

# 一份（不太）简短的 力学 笔记

或物理笔记之一

作者: wanzhao

日期: 2026 年 1 月 26 日

课程: 力学 (H)



# 前言

前言先欠着，等我写了一些之后再补上。



# 目录

前言	i	0.3 行列式 . . . . .	28
目录	iii	0.3.1 行列式 . . . . .	28
第零章 数学基础	1	0.3.2 行列式的应用 . . . . .	29
0.1 一元函数微积分 . . . . .	1	0.4 矢量的代数运算 . . . . .	30
0.1.1 微分 . . . . .	1	0.4.1 矢量的叠加与分解 . . . . .	30
0.1.2 导数 . . . . .	2	0.4.2 矢量的点积 . . . . .	32
0.1.3 积分 . . . . .	6	0.4.3 矢量的叉积 . . . . .	33
0.1.4 常微分方程 . . . . .	8	0.4.4 矢量的多重积 . . . . .	34
0.2 多元函数微积分 . . . . .	23	0.5 其他可能的数学工具 . . . . .	36
0.2.1 偏微商 (偏导数) . . . . .	23	0.5.1 数列 (序列) . . . . .	36
0.2.2 重积分 . . . . .	24	0.5.2 不等式 . . . . .	36
0.2.3 线积分、面积分与体积分 . . . . .	25	0.5.3 复数 . . . . .	36
		0.5.4 三角函数 . . . . .	37
		0.5.5 求和公式 . . . . .	38



# 第零章 数学基础

物理的学习离不开数学，但学习时间的有限使得很多同学纠结数学应该学到多深。在普通物理的范畴内，作者在这里提出一些小小的建议。

数学知识分两类。

第一类是需要完全理解和掌握的，比如数列、导数和积分、微分方程……它们在题目中出现的概率很高，当我们遇到时要能从容应对。

第二类是有助于物理理解，但不要求完全掌握的，比如矢量分析与场论、张量代数……它们有助于加深你对物理情景的理解，但在普通物理的题目中出现的概率较低，这种知识需要学习，但学习的深度要视自身情况而定。

这一章虽然叫做数学基础，篇幅不长，但涵盖的内容并不少，并不需要通篇阅读，而是当你在学习物理的过程中遇到了数学上的困难时，再回头查阅有关内容。如果你能从我的注记中获得一些启发，那我的目的便达到了。

## 0.1 一元函数微积分

### 0.1.1 微分

一元函数可记为

$$y = y(x) \text{ 或 } y = f(x),$$

在它的连续区间内，如图 0.1

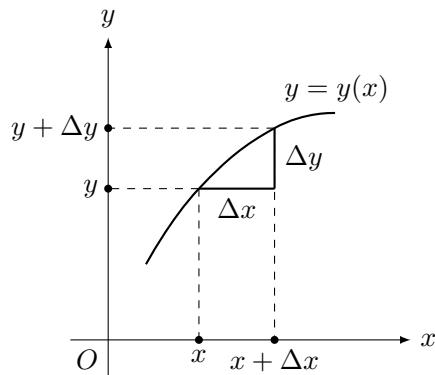


图 0.1

所示，自变量由  $x$  变到  $x + \Delta x$ ，相应的， $y$  由  $y(x)$  变到  $y(x + \Delta x)$ ，则函数的增量定义为

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x).$$

自变量  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 称为自变量微分, 记为  $dx$ ,  $dx$  是无穷小量, 不是零。但因为它是无穷小量, 它在与有限量的运算中, 在一些情况下可以视为 0 (但不是在所有情况下都可以视为 0)。在连续区间内, 自变量增量  $\Delta x$  趋近于微分  $dx$ , 函数增量  $\Delta y \rightarrow dy$ , 称为函数微分, 记为  $dy$ , 它也是无穷小量。  $dy$  与  $dx$  之间的关系为

$$dy = y(x + dx) - y(x).$$

#### 注释 0.1.1: 符号说明

显然, 因为  $y(x)$  不一定是单调函数, 所以  $\Delta y$  和  $dy$  可以是正的、负的或零。所以只要你严格遵守定义与符号计算的基本规则, 就不会出错。这句话在一些微元分析的场景下尤其适用。

