

## 20251105 Ma2b

### Antal lösningar till en andragradsekvation

Faktum: för vilket reellt tal  $t$  som helst har vi alltid  $t^2 = t \cdot t \geq 0$ .

Tecken  $\pm$  betyder: + **ELLER** -.

### Definition av kvadratrot

- Om  $a > 0$  definieras kvadratrotten ur  $a$  som **det positiva talet** (skrivs  $\sqrt{a}$ ) vars kvadrat är  $a$ , dvs  $\sqrt{a} > 0$  och  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ . T.ex  $\sqrt{4} = 2$ .
- Om  $a = 0$  definieras  $\sqrt{a} = \sqrt{0} = 0$ .
- Om  $a < 0$  saknar  $\sqrt{a}$  betydelse som reellt tal. T.ex Kvadratrotten ur  $-1$ ,  $\sqrt{-1}$  har ingen betydelse som ett reellt tal eftersom för vilket reellt tal  $t$  som helst har vi alltid  $t \cdot t \geq 0$ .

**Exempel.** Lös ekvationerna (a)  $(x - 1)^2 = 4$ , (b)  $(x - 1)^2 = 0$  och (c)  $(x - 1)^2 = -1$ .

### Andragradsekvation i $pq$ -form och lösningar.

$$x^2 + px + q = 0.$$

Hur kan man lösa ekvationen? Formelblad

$$x = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Antalet lösningar till en andragradsekvation beror på uttrycket  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ . Det är uttrycket under rottecken i formelblad. Vi ger detta uttryck ett namn: **diskriminant** (i  $pq$ -formen). Vi kan se direkt hur många lösningar **utan att lösa ekvationen**.

### Diskriminant och antal lösningar till en andragradsekvation.

- Om  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ , finns två reella lösningar.
- Om  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ , finns en enda reell lösning.
- Om  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ , finns ingen reell lösning.

**Uppgift** S.56: 2218, 2219, 2220, 2223, 2224.

**Graf** av funktionen  $y = f(x)$  är alla punkter  $(x, y)$  som uppfyller  $y = f(x)$ , dvs  $(x, f(x))$  för alla  $x$  i definitionsmängden.

**Exempel:** Grafen av funktion  $y = kx + m$  är en linje med lutningen  $k$  och skärningspunkten på  $y$ -axeln med koordinaten  $(0, m)$ . Varje punkt på linjen har koordinaten  $(x, f(x)) = (x, kx + m)$ .

**Exempel:** Grafen av andragradsfunktion  $y = f(x) = x^2 + px + q$  är en parabel pekar uppåt, dvs en glad mun.

**Vad är skärningspunkter mellan grafer till  $y = f(x)$  och  $y = g(x)$  ?**

Skärningspunkterna är de punkter  $(x, y)$  som ligger **på båda graferna samtidigt**.

Det betyder att både  $y = f(x)$  och  $y = g(x)$  gäller för samma  $x$ -värde. Alltså måste  $f(x) = g(x)$ . Vi kan lösa ekvationen  $f(x) = g(x)$  och får de  $x$ -värden där graferna möts.

Vi kan också representera skärningspunkterna med hjälp av ekvationssystemet.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

**Exempel:** Bestäm skärningspunkterna mellan parabeln  $y = 2x^2 - 5x + 1$  och den räta linjen  $y = 3x - 5$ .

Metod 1. Grafisk metod. Antag att vi har grafer. Metod 2. Algebraisk metod. Vi använder substitutionsmetoden.

**Svar.** De två skärningspunkterna är  $(1, -2)$  och  $(3, 4)$ .

**Samma matematik i fyra aspekter av tolkningar.**

1. **Nollställena** till funktionen  $y = f(x)$ .
2. Lösningar till ekvationen  $f(x) = 0$ .
3. Skärningspunkten mellan funktionens graf och  $x$ -axeln.
4. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

**Geometriförklaring av diskriminant, återbesökt.**

Grafen för

$$y = f(x) = x^2 + px + q$$

är en glad mun (en parabel som öppnar sig uppåt).

$$\begin{cases} y = x^2 + px + q \\ y = 0 \end{cases}$$

Diskriminanten avgör om parabeln skär  $x$ -axeln.

- Om  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ , skär parabeln  $x$ -axeln i två punkter.
  - Om  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$  skär parabeln  $x$ -axeln endast i en punkt (och tangerar den).
  - Om  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$  skär parabeln  $x$ -axeln inte i några punkter och ligger ovanför  $x$ -axeln.
- 

**Uppgift** S.101: 3312, 3313, 3315, (3318).