离散(2) hw8

> 王子轩 `2023011307`
>
> `wang-zx23@mails.tsinghua.edu.cn`

P82 T1

> 一颗树有n_2个顶点为2度的节点,n_3个顶点的度为3的节点,$\cdots n_k$个顶点度为k的节点.问有多少个度为1的顶点.

解:设度为1的顶点有 n_1个,则根据树的性质,有$\sum_i d(v_i) = 2(\sum_i v_i - 1)$, 所以有 $n_1 + 2 \times n_2 + \cdots + k \times n_k = 2(n_1 + n_2 + \cdots n_k - 1)$

解得:$n_1 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \cdots + (k-2)n_k + 2$

P82 T9

> 设 $G = (V, E)$ 为有向连通图,e 是 G 的一条边.证明:

Lemma

任何无向连通图都至少存在一棵支撑树.此题目中的有向联通图的支撑树只需要满足支撑子图+树的定义,因此也满足引理.

(1) 若 e 不在 G 的任何一颗支撑树中,则 e 为自环.

解:我们采用反证法,假设 $e = (u, v)$ 不在任何一颗支撑树中,且不为自环.若 e 是割边,则显然矛盾,因为支撑树 T 经过图 G 中的所有顶点是连通的,因此一定有支撑树边经过 e.若 e 不是割边,我们也可以如下说明 $\exists T' \text{s.t.} e \in E(T')$: 由**Lemma**有向连通图一定存在支撑树,不妨假设存在一个生成树 T 不包含 e .向 T 中添加 e,此时会形成一个环 C(因为原本连通,添加 e 后引入了冗余路径), 环 C 中至少包含边 e 和另一条连接 u 与 v 的路径 P, 则 $\exists f \in E(P)$ 从 $T \cup \{e\}$中 删除边 f 得到 $T' = (T \cup \{e\}) - \{f\}$ 删除环上的边 f 不会破坏连通性, 且该操作后 T' 中无环.且 $|E(T')| = |V| - 1$ 是图 G 的支撑树,因此 e 在支撑树 T' 中,与假设矛盾.从而,若 e 不在 G 的任何一颗支撑树中,则 e 为自环.

(2) 若 e 在 G 的每个支撑树中,则 e 为割边.

解:采用反证法.假设 e 在 G 的每个支撑树中但 e 不为割边,则在图 G 中删去 e 得到 $G' = G - \{e\}$ 也是连通图,那么 G' 一定也存在支撑树 T' ,同时 T' 也是 G 的支撑树且不包括 e 因此矛盾

P83 T16

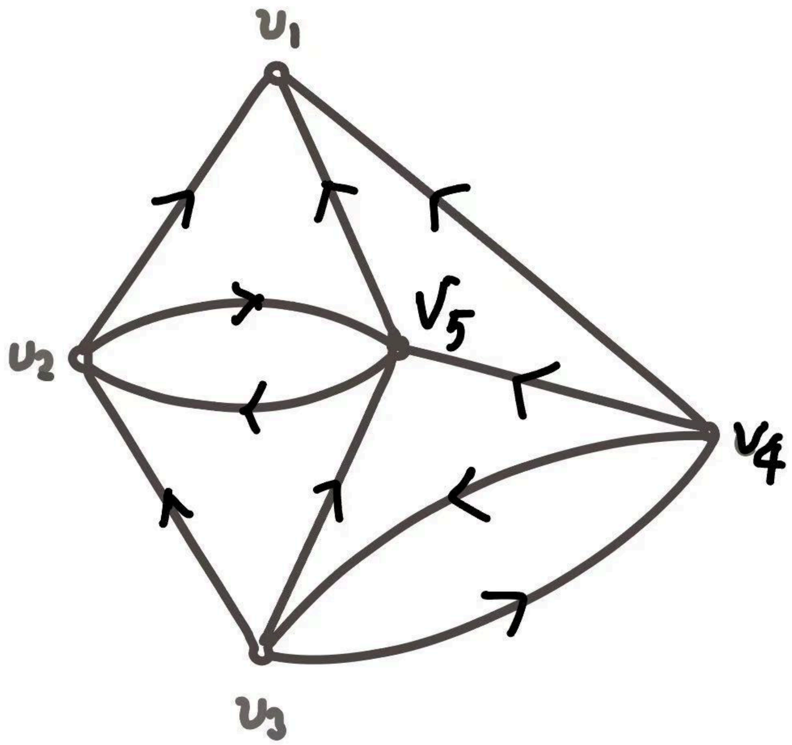
> 求P83 图3.27中(1)树的数目(2) 必含 (v_1, v_5) 的树的数目(3)不含 (v_4, v_5) 的树的数目

解:

太长不看版:

(1) 101 (2) 44 (3) 60

对于无向图,先对每个边赋予一个方向



	(1,2)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,5)	(2,5)	(3,5)	(3,4)	(3,4)	(4,5)
v1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
v2	1	0	0	-1	1	-1	0	0	0	0
v3	0	0	0	1	0	0	1	1	-1	0
v4	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	1
v5	0	0	1	0	-1	1	-1	0	0	-1