#### 例 0.1.1: 重要近似

$$\sin x \sim \tan x \sim x, (x \rightarrow 0). \quad (0.1)$$

证明:

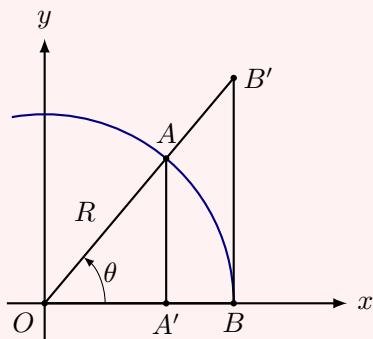


图 0.2: 重要近似的几何示意图

以  $O$  为原点建立直角坐标系, 绘出以  $R$  为半径的圆弧如图 0.2 所示, 其中圆心角  $\theta$  对应的直线段  $AA'$ ,  $BB'$ , 圆弧  $\widehat{AB}$  的长度分别为

$$\overline{AA'} = R \sin \theta, \quad \overline{BB'} = R \tan \theta, \quad \widehat{AB} = R\theta.$$

$\theta \rightarrow 0$  时, 有

$$\overline{AA'} \sim \overline{BB'} \sim \widehat{AB}.$$

化简得

$$\sin \theta \sim \tan \theta \sim \theta, (\theta \rightarrow 0).$$

□

## 0.1.2 导数

#### 定义 0.1.1: 导数

函数  $y = f(x)$  在点  $x$  处的导数定义为

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (0.2)$$

如果极限存在, 则称函数在点  $x$  处可导。

显然, 导数的几何意义是函数图像在点  $(x, f(x))$  处的切线的斜率。

在数学上可以证明导数与微分有如下关系:

**定义 0.1.2: 微分与导数的关系**

函数  $y = f(x)$  在点  $x$  处可导, 则函数在该点的微分与导数的关系为

$$dy = f'(x) dx. \quad (0.3)$$

因此, 导数也称为函数的微商, 而求导和求微分实际上是等价的。

**注释 0.1.2: 导数与微分的区别**

导数是一个极限值, 是一个确定的数值, 而微分是函数增量的线性主部, 不是一个确定的数值。导数表示函数在某点处的变化率, 而微分表示函数在该点处变化量的线性近似。

并且导数不能视为  $dy$  与  $dx$  的比值, 这只是 Leibniz 记号下的一个形式上的表示方法。当然, 在非严格的物理推导中, 我们经常会把导数视为  $dy$  与  $dx$  的比值来进行计算。并且可以用类似的方法处理常微分中的微元计算, 这种做法 (形式计算) 在物理学中是被广泛接受的。

当然, 如果从更高级的数学角度来看, 我们的操作是有严格依据的, 这也保证了我们不会出错, 这里便不再深入了。

导数有一些重要性质, 举例如下:

**示例 0.1.1: 导数的性质**

$$(1) \quad (A_1 y_1 + A_2 y_2)' = A_1 y'_1 + A_2 y'_2; \quad (0.4)$$

$$(2) \quad (y_1 y_2)' = y'_1 y_2 + y_1 y'_2; \quad (0.5)$$

$$(3) \quad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y'_1 y_2 - y_1 y'_2}{y_2^2}; \quad (0.6)$$

$$(4) \quad (y_1 \circ y_2)' = (y'_1 \circ y_2) \cdot y'_2. \quad (0.7)$$

证明略去。

其中, 式 0.7 被称为复合函数的求导法则。在微分的形式下, 式 0.7 可写为

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_2}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx}. \quad (0.8)$$

这也在一定程度上为我们对导数执行的“消去”操作的正确性提供了依据。

常用的导数公式列举如下:

