

主观题 HW9

对于本次作业中注明了“**写出**”的题目：你可以给出简要计算过程，也可以直接写出结果。如果你写出了计算过程，那么若你的结果不正确，也可能根据过程得到部分分数；如果你直接写出结果，那么或者得满分，或者得零分。

本次作业中可能出现的符号及其 $LAT_{E}X$ 记号：

符号	记号	符号	记号	符号	记号
\bigcup	<code>\bigcup</code>	\bigcap	<code>\bigcap</code>	\emptyset	<code>\emptyset</code>
\cup	<code>\cup</code>	\cap	<code>\cap</code>	$\{\dots\}$	<code>\{\dots\}</code>
\subseteq	<code>\subseteq</code>	\Leftrightarrow	<code>\Leftrightarrow</code>	\oplus	<code>\oplus</code>
\times	<code>\times</code>	\wedge	<code>\wedge</code>	\vee	<code>\vee</code>

HW 9.1 (2×5分)

写出下列集合：

$$(1) \bigcup\{PPP(\emptyset), PP(\emptyset), P(\emptyset), \emptyset\}$$

$$(2) \bigcap\{PPP(\emptyset), PP(\emptyset), P(\emptyset)\}$$

其中：

$$PP(A) = P(P(A))$$
$$PPP(A) = P(P(P(A)))$$

$$\text{利用 } P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$PP(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$PPP(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$(1) \bigcup\{PPP(\emptyset), PP(\emptyset), P(\emptyset), \emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$(2) \{\emptyset\}$$

HW 9.2 (2×5分)

设 $A = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ，写出集合：

$$(1) P(A) \text{ 和 } \bigcup P(A)$$

$$(2) \bigcup A \text{ 和 } P(\bigcup A)$$

$$(1)$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$$

$$\bigcup P(A) = A = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

$$(2)$$

$$\bigcup A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$P(\bigcup A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

HW 9.3 (3×5分)

设 A, B, C 是任意的集合, 证明:

$$(1) (A - B) - C = (A - C) - (B - C)$$

$$(2) A = B \Leftrightarrow A \oplus B = \emptyset$$

$$(3) A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq -B \Leftrightarrow B \subseteq -A$$

证明:

$$\begin{aligned} (1) (A - C) - (B - C) &= (A \cap -C) \cap -(B \cap -C) = (A \cap -C) \cap (-B \cup C) \\ &= A \cap -C \cap (-B \cup C) = A \cap -C \cap (-B \cup C) = (A \cap -C \cap -B) \cup (A \cap -C \cap C) \\ &= (A \cap -C \cap -B) \cup \emptyset = A \cap -B \cap -C = (A - B) \cap -C \end{aligned}$$

$$(2) A = B \Rightarrow A \oplus B = \emptyset: \text{当 } A = B \text{ 有, } A - B = B \cap -B = \emptyset, \text{同理 } B - A = \emptyset$$

$$\text{故 } A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$$

$$A \oplus B = \emptyset \Rightarrow A = B:$$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset \cap B - A = \emptyset \\ &\Rightarrow A = B \end{aligned}$$

$$(3) 1. \text{设 } A \cap B = \emptyset, \text{ 对任意的 } x$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A - \emptyset \Rightarrow x \in A - A \cap B \Rightarrow x \in -(A \cap B) \Rightarrow x \in -B$$

所以, $A \subseteq -B$ 。

$$2. \text{设 } A \subseteq -B, \text{ 对任意的 } x$$

$$x \in B \Rightarrow x \notin -B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in -A \text{ 所以, } B \subseteq -A.$$

$$3. \text{设 } B \subseteq -A, \text{ 对任意的 } x x \in A \Rightarrow x \notin -A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in A \cap B$$

所以, $A \cap B = \emptyset$ 。从而, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq -B \Leftrightarrow B \subseteq -A$ 得证。

HW 9.4 (4×2.5分)

说明满足下列条件的集合 A 和 B 有什么关系:

$$(1) A - B = B$$

$$(2) A - B = B - A$$

$$(3) A \cap B = A \cup B$$

$$(4) A \oplus B = A$$

要求给出尽可能全面且简洁的关系式 (如 $A \subseteq B$ 、 $A = B$ 、 $A = \emptyset$ 等)。

解：

$$(1) B = \emptyset$$

$$(2) A = B$$

$$(3) A = B$$

$$(4) B = \emptyset$$

HW 9.5 (2×10分)

给出下列命题成立的充要条件：

$$(1) (A - B) \cup (A - C) = A$$

$$(2) (A - B) \oplus (A - C) = \emptyset$$

要求化至尽可能简单的形式。

解：

$$(1) A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$(2) A \cap B = A \cap C$$

HW 9.6 (2×10分)

(1) 若 $A \times B = \emptyset$ ，则 A 和 B 应满足什么条件？

(2) 在 (1) 的基础上，对于集合 A ，是否可能满足 $A = A \times A$ ？若满足，给出例子；若不满足，说明原因。

解：

$$(1) A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

(2)可能

$$A = \emptyset$$