AREAFORMEL FÖR REGELBUNDEN FEMHÖRNING – ETT ELEMENTÄRT BEVIS

WANMIN LIU
wanminliu@gmail.com

8 februari 2025

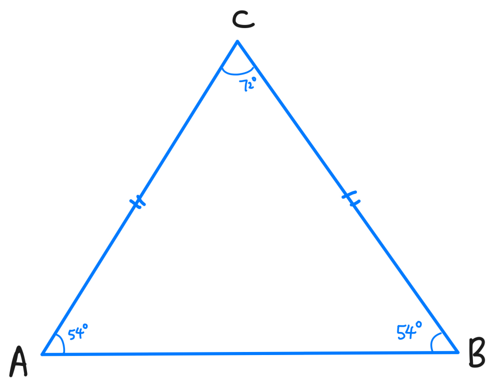
Abstract

Vi ger ett elementärt bevis på formeln för arean av en likbent triangel med en basvinkel på 54 grader. Detta bevis ger också arean av en regelbunden femhörning med sidolängd a. Vi har inte använt trigonometriska funktioner i detta bevis.

Nyckelord: Pythagoras sats, area, likbent triangel, regelbunden femhörning.

1 PROBLEM: AREAN AV EN LIKBENT TRIANGEL MED EN BASVINKEL PÅ 54 GRADER

Exempel 1.1. I triangeln $\triangle ABC$ är sidorna AC och BC lika långa. AB längd är $4{,}5$ cm. Vinkeln B är 54 grader. Beräkna triangelns area.



Detta problem förekommer i matematik för årskurs 9 i Sverige. Enligt *Kursplan i Matematik* [1] och centralt innehåll i årskurs 7-9 kan vi inte använda trigonometriska funktioner eftersom det inte finns några trigonometriska funktioner inblandade. Vi ger ett elementärt bevis på formeln för arean.

Beviset använder tre viktiga egenskaper:

- Likbenta trianglar har samma basvinklar.
- kongruens, dvs motsvarande sidor av liknande trianglar är proportionella.
- Pythagoras sats.

2 FÖRESLAGEN LÖSNING.

Steg 1. Två grundläggande egenskaper hos likbenta trianglar.

Vi granskar två grundläggande egenskaper hos likbenta trianglar. vi använder symbolen $|AC|$ för att representera längden på linjesegment AC.

Lemma 2.1. *För likbent triangel $\triangle ABC$ med $|AC| = |BC|$ har vi $\angle BAC = \angle ABC$.*

Lemma 2.2. *Om en vinkelrät linje ritas från C till AB, med skärningspunkten D, så är CD bisektrisen av vinkeln $\angle ACB$, det vill säga vinkeln $\angle ACD$ är lika med vinkeln $\angle DCB$.*

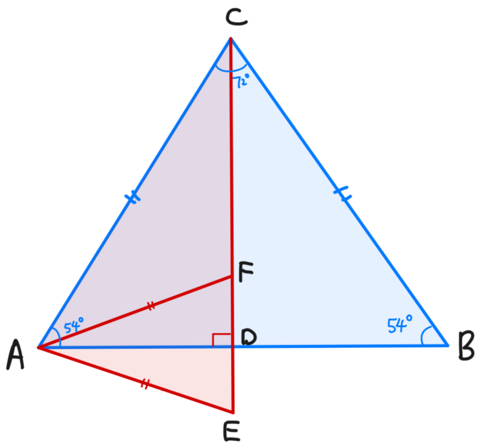
Med den givna informationen i detta exempel vet vi att $\angle ABC = \angle BAC = 54°$ och $\angle ACB = 180° - 2 \cdot 54° = 72°$. Enligt Lemma 2.2 kan vi veta att vinkeln $\angle ACD = 36°$.

Vi vet att $|AD| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{9}{4}$ (cm).

Area $\triangle ABC = |AD| \cdot |DC|$ (cm^2).

