邺架轩阅读体验书店

HW12 离散数学(2).

P119 T1.

解：采用匈牙利算法求二分图的最大匹配问题；初始 $M=\{(x_1,y_1),(x_4,y_2)\}$

(1) $U=\{x_2\}$, $V=\phi$. $P(U)=\{y_1,y_4\}$, $y_4\in P(U)-V$, $\wedge\, y_4=0$

$\Rightarrow P=(x_2,y_4)$. $\therefore M=\{(x_1,y_1),(x_2,y_4),(x_4,y_2)\}$

(2) $U=\{x_3\}$, $V=\phi$. $P(U)=\{y_1,y_2\}$, $y_1\in P(U)-V$. $\wedge\, y_1=1$

$U=\{x_1,x_3\}$, $V=\{y_1\}$, $P(U)=\{y_1,y_2,y_4,y_5\}$, $y_5\in P(U)-V \wedge y_5=0$

$\Rightarrow P=(x_3,y_2,x_4,y_5)$ $\therefore M=\{(x_1,y_1),(x_3,y_2),(x_4,y_5),(x_2,y_4)\}$

(3) $U=\{x_5\}$, $V=\phi$, $P(U)=\{y_2,y_4\}$, $y_2\in P(U)-V$. $\wedge\, y_2=1$.

$U=\{x_3,x_5\}$, $V=\{y_2,\cancel{y_4}\}$, $P(U)=\{y_1,y_2,y_4\}$, $y_1\in P(U)-V \wedge y_1=1$

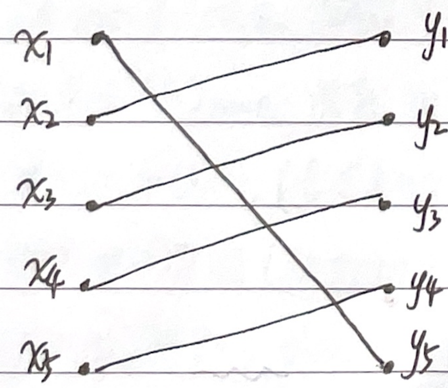
$U=\{x_1,x_3,x_5\}$, $V=\{y_1,y_2,\cancel{y_4}\}$, $P(U)=\{y_1,y_2,y_4,y_5\}$, $y_5\in P(U)-V\wedge y_5=1$

$U=\{x_1,\cancel{x_2},x_3,x_4,x_5\}$, $V=\{y_1,y_2,y_5\}$, $P(U)=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$, $y_3\in P(U)-V \wedge y_3=0$

$\Rightarrow P=(x_5,y_4,x_2,y_1,x_1,y_5,x_4,y_3)$.

$\therefore M=\{(x_1,y_5),(x_2,y_1),(x_3,y_2),(x_4,y_3),(x_5,y_4)\}$

如图所示匹配 M：



P119 T3

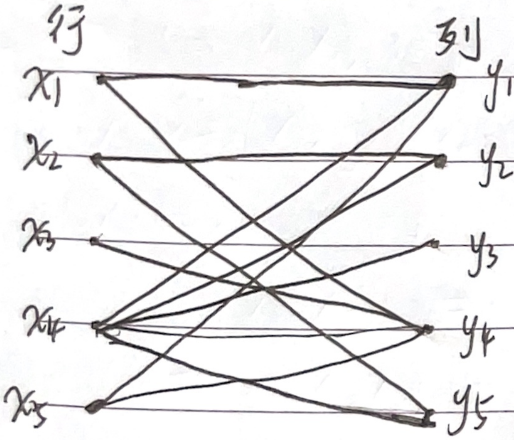
解：可将棋盘建模为矩阵 A. $(A)_{ij}=\begin{cases}1 & (可放置棋子)\\0 & (不可放置棋子)\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ x_i, y_j 间有边

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

行列最大

求最大放置数，即求匹配数.

