主观题 HW13

> 本次作业中可能出现的符号及其 $\LaTeX$ 记号：
>
> | 符号 | 记号 | 符号 | 记号 | 符号 | 记号 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $\{\dots\}$ | `\{...\}` | $\langle\dots\rangle$ | `\langle...\rangle` | $\in$ | `\in` |
> | $\cap$ | `\cap` | $\cup$ | `\cup` | $\neq$ | `\neq` |
> | $\emptyset$ | `\emptyset` | A_B | `A_{B}` | f^{-1} | `f^{-1}` |
> | $\mathbb{N}$ | `\N` 或 `\mathbb{N}` | $\mathbb{R}$ | `\R` 或 `\mathbb{R}` | $\to$ | `\to` |
> | $\subseteq$ | `\subseteq` | $\circ$ | `\circ` | $\mapsto$ | `\mapsto` |

HW 13.1（3×3分）

判断以下集合中哪些是函数。对于是函数的集合，写出其定义域和值域；对于不是的集合，给出理由。

(1) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 3,2\rangle\rangle,\langle 3,\langle 4,1\rangle\rangle\}$

(2) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 3,4\rangle\rangle,\langle 1,\langle 3,4\rangle\rangle\}$

(3) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 3,\langle 2,3\rangle\rangle\}$

解：

(1) 是函数。$dom(f)=\{1,2,3\}$,$ran(f)=\{<2,3>,<3,2>,<4,1>\}$

(2) 不是函数，对于定义域中的1,存在$\{<2,3>,<3,4>\}$两个元素与之对应

(3) 是函数，$dom(f)=\{1,2,3\}$,$ran(f)=\{<2,3>\}$

HW 13.2（10分）

设 $f,g\in A_B$，且 $f\cap g\neq\emptyset$，$f\cap g$ 和 $f\cup g$ 是函数吗？如果是，证明之；不是则举反例。

证明：

$$\begin{gathered}
f\cap g\text{、}f\cup g\text{均不是函数}\\
\text{反例如下：}A=\{1,2,3\}\\
B=\{1,2,3\}\\
f=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}\\
g=\{<1,1>,<2,3>,<3,2>\}\\
dom(f\cap g)=\{1,2,3\}\\
f\cap g=\{<1,1>\}\text{不是函数是其定义域中的元素但没有值域中的元素与之对应}\\
f\cup g=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,3>,<3,2>\}\text{不是函数，因为对于定义域中的元素}2\text{，}3\text{均有多个值域中的元素与之对应。}
\end{gathered}$$

HW 13.3（6分）

设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，$f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 是奇数}\\ \frac{x}{2} & \text{当 } x \text{ 是偶数}\end{cases}$。

求：$f(0)$，$f\{0\}$，$f\{0,2,4,6,\cdots\}$，$f\{1,3,5,\cdots\}$，$f^{-1}\{2\}$，$f^{-1}\{3,4\}$。

$$\begin{gathered}
f(0)=0\\
f[\{0\}]=\{0\}\\
f[\{0,2,4,6,\dots\}]=\{0,1,2,3,\dots\}\\
f[\{1,3,5\}]=\{1\}\\
f^{-1}[\{2\}]=\{4\}\\
f^{-1}[\{3,4\}]=\{6,8\}
\end{gathered}$$

HW 13.4（10分）

设 R 是 A 上的等价关系，$g: A \rightarrow A/\mathrm{R}$ 是自然映射，什么条件下 g 是双射的?

$$\text{当}R\text{是}A\text{上的恒等关系时，}g\text{是双射}$$
$$g\text{是双射，即}g\text{既是单射又是满射}$$
$$\text{我们先验证}g: A \rightarrow A/R\text{是满射：}$$
$$g(x) = [x]_R\text{是将元素映射到它的等价类，所以每个等价类都有一个原像，因此}g\text{一定是满射}$$
$$\text{验证}g\text{是单射：}$$
$$\text{如果}g(x_1) = g(x_2), \text{则}[x_1]_R = [x_2]_R$$
$$\text{而恒等关系}R\text{下，}[x_1]_R = [x_2]_R \Leftrightarrow x_1 = x_2$$
$$\text{则推出如果}g(x_1) = g(x_2), \text{则}x_1 = x_2, \text{因此}g\text{是单射}$$
$$\text{因此}g\text{是双射}$$

HW 13.5（3×5分）

对有限集合 A 和 B，$|A| = m, |B| = n$，求在下列情况下 m, n 应该满足的条件:

（1）存在从 A 到 B 的单射函数

（2）存在从 A 到 B 的满射函数

（3）存在从 A 到 B 的双射函数

解:

（1）$m \leq n$

（2）$m \geq n$

（3）$m = n$

HW 13.6（3×5分）

对下列集合 A 和 B，构造从 A 到 B 的双射函数:

（1）$A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c\}$

$$f: A \rightarrow B \qquad f(1) = a, f(2) = b, f(3) = cf = \{<1,a>,<2,b>,<3,c>\}$$

（2）$A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}, B = (1,3) \subseteq \mathbb{R}$

$$f: A \rightarrow B \qquad f(x) = 2x + 1$$

（3）$A = P(X), B = X_Y$，其中 $X = \{a,b,c\}, Y = \{0,1\}$

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$
$$\{B = X_Y = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}\}$$
$$\{f_1 = \{(a,0),(b,0),(c,0)\}\}$$
$$\{f_2 = \{(a,0),(b,0),(c,1)\}\}$$
$$\{f_3 = \{(a,0),(b,1),(c,0)\}\}$$
$$\{f_4 = \{(a,0),(b,1),(c,1)\}\}$$
$$\{f_5 = \{(a,1),(b,0),(c,0)\}\}$$
$$\{f_6 = \{(a,1),(b,0),(c,1)\}\}$$
$$\{f_7 = \{(a,1),(b,1),(c,0)\}\}$$
$$\{f_8 = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}\}$$
$$f = \begin{Bmatrix} (\varnothing, f_1), (\{a\}, f_2), (\{b\}, f_3), (\{c\}, f_4), \\ (\{a,b\}, f_5), (\{a,c\}, f_6), (\{b,c\}, f_7), (\{a,b,c\}, f_8) \end{Bmatrix}$$

HW 13.7（10分）

设 $f: A \to A$ 为一个满射函数，且 $f \circ f = f$。证明：$f = I_A$。

证明：

$$
\begin{gathered}
\text{由于} f: A \to A \text{是满射} \\
\forall y \in A, \exists x \in A, s.t. f(x) = y \\
\text{那么} f(f(x)) = f(y) \text{又由于} f \circ f = f \text{因此有} f(f(x)) = f(x) \\
\text{因此} y = f(x) = f(f(x)) = f(y) \\
\text{即有} \forall y \in A, f(y) = y \\
\text{因此} f = I_A
\end{gathered}
$$