**示例 0.1.2: 常用导数公式**

$$(1) \quad (x^n)' = nx^{n-1}; \quad (0.9)$$

$$(2) \quad (a^x)' = a^x \ln a; \quad (0.10)$$

$$(3) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (0.11)$$

$$(4) \quad (\sin x)' = \cos x; \quad (0.12)$$

$$(5) \quad (\cos x)' = -\sin x; \quad (0.13)$$

$$(0.14)$$

此外，还有几个常用的  $n$  阶导数公式：

### 示例 0.1.3: 常用 $n$ 阶导数公式

$$(1) \quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}; \quad (0.15)$$

$$(2) \quad (\sin ax)^{(n)} = a^n \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2}\right); \quad (0.16)$$

$$(3) \quad (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (0.17)$$

在数学上，导数还可以用来讨论函数曲线的极值位置与凹凸性，这在物理中经常用到，而且有如下结论：

### 定义 0.1.3: 极值与凹凸性的判定

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导，且  $f'(x_0) = 0$ 。

- 若  $f''(x_0) > 0$ ，则  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极小值，且曲线在该点处向下凸，称为“凸”；
- 若  $f''(x_0) < 0$ ，则  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极大值，且曲线在该点处向上凸，称为“凹”；
- 若  $f''(x_0) = 0$ ，则不能确定  $f(x)$  在点  $x_0$  处是否取得极值，需考察更高阶导数。

注意到，函数的凹凸与“凹”“凸”这两个字的字型是相反的，这是因为函数的凸性与凸集有关，而凸集的定义是明确的，因此相反。

接下来，我们介绍与导数有关的另一个重要工具——泰勒公式。

### 定理 0.1.1: 泰勒公式

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处具有  $n+1$  阶导数，则在点  $x_0$  附近，函数  $f(x)$  可展开为

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n, \quad (0.18)$$

其中，余项  $R_n$  有如下两种形式：

- 拉格朗日 (Lagrange) 余项形式：

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}; \quad (0.19)$$

- 皮亚诺 (Peano) 余项形式：

$$R_n = o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0. \quad (0.20)$$

泰勒公式表明，函数在某点处的值可以用该点处的各阶导数来近似表示。上述定义中的余项  $R_n$  描述了近似的误差大小。对于物理问题，我们通常只需要前几项的近似，因此余项的具体形式并不重要，我们也不必过多纠结。

显然，函数如果想展成泰勒级数，至少要求通项趋于零，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = 0.$$

但事实上，函数能否展成泰勒级数，还需要满足更强的条件，这里不再赘述。

函数  $f(x)$  若能在点  $x_0$  两侧某范围内展开成泰勒级数，且级数在该范围内收敛于函数值，便称这一范围

为  $f(x)$  的收敛区间。例如，在数学上可以证明：

#### 示例 0.1.4: 常见函数的泰勒展开

$$(1) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (0.21)$$

$$(2) \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (0.22)$$

$$(3) \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (0.23)$$

$$(4) \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]; \quad (0.24)$$

$$(5) \quad (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1). \quad (0.25)$$

其中，式 0.25 中的二项式系数定义为

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{n!}. \quad (0.26)$$

$x_0 = 0$  时，称为麦克劳林 (Maclaurin) 级数。

这里还要引入另一个与导数有关的重要概念——曲率与曲率半径。

#### 定义 0.1.4: 曲率与曲率半径

设函数  $y = f(x)$  在点  $x$  处具有二阶导数，则该点处的曲率定义为

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}. \quad (0.27)$$

曲率的倒数称为曲率半径，记为  $\rho$ ，即

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}{|f''(x)|}. \quad (0.28)$$

对于物理问题，曲率半径有时用来描述物体运动轨迹的弯曲程度。

在参数方程的形式下，设曲线由参数  $t$  给出，即

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

则曲率与曲率半径可表示为

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad \rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}, \quad (0.29)$$

同时给出因极其常用，给出椭圆的曲率半径公式，设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

则椭圆上点  $(x, y)$  处的曲率半径为

$$\rho = \frac{(a^2 b^2)^{3/2}}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}. \quad (0.30)$$

特别地，椭圆的长短半轴处的曲率半径分别为

$$\rho_a = \frac{b^2}{a}, \quad \rho_b = \frac{a^2}{b}.$$

### 0.1.3 积分

有许多数学书上把积分分为了不定积分与定积分两类，还有“积分是导数的逆运算”这样的说法。

但实际上，积分的本质是求和，而我更愿意把求不定积分看作是求原函数的问题，而把定积分视为真正意义上的“积分”，即求和。

#### 定义 0.1.5: 不定积分

设函数  $F(x)$  的导数为  $f(x)$ ，即  $F'(x) = f(x)$ ，则称函数  $F(x)$  为函数  $f(x)$  的一个原函数。函数  $f(x)$  的所有原函数的集合称为函数  $f(x)$  的不定积分，记为

