HW5主观题

HW5.1（4×5分）

将下列语句符号化：

（1）过平面上两个点，有且仅有一条直线通过。

（2）凡实数都能比较大小。

（3）在北京工作的人未必都是北京人。

（4）任何金属都可溶解在某种液体内。

注意：不允许定义可以继续拆分的谓词。例如："过点 x 和 y 有且仅有一条直线"，"z 是过点 x 和 y 的直线"，"x 和 y 可以比较大小"均需进一步拆分，表示个体之间的关系。

解：

(1)定义$P(x)$表示x是平面上的点，定义$Q(x,y,l)$是过x,y的直线，定义$E(x,y)$表示x,y是同一点。定义$EL(l_1,l_2)$表示l_1，l_2是同一条直线。叙述可以形式化为：

$$(\forall x)(\forall y)P(x)\land P(y)\land\neg E(x,y)\to(\exists l_1)(Q(x,y,l_1)\land(\forall l_2)(Q(x,y,l_2)\to EL(l_1,l_2)))$$

(2)定义$P(x)$表示x是实数，$Q_+(x,y)$表示x比y大，同理定义$Q_-(x,y)Q_=(x,y)$分别表示x小于和等于y，则叙述可以形式化为（Hint:我个人觉得x和y可以"比较"说明{x>y,x<y,x=y}只能取其一，所以写出来会比较麻烦）

$$\begin{gathered}(\forall x)(\forall y)(P(x)\land P(y))\to((Q_+(x,y)\land\neg Q_-(x,y)\land\neg Q_=(x,y))\lor\\(\neg Q_+(x,y)\land Q_-(x,y)\land\neg Q_=(x,y))\lor(\neg Q_+(x,y)\land\neg Q_-(x,y)\land Q_=(x,y)))\end{gathered}$$

(3)定义$P(x)$表示x是在北京工作的，$Q(x)$ 表示x是北京人，则叙述可以形式化为:

$$(\exists x)(P(x)\land\neg Q(x))$$

(4)定义$P(x)$表示x是金属，$Q(x)$表示x是液体，$R(x,y)$表示x可以溶解在y里面，则叙述可以形式化为：

$$(\forall x)P(x) \to (\exists y)(R(x,y) \land Q(y))$$

HW5.2（2×5分）

设 $P(x)$ 表示 x 是有理数，$Q(x)$ 表示 x 是实数，$R(x)$ 表示 x 是无理数，$L(x)$ 表示 x 是正整数，$S(x)$ 表示 x 是偶数，$W(x)$ 表示 x 是奇数，试将下列公式翻译成自然语言：

（1）$(\forall x)(L(x) \to (P(x) \land Q(x)))$

解：任何一个有理数，都是既是有理数又是实数。

（2）$(\forall x)(L(x) \to P(x)) \land \neg(\forall x)(P(x) \to L(x))$

解：任何正整数都是有理数而且并非所有的有理数都是正整数。

HW5.3（3×5分）

设个体域为 $\{a,b,c\}$，试将下列公式写成命题逻辑公式：

（1）$(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(x,y))$

解：

$$\begin{gathered}((P(a,a) \to Q(a,a)) \lor (P(a,b) \to Q(a,b)) \lor (P(a,c) \to Q(a,c))) \land \\ ((P(b,a) \to Q(b,a)) \lor (P(b,b) \to Q(b,b)) \lor (P(b,c) \to Q(b,c))) \land \\ ((P(c,a) \to Q(c,a)) \lor (P(c,b) \to Q(c,b)) \lor (P(c,c) \to Q(c,c)))\end{gathered}$$

（2）$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$

解：

$$\begin{gathered}(P(a,a) \lor P(a,b) \lor P(a,c)) \lor \\ (P(b,a) \lor P(b,b) \lor P(b,c)) \lor \\ (P(c,a) \lor P(c,b) \lor P(c,c))\end{gathered}$$

（3）$(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to (\forall x)Q(x,y))$

解：

$$\begin{gathered}((P(a,a) \lor P(b,a) \lor P(c,a)) \to (Q(a,a) \land Q(b,a) \land Q(c,a))) \land \\ ((P(a,b) \lor P(b,b) \lor P(c,b)) \to (Q(a,b) \land Q(b,b) \land Q(c,b))) \land \\ ((P(a,c) \lor P(b,c) \lor P(c,c)) \to (Q(a,c) \land Q(b,c) \land Q(c,c)))\end{gathered}$$