Steg 2. Konstruktion av tre likbenta trianglar.

Vi förlänger linjesegment CD till E så att $|CA| = |CE|$. Så vi får en likbent triangel $\triangle ACE$. Genom att använda Lemma 2.1 och det faktum att vinkel $\angle ACE = 36°$ får vi vinkel $\angle AEC = \angle EAC = 72°$.



Vi utelämnar enheten cm. Beteckna $x := |AC|$ och $y := |AE|$. Eftersom vinkel $\angle AEC$ är större än vinkel $\angle ACE$ har vi

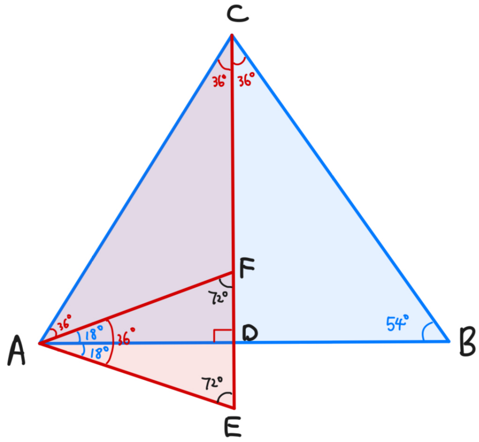
$$x > y. \tag{2.1}$$

Låt punkten F vara på linjen CD så att $|DE| = |DF|$. Då är triangeln $\triangle EAF$ också en likbent triangel med $y = |AE| = |AF|$. Genom att använda Lemma 2.1 igen får vi $\angle AFE = \angle AEF = 72°$.

Eftersom $\angle FAC + \angle FCA = \angle AFE$, har vi $\angle FAC = \angle AFE - \angle FCA = 72° - 36° = 36°$. Därför är triangeln $\triangle AFC$ också en likbent triangel med sidolängden $|CF| = |AF| = y$.

Steg 3. Liknande likbenta trianglar. Vi finner att likbent triangel $\triangle ABC$ liknar likbent triangel $\triangle EAF$. Därför har vi liknande sidoförhållanden:

$$\frac{|CA|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|EF|}.$$



Vi utelämnar enheten cm och skriver $|EF| = |CE| - |CF| = x - y$. Vi får

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}. \tag{2.2}$$

Steg 4. Pythagoras sats.

För rätvinklig $\triangle ADC$ använder vi Pythagoras sats. Vi får

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2.$$

Vi räknar ut $|DC| = |CF| + |FD| = |CF| + \frac{1}{2}|EF| = y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}$.
Beteckna längden på AB med a (cm). Då är $|AD| = \frac{a}{2}$.
Då får vi formeln

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \tag{2.3}$$

Steg 5. Beräkningen.

Vi beräknar

$$\text{Arean av } \triangle ABC = |AD| \cdot |CD| = \frac{a}{2} \cdot \frac{x+y}{2}, \tag{2.4}$$

med hjälp av ekvationerna (2.2) och (2.3).

Genom ekvationen (2.2) får vi

$$x^2 = xy + y^2.$$

Beteckna $x = \phi y$ för ett tal ϕ. Då får vi ekvationen

$$\phi^2 y^2 = \phi y^2 + y^2.$$

Eftersom $y \neq 0$ får vi ekvationen

$$\phi^2 = \phi + 1. \tag{2.5}$$

Kom ihåg (2.1). Så $\phi > 1$. Vi löser denna andragradsekvation och får

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2.6}$$

Ekvationen (2.3) ger

$$4x^2 = a^2 + (x+y)^2.$$

Sätt in relationen $x = \phi y$ i ekvationen. Vi får

$$4\phi^2 y^2 = a^2 + (1+\phi)^2 y^2 = a^2 + \phi^4 y^2, \tag{2.7}$$

där vi använder relationen (2.5) i den sista ekvationen.