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

其中， $C$  为任意常数。

根据示例 0.1.1 中导数的性质，可以得到不定积分的一些性质，举例如下：

#### 示例 0.1.5: 不定积分的性质

$$(1) \quad \int [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)] dx = A_1 \int f_1(x) dx + A_2 \int f_2(x) dx; \quad (0.31)$$

$$(2) \quad \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx; \quad (0.32)$$

$$(3) \quad \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du, \quad u = g(x). \quad (0.33)$$

同时，根据示例 0.1.2 中常用的导数公式，可以得到一些常见函数的不定积分，举例如下：

#### 示例 0.1.6: 常见函数的不定积分

$$(1) \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1); \quad (0.34)$$

$$(2) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C; \quad (0.35)$$

$$(3) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad (0.36)$$

$$(4) \quad \int \log_a x dx = x(\log_a x - \log_e a) + C; \quad (0.37)$$

$$(5) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (0.38)$$

$$(6) \quad \int \cos x dx = \sin x + C. \quad (0.39)$$

有了这些，我们就可以计算几乎所有可解的不定积分了。

#### 定义 0.1.6: 定积分

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义，且在该区间上可积，则称

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (0.40)$$

其中，区间  $[a, b]$  被分成  $n$  个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$ ， $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ， $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 。若极限存在，则称

该极限为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的定积分。

这是定积分的黎曼 (Riemann) 定义，它的几何意义是曲线  $y = f(x)$  与  $x$  轴及直线  $x = a$  和  $x = b$  所围成的面积（注意符号）。但是这个定义在实际计算中并不实用，我们需要借助不定积分来计算定积分（这也正是不定积分这个概念被提出的原因）。

这就需要用到著名的微积分基本定理。

### 定理 0.1.2: 微积分基本定理

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，且  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (0.41)$$

证明：

设区间  $[a, b]$  被分成  $n$  个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 。则有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$

当  $n \rightarrow \infty$  时，右端不变，因此

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

□上述证明中运用了微分中值定理，亦即拉格朗日 (Lagrange) 中值定理，可以自行查阅相关资料，此处不再赘述。

由此，我们可以通过求不定积分来计算定积分了。

类似于不定积分，定积分也有一些性质，举例如下：

### 示例 0.1.7: 定积分的性质

$$(1) \quad \int_a^b [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)] dx = A_1 \int_a^b f_1(x) dx + A_2 \int_a^b f_2(x) dx; \quad (0.42)$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \quad (0.43)$$

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (0.44)$$

### 注释 0.1.3: 积分变量的选择

在积分运算中，积分变量是一个“虚拟变量”，它可以是任何符号，只要在积分式中前后一致即可。例如，下面两个积分式是等价的：

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

这是因为积分变量只是一个占位符号，并不影响积分的结果。

下面给出一个定积分计算的例子，即曲线段长度的计算。

### 例 0.1.2: 曲线段长度

设函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续且可导, 求曲线  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的弧长。

证明:

设区间  $[a, b]$  被分成  $n$  个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 。则曲线段在子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的弧长近似为

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

当子区间足够小时, 有

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \approx f'(\xi_i).$$

因此, 曲线段在区间  $[a, b]$  上的弧长近似为

$$S \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

当子区间无限细分时, 近似变为等于, 即

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

□

### 注释 0.1.4: 微分形式下的曲线段长度

在一些书上也有类似于下面的表达式:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

这种表达式其实是对微分形式的曲线段长度公式的非严格表达, 但也是形式计算奏效的一个例子。

### 注释 0.1.5: 有关于积分技巧

关于积分的计算, 笔者在写到这里时, 一直在思考是否需要介绍一些积分技巧, 比如双元法, 但最后还是选择放弃。一方面, 物理中的积分的计算往往并不复杂, 更多的是经验的积累, 而不是技巧的运用; 另一方面, 像双元法这样的技巧, 不论是深度还是广度, 都远远超出了普通物理的范畴, 这也违背了这份笔记的初衷。

