1. 解：

(a) 两点分布 $P(Y=1)=p$，$P(Y=0)=1-p$ $Y\sim B(1,p)$

设 $Y=h(X)$，则 $P(h(X)=1)=p$，$P(h(X)=0)=1-p$

不妨令 $h(x)=\begin{cases}1. & (x\le p)\\ 0 & (x>p)\end{cases}$ 则 $P(h(x)=1)=P(X=h^{-1}(1))=p$

$P(h(x)=0)=P(X=h^{-1}(0))=1-p$

$\therefore h(x)=\begin{cases}1 & (0\le x\le p)\\ 0 & (p<x\le 1)\end{cases}$ 符合要求.

(b) $Y\sim \mathcal{E}(\lambda)$，$\lambda=1$，即有 $P(Y\le y)=F(y)=1-e^{-y}$

由 $Y=h(x)\Rightarrow P(h(x)\le y)=1-e^{-y}$，$P(X\le h^{-1}(y))=1-e^{-y}$

利用 $X\sim U(0,1)$ 有 $P(X\le h^{-1}(y))=h^{-1}(y)$ 从而有 $h^{-1}(y)=1-e^{-y}$

$\Rightarrow h(x)=-\ln(1-x)$ $(0\le x\le 1)$ 可以验证,符合要求.

2. 解：

p-分位数的定义为：$\forall p\in(0,1)$，$F^{-1}(p)=\inf\{x\mid F(x)\geq p\}$

称 $F^{-1}(p)$ 为 X 的 p-分位数.

因此，有

(1) $X\sim B(3,\frac{1}{3})$，$P(X=k)=\binom{3}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{3-k}\Longrightarrow$

$P(X=0)=\frac{8}{27}$，$P(X=1)=\frac{4}{9}$，$P(X=2)=\frac{2}{9}$，$P(X=3)=\frac{1}{27}$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{8}{27} & (0\le x<1)\\ \frac{20}{27}\simeq 0.74 & (1\le x<2)\\ \frac{26}{27}\simeq 0.96 & (2\le x<3)\\ 1 & (3\le x)\end{cases}$$

$\therefore F^{-1}(0.95)=\inf\{x\mid F(x)\geq 0.95\}=2$

(2) $X\sim \mathcal{E}(1)$，有 $F_X(x)=1-e^{-x}$

$F^{-1}(0.05)=\inf\{x\mid F(x)\geq 0.05\}=\inf\{x\mid x\geq -\ln(0.95)\}=0.051$

3. 解：

(1) 证明：X 在 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上随机取值.

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)=1$，

$$E(X)=\sum_{i=0}^{\infty} iP(X=i)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+[P(X=2)+P(X=2)]$$
$$+[P(X=3)+P(X=3)+P(X=3)]+\cdots$$
$$=[P(X=0)+P(X=1)+\cdots]+[P(X=1)+P(X=2)+\cdots]+[P(X=2)+\cdots]$$

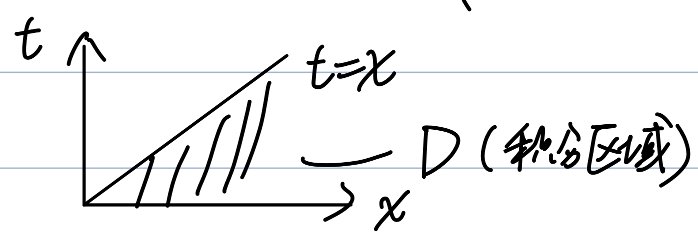
从而有 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\geq k}^{\infty}P(X=i)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k)$

(2) 证明：利用 $P(X>t)=\int_t^{+\infty}f(x)dx$

则待证式 $RHS=\int_0^{\infty}P(X>t)dt=\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty}f(x)dx\right)dt$

应用 Fubini 定理，由 $\int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty}f(x)\,dx\,dt=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x}f(x)dt\right)dx$

$=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=EX$



□

4. 解：由随机变量 $X\sim G(p)$. $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$

$P(X\geq k)=P(\{前 k-1 次全为不成功\})=(1-p)^{k-1}$

$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}$

5. 解：设第一个阳性出现前阴性反应者的人数为随机变量 X

$$P(X=m)=P(\text{前}m\text{个是阴性，第}m+1\text{个是阳性})=\frac{A_{45}^{m}\times 5}{A_{50}^{m+1}}\quad (m\leq 45)$$