För att lösa y har vi

$$\left(4\phi^2 - \phi^4\right) y^2 = a^2,$$

dvs

$$\phi^2(4-\phi^2)y^2 = a^2.$$

Genom att använda ekvationen (2.5) får vi $4-\phi^2 = 4-(1+\phi) = 3-\phi$. Så vi får

$$y = \frac{a}{\phi\sqrt{3-\phi}}.$$

Därför är

$$\begin{aligned}
\text{Arean av } \triangle ABC = |AD|\cdot|CD| &= \frac{a}{2}\cdot\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{(1+\phi)y}{2} \\
&= \frac{a^2}{4}\frac{1+\phi}{\phi\sqrt{3-\phi}} = \frac{a^2}{4}\frac{\phi^2}{\phi\sqrt{3-\phi}} \\
&= \frac{a^2}{4}\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

där ϕ ges av (2.6) och $a = \frac{9}{2}$ cm.

Lösning. Arean av $\triangle ABC$ är $\frac{81}{16}\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}}$ cm^2 med $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Kommentar 2.3. Vi kan också göra följande beräkningar. Men detta är inte nödvändigt eller viktigt. Beräkningen använder formlerna

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2, \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Arean av } \triangle ABC &= \frac{a^2}{4}\frac{\phi}{\sqrt{3-\phi}} = \frac{a^2}{4}\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{3-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{a^2}{4}\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{12-2(1+\sqrt{5})}} \\
&= \frac{a^2}{4}\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}} = \frac{a^2}{4}\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{(10^2-(2\sqrt{5})^2)}} \\
&= \frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} = \frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} \\
&= \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{80+32\sqrt{5}}{80}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \\
&= \frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})5}}{5} = \frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Kommentar 2.4. Om vi kan använda trigonometriska funktioner är

$$\tan(\angle DAC) = \frac{|DC|}{|AD|}, \quad \text{dvs} \quad |DC| = |AD|\tan(54°). \tag{2.10}$$

Sedan har vi

$$\text{Arean av } \triangle ABC = |AD||DC| = |AD|^2 \tan(54°) = \frac{a^2}{4} \tan(54°).$$

Ovanstående beräkning beräknar faktiskt

$$\tan(54°) = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}. \tag{2.11}$$

Att beräkna $\tan(54°)$ i en exakt form (2.11) är en standardövning i trigonometriska formler.

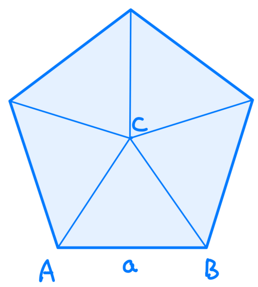
Kommentar 2.5. Ekvationen (2.5) kallas för det gyllene snittet ekvation, och lösningen $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kallas det gyllene snittet. Den har många applikationer, till exempel för att beräkna Fibonaccis talföljd.

3 AREAFORMEL FÖR REGELBUNDEN FEMHÖRNING

Sats 3.1. Arean av en regelbunden femhörning med sidolängd a är

$$\text{Arean av } \pentagon = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}. \tag{3.1}$$

Bevis. Låt mitten av den regelbunden femhörningen vara C. Vi kopplar linjer från punkt C till varje vertex för att få fem identiska trianglar. Låt ena sidan vara AB som visas i figuren. Då är vinkeln $\angle ACB = \frac{360°}{5} = 72°$. Vinklarna $\angle CAB$ och $\angle CBA$ är lika, som är 54 grader. Genom ekvationerna (2.8)



och (2.9) får vi arean av triangeln $\triangle ABC$. Därför ges arean av regelbunden femhörningen

$$\text{Arean av } \pentagon = 5 \cdot \text{Arean av } \triangle ABC = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}. \qquad \square$$

REFERENCES

[1] 'Läroplan (Lgr22) för grundskolan samt för förskoleklassen och fritidshemmet'. https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr22-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet.