HW3主观题

HW3.1（30分）

给出下列公式的合取范式、析取范式、主合取范式、主析取范式，并给出所有使公式为真的解释（赋值）

1. $P \wedge \neg P$
   解：
   i. 合取范式：
      $P \wedge \neg P$
   ii. 析取范式
      $P \wedge \neg P$
   iii. 主合取范式
      $P \wedge \neg P = \wedge_{0;1}$
   iv. 主析取范式
      空公式
   v. 为真的解释
      无
2. $(P \rightarrow Q) \vee ((Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P))$
   解：
   不妨先进行化简：
   $(P \rightarrow Q) \vee ((Q \wedge P) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow \neg P)) = \neg P \vee Q$
   i. 合取范式：
      $\neg P \vee Q$
   ii. 析取范式
      $\neg P \vee Q$
   iii. 主合取范式
      $\wedge_1$
   iv. 主析取范式
      $\vee_{0;1;3}$
   v. 为真的解释
      $P = F \qquad Q = F$
      $P = F \qquad Q = T$
      $P = T \qquad Q = T$

HW3.2（15分）

分别以$A \rightarrow B$ 永真，$A \wedge \neg B$ 永假，以及解释法来证明下面重言蕴含式 $A \Rightarrow B$

$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

解：

1. $A \rightarrow B$永真
   (a)
   利用$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$(分配律)
   $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
   $= ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
   $= T$(恒等律)
   (b)
   不利用$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$(分配律)
   $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
   $= \neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vee ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))(\text{蕴含等值式})$
   $= \neg(\neg P \vee (Q \rightarrow R) \vee ((\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee R))(\text{蕴含等值式})$
   $= P \wedge \neg(Q \rightarrow R) \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R))(\text{蕴含等值式,双重否定律，德摩根律})$
   $= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R)(\text{蕴含等值式,双重否定律，德摩根律})$
   而其中$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R)$
   $= (P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R)$(分配律)
   $= T \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R)$ (补余律)
   $= \neg Q \vee \neg P \vee R$
   原式=$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \vee \neg P \vee R)$
   $= (P \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee \neg P \vee R)$(分配律)
   $= T \wedge T \wedge T$(补余律)
   $= T$(恒等律)

因此$A \rightarrow B$永真

2. $A \wedge \neg B$永假
   (a)
   利用$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$(分配律)
   $(P \rightarrow (Q \rightarrow R) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
   $= ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \wedge \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
   $= F$(补余律)
   (b)

$P \to (Q \to R) \wedge \neg((P \to Q) \to (P \to R))$
$= \neg P \vee (Q \to R) \wedge \neg(\neg(P \to Q) \vee (P \to R))$(蕴含等值式)
$= \neg P \vee (\neg Q \vee R) \wedge \neg((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R))$(蕴含等值式,双重否定律,德摩根律)
$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge ((\neg P \vee Q) \wedge (P \wedge \neg Q))$
$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge R))$(结合律)
其中$(\neg P \wedge P \wedge R) \vee (Q \wedge P \wedge R)$
$= F \vee (Q \wedge P \wedge R)$
$= (\neg P \vee Q \wedge R)$
$= (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (Q \wedge P \wedge R)$
因此原式$= (P \wedge Q \wedge P \wedge R) \vee (\neg Q \wedge Q \wedge P \wedge R) \vee (R \wedge Q \wedge P \wedge R)$
$= F \vee F \vee F$
$= F$

因此$A \wedge \neg B$永假

3. 解释法（可以参考教材2.8.2节）
   设若$P \to (Q \to R) = T$;
   若P = T， 则必有$Q \to R = T$;
   若Q = T, 有R = T，那么$(P \to Q) = T \qquad (P \to R) = T$，因此$(P \to Q) \to (P \to R) = T$，
   若Q = F, 有$P \to Q = F$,因此有$(P \to Q) \to (P \to R) = T$
   若P = F 则$P \to Q = F \qquad P \to R = F$,因此$(P \to Q) \to (P \to R) = T$
   因此重言蕴含式$P \to (Q \to R) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$永真

HW3.3（10分）

使用推理规则证明，注意步骤按照教材2.9书写

$\neg Q \vee S, (E \to \neg U) \to \neg S \Rightarrow Q \to E$

解:
增加重言式$(E \wedge U) \to E$作为前提
(1)$\neg Q \vee S$(前提引入)
(2)$Q \to S$((1)置换)
(3)$(E \to \neg U) \to \neg S$(附加前提引入)
(4)$S \to (E \wedge U)$((3)置换)
(5)$Q \to (E \wedge U)$((2)(4)三段论)
(6)Q(附加前提引入)
(7)$E \wedge U$((5)(6)分离)

(8)$(E \wedge U) \rightarrow E$(前提引入)
(8)E((7)(8)分离)
(9)$Q \rightarrow E$(条件证明)

HW3.4（15分）

证明下列推理规则，注意格式按照教材2.9书写

如果国家不对农产品给予补贴，那么国家就要对农产品进行控制。如果对农产品进行控制，农产品就不会短缺。或者农产品短缺或者农产品过剩。事实上农产品不过剩。从而国家队农产品给予了补贴。

解：
形式化：
P = "国家对农产品给予补贴"
Q = "国家对农产品进行控制"
R = "农产品短缺"
S = "农产品过剩"
前提：
$\neg P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg R, (R \wedge \neg E) \vee (\neg R \wedge E)$
先将前提中的$(R \wedge \neg E) \vee (\neg R \wedge E)$置换为$(R \vee E) \wedge (\neg R \vee \neg E)$
则前提变为：
$\neg P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg R, R \vee E, \neg R \vee \neg E$
结论：
$\neg E \Rightarrow P$
(1)$\neg P \rightarrow Q$ (前提引入)
(2)$Q \rightarrow \neg R$ (前提引入)
(3)$\neg P \rightarrow \neg R)$ ((1)(2)三段论)
(4)$R \rightarrow P$((3)置换)
(5)$R \vee E$ (前提引入)
(6)$\neg E \rightarrow R$((5)置换)
(7)$\neg E$(前提引入)
(8)R ((6)(7)分离)
(9)P((4)(8)分离)