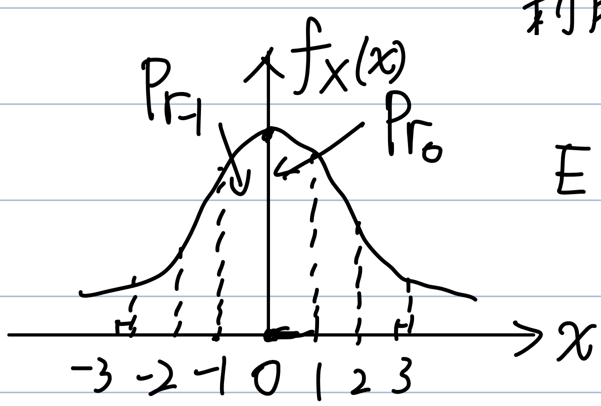
则有 $$E(X)=\sum_{m=0}^{45} mP(X=m)=\sum_{m=0}^{45}\frac{\frac{45!}{(45-m)!}\times 5}{\frac{50!}{(49-m)!}}\times m$$

$$=\sum_{m=0}^{45}\frac{m\times(49-m)(48-m)(47-m)(46-m)\times 5}{50\times 49\times 48\times 47\times 46}=\frac{15}{2}$$

6. 解：$X\sim N(0,\sigma^2)$ ∴ $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，$Y=\lfloor X\rfloor$

设 $P_{r_i}=\int_{r_i}^{r_i+1} f_X(x)\,dx$，$r_i\in\mathbb{Z}$. 则 $EY=\sum r_iP_{r_i}$ for all r_i

利用 $P_{r_{-j}}=P_{r_{j-1}}$ 对称性可知



$$EY=\cdots+(-2)P_{r_{-2}}+(-1)P_{r_{-1}}+0P_{r_0}+1\cdot P_{r_1}+\cdots$$

$$=(-1)(P_{r_0}+P_{r_1}+P_{r_2}+\cdots\ \cdots)$$

$$=(-1)\sum_{i=0}^{\infty}P_{r_i}=-\frac{1}{2}\quad(\text{利用}\sum_{i=0}^{\infty}P_{r_i}=P(X\geq 0)=\tfrac{1}{2})$$

7. 解：$X,Y\sim N(0,1)$ 有 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$，$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$

$X\perp Y$. 有 $T=X^2+Y^2\sim\chi^2_2$，即有 $f(t)=\frac{1}{2\Gamma(1)}t^0e^{-t/2}\quad t\geq 0$

即有 $f(t)=\frac{1}{2}e^{-t/2}\quad(t\geq 0)$

而由 $Z=T^{\alpha}$ 有 $T=g(z)=z^{\frac{1}{\alpha}}$，$\frac{dg(z)}{dz}=\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}$

∴ $f_Z(z)=f_T(g(z))\left|\frac{dg(z)}{dz}\right|=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\left|\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}\right|$

则有 $E(Z)=\int_0^{+\infty} z f_Z(z)dz=\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{2\alpha}\right| z^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{2}}dz$

利用 Gamma 分布的归一性有

$\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx=1$. 取 $\lambda=\frac{1}{2}$, $x=z^{\frac{1}{\alpha}}$ 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}z\cdot e^{-\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{2}}\cdot\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}dz=1$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} z^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{2}}dz=2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)$ 代入原式

$$E(Z)=\frac{2^{\alpha}}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)=\Gamma(\alpha)\cdot 2^{\alpha}$$

8. 解:

设木棒的长度为随机变量 Y. 有 $Y\sim U(1,2)$

设截出较长的一段长度为 X. 则 $X|Y\sim U(\frac{Y}{2},Y)$

$f_Y(y)=I_{\{1\le y\le 2\}}$ $\quad f_{X|Y}(x)=I_{\{\frac{y}{2}\le x\le y\}}\cdot\frac{1}{y-y/2}=I_{\{\frac{y}{2}\le x\le y\}}\cdot\frac{2}{y}$

则联合分布为 $f_{X,Y}(X=x,Y=y)=f_{X|Y}(x)f_Y(y)$

$f_{X,Y}(x,y)=\frac{2}{y}$ $(\frac{y}{2}\le x\le y,\ 1\le y\le 2)$, otherwise $=0$

则 $E(\Delta)=E(2X-Y)=\iint(2x-y)\cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$

$$=\int_1^2\left(\int_{\frac{y}{2}}^{y}\frac{2}{y}(2x-y)dx\right)dy=\frac{3}{4}$$