# 主观题 HW12

符号说明：本次作业中出现的$Z_+$表示正整数集合，即
$Z_+ = \{x|x \in Z \wedge x > 0\}$

## HW12.1 （4分）

对有限集合A，在A上给出最多个等价类和最少个等价类的等价关系各是什么。

解：

最多个等价类的等价关系是$A$上的恒等关系$I_A$

最少个等价类的等价关系是A上的全关系$E_A$

## HW12.2 （5分）

设$R$是$A$上传递和自反的关系，$T$是$A$上的关系，$aTb \Leftrightarrow aRb \wedge bRa$。证明$T$是等价关系。

证明：
要证明$T$是等价关系，只需要证明$T$满足自反、对称和传递即可

自反： 由R自反因此，$aRa \wedge aRa \Leftrightarrow aTa$,T自反

对称：$aTb \Leftrightarrow aRb \wedge bRa \Leftrightarrow bRa \wedge aRb$

传递： $aRb \wedge bRc \Leftrightarrow aRb \wedge bRa \wedge (bRc \wedge cRb) \wedge \Leftrightarrow aRc \wedge cRa \Leftrightarrow aTc$ (利用了R的传递性)

## HW12.3 （6分）

对$A = \{a, b, c, d\}$，$R$是$A$上的等价关系，且
$R =< a, a >, < a, b >, < b, a >, < b, b >, < c, c >, < c, d >, < d, c >, < d, d >$。画$R$的关系图，求$A$中各元素的等价类。

（1）

RA：


（2）

等价类为

$$
[a]_R = [b]_R = \{a, b\}
$$
$$
[c]_R = [d]_R = \{c, d\}
$$

## HW12.4 （10分）

（1）设$R$和$S$是$A$上的关系，且
$S = \{< a, b > |(\exists c)(aRc \wedge cRb)\}$
证明若$R$是等价关系，则$S$是等价关系。

证明：

分别证明$S$的自反性、对称性和传递性即可

由于R的等价性，因此R具有自反、对称、传递性

对于任意的a,b

自反：由于R的自反性，aRa,因此$aSa \Leftrightarrow aRa \wedge aRa$

对称: 利用R的自反性$aSb \Leftrightarrow aRc \wedge cRb \Leftrightarrow bRc \wedge cRa \Leftrightarrow bSa$

传递：

$$
\begin{aligned}
aSb \wedge bSc &\Leftrightarrow (aRj \wedge jRb) \wedge (bRk \wedge kRc) \\
&\Leftrightarrow aRj \wedge jRk \wedge kRc \\
&\Leftrightarrow aRk \wedge kRc \Leftrightarrow aSc
\end{aligned}
$$

（2）设$A = Z_+ \times Z_+$，$A$上的关系
$R = \{\langle < x, y >, < u, v > \rangle | xv = yu\}$
证明$R$是等价关系。

证明：
分别证明自反、对称、传递

$$
\begin{gathered}
\text{自反：} \\
\forall << x, y >, < u, v > \\
xy = yx \Rightarrow < x, y > R < x, y > \\
\text{对称：} \\
< x, y > R < u, v > \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx \Rightarrow < u, v > R < x, y > \\
\text{传递：} \\
< x, y > R < u, v > \wedge < u, v > R < j, k > \\
\Rightarrow xv = yu \wedge uk = vj \\
\Rightarrow xk = yj \\
\Rightarrow < x, y > R < c, d >
\end{gathered}
$$