$\Rightarrow$ 二分图 $G=(X,Y,E)$ 求最大匹配



for set $X=\{x_1, x_3, x_5\}$

$P(X)=\{y_1, y_4\}$, $|X|>|P(X)|$

∴ 由Hall定理，G一定不存在完美匹配.

故有 $|X|\le 4$.

给出一个匹配 $M=\{(x_1,y_1),(x_2,y_5),(x_3,y_4),(x_4,y_3)\}$

∴ 最多能放置4个车.

P120 T9. 解：可以使 $A=P_1+P_2+\cdots+P_k$ 成立，其中 $P_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的每行都有1个1.

证明：采用数学归纳法. $k=1$ 时. 显然成立. 假设结论对 $i\le k$ 的情形都成立，则考虑 $i=k+1$ 情形；设 $A=(A)_{m\times n}$. 共有 $m(k+1)$ 个1，由每列1元素的数目不超过 $(k+1)$ 个. ∴ $n\cdot t=m(k+1)$, $(t\le k+1)$ ∴ $n\ge m$；由矩阵A元素 (a_{ij}) 构造 (X,Y,E) 二分图；x_i 与 y_j 间有边 $(x_i,y_j)\in E$ 当且仅当 $a_{ij}=1$. 由条件得到 (最大匹配)

$degree(x_i)=k+1$, $degree(y_j)\le k+1$, 从而由书上 $\boxed{推论5.2.1}$，$\exists X\to Y$ 完全匹配 M.

考虑Y的一个特殊子集合 $\tilde{Y}=\{y_i \mid y_i\in Y \wedge degree(y_i)=k+1\}$，$\tilde{Y}$ 与X构成的二分子图 $G'=(X, \tilde{Y}, \tilde{E})$，也满足推论2.5.1，故存在 $\tilde{Y}$ 到X的完全匹配 $\tilde{M}$

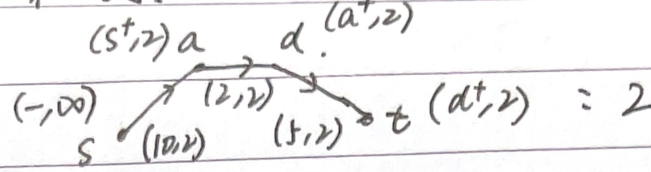
此时 $\tilde{Y}$ 均为饱和点；使用匈牙利算法，以 $\tilde{M}$ 为初始匹配，可以得到M. 而由匈牙利算法不改变原有的饱和点，故在M匹配中，$\tilde{Y}$ 也为饱和点；删去M，得到 $G'=(X,Y,E')$

可知 E' 中 Y的 y_i 最大度为k，故满足 $A'=\sum_{i=1}^{k}P_i$，$A=A'+P_{k+1}$ 从G中而E 证毕！

P137. T1 求给定图G的最大流和最小割问题.

(0) 可行流=全0.

(1) 标出第一条增流: $s \to a \to d \to t$.

