离散（2）hw3

> 王子轩 `2023011307`
>
> `wang-zx23@mails.tsinghua.edu.cn`

P50 T1

> 设简单图$G(m,n)$有k个连通支，证明$m \le \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)$

解：不妨设这k个连通支分别为$G_1,\cdots G_k$,阶数分别是$n_1,\cdots n_k$边数分别为$m_1,\cdots m_k$.由于$\forall i, n_i \ge 1 \text{ and } \sum_i n_i = n$所以$n_i \le n-k+1$；由于连通支内部边数最多是正则图，即$m_i \le \frac{1}{2}(n_i-1)n_i$.因此有
$m = \sum m_i \le \sum_i[\frac{1}{2}(n_i-1)n_i] \le \frac{1}{2}(n_i-1)(n-k+1) \le \frac{1}{2}(\sum n_i - k)(n-k+1) = \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)$

P50 T2

> 证明G和G的补图中至少有一个是连通图

证明：假设$G(V,E)$是不连通的，下证其补图$\overline{G}(V',E')$一定是连通的:设$V_1,V_2,\cdots,V_k$是它的的k个连通支的点集，即$V=V_1\cup\cdots V_k$.任意的$u,v\in V$

- if $u\in V_i, v\in V_j, i\ne j, (u,v)\in E'$ thus $\exists P(u,v)$
- if $u,v\in V_i, \forall s\in V_j, j\ne i, (u,s)\in E', (s,v)\in E'$ thus $\exists P(u,s,v)$

综上，若G不是连通图，$\overline{G}$一定是连通的。

P50 T3

> 证明若连通图的最长路径不唯一，则必定相交

证明: 我们采用反证法，不妨设$G(V,E)$两条相同长度的最长路分别为l_1和l_2,其长度为k；由于G是连通图，一定有：$\exists u\in l_1 \text{ and } v\in l_2 \text{ and } (u,v)\in E$ .u,v分别可以作为l_1和l_2的分割点，我们分别找出其中较长的那一段，分别记录为l_1'和l_2',显然有$l_1',l_2' \ge \lceil\frac{k}{2}\rceil$那么我们找到新的路径$P'=l_1'-(u,v)-l_2'$长度为$\lceil\frac{k}{2}\rceil\times 2+1 \ge k$

P50 T4

> 在简单图$G(n,m)$中，如果$n\ge 4$并且$m\ge 2n-3$,证明G中含有带弦的回路

证明：**Lemma**: 如果一个简单图G它的极长初级道路的端点度数$\ge$ 3,则G一定存在带弦的回路.

引理证明如下：记极长初级道路为$P(v_1v_2\cdots v_j)$,其中$d(v_j)\ge 3$,则v_j一定会连到其他的$v_a,v_b,\quad a,b\in[1,j]$上，由于$P$是极长的道路,$v_a,v_b$必处在$P$上，不妨设$a<b$,那么$(v_b\cdots v_jv_b)$组成了回路$C$,而$e=(v_j,v_a)$为其上的弦.

接下来我们使用数学归纳法来证明原命题：

- 归纳奠基：对于$n=4$，$m\ge$ 5时候，G中必然存在带弦的回路
- 归纳假设：假设对于$n=k, m\ge 2k-3$, 则G中含有带弦的回路
- 归纳地推：对于$n=k+1, m\ge 2(k+1)-3=2k-1$情形，对于$G$中的极长初级道路$P$, 其端点$v$的$d(v)$若$\ge$ 3则由Lemma保证G一定存在带弦的回路. 若$d(v)\le$ 2那么G的子图$G-\{v\}$满足$n=k$，$m\ge 2k-3$，由归纳假设知道$G-\{v\}$中一定存在带弦的回路，则G中存在带弦的回路。

P50 T5

> 设G是不存在K_3回路的简单图，证明
>
> (1) $\sum_i d^2(v_i) \le mn$
>
> (2) $m\le\frac{n^2}{4}$

证明：

(1) 设G的阶数为n,考虑图中的节点(u, v)之间有边，由于G中不存在K_3因此显然有 $d(u) - 1 + d(v) - 1 \leq n - 2$即有$d(u) + d(v) \leq n$对左右分别对所有的边$e = (u, v) \in E$求和，即 $\sum_{e \in E}[d(u) + d(v)] \leq mn, \quad u \neq v$,左边是对全体的边求和，而一条边会对节点$v$贡献$d(v)$，因此上式子化为 $\sum_i d^2(v_i) \leq mn.$

(2) 利用$Jensen$不等式，对于下凸函数$f(X) = \sum_i X_i^2$有$Ef(X) \geq f(EX)$因此有 $\frac{\sum_i d^2(v_i)}{n} \geq (\frac{d(v_i)}{n})^2 = (\frac{2m}{n})^2$. 再利用第一问的结论$\sum_i d^2(v_i) \leq mn$我们有$m \geq 4m^2/n^2$ 整理得到 $m \leq \frac{n^2}{4}$