

# HW4主观题

## HW4.1

利用归结法证明： $(S \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow Q) \wedge (R \vee S) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P$

证明：

即证明 $(S \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow Q) \wedge (R \vee S) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \wedge \neg P$ 为矛盾式

建立字句集 $E = \{\neg S \vee \neg Q, \neg P \vee Q, R \vee S, \neg R \vee \neg Q, \neg P\}$

归结过程：

(1)  $\neg S \vee \neg Q$

(2)  $\neg P \vee Q$

(3)  $R \vee S$

(4)  $\neg R \vee \neg Q$

(5)  $\neg S \vee \neg P$  (1)(2)归结

(6)  $R \vee \neg P$  (3)(5)归结

(7)  $\neg P \vee \neg Q$  (4)(6)归结

(8)  $\neg P$  (2)(7) 归结

(9)  $P$

(10)  $\square$  (8)(9)归结

## HW4.2

依照罗素公理系统证明命题。

Hint：采用如下的定义和公理顺序

### 定义

定义1:  $A \rightarrow B$  定义为  $\neg A \vee B$

定义2:  $A \wedge B$  定义为  $\neg(\neg A \vee \neg B)$

定义3:  $A \leftrightarrow B$  定义为  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

### 公理

公理1:  $\vdash (P \vee P) \rightarrow P$

公理2:  $\vdash (P \rightarrow (P \vee Q))$

公理3:  $\vdash (P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$

公理4:  $\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$

1.  $\vdash P \rightarrow (Q \vee P)$

证明:

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)) \text{ (公理4)} \quad (1)$$

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee R)) \text{ (代入 } \frac{P}{\neg P}) \quad (2)$$

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \text{ (定义1, 置换规则)} \quad (3)$$

$$\vdash ((P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee P))) \text{ (代入 } \frac{Q}{P \vee Q} \text{ 以及 } \frac{R}{Q \vee P}) \quad (4)$$

$$\vdash (P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P) \text{ (公理1)} \quad (5)$$

$$\vdash (P \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \vee P)) \text{ ((4)(5)分离)} \quad (6)$$

$$\vdash (P \rightarrow (P \vee Q)) \text{ (公理2)} \quad (7)$$

$$\vdash P \rightarrow (Q \vee P) \text{ ((6)(7)分离)} \quad (8)$$

2.  $\vdash Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$

证明:

$$\vdash P \rightarrow (Q \vee P) \text{ (8)} \quad (9)$$

$$\vdash Q \rightarrow (\neg P \vee Q) \text{ (代入 } \frac{P}{Q} \text{ 以及 } \frac{Q}{\neg P}) \quad (10)$$

$$\vdash Q \rightarrow (P \rightarrow Q) \text{ (定义1, 置换规则)} \quad (11)$$

3.  $\vdash P \vee \neg P$

证明:

$$\vdash P \rightarrow (P \vee Q) \text{ (公理2)} \quad (12)$$

$$\vdash P \rightarrow (P \vee P) \text{ (代入 } \frac{Q}{P} \text{)} \quad (13)$$

$$\vdash (P \vee P) \rightarrow P \text{ (公理1)} \quad (14)$$

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)) \text{ (公理4)} \quad (15)$$

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee R)) \text{ (代入 } \frac{P}{\neg P} \text{)} \quad (16)$$

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \text{ (定义1, 置换规则)} \quad (17)$$

$$\vdash (((P \vee P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \vee P)) \rightarrow (P \rightarrow P)) \text{ (代入 } \frac{Q}{P \vee P} \text{) 以及 } \frac{R}{P} \text{)} \quad (18)$$

$$\vdash (P \vee P) \rightarrow P \text{ (公理1)} \quad (19)$$

$$\vdash (P \rightarrow (P \vee P)) \rightarrow (P \rightarrow P) \text{ ((18)(19)分离)} \quad (20)$$

$$\vdash P \rightarrow P \text{ ((13)(20)分离)} \quad (21)$$

$$\vdash \neg P \vee P \text{ (定义1, 置换规则)} \quad (22)$$

$$\vdash (P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P) \text{ (公理3)} \quad (23)$$

$$\vdash (\neg P \vee P) \rightarrow (P \vee \neg P) \text{ (代入 } \frac{P}{\neg P} \text{ 以及 } \frac{Q}{P} \text{)} \quad (24)$$

$$\vdash P \vee \neg P \text{ ((22)(24)分离)} \quad (25)$$

$$4. \vdash (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$$

证明:

$$\vdash P \vee \neg P \text{ (25)} \quad (26)$$

$$\vdash \neg P \vee \neg \neg P \text{ (代入 } \frac{P}{\neg P} \text{)} \quad (27)$$

$$\vdash P \rightarrow \neg \neg P \text{ (定义1, 置换规则)} \quad (28)$$

$$\vdash (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg \neg(\neg P \vee \neg Q) \text{ (代入 } \frac{P}{\neg P \vee \neg Q} \text{)} \quad (29)$$

$$\vdash (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q) \text{ (定义2, 置换规则)} \quad (30)$$

$$5. \vdash \neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$

证明:

$$\vdash P \rightarrow \neg\neg P(28) \quad (31)$$

$$\vdash \neg P \rightarrow \neg\neg\neg P(\text{代入 } \frac{P}{\neg P}) \quad (32)$$

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))(\text{公理4}) \quad (33)$$

$$\vdash (\neg P \rightarrow \neg\neg\neg P) \rightarrow ((P \vee \neg P) \rightarrow (P \vee \neg\neg\neg P))(\text{代入 } \frac{Q}{\neg P} \text{ 以及 } \frac{R}{\neg\neg\neg P}) \quad (34)$$

$$\vdash (P \vee \neg P) \rightarrow (P \vee \neg\neg\neg P)((32)(34)\text{分离}) \quad (35)$$

$$\vdash P \vee \neg P(25) \quad (36)$$

$$\vdash P \vee \neg\neg\neg P((35)(36)\text{分离}) \quad (37)$$

$$\vdash (P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)(\text{公理4}) \quad (38)$$

$$\vdash (P \vee \neg\neg\neg P) \rightarrow (\neg\neg\neg P \vee P)(\text{代入 } \frac{Q}{\neg\neg\neg P}) \quad (39)$$

$$\vdash \neg\neg\neg P \vee P((37)(39)\text{分离}) \quad (40)$$

$$\vdash \neg\neg P \rightarrow P(\text{定义1, 置换规则}) \quad (41)$$

$$\vdash \neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)(\text{代入 } \frac{P}{\neg P \vee \neg Q}) \quad (42)$$

$$\vdash \neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q(\text{定义2, 置换规则}) \quad (43)$$

## HW4.3

依王浩算法判断该蕴含式是否正确： $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

并感受一下（不用作答）罗素公理系统和王浩算法哪个更适合计算机的自动证明。

解：

$$(1) \neg(P \wedge Q)s \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)(\text{写为相继式})$$

$$(2)s \Rightarrow \neg P \vee \neg Q, P \wedge Q(\neg \Rightarrow)$$

$$(3)s \Rightarrow \neg P, \neg Q, P \wedge Q(\Rightarrow \vee)$$

$$(4)P, Qs \Rightarrow P \wedge Q(\Rightarrow \wedge)$$

$$(5)P, Qs \Rightarrow P, P, Qs \Rightarrow Q(\Rightarrow \wedge)$$

由王浩算法公理可以知道，(5)为真，从而证毕