离散数学(2). hw10. 王子轩

P103 T1.

证明: 采用反证法; 首先不妨设 G 连通, 否则对于 G 的每个连通支有如下证明成立; (加脚标 i)

由简单平面图的欧拉公式有 $n-m+d=2$ ①

由 $degree(v) \geq 3$, 由握手定理 $\sum_{i=1}^{n} degree(v_i)=2m \geq 3n$ ②

由题中给出了图中区域的数目 $d<12$ ③

①②③ 联立, 得到不等式 $n-m+d=2 < \frac{2}{3}m-m+12$ ④

解出④得到 $m<30$. ⑤.

另外, 有引理: $\sum_{i=1}^{d} degree(R_i)=2m$, R_i 为 G 的 region.

且由题有 $\forall i$, 有 $degree(R_i) \geq 5$, 故有 $2m \geq 5d$ ⑥

①②⑥ 联立有 $n-m+d=2 \leq \frac{2}{3}m-m+\frac{2}{5}m$ ⑦

解出⑦得到 $m \geq 30$ ⑧

综上, ⑤⑧两式矛盾! ∴ G 中必定存在 degree < 5 的域

P103. T3

证明: 引理(书 P91 推论 4.2.1, 简单平面图 G 满足 $m \leq 3n-6$) ①

本题中, $G \cup \bar{G} = K_n$, $m(K_n)=\frac{n(n-1)}{2}$, 由鸽巢原理, G、$\bar{G}$ 中至少有 1 个, $m(G)$ 或 $m(\bar{G}) \geq \frac{n(n-1)}{4}$, 不妨设 $m(G) \geq \frac{n(n-1)}{4}$ ②

①② 联立有 $\frac{n(n-1)}{4} \leq 3n-6 \Rightarrow f(n)=n^2-13n+24 \leq 0$ ③

由 $n>10$. 讨论: $n=11$, $f(11)=2>0$, $f(12)=12>0$, $f(13)=$ $n(n-13)+n$ $\cancel{(13-13)+}$ >0

∴ $\forall n>10$, $f(n)>0$, 即 G 或 必为非平面图

P补充: 权序列为 (11, 12, 13, 14, 15)