

HW10主观题

对于想要使用LaTeX的同学，离散数学不提供LaTeX模版，有需要可以参考使用以下样例，将markdown题目粘贴进去即可（理论上markdown公式可以直接在LaTeX中渲染）：

```
\documentclass{article}
\usepackage{ctex}
\usepackage{geometry}
\usepackage{amsmath,amssymb,amsthm,amsfonts}
\geometry{left=2cm,top=2cm,right=2cm,bottom=2cm}
\title{Discrete Mathematics}
\author{}\date{}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\maketitle
\thispagestyle{empty}
% 以下是你的作业
\end{document}
```

HW 9.7 (10分)

求 1 至 250 之间能被 2, 3, 5 中任何一个整除的整数的个数。

HW9由于课程进度而推迟的一道题

设A,B,C分别是1到250之间能被2,3,5整除的集合

$$\begin{aligned} &|A| = 125, |B| = 83, |C| = 50 \\ &|A \cup B \cup C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 125 + 83 + 50 - 41 - 25 - 16 + 8 \\ &= 184 \end{aligned}$$

HW10.1 (15 分)

列出下列关系 R 的元素：

$$(1) A = \{0, 1, 2\}, B = \{0, 2, 4\}, R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \cap B \}$$

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle$$

$$(2) A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3\}, R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x = y^2 \}$$

$$\langle 1, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle$$

(3) 列出所有从 $A = \{a, b, c\}$ 到 $B = \{d\}$ 的关系。

$$R_1 = \{ \langle a, d \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle b, d \rangle \}$$

$$R_3 = \{ \langle c, d \rangle \}$$

$$R_4 = \{ \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle \}$$

$$R_5 = \{ \langle a, d \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$R_6 = \{ \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$R_7 = \{ \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$R_8 = \emptyset$$

HW10.2 (10 分)

设 $A = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$, $B = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$

求: $\text{dom}(A \cup B)$ 和 $\text{ran}(A \cap B)$

$$A \cup B = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$$

$$A \cap B = \{ \langle 2, 4 \rangle \}$$

$$\text{dom}(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{ran}(A \cap B) = \{4\}$$

HW10.3 (10 分)

证明:

$$(1) \text{dom}(R \cup S) = \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S)$$

$$(2) \text{dom}(R \cap S) \subseteq \text{dom}(R) \cap \text{dom}(S)$$

证明:

$$\begin{aligned} x \in \text{dom}(R \cup S) &\Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in R \cup S) \\ &\Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in R \vee (x, y) \in S) \\ &\Leftrightarrow ((\exists y)((x, y) \in R) \vee (\exists y)((x, y) \in S)) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{dom}(R) \vee x \in \text{dom}(S) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S) \\ &\therefore \text{dom}(R \cup S) = \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S). \\ x \in \text{dom}(R \cap S) &\Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in R \cap S) \\ &\Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in R \wedge (x, y) \in S) \\ &\Rightarrow ((\exists y)((x, y) \in R) \wedge (\exists y)((x, y) \in S)) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{dom}(R) \wedge x \in \text{dom}(S) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{dom}(R) \cap \text{dom}(S) \\ &\therefore \text{dom}(R \cap S) \subseteq \text{dom}(R) \cap \text{dom}(S). \end{aligned}$$

HW10.4 (10 分)

直接写出答案即可

(1) 设 $A = \{1, 2, 3\}$, 在 A 上有多少不同的关系?

(2) 设 $|A| = n$, 在 A 上有多少不同的关系?

(1) 512

(2) 2^{n^2}

HW10.5 (10 分)

对 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 2$, 用二元关系定义 n 元关系。

不妨递归地定义:

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2, x_3 \rangle &= \langle \langle x_1, x_2 \rangle, x_3 \rangle \\ \langle x_1, \dots, x_n \rangle &= \langle \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle \end{aligned}$$

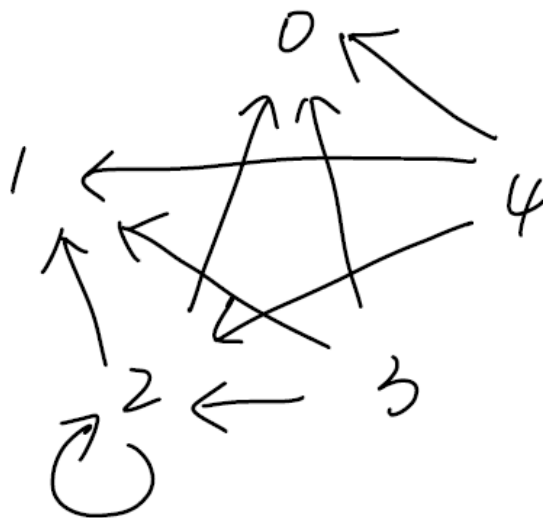
HW10.6 (10 分)

对 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上的下列关系, 给出关系图和关系矩阵。

(1) $R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid 2 \leq x \wedge y \leq 2 \}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M(R_1)$



$G(R_1)$

(2) $R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x \text{ 和 } y \text{ 是互质的} \}$ (注意, 0 和任意自然数均不互质)

$$M(R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$M(R_2)$

D



$G_1(R_2)$