

# Vad är summan av de första $n$ positiva udda talen?

## en lektion om Algebra, Geometri och Sannolikhet

---

Wanmin Liu

16 sept, 2025

////////////////////////////////////

Vi planerar en lektion om algebra, geometri och sannolikhet.

Vi följer Brousseaus fasor.

### Delegering

Läraren visar en bild av en elevs skoskåp i skolan. På bilden syns fyrkantiga skåp tydligt.

Läraren frågar: Hur många skoskåp finns det totalt?



Sedan ställer läraren fler frågor.

Metod

Undervisningen är heuristisk. Läraren börjar med enkla frågor:

Vad är  $1 + 3$ ? (Ledtråd: skriv  $2 \times 2$ )

Vad är  $1 + 3 + 5$ ? (Ledtråd: skriv  $3 \times 3$ )

Vad är  $1 + 3 + 5 + 7$ ? (Ledtråd: skriv  $4 \times 4$ )

Vad är  $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ ? (Ledtråd: skriv  $5 \times 5$ )

Eleverna upptäcker själva sambandet mellan **addition** och **multiplikation**.

Efter att vi tillsammans har besvarat de enkla frågorna ovan, besvarar eleverna följande **två** frågor.

### Fråga 1

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + ? = 2025$$

(Ledtråd:  $2025 = 45 \times 45$ )

### Fråga 2

Vad är summan av de första  $n$  positiva udda talen?

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = ?$$

## Aktion

Läraren förklarar reglerna tydligt.

- Först arbetar eleverna själva med problemet.
- Sedan diskuterar de i par. Läraren går runt och hjälper vid behov.

## Formulering

Eleverna skriver sina svar på rutat papper. Tre grupper skriver sina svar på whiteboarden. De presenterar sina svar muntligt. Andra elever deltar i diskussionen.

## Validering

Eleverna diskuterar och jämför svaren. Så kan de kontrollera om deras tänkande är rätt.

Läraren sammanfattar de algebraiska metoderna. Läraren visar sedan den algebraiska formeln. Med geometri visar läraren varför formeln stämmer.

**Fråga 3** Vad är arean av en kvadrat med sidan  $n$ ?

Eleverna räknar på två sätt:

- med **multiplikation**
- med **addition**

Svaret blir detsamma. Det ger ett enkelt bevis på formeln.



## Institutionalisering

Läraren visar vad eleverna har lärt sig. Eleverna jämför sina tankar. Läraren ställer nya frågor:

**Fråga 4** Vad är summan av de första  $n$  jämna talen?

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = ?$$

**Ledtråd:**

- Hur hänger denna fråga ihop med den förra?
- Hur mycket större är summan av de första  $n$  jämna talen än summan av de första  $n$  udda talen?

Eleverna diskuterar i par. De ser mönstret.

Finns det ett tydligt geometriskt bevis?

## Didaktiska variabler

Fortsätt att ställa frågor:

**Fråga 5** Vad är summan av de första  $n$  positiva heltalen?

Tänkande:

- Gauss hittade summan av de första  $n$  positiva naturliga talen.

**Fråga 6** Sannolikhet (och kombination) Hur många handskakningar blir det om  $(n + 1)$  personer skakar hand med varandra?

**Ledtråd:**

1. Hur många handskakningar blir det om 2 personer skakar hand med varandra?
2. Hur många handskakningar blir det om 3 personer skakar hand med varandra?
3. Hur många handskakningar blir det om 4 personer skakar hand med varandra?
4. Hur många handskakningar blir det om 5 personer skakar hand med varandra?

- Elever förklarar med **multiplikations** metod.
- Elever förklarar med **additions** metod.

## Diskussion

Kursen handlar om algebra, geometri och sannolikhet.

Frågorna går från enkla och konkreta till svårare och abstrakta. På det sättet utvecklar eleverna sitt matematiska tänkande.

När eleverna jämför enkla situationer kan de steg för steg se allmänna mönster i algebra.

Men **varför** kommer kvadrattal fram?

Konkreta situationer är situationer med låg kognitiv förmåga.

Abstrakta situationer är situationer med hög kognitiv förmåga.

Kursen använder enkla bilder från vardagen. Läraren använder enkla metoder så att eleverna själva kan tänka och upptäcka.

I klassrummet lär sig eleverna att summan av de första  $n$  udda talen är  $n$  gånger  $n$ .

Även utanför skolan kan eleverna minnas detta.

- (a-deduktisk) De kan räkna antalet skoskåp på *två olika sätt*: **addition** eller **multipliktion**.

Varje morgon när de byter skor tänker de på frågan och förstår den bättre.

De kan räkna antalet kvadratiske plattor i en toalett på *två olika sätt* på **icke-deduktisk** situation.

De Frågor 1 till 6, med många ledtråd frågor hjälper elever *att utveckla följande*:

Förmåga att använda och beskriva matematiska begrepp och samband mellan begrepp.

Förmåga att hantera procedurer och utföra rutinuppgifter utan och med verktyg.

Förmåga att analysera och lösa problem med hjälp av matematik. Förmåga att tillämpa, formulera och utvärdera matematiska modeller.

Förmåga att föra och följa matematiska resonemang.

Förmåga att kommunicera matematik muntligt, skriftligt och i handling. (Skolverket)

Algebra är enkel, geometri är vacker och sannolikhet är uppfinningsrik. Alla visar samma matematiska formel. Detta visar matematikens skönhet.