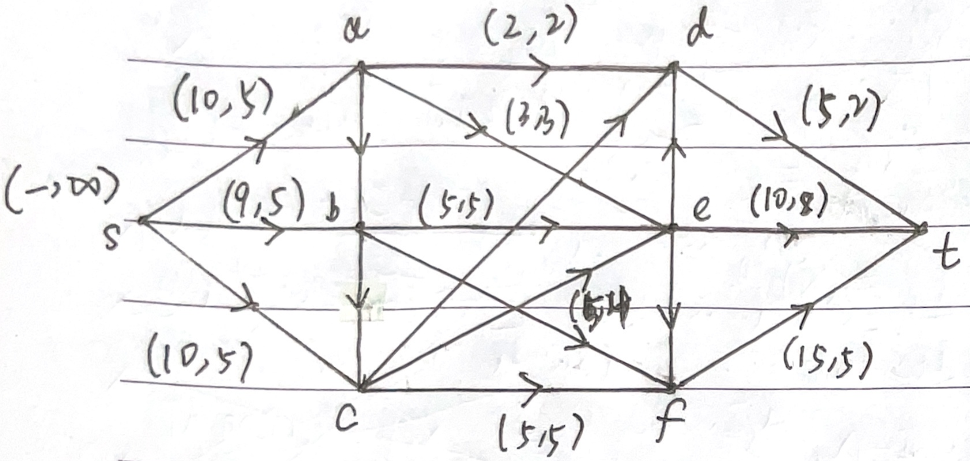


(2) 删去所有标号，从s开始重新标号，又得条增流路径. $s \to a \to e \to t$, $= \cancel{8}\,3$

(3) $s \to c \to f \to t$ $= 5$

(4) $s \to b \to e \to t$ $= 5$

~~(5) s→~~ $2+3+5+5=15$



继续找可增流路径.

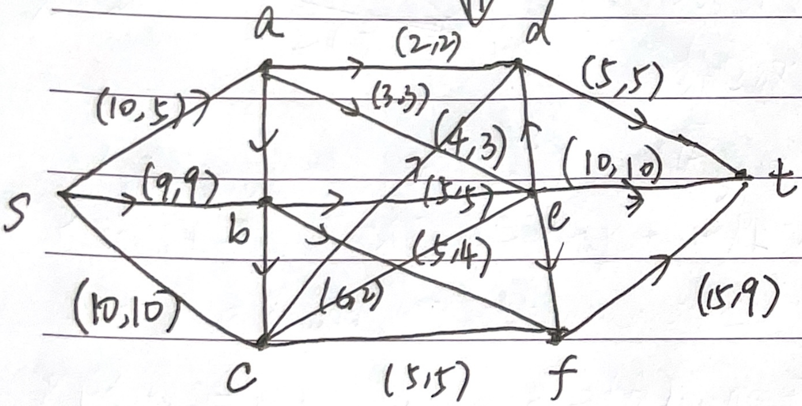
(5) $s \to b \to f \to t$ $= 4$

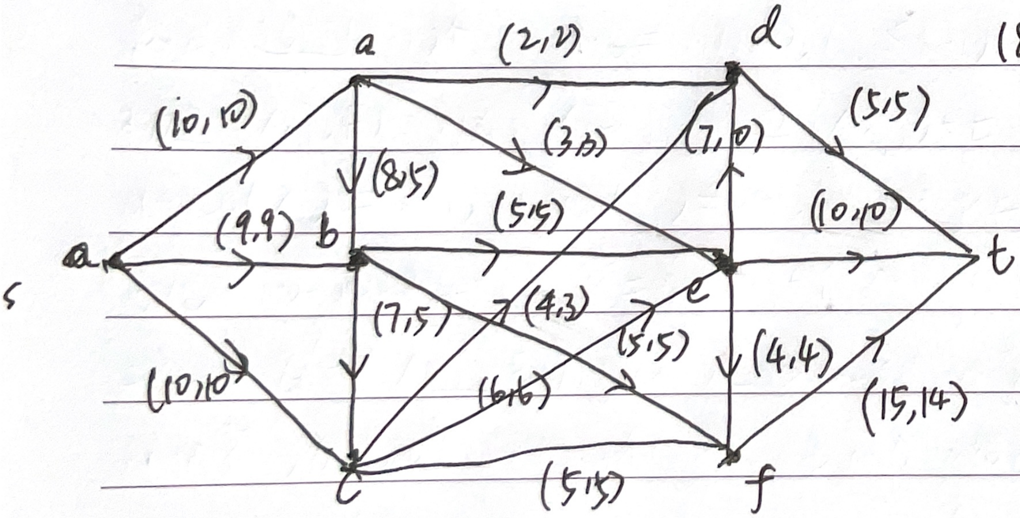
(6) $s \to c \to d \to t$ $: 3$

(7) $s \to c \to e \to t$ $: 2$

$4+3+2=9$

⇓





(8) $s \to a \to b \to c \to e \to f \to t$ $: 4$

$s \to a \to b \to f \to t$ $: 1$

$4+1=5$

最大流 $= 15+9+5 = 29$.