(1)树的数目

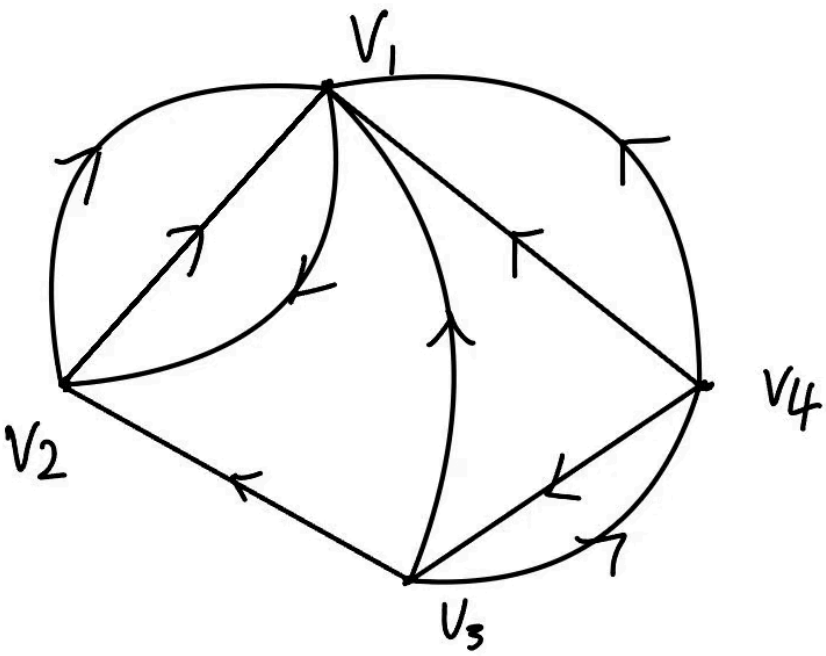
```
import numpy as np
B_5 = np.array([
    [-1,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 1, 0, 0,-1, 1,-1, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1,-1, 0],
    [ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0,-1, 1, 1]
])
B_5_T = B_5.T
BB = B_5_B_5_T = np.dot(B_5, B_5_T)
print("B_5_B_5_T=\n",BB)
determinant = np.linalg.det(B_5_B_5_T)
print("det(B_5 B_5^T) =", int(determinant))
"""
output:
B_5_B_5_T=
 [[ 3 -1  0 -1]
 [-1  4 -1  0]
 [ 0 -1  4 -2]
 [-1  0 -2  4]]
```

```
det(B_5 B_5^T) = 101
"""
```

$det(B_5B_5^T) = 101$

(2)必含 (v_1, v_5) 的树的数目:

可以将 (v_1, v_5) 视为一个点



	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,4)	(2,3)	(3,4)	(3,4)
v1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0	0	0
v2	1	1	-1	0	0	0	-1	0	0
v3	0	0	0	1	0	0	1	-1	1
v4	0	0	0	0	1	1	0	1	-1

```
import numpy as np
B_3 = np.array([
    [-1, -1, 1, -1, -1, -1, 0, 0, 0],
    [1, 1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0],
    [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, -1, 1]
])
B_3_T = B_3.T
B_3_B_3_T = np.dot(B_3, B_3_T)
BB = np.dot(B_3, B_3_T)
print("B_3_B_3_T=\n",BB)
determinant = np.linalg.det(B_3_B_3_T)
print("det(B_3 B_3^T) =", round(determinant))
"""
```

```
output:
B_3_B_3_T=
 [[ 6 -3 -1]
 [-3  4 -1]
 [-1 -1  4]]
det(B_3 B_3^T) = 44
"""
```

$det(B_3B_3^T) = 44$

或者采用反向法,先计算去除了(v_1, v_5)的关联矩阵

	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(2,5)	(2,5)	(3,5)	(3,4)	(3,4)	(4,5)
v1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
v2	1	0	-1	1	-1	0	0	0	0
v3	0	0	1	0	0	1	1	-1	0
v4	0	1	0	0	0	0	-1	1	1
v5	0	0	0	-1	1	-1	0	0	-1

```
import numpy as np
B_5 = np.array([
    [-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 1, 0,-1, 1,-1, 0, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1,-1, 0],
    [ 0, 1, 0, 0, 0, 0,-1, 1, 1]
])
B_5_T = B_5.T
BB = B_5_B_5_T = np.dot(B_5, B_5_T)
print("B_5_B_5_T=\n",BB)
determinant = np.linalg.det(B_5_B_5_T)
print("det(B_5 B_5^T) =", round(determinant))
"""
output:
B_5_B_5_T=
 [[ 2 -1  0 -1]
 [-1  4 -1  0]
 [ 0 -1  4 -2]
 [-1  0 -2  4]]
det(B_5 B_5^T) = 57
"""
```

符合要求的树的数目=101-57=44

(3) 不含 (v_4, v_5) 的树的数目

	(1,2)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,5)	(2,5)	(3,5)	(3,4)	(3,4)
v1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
v2	1	0	0	-1	1	-1	0	0	0

	(1,2)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,5)	(2,5)	(3,5)	(3,4)	(3,4)
v3	0	0	0	1	0	0	1	1	-1
v4	0	1	0	0	0	0	0	-1	1
v5	0	0	1	0	-1	1	-1	0	0

```
import numpy as np
B_5 = np.array([
    [-1,-1,-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
    [ 1, 0, 0,-1, 1,-1, 0, 0, 0],
    [ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1,-1],
    [ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0,-1, 1],
])
B_5_T = B_5.T
BB = B_5_B_5_T = np.dot(B_5, B_5_T)
print("B_5_B_5_T=\n",BB)
determinant = np.linalg.det(B_5_B_5_T)
print("det(B_5 B_5^T) =", round(determinant))
"""
output:
B_5_B_5_T=
 [[ 3 -1  0 -1]
 [-1  4 -1  0]
 [ 0 -1  4 -2]
 [-1  0 -2  3]]
det(B_5 B_5^T) = 60
"""
```

符合要求的树的数目为60