HW 11 王子轩 2023011307

反证法，设G为平面图 由定理 4.4.1.

P104 T16 证明：考虑G的对偶图 G^*；由G满足任意两个域之间至少有一条公共边，则 G^*满足任意两个节点之间有边；$d(G)=5$，则 $|V(G^*)|=5$

则 G^*存在 K_5 导出子图. K_5是非平面图，G^*一定是非平面图

根据平面图的对偶图是平面图，矛盾！ $\Rightarrow$ G一定是非平面图 □

P104 T20. 证明：采用反证法；假设G可以2-着色，则其对偶图 G^*是二分图.

即($V(G^*)=X\cup Y$，且$X\cap Y=\emptyset$)；由G没有割边，则G中每一条边都分隔两个面；

容易得知G^*中每一条边都与G中一条边一一对应；由对偶图性质，

对于G中任意的域f. $\deg_G(f)=\deg_{G^*}(f^*)$，$f^*$是f在$G^*$中对应的点.

二分图：一个划分部分的顶点度数之和=图中边的总数 $\sum_{f^*\in X(Y)} \deg_{G^*}(f^*) = |E(G^*)|=|E(G)|$

考虑题意中域，边界数不被 $d(d>1)$ 整除的特殊的 f_0，不妨设 $f_0^*\in X$（也即 $f_0\in X$）

$\deg_G(f_0) + \cancel{\deg_G(} \sum_{f\in X\setminus\{f_0\}} \deg_G(f) = |E(G)| = \deg_G(f_0) + K_X\cdot d$；$f_0\notin Y$.

那么有 $\sum_{f\in Y} \deg_G(f) = |E(G)| = K_Y\cdot d \Longrightarrow$ 那么有 $\deg_G(f_0) = (K_Y-K_X)\cdot d$ 矛盾！

P104 T21 解：不行。理由如下：假设可以画出有限个三角形，且顶点度为偶数

则 G存在欧拉回路（G是无向连通图），

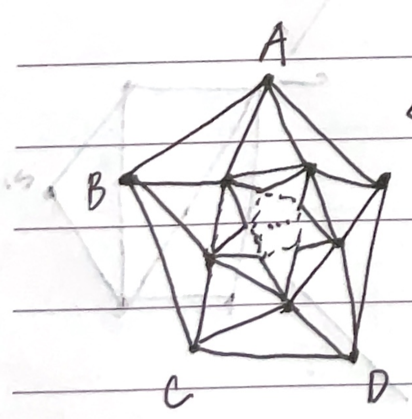
$\Longleftrightarrow$ 则G的域是2-可着色的（由书例4.5.3结论）

且由于是三角形，G中，在ABCDE内的域边界数均为3

满足除ABCDE环路外域(*)的degree=5不整除 $d=3$

由其它所有域整除3；由P104T20(上题)结论，且无割边

(*)

