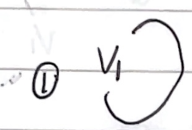
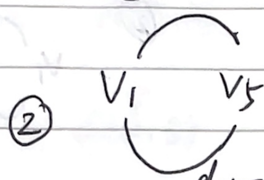
离散数学(2) hw 6　　王子轩　物31　　wang-zx23@mails.tsinghua.edu.cn

$P_{54}T33$.　近似算法求解旅行商问题（便宜算法）

$$\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array}\begin{bmatrix} \times & 42 & 33 & 52 & 29 & 45 \\ 42 & \times & 26 & 38 & 49 & 36 \\ 33 & 26 & \times & 34 & 27 & 43 \\ 52 & 38 & 34 & \times & 35 & 30 \\ 29 & 49 & 27 & 35 & \times & 41 \\ 45 & 36 & 43 & 30 & 41 & \times \end{bmatrix}$$

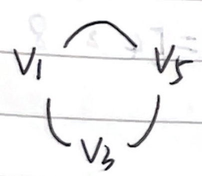
① 

$d=[42, 33, 52, 29, 45]$

② 

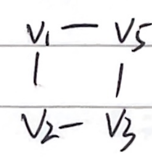
$w(1,5)=29$

$d_{15}=29$

③ 

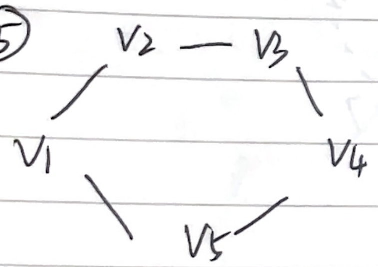
$d_{13}=33$

$d_{35}=27$

④ 

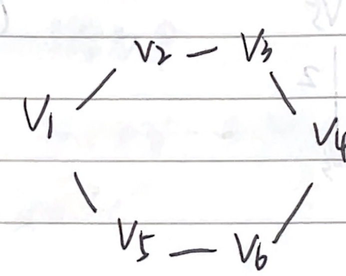
$d_{12}=42$

$d_{23}=26$

⑤ 

$d_{34}=34$

$d_{45}=35$

⑥ 

$\tau(T) = 202$!

插入的元素以及位置的判断依据：

②→③：$\text{Distance}(T_②, \bar{S}) = d_{35}$,

②→④：$\text{Distance}(T_②, \bar{S}) = d_{23}$,　$d_{12}+d_{23}-d_{13} < d_{23}+d_{25}-d_{35}$,

④→⑤

~~③→④~~：$\text{Distance}(T_④, \bar{S}) = d_{34}$,　$d_{24}+d_{34}-d_{23} > d_{45}+d_{34}-d_{53}$,

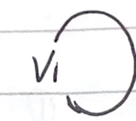
⑤→⑥

~~④→⑤~~：$\text{Distance}(T_⑤, \bar{S}) = d_{46}$,　$d_{56}+d_{46}-d_{45} < d_{36}+d_{46}-d_{34}$

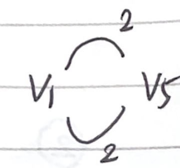
P54 T34(b) 近似(便宜算法)求解旅行商问题.

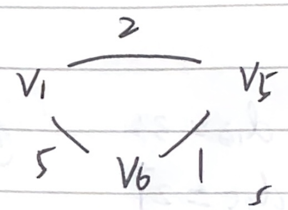
写下矩阵:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	×	5	9	8	2	5
V_2	5	×	7	5	4	5
V_3	9	7	×	2	2	6
V_4	8	5	2	×	8	3
V_5	2	4	2	8	×	1
V_6	5	5	6	3	1	×

①


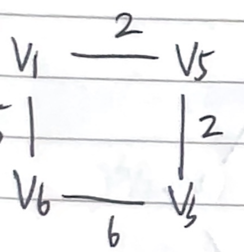
$$\begin{array}{c} V_5 \\ d=[5,9,8,2,5] \end{array}$$

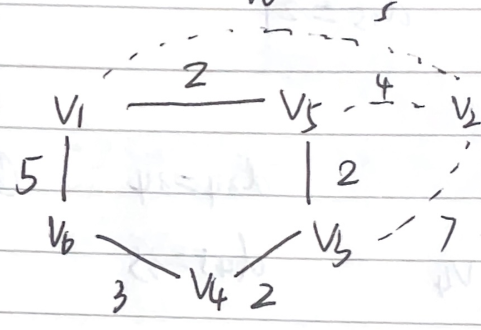
②


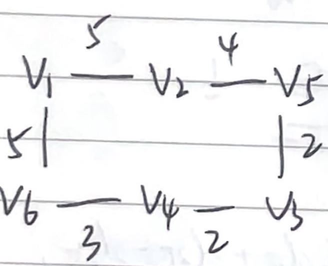
③


$$\begin{array}{cccc} V_2 & V_3 & V_4 & V_6 \end{array}$$
$d=[5\ 9\ 8\ 5]$

$d=[4\ 2\ 8\ 1]$

④


⑤


⑥


$z(T)=21$

判断依据: 书P35面.算法:

