HW 3.

T1. 解:

设 A.B.C 为三个人分别被释放. 设 A 为问询者, B、C 为另外两个

设 I = "say B is to be released". II = "say C is to be released"

则关于 $P(A|I)$ 则为关心的 A 在知道另一个人被释放后自身释放的概率.

$$P(A|I) = \frac{P(A\cap I)}{P(I)} = \frac{P(A\cap B)}{P(I|AB)P(AB)+P(I|AC)P(AC)+P(I|BC)P(BC)}$$

$$= \frac{1/3}{1\times 1/3 + 0\times 1/3 + 1/2\times 1/3} = \frac{2}{3}$$

同理, $P(A|II) = \dfrac{P(A\cap II)}{P(II)} = \dfrac{P(A\cap C)}{P(II)} = \dfrac{2}{3}$

T2. 解:

(part 1). a.

$$P((G,G)|(G,\cdot)) = \frac{P((G,G)\cap(G,\cdot))}{P((G,\cdot))} = \frac{P((G,G))}{P((G,\cdot))} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

b.

设事件 A = "has at least one daughter" $= (G,B)\cup(G,G)\cup(B,G)$

则 $P((G,G)|A) = \dfrac{P((G,G)\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P((G,G))}{P(A)} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$

(part 2)

设事件 B = "at least one daughter named Lilia"

C = "has 2 daughters"

求出 $P(C|B) = \dfrac{P(C\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(C)P(B|C)}{P(B)}$

可通过序贯树得到，$P(B)=P(B|(B,B))P((B,B))+P(B|(B,G))P((B,G))$
$+P(B|(G,B))P((G,B))+P(B|(G,G))P((G,G))$

$=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times a+\frac{1}{4}\times a+\frac{1}{4}\times[a\cdot a+a(1-a)+(1-a)a+0]$

$=\frac{1}{4}[1-(1-a)^2+2(1-a)+2a]=\frac{1}{4}(4a-a^2)$

$P(B|C)=P(B|(G,G))=a\cdot a+2(1-a)a+0=(2a-a)^2$

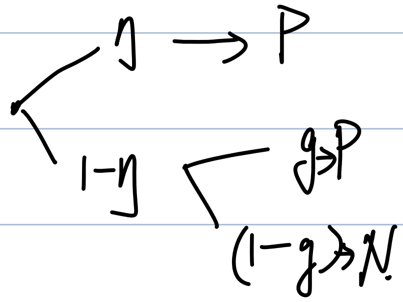
$\therefore P(C|B)=\dfrac{\frac{1}{4}(2a-a^2)}{\frac{1}{4}(4a-a^2)}=\dfrac{2a-a^2}{4a-a^2}=\dfrac{2-a}{4-a}$

当 $a\ll 1$ 时，$P(C|B)\simeq\frac{1}{2}=P((G,G)|(G,\cdot))$

即与(part 1)所述的情况已经十分接近了.

5. 解:

B104比率 $y=\frac{42}{547}\times 1640/10708=1.2\%$，设医生诊断真实为阴性时的误诊率为 g.



即有 $P(\text{诊断为Positive}|\text{真实为Negative})=g$.

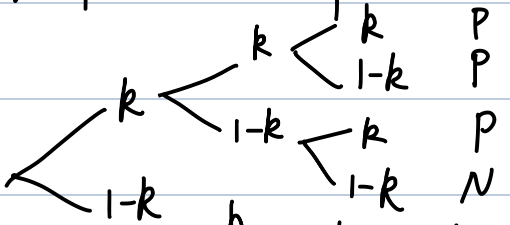
则建立等式：

$$\frac{y}{y+(1-y)g}=\frac{42}{547}$$

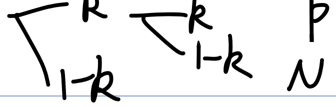
解出 $g=\dfrac{405y}{42(1-y)}=11.7\%$

说明这三位医生的联合误诊率为 $g=11.7\%$

设单独的误诊率为 k.