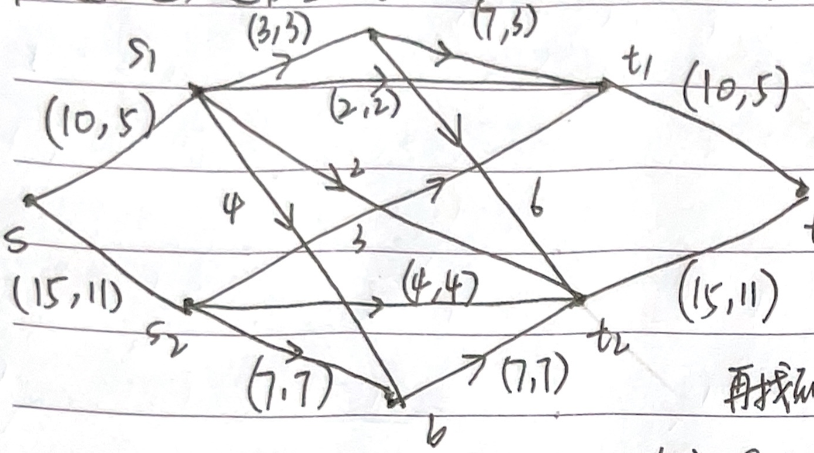
最小割:

$\{(s,a),(s,b),(s,c)\}$.

P137. T2. 求多源N网络流的最大流分布.

解: ①建立超发超收点. a

先找到如下, 初始化后如下图



(1) $s \to s_1 \to a \to t_1 \to t = 3$

(2) $s \to s_1 \to t_1 \to t = 2$

(3) $s \to s_2 \to t_2 \to t = 4$

(4) $s \to s_2 \to b \to t_2 \to t = 7$

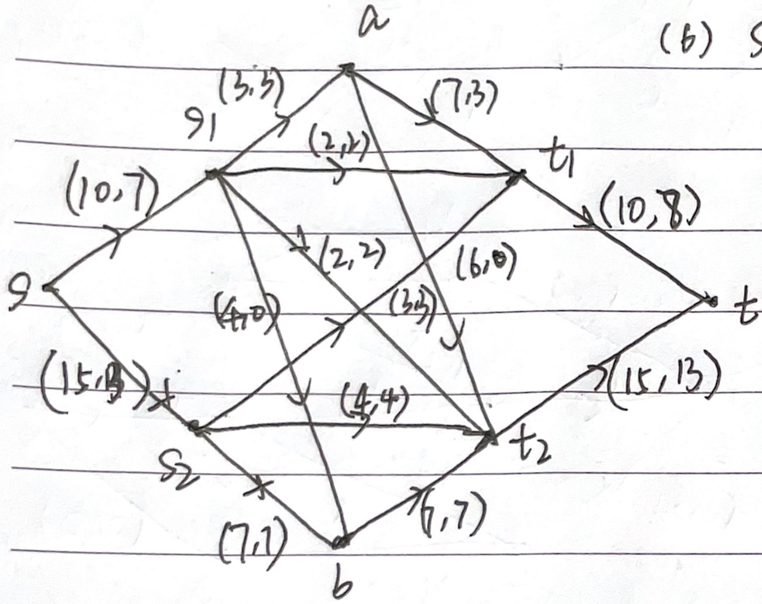
$\} = 16$

再找到增流路径为

(5) $s \to s_1 \to t_1 \to t : 2$

(6) $s \to s_2 \to t_1 \to t : 3$

$\} = 5$



⇒ 最大流分布如图.

最大流量 = 21.