离散（2）hw1

> 王子轩 `2023011307`
>
> `wang-zx23@mails.tsinghua.edu.cn`

P13 T2

> 证明：在9个工厂之间，不可能每个工厂都只与其他三座工厂有业务联系；也不可能只有四座工厂与偶数个工厂有业务联系。

Proof

9个工厂和其之间的业务联系可以被抽象为图$G=(V,E)$，由握手定理，有
$\sum_{v\in V(G)} d(v)=2m,\quad m=0,1,2,\cdots$

假设每个工厂都只与其他三座工厂有业务联系，
$\sum_{v\in V(G)} d(v)=3\times 9=27\neq 2m,\quad m=0,1,2,\cdots$矛盾。

假设只有四座工厂与偶数个工厂有业务联系，
$\sum_{v\in V(G)} d(v)=4\times 2l+(9-4)\times(2k+1)=2\times(4l+5k+2)+1\neq 2m$,矛盾

P13 T4

> 证明：对于简单图$G=(V,E),\quad |V|=n,|E|=m$，如果$m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则其中不含有孤立顶点。

Proof

假设图中含有x个孤立顶点，则除去孤立点的子图G'满足
$V(G')=n-x,\quad E(G)=E(G')\leq E(K_{n-x})=\frac{1}{2}(n-x)(n-1-x)$,那么
$\forall x\geq 1,E(G)=m\leq\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$与题面矛盾，因此$x=0$即其中不含有孤立顶点

P13 T6

> 证明：设$d=\{d_1,d_2,\cdots,d_n|d_i\in\mathbf{N}\}$,证明存在一个图，使得其顶点度的非增序列为$d$的充要条件是$\sum_{i=1}^n d_i=2m,\quad m=0,1,2,\cdots$

Proof

必要性：顶点度的非增序列为$d\Rightarrow\ \sum_{i=1}^n d_i=2m,\quad m=0,1,2,\cdots$

假设存在一个图 G使得其顶点度的非增序列为 d。每条边连接两个顶点，因此每条边对两个顶点的度数各贡献1。因此，所有顶点的度数之和 $\sum_{i=1}^n d_i$ 必是偶数，等于G中边数的两倍，即 $2m$，其m 是图中的边数。(即握手定理)

充分性： $\sum_{i=1}^n d_i=2m,\quad m=0,1,2,\cdots\Rightarrow\exists G$,顶点度的非增序列为$d$

我们采用归纳法进行证明：

归纳基础：

- $m=0$，$\forall d_i=0$对应于空图。
- $m=1,d=\{1,1,0,\cdots,0\}$

归纳假设：

设对于所有$m<k,(k>1)$结论成立，我们考虑$m=k$。移除序列d中最大的d_1, 并将余下的序列中的前d_1个数各减去1，得到新的序列d', 新序列的和为：

$$\sum d'_i = (\sum_{i=1}^{n} d_i) - 2d_1 = 2m - 2d_1 = 2(m - d_1)$$

由于$m-d_1<m=k$,根据归纳假设，存在一个图G' 具有不增的度序列 d'。我们的构造过程是合法的，每次操作都保持度数之和为偶数，且每次操作都能保证新的序列仍然是合法的度序列。

综上我们证明了题面。

P13 T7

> 证明：设完全图中每一个边任给一个方向，成为有向完全图。在有向完全图中，
>
> $$\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2$$

Proof

在这里的定义中，有向完全图中每一边贡献一个出度或者入度，设图$G=(V,E), \quad |V|=n$那么有：

$$\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) = \sum_{v_i \in V} d^-(v_i) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

同时，由完全图的定义还可以知道

$$\forall i, \quad d^+(v_i) + d^-(v_i) = n - 1$$

做如下计算：

$$\begin{aligned}
\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2 &= \sum_{v_i \in V} (n - 1 - d^-(v_i))^2 \\
&= \sum_{v_i \in V} [(n-1)^2 - 2(n-1)d^-(v_i) + (d^-(v_i))^2] \\
&= n(n-1)^2 - 2(n-1)\sum_{v_i \in V}(d^-(v_i)) + \sum_{v_i \in V}(d^-(v_i))^2 \\
&= n(n-1)^2 - 2(n-1) \times \frac{1}{2}n(n-1) + \sum_{v_i \in V}(d^-(v_i))^2 \\
&= \sum_{v_i \in V}(d^-(v_i))^2
\end{aligned}$$

P14 T10

> 证明：9个人中若非至少有4个人互相认识，则至少有3个人相互不认识

Proof

首先我们给出一个引理：任意6个人，要么有3人互相认识，要么有3人互相不认识。证明如下：取1个人t做分析，他认识和不认识的人分别组成为A和B两个集合，其中必有一个元素个数≥ 3，不妨就设$|A| \geq 3$, 那么A中的人要么互相不认识，要么存在两个人a,b互相认识，那么a,b,t构成三个相互认识的人。相似地，若$|B| \geq 3$, B中的人要么互相都认识，要么存在两个人c,d互相不认识，那么c,d,t构成三个相互不认识的人。引理成立。

分以下情况讨论：

- 这9个人中存在1个人t，他认识的人少于5个。则他至少有4个不认识的人，记为a, b, c, d, 这4个人之间要么互相认识，要么$\exists a, b$之间不认识，那么t, a, b就构成了三个互相不认识的人;因此原命题成立。
- 这9个人中任意一个人认识的人都≥ 5，首先不可能9个人都是恰好认识5个人，因为$5 \times 9 = 45 \neq 2m$不满足握手定理。因此至少有一个人t认识的人数≥ 6.对其认识的人的集合中的一个元素个数为6的子集分析，使用引理，其中必然要么存在三个人a, b, c相互认识，加上t就构成了a, b, c, t互相认识的四人组；要么存在e, f, g互相不认识的三人组，也满足题意。

综上，我们证明了9个人中若非至少有4个人互相认识，则至少有3个人相互不认识。