{p}{2} = -2, \quad q = 3.$$

$$x = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} = 2 \pm 1.$$

Dvs $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$.

$x_1 = 1$ ger $y_1 = 3 \cdot 1 - 5 = -2$.

$x_2 = 3$ ger $y_2 = 3 \cdot 3 - 5 = 4$.

Svar. De två skärningspunkterna är $(1, \ -2)$ och $(3, \ 4)$.

Samma matematik i fyra aspekter av tolkningar.

1. **Nollställena** till funktionen $y = f(x)$.
2. Lösningar till ekvationen $f(x) = 0$.
3. Skärningspunkten mellan funktionens graf och x-axeln.
4. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Geometriförklaring av diskriminant, återbesökt.

Grafen för

$$y = f(x) = x^2 + px + q$$

är en glad mun (en parabel som öppnar sig uppåt).

$$\begin{cases} y = x^2 + px + q \\ y = 0 \end{cases}$$

Diskriminanten avgör om parabeln skär x-axeln.

- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, skär parabeln x-axeln i två punkter.
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ skär parabeln x-axeln endast i en punkt (och tangerar den).
- Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ skär parabeln x-axeln inte i några punkter och ligger ovanför x-axeln.

Uppgift

Matematik origo 2b. S.101: 3312,3313, 3315, (3318).