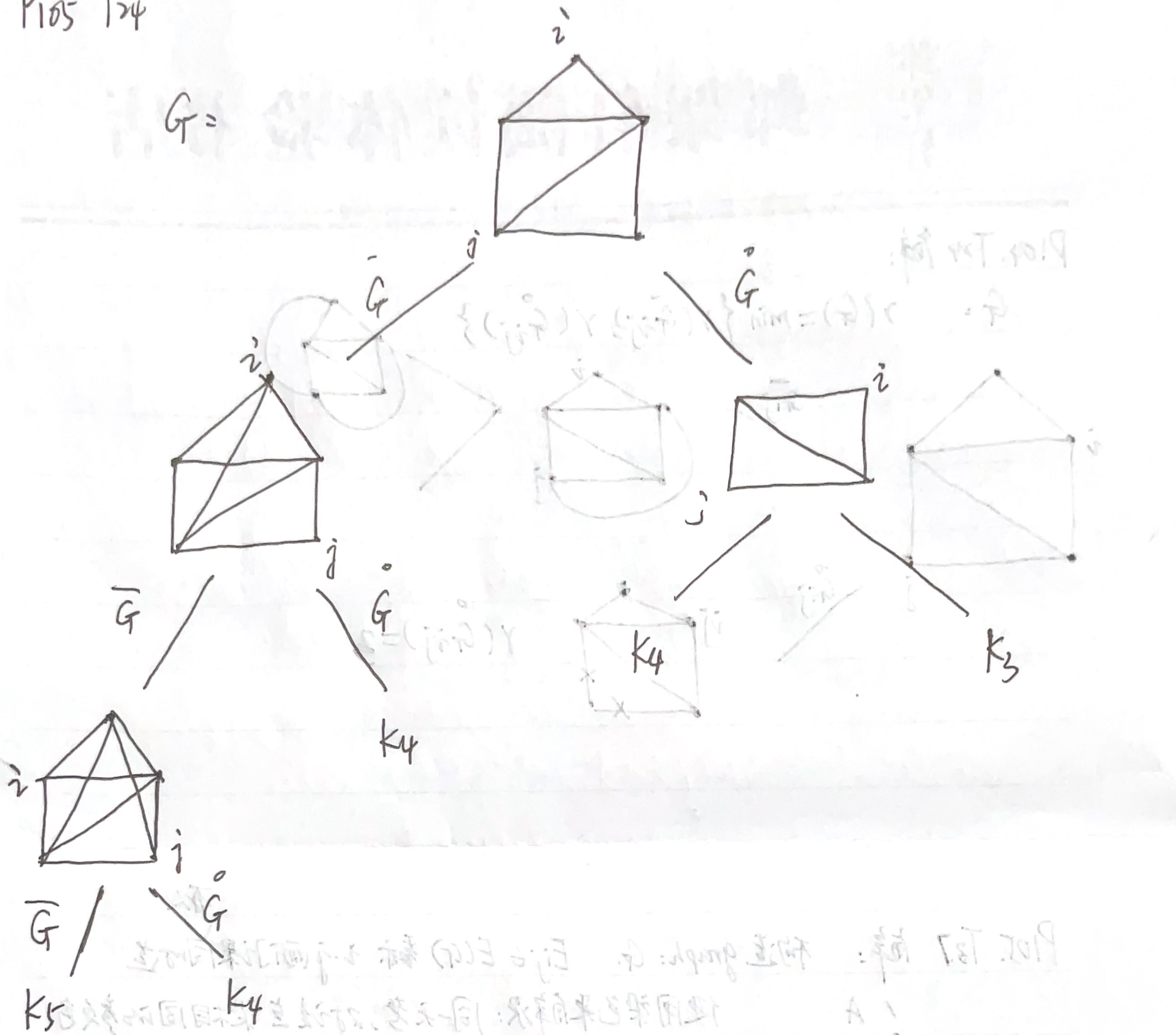


G

G的域不可2-着色！ 矛盾.

综上，不可画出满足题意的图G.

P105 T24



$$\gamma(G) = \min\{\gamma(K_3), \gamma(K_4), \gamma(K_5)\} = 3$$

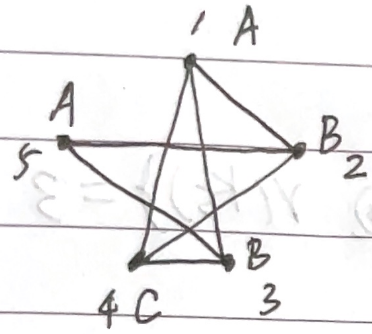
$$f(G,t) = f(K_3,t) + 3f(K_4,t) + f(K_5,t)$$

$$= t(t-1)(t-2) + 3t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$$

$$= t(t-1)(t-2)[1 + 3(t-3) + (t-3)(t-4)]$$

$$= t(t-2)^3(t-1)$$

P105. T3.7 解：构造graph: G. $E_{ij} \in E(G)$ 表示 i.j 两门课有人同时选



使用染色来解决：同一天考，对该点染相同的颜色

则所求转换为求 G 的色数 $\gamma(G)$

由 5 开始染色，$(2,5) \in E(G)$，$(3,5) \in G$.，则 2.3与5不相色

$\gamma(G)$ 至少为 2，再分析可得，$\gamma(G) > 2$，（1,4与2有边，且1,4相连）

可得 $\gamma(G) = 3$ 的一种构造：

A: 1, 5，　B: 2, 3，　C: 4

综上，至少需要 ~~几~~ 3 天考完这5门课程

计算 $\gamma(G)$ 也可以简单使用 $\gamma(G) = \min\{\gamma(\bar{G}), \gamma(\mathring{G})\}$ 来计算.