主观题 HW14

HW14.1 （10分）

用等势定义证明$[0,1] \approx [a,b]$，$(a,b \in \mathbb{R}, a < b)$

证明：

存在双射函数$f:[0,1] \to [a,b], f(x) = a + (b-a)x$

HW14.2 （10分）

写出$\mathbb{N}$的三个与$\mathbb{N}$等势的真子集

$$A = \{x|(\exists n)(n \in \mathbb{N} \land x = n^2)\}$$
$$B = \{x|(\exists n)(n \in \mathbb{N} \land x = n^5)\}$$
$$A \cup B$$

HW14.3 （10分）

对任意的基数k, l和无限基数m， 如果$2 \leq k \leq m$且$2 \leq l \leq m$，证明

(1) $k^m = 2^m$

(2) $k^m = l^m$

证明：

（1）

$$\text{由定理} m^m = 2^m$$
$$k^m \leq m^m$$
$$\text{因此} k^m \leq 2^m$$
$$\text{又由} 2^m \leq k^m$$
$$\text{因此} k^m = 2^m$$

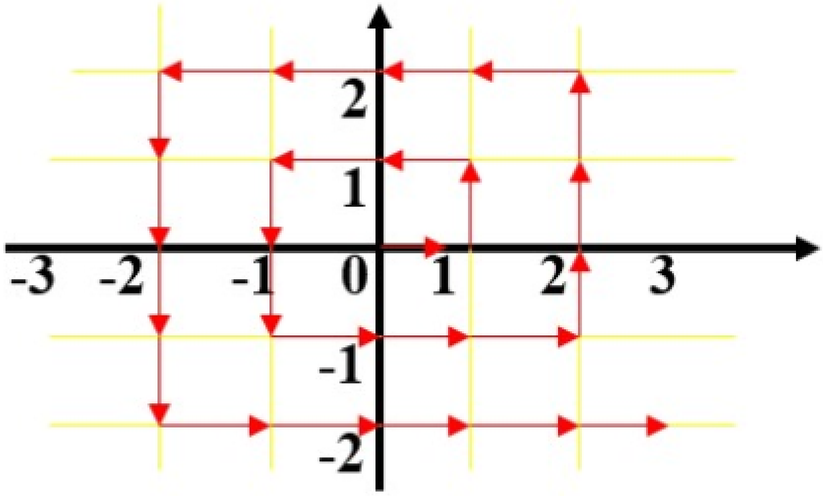
(2)

$$\text{将}(1)\text{中证明的} k^m = 2^m \text{中的} k \text{换成} l \text{得到} l^m = 2^m$$
$$\text{那么有} l^m = 2^m = k^m$$

HW14.4 （10分）

证明平面上直角坐标系中所有整数坐标点的集合是可数集

按照PPT上画出的图进行序列的构造



$$f(0) =< 0,0 >$$
$$f(1) =< 1,0 >$$
$$f(2) =< 1,1 >$$
$$f(3) =< 0,1 >$$
$$\ldots\ldots$$

则$f:\mathbb{N} \to < x,y > |x,y \in \mathbb{Z}$为双射，因此平面上直角坐标系中所有整数坐标点的集合是可数集

HW14.5 （15分）

用等势定义证明：$\mathbb{R} \approx \mathbb{R} - \mathbb{N}$

证明：

$$\text{构造函数} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} - \mathbb{N}$$
$$k \in \mathbb{N}$$
$$\text{当} x = k, f(x) = x + 1/2$$
$$\text{当} x = k + 1/2^n, (n \in \{0,1,2,3,\ldots\ldots\}), f(x) = k + 1/(2^n + 1)$$
$$otherwise$$
$$f(x) = x$$
$$f\text{是双射函数，由集合等势的定义有} \mathbb{R} \approx \mathbb{R} - \mathbb{N}$$