主观题 HW11

> 对于想要使用LaTex的同学，离散数学不提供LaTex模版，有需要可以参考使用以下样例，将markdown题目粘贴进去即可（理论上markdown公式可以直接在LaTex中渲染）：
>
> ```
> \documentclass{article}
> \usepackage{ctex}
> \usepackage{geometry}
> \usepackage{amsmath,amssymb,amsthm,amsfonts}
> \geometry{left=2cm,top=2cm,right=2cm,bottom=2cm}
> \title{Discrete Mathematics}
> \author{}\date{}
> \pagestyle{empty}
> \begin{document}
>  \maketitle
>  \thispagestyle{empty}
>  % 以下是你的作业
> \end{document}
> ```

HW10.7（10 分）

> 这是上周因进度推迟到这周的作业

设 R, S, T 是 A 上的关系，证明： $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

证明：

对于

$$
\begin{gathered}
\forall <x,y>,\\
<x,y>\in R\circ(S\cup T)\Leftrightarrow(\exists z)(<x,z>\in S\cup T\wedge<z,y>\in R)\\
\Leftrightarrow(\exists z)(<x,z>\in S\vee<x,z>\in T\wedge<z,y>\in R)\\
\Leftrightarrow(\exists z)((<x,z>\in S\wedge<z,y>\in R)\vee(<x,z>\in T\wedge<z,y>\in R))\\
\Leftrightarrow(\exists z)<x,y>\in(R\circ S)\cup<x,y>\in(R\circ T)\\
\Leftrightarrow<x,y>\in(R\circ S)\cup(R\circ T)
\end{gathered}
$$

因此

$$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$$

HW11.1 （10分）

对命题：“集合A上的一个关系R，如果是对称的和传递的，就一定是自反的。因为 xRy 和 yRx 蕴含 xRx。”依据定义找出错误。

由定义有

R在A上是对称的和传递的分别为

$$
\begin{gathered}
(\forall x)(\forall y)((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy)\to yRx)\\
(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\to xRz)
\end{gathered}
$$

同时满足对称和传递则有

$$(\forall x)(\forall y)((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow xRx)$$

而自反的定义是

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow xRx)$$

显然有这个条件是更强的

在{1,2,3}上构造一个关系，它是对称的和传递的，但不是自反的。

比如

$$\{<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>\}$$

HW11.2（10分）

对A上的关系R，证明：

R是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

证明：

$$\begin{gathered}\Rightarrow: \forall <x,y> \in I_A, \text{即} x=y \\ \text{由}R\text{是自反的，有} <x,y> \in R \\ \text{则} \Leftrightarrow I_A \subseteq R \\ \Leftarrow: \Leftrightarrow I_A \subseteq R \\ \text{因此} \forall x \in A, <x,x> \in I_A \\ \text{所以} <x,x> \in R \\ \text{所以}R\text{是自反的}\end{gathered}$$

HW11.3（10分）

对集合$A=\{1,2,3\}$，给出A上的关系R的例子，使它具有下列性质：

（1）对称的且反对称的且传递的

（2）不是对称的且不是反对称的且传递的

解：

（1）

$$\begin{gathered}\{<1,1>\},\{<2,2>\},\{<3,3>\} \\ \{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}\end{gathered}$$

(2)

$$\{<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>,<1,3>,<2,3>\}$$

HW11.4（10分）

对集合$A=\{1,2,3,4\}$，A上的关系R为：

$$R=\{<1,2>,<4,3>,<2,2>,<2,1>,<3,1>\}$$

说明R不是传递的，并构造A上的关系R_1，使得$R\subseteq R_1$，且R_1是传递的。

R不是传递的：

$$<1,2>\in R,<2,1>\in R,\text{但是}<1,1>\notin R$$

构造

$$R=\{<1,2>,<2,2>,<2,1>,<1,1>,<4,3>,<4,1>,<3,1>,<3,2>,<4,2>\}$$

HW11.5（10分）

对$A=\{a,b,c,d\}$上的两个关系

$$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,d>\}$$
$$R_2=\{<a,d>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}$$

求$R_1\circ R_2$、 $R_2\circ R_1$、 R_1^2、 R_2^2

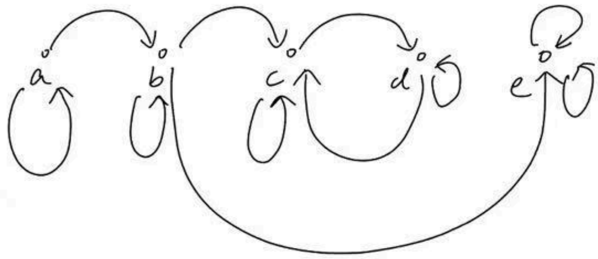
解：

$$R_1\circ R_2:\{<c,d>\}$$
$$R_2\circ R_1:\{<a,d>,<a,c>\}$$
$$R_1^2:\{<a,a>\}$$
$$R_2^2:\{<b,b>,<c,c>,<c,d>\}$$

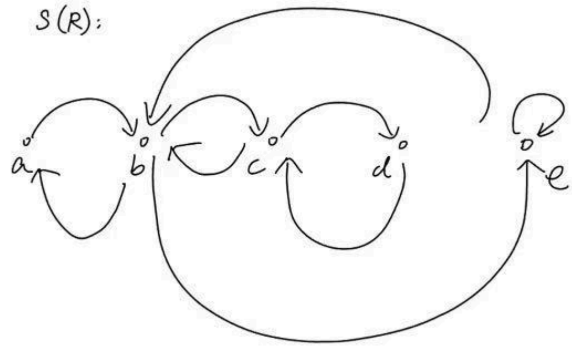
HW11.6（15分）

$A=\{a,b,c,d,e\}$上的关系R的关系图如下所示，给出$r(R),s(R),t(R)$的关系图。

r(R):



s(R):



t(R):