因此笔者的建议是, 数值积分依靠计算器或计算机软件即可, 而符号积分则更多依赖于查表与经验积累。

另外还有一条经验, 就是面对一个困难的积分, 不妨把最复杂或者说“难看”的部分进行换元, 往往会有意想不到的效果。

## 0.1.4 常微分方程

### 定义 0.1.7: 常微分方程

设未知函数  $y = y(x)$  及其各阶导数  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  之间存在某种关系, 可表示为

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (0.45)$$

则称该方程为  $n$  阶常微分方程。方程中所含未知函数微商的最高阶数  $n$  称为微分方程的阶数。若方

程关于  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  均是一次的，则称该微分方程为（ $n$  阶）线性微分方程。

一个函数  $y = y(x)$  若在某区间内具有  $n$  阶导数，且把该函数及其各阶导数代入微分方程后能使方程成立，则称该函数为该微分方程在该区间内的一个解。因此当给定方程后，最基本的事情当然是求出方程的解，即求未知函数  $y = y(x)$ 。

从数学上看，微分方程解的个数一般不唯一。例如，最简单的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (0.46)$$

的通解为

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C, \quad (0.47)$$

其中， $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数， $C$  为任意常数。即对任意的常数  $C$ ，函数  $y = F(x) + C$  都是该微分方程的一个解。故称这样形式的解为该微分方程的“通解”。

如果事先要求解必须满足某些条件（初始条件或边界条件），比如未知函数在一个特定的  $x_0$  处的值  $y(x_0) = y_0$ ，则符合要求的解

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0 \quad (0.48)$$

是唯一的，称为该微分方程的“特解”。

对于一般形式的  $n$  阶微分方程

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (0.49)$$

它的通解通常包含  $n$  个独立的任意常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$ 。它的解无论是隐表示  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$  还是显表示  $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ ，都称为该微分方程的通解或通积分。常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  称为积分常数。而下列初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (0.50)$$

一般来说决定了方程的一个特解。

从上面的讨论可以看出，求解微分方程的过程实际上就是一个积分的过程。所以若微分方程的通解能用初等函数及初等函数的不定积分表示，则称方程为可积微分方程，而导出这种解的方法称为初等积分法。

然而，能用初等积分法求解的微分方程只是微分方程中的一小部分，大部分方程的求解都比较复杂，甚至没有解析解。尽管如此这一基本方法在微分方程乃至物理学中仍然是非常重要的。我们将会简要介绍一些用初等积分法求解微分方程的解法。而对于（常）微分方程的一般理论，这里便不再深入了。

首先，我们介绍可分离变量的微分方程。

#### 定义 0.1.8: 可分离变量的微分方程

设微分方程可化为如下形式：

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y), \quad (0.51)$$

则称该微分方程为可分离变量的微分方程。

求解该类微分方程的方法如下：

1. 若  $h(y) = 0$  有解  $y = y_0$ ，则  $y = y_0$  是该微分方程的一个解；
2. 当  $h(y) \neq 0$  时，可将方程变形为

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx, \quad (0.52)$$

然后对两边分别积分，得

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + C, \quad (0.53)$$

其中， $C$  为任意常数。由此可得该微分方程的通解。

其次，我们介绍齐次微分方程。首先，我们给出齐次函数的定义。

#### 定义 0.1.9: 齐次函数

设函数  $f(x, y)$  满足如下条件：

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \quad (0.54)$$

其中， $t$  为任意常数， $n$  为非负整数，则称函数  $f(x, y)$  为  $n$  阶齐次函数。

基于齐次函数的定义，我们可以给出齐次微分方程的定义。

#### 定义 0.1.10: 齐次微分方程

对于一阶微分方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (0.55)$$

称为齐次的，当且仅当  $P(x, y)$  与  $Q(x, y)$  均为同阶齐次函数。现在  $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  为零阶齐次函数，因此可化为  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  的形式。于是该微分方程可化为如下形式：

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (0.56)$$

而称该微分方程为齐次微分方程。

求解该类微分方程的方法如下：

1. 作变量代换  $u = \frac{y}{x}$ ，则  $y = ux$ ，从而有

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

2. 将上式代入微分方程，得

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

即

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

3. 分离变量，得

$$\frac{1}{\varphi(u) - u} du = \frac{1}{x} dx.$$

然后对两边分别积分，得

$$\int \frac{1}{\varphi(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx + C,$$