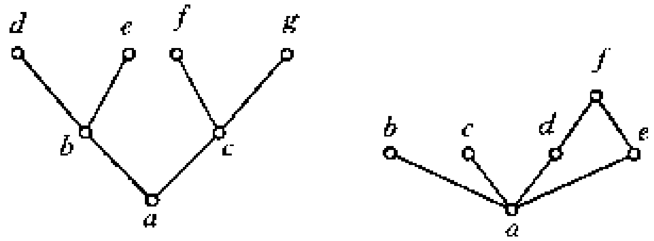
## HW12.5 （15分）

1、对下列集合上的整除关系画出哈斯图

（1）{1,2,3,4,6,8,12,24}

（2）{1,2,3,4,5,6,7,8,9}

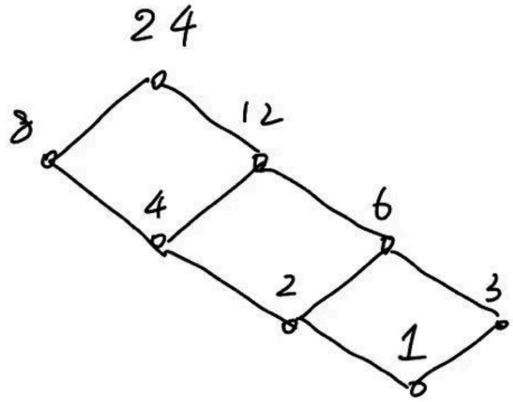
2、写出下列哈斯图的集合和集合上的偏序关系



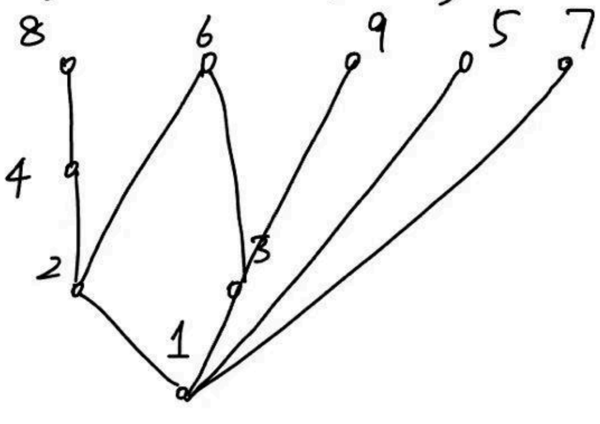

(1) (2)

1.

(1) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$




(2) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$




2.

(1)

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$
$$R = I_A \cup \{< a, b >, < a, c >, < a, d >, < a, e >, < a, f >, < a, g >, < b, d >, < b, e >, < c, f >, < c, g >\}$$

(2)

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$R = I_A \cup \{< a, b >, < a, c >, < a, d >, < a, e >, < a, f >, < d, f >, < e, f >\}$$

# HW12.6 （10分）

画出下列偏序集$< A,R >$的哈斯图，并写出$A$的极大元、极小元、最大元、最小元

（1）
$A=\{a,b,c,d,e\}，R=\{< a,d >,< a,c >,< a,b >,< a,e >,< b,e >,< c,e >,< d,e >\}\cup I_A$

（2）$A=\{a,b,c,d\}，R=\{< c,d >\}\cup I_A$

(1)

A的

极大元：e

极小元：a

最大元：e

最小元：a

（2）

极大元：a,d,b

极小元：c

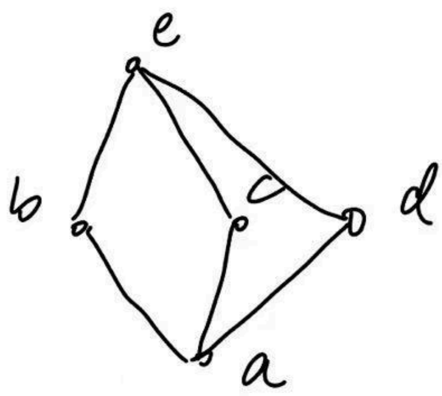
最大元：不存在

最小元：不存在

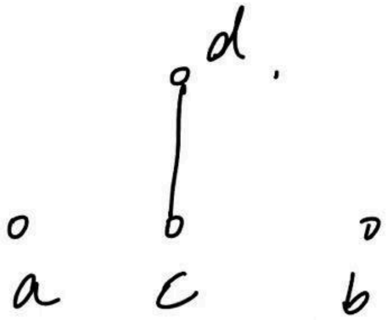
哈斯图:

(1)

$A=\{a,b,c,d,e\}$: $R$.




(2) $A=\{a,b,c,d\}$ : $R$.




## HW12.7（10分）

设$D$是$Z_+$上的整除关系，$T=\{1,2,\cdots,10\}\subseteq Z_+$，在偏序集$< Z_+, D >$中，求$T$的上界，下界，上确界，下确界

解:
上界：2520k, k 属于正整数

下界：1

上确界：2520

下确界：1

## HW12.8（5分）

设$R$是$A$上的偏序关系，$B\subseteq A$。证明$R\cap(B\times B)$是$B$上的偏序关系。

证明:

要证明一个关系是偏序关系，即要证明它是自反的、反对称的以及传递的

$$
\begin{gathered}
\text{自反性：}\\
\forall x, x \in B \Rightarrow <x, x> \in B \times B\\
x \in B \subseteq A \Rightarrow x \in A \Rightarrow <x, x> \in R\\
<x, x> \in B \times B \wedge <x, x> \in R \Rightarrow <x, x> \in R \cap (B \times B)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{反对称性：}\\
\forall x, y \in B \Rightarrow <x, y> \in B \times B\\
\text{我们在自反性中已经证明了，同理也会有 } <x, y> \in R\\
<x, y> \in B \times B \wedge <x, y> \in R \Rightarrow <x, y> \in R \cap (B \times B)\\
\text{同理也 } <y, x> \in R \cap (B \times B)\\
\text{而由}R\text{是偏序关系，因此}x = y
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{传递性：}\\
\forall x, y, z \in B\\
x, y, z \in B \Rightarrow <x, y> \in R \cap (B \times B) \wedge <y, z> \in R \cap (B \times B)\\
\Rightarrow (<x, y> \in R \wedge <y, z> \in R) \wedge (<x, y> \in B \times B \wedge <y, z> \in (B \times B))\\
\Rightarrow <x, z> \in R\\
\text{同时由}x, y, z \in B, <x, z> \in (B \times B)\\
\Rightarrow <x, z> \in R \cap (B \times B)
\end{gathered}
$$

## HW12.9（10分）

画出$A = \{0, 1, 2\}$上所有的偏序关系的哈斯图

$\{0,1,2\}$