$$g=\frac{k^3+C_3^1k^2(1-k)}{1}\Longrightarrow k\simeq\sqrt{\frac{g}{3}}=20\%$$



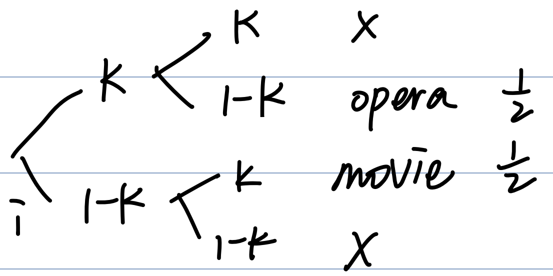
或解3次方程有 $3k^2-2k^3=0.117$

$k=0.213$（已舍去不在范围内的）

$\therefore$ 单独的误判率 $k<22\%$，因此未失职！

T4. 解：

非常自然的，可以想到抛两次 unfair coin，若结果为$\{HT\}$，去 opera.
若结果为$\{TH\}$，去 movie；若结果出现$\{HH\}$.$\{TT\}$，则重复抛.
设 A_i 为第i轮抛"才做出决定"事件. $P(\text{去opera}\mid A_k)=\frac{1}{2}$



$$\therefore\ P(\text{去opera})=\sum_{k=1}^{\infty}P(\text{opera}\mid A_k)P(A_k)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\frac{1}{2}.$$
（利用 $\forall\ 0<k<1$, $\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=1$）

T5. 解：

设 A_i 表示系统中有i个组件可以正常运行. $\bigcup_{i=k}^{n}A_i$ 为系统可运行事件

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{n}A_i\right)=\sum_{i=k}^{n}P(A_i)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

T6. 解：3个孩子的家庭 $A\perp B$，4个孩子，$A\not\perp B$

证明：

for kids=3, $P(A)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2^3-2}{2^3}=\frac{3}{4}$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}\quad\therefore P(A)P(B)=P(A\cap B)$$

$\therefore A\perp B$.

for kids=4. $P(A)=\frac{5}{2^4}=\frac{5}{16}$, $P(B)=\frac{2^4-2}{2^4}=\frac{7}{8}$

$P(A\cap B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ 且有 $P(A)P(B)\neq P(A\cap B)$

$\therefore A \not\perp B$.

T7. 解:

Let $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. $\mathcal{F}=\sigma(\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\})$

$$X(w)=\begin{cases}2 & \text{if } w\in\{1,2,3,4\}\\ 7 & \text{if } w\in\{5,6\}\end{cases}$$

证明: $\mathcal{F}=\sigma(\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\})$, σ-代数包含所有生成集的并交补.

则包含了 ϕ, $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,2,3,4,5,6\}$

根据随机变量的定义, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, $\{w\mid X(w)\leq x\}\in\mathcal{F}$

当 $x<2$ 时, $\{w\mid X(w)\leq x\}=\phi\in\mathcal{F}$

当 $2\leq x<7$ 时 $\{w\mid X(w)\leq x\}=\{1,2,3,4\}\in\mathcal{F}$

当 $x\geq 7$ 时. $\{w\mid X(w)\leq x\}=\{1,2,3,4,5,6\}\in\mathcal{F}$

$\therefore$ 验证了定义, $X(w)$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},)$ 上的随机变量.

T8. 解:

证明: A_i 是两两独立但不是相互独立的.

$P(A_i)=\frac{1}{2}$, $P(A_i\cap A_j)=\frac{1}{4}$ $(i\neq j)$

$P(A_i)P(A_j)=P(A_i\cap A_j)$ $(i\neq j)$ $\therefore$ A_i 是两两独立的!

但 $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=\frac{1}{4}\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

A_i is independent 定义: 在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 这个概率空间上, $A_1,A_2,\cdots A_n\in\mathcal{F}$

对于 $\forall$ 非空子集 $S\subset\{1,2,\cdots n\}$ 有 $P(\bigcap_{i\in S}A_i)=\prod_{i\in S}P(A_i)$

$\therefore$ $A_1\ A_2, A_3$ 并非一组相互独立的事件.