其中， $C$  为任意常数。由此可得该微分方程的通解。

最后，我们介绍一阶线性微分方程

### 定义 0.1.11: 一阶线性微分方程

对于一阶微分方程，若未知函数  $y$  及其导数  $\frac{dy}{dx}$  都是一次的，则称该微分方程为一阶线性微分方程。它可化为标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (0.57)$$

其中， $P(x)$  与  $Q(x)$  为已知函数。若右端的  $Q(x) = 0$ ，则称该微分方程为（一阶）线性齐次微分方程，否则称为（一阶）线性非齐次微分方程。注意到，这里的“齐次”与前面介绍的齐次微分方程的“齐次”是不同的概念。

求解该类微分方程的方法如下：

1. 求解对应的齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0,$$

它的通解为

$$y_h = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad (0.58)$$

其中， $C$  为任意常数。

2. 求该非齐次方程的一个特解  $y_p$ ，可用如下方法求解，即设

$$y_p = u(x)e^{-\int P(x)dx}, \quad (0.59)$$

其中， $u(x)$  为待定函数。将  $y_p$  代入非齐次方程，得

$$\frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

分离变量并积分，得

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx.$$

因此，非齐次方程的一个特解为

$$y_p = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx. \quad (0.60)$$

3. 由此可得该非齐次微分方程的通解为

$$y = y_h + y_p = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx. \quad (0.61)$$

比较，式 0.58 与式 0.59 可以发现，解非齐次方程 0.57 所做的代换，可视为对齐次方程通解中的积分常数  $C$  进行函数化处理，即将  $C$  替换为待定函数  $u(x)$ ，因此，这种方法称为“常数变易法”。

此外，从通解公式 0.61 可以看出：非齐次微分方程的通解等于对应齐次微分方程的通解  $Ce^{-\int P(x)dx}$  与非齐次方程的一个特解  $e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$  之和。这件事情在更高阶的线性微分方程中也成立，这一性质称为“叠加原理”，我们之后会再提到它。

在此基础上，我们介绍二阶微分方程中的特例——可降阶微分方程。

一般的二阶微分方程可表示为

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (0.62)$$

这里介绍两种特殊类型的二阶微分方程，它们都可以通过变量代换将方程降阶，化为一阶微分方程来求解。

1. 若方程中不显含未知函数  $y$ , 即方程可表示为

$$F(x, y', y'') = 0, \quad (0.63)$$

则可作变量代换  $p = y'$ , 则  $y'' = \frac{dp}{dx}$ 。于是方程变为

$$F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0, \quad (0.64)$$

它是关于  $p$  的一阶微分方程, 求解出  $p = p(x)$  后, 再积分即可得到  $y = \int p(x) dx + C$ 。

2. 若方程中不显含自变量  $x$ , 即方程可表示为

$$F(y, y', y'') = 0, \quad (0.65)$$

则可作变量代换  $p = y'$ , 则  $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ 。于是方程变为

$$F(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0, \quad (0.66)$$

它是关于  $p$  的一阶微分方程, 求解出  $p = p(y)$  后, 再积分即可得到  $x = \int \frac{1}{p(y)} dy + C$ 。

对于一般的二阶微分方程, 我们无法, 也没有必要做过于深入的讨论。但是我们可以再此处简单介绍一下二阶线性微分方程解的结构, 并给出它的解法。

#### 定义 0.1.12: 二阶线性微分方程

设二阶微分方程可化为如下形式:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \quad (0.67)$$

其中,  $P(x), Q(x), f(x)$  为已知函数, 则称该微分方程为二阶线性微分方程。若右端的  $f(x) = 0$ , 相应的齐次方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0, \quad (0.68)$$

该微分方程被称为二阶线性齐次微分方程, 否则被称为二阶线性非齐次微分方程。

关于二阶线性微分方程初值问题的解的存在性与唯一性, 有如下定理:

#### 定理 0.1.3: 二阶线性微分方程初值问题的解的存在性与唯一性

设函数  $P(x), Q(x), f(x)$  在区间  $I$  上连续, 则对于任意  $x_0 \in I$  及任意常数  $\alpha, \beta$ , 二阶线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta, \end{cases}$$