S中.令 $w(j,t)=\min\limits_{\substack{i\in S \\ k\in T}} w(i,k)$

for (t,t_1), (t,t_2)

若 $w(j,t_1)-w(t,t_1)\le w(j,t_2)-w(t,t_2)$, (t,t_1)中插入j.

反之: j插在(t,t_2)之间.

P55. T40.

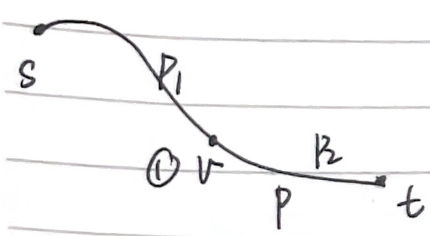
Proof：由 G 连通：

$$\max_{u\in V} d(u,v) \geqslant d(v,t),\quad \max_{u\in V} d(u,v) \geqslant d(v,s)$$

$$\Rightarrow 2\max_{u\in V} d(u,v) \geqslant d(v,t)+d(v,s).$$

只需证：$d(v,t) + d(v,s) \geqslant d(s,t)$

设 P 为 s. t 间称为距离的初级道路.（最短）

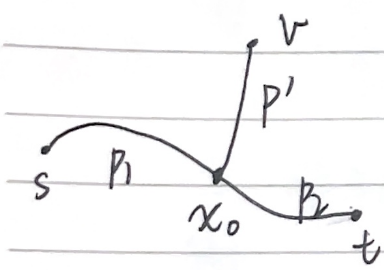


① v 在 P 上，将路分为 P_1. P_2.

则 $d(s,v) \geqslant length(P_1)$ （由 d 的定义）

$d(v,t) \geqslant length(P_2)$

② v 不在 P 上.



可以在 path 上找到一点 x_0 使 $\forall x\in P$, $d(v,x_0)\geqslant d(v,x)$

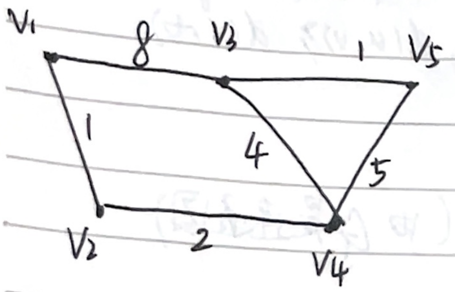
则有 $d(v,s) \geqslant length(P_1) + length(P')$

$d(v,t) \geqslant length(P_2) + length(P')$

$\therefore d(v,s)+d(v,t) \geqslant d(s,t)$

综上，$2\max_{u\in V} d(u,v) \geqslant \cancel{d(v,t)+d(} d(s,t)$.

P56. T43. 用Ford算法求 v_1 到所有点的最短路径，写出($i=2,3,\dots,n$)迭代次数



Step 1. $\pi(1)=0$. $\pi(2)=\pi(3)=\pi(4)=\pi(5)=+\infty$

Step 2.

$\pi(1)=0$. $\pi(2)=1$. $\pi(3)=8$ $\pi(4)=3$. $\pi(5)=8$

~~$\pi(5)$~~

Step 3.

$\pi(1)=0$. $\pi(2)=1$. $\pi(3)=7$. $\pi(4)=3$. $\pi(5)=8$

Step 4

$\pi(1)=0$. $\pi(2)=1$. $\pi(3)=7$. $\pi(4)=3$. $\pi(5)=8$

这里的Step指的~~步~~都是外层循环，其中Step 1是初始化过程。

对应伪代码：

```
let  π(1)=0.   π(i)=∞  (i=2,3,4,5)
~~for~~ do={
        for  i=2 -> n (n=5)=
            π(i) = min[π(i),  min(π(j)+ w_ji]
        }                     j∈P_i
    while ( π(i)' ≠ π(i) ).
```

发生在 do 循环体中语句运行了 4-1=3 次

v_1 到所有点的最短路：

迭代次数：3次.

(若不计入初始化).

V_2: $V_1 \to V_2$

V_3: $V_1 \to V_2 \to V_4 \to V_3$

V_4: $V_1 \to V_2 \to V_4$

V_5: $V_1 \to V_2 \to V_4 \to V_5$