在  $x_0$  附近存在唯一解。特别地, 对齐次方程(即  $f(x) = 0$ )的初值问题, 满足初值  $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$  的唯一解为零解  $y = 0$ 。

这里略去定理的证明, 它超出了普通物理学, 乃至大多数高校物理专业数学分析课程的范围。

#### 注释 0.1.6: 初值问题与边值问题的区别

看到这里, 读者可能会觉得奇怪, 为什么  $y(x)$  与  $y'(x)$  都要在相同的点  $x_0$  处给出初值, 而不能够分别在不同的点  $x_0, x_1$  处给出初值  $y(x_0) = \alpha, y'(x_1) = \beta$ 。

这就涉及到定解问题的类型划分了, 简单来说, 如果这  $n$  个条件给的点( $x$ 的值)不完全相同, 这就

不再是一个初值问题了，而是一个边值问题。

关于边值问题，有简单的结论如下：

1. 存在唯一性不再像初值问题那样有普遍保证对于初值问题（所有条件都在同一点  $x_0$  处给出），只要系数函数  $P(x), Q(x), f(x)$  在区间  $I$  上连续，则在  $x_0$  附近总是存在唯一解。但对于边值问题（条件分布在  $x_0, x_1, \dots$  处），情况就复杂得多了：

- 可能没有解：例如，方程  $y'' + y = 0$  在区间  $[0, \pi]$  上满足边界条件  $y(0) = 0, y(\pi) = 1$  的解不存在；
- 可能有唯一解。
- 可能有无穷多个解：例如，方程  $y'' + y = 0$  在区间  $[0, \pi]$  上满足边界条件  $y(0) = 0, y(\pi) = 0$  的解有无穷多个。

2. 物理意义不同

- 初值问题通常用于描述系统的时间演化过程，例如经典力学中的运动方程，给定初始位置和速度，可以确定物体的运动轨迹。
- 边值问题通常用于描述空间分布问题，例如热传导方程和波动方程，给定边界条件，可以确定系统在空间中的状态分布。

3. 数学处理方法不同

- 初值问题通常使用常规的微分方程求解方法，如变量分离法、积分因子法等。
- 边值问题通常需要使用特殊的方法，如特征值问题、傅里叶级数展开等。
- 边值问题往往涉及到线性代数和函数空间的概念，例如希尔伯特空间和巴拿赫空间。

所以，结论是： $n$  个条件依然可以用来确定  $n$  个常数，但前提是这组条件必须是相容的。并不是随便在纸上画  $n$  个点就能找到一个解同时经过它们，这取决于微分方程本身的性质（特征值等）。

对于齐次方程 0.68 很容易验证下面的结论：

#### 定理 0.1.4: 齐次二阶线性微分方程解的叠加原理

设  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  是齐次二阶线性微分方程的两个解，则对于任意常数  $C_1, C_2$ ，函数

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是该微分方程的解。

因此，齐次线性方程的解集具有线性结构。对于非齐次方程 0.67，容易验证如下定理：

#### 定理 0.1.5: 非齐次二阶线性微分方程解的结构

设  $y_p(x)$  是非齐次二阶线性微分方程的一个特解， $y_h(x)$  是对应齐次方程的通解，则非齐次方程的通解为

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

除此之外，我么还需要给出如下两个定义：

**定义 0.1.13: 线性无关**

设函数  $y_1(x), y_2(x)$  在区间  $I$  上有定义, 若不存在常数  $C_1, C_2$ , 使得

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$$

对区间  $I$  上的任意  $x$  都成立, 则称函数  $y_1(x), y_2(x)$  在区间  $I$  上线性无关, 否则称为线性相关。

**定义 0.1.14: 基本解组**

若函数  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  是齐次方程 0.68 的一对线性无关的解, 则该方程的任何解均可表示为

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

的形式, 其中,  $C_1, C_2$  为任意常数。

而且, 这样的一对线性无关的解  $y_1(x), y_2(x)$  称为该齐次方程的一个基本解组。

但大多数时候, 两组解是否线性无关并不容易判断。这需要引入 Wronskian 行列式的概念, 它定义如下:

**定义 0.1.15: Wronskian 行列式**

设函数  $y_1(x), y_2(x)$  在区间  $I$  上具有二阶导数, 则称如下行列式为函数  $y_1(x), y_2(x)$  的 Wronskian 行列式:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x).$$

基于 Wronskian 行列式, 我们可以给出如下判别线性相关的定理:

**定理 0.1.6: 判别线性无关的定理**

设函数  $y_1(x), y_2(x)$  是齐次方程 0.68 的两个解, 则它们在区间  $I$  上线性相关的充分必要条件是它们的 Wronskian 行列式在区间  $I$  上恒为零。

**注释 0.1.7: 关于二阶线性微分方程解的结构的说明**

关于以上给出的关于二阶线性微分方程解的结构的定义与定理, 读者大可不必过于纠结这些定义与定理的细节, 毕竟它们超出了大多数物理学课程的范围。

况且在笔者学习普通物理学的实践中, 这些内容也极少被用到。这里只是为了让读者对二阶线性微分方程的解的结构有一个大致的了解, 以便在后续的物理学学习中遇到相关内容时不会感到陌生。

另外, 对于形如 0.68 的齐次二阶线性微分方程, 实际上, 我们只要知道了它的一个解, 就可以通过 Liouville 公式求出另一个线性无关的解, 从而得到该方程的基本解组, 进而得到该方程的通解。具体的操作方法可参考相关数学分析教材, 此处不再赘述。

在上述基础上, 我们针对二阶常系数线性微分方程, 讨论如何求基本解组的问题。

**定义 0.1.16: 二阶常系数线性微分方程**

设二阶线性微分方程可化为如下形式:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x), \quad (0.69)$$

其中,  $a, b$  为常数,  $f(x)$  为已知函数, 则称该微分方程为二阶常系数线性微分方程。若右端的  $f(x) = 0$ , 相应的齐次方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0, \quad (0.70)$$

该微分方程被称为二阶常系数线性齐次微分方程, 否则被称为二阶常系数线性非齐次微分方程。

求解该类微分方程的方法如下:

1. 求解对应的齐次方程 0.70。设齐次方程的解为  $y = e^{\lambda x}$  的形式, 将其代入齐次方程, 得特征方程

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

解该特征方程, 得两个根  $\lambda_1, \lambda_2$ 。根据根的不同情况, 可分三种情形讨论:

- (a) 若  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 则齐次方程的基本解组为

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

- (b) 若  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , 则齐次方程的基本解组为

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = xe^{\lambda x}. \text{ (这是容易验证的)}$$

- (c) 若  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  (其中,  $i = \sqrt{-1}$ ), 则齐次方程的基本解组为

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

由此可得齐次方程的通解为

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

其中,  $C_1, C_2$  为任意常数。

2. 求该非齐次方程的一个特解  $y_p$ , 可用如下方法求解:

- (a) 若  $f(x)$  为指数函数、多项式函数、三角函数或它们的有限和与积的形式, 则可用“未定系数法”求解, 即设

$$y_p = y_p^{(1)} + y_p^{(2)} + \dots + y_p^{(n)},$$

其中, 每一项  $y_p^{(i)}$  对应  $f(x)$  中的一项, 且  $y_p^{(i)}$  的形式与该项相同, 但含有待定系数。将  $y_p$  代入非齐次方程, 解出待定系数, 即可得到该非齐次方程的一个特解。需要注意的是, 若  $y_p^{(i)}$  中的某一项与齐次方程的某一解形式相同, 则需将该项乘以  $x$  的适当幂次, 以确保  $y_p^{(i)}$  与齐次方程的解线性无关。

- (b) 否则, 可用“常数变易法”求解, 即设

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

其中,  $u_1(x), u_2(x)$  为待定函数,  $y_1(x), y_2(x)$  为齐次方程的基本解组。将  $y_p$  代入非齐次方程, 得

$$\begin{cases} u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) = 0, \\ u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) = f(x). \end{cases}$$

解出  $u'_1(x), u'_2(x)$ , 即

$$u'_1(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad u'_2(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)},$$

其中,  $W(y_1, y_2)$  为  $y_1(x), y_2(x)$  的 Wronskian 行列式。然后对  $u'_1(x), u'_2(x)$  分别积分, 得

$$u_1(x) = - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx, \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx.$$

因此, 非齐次方程的一个特解为

$$y_p = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)} dx.$$

3. 由此可得该非齐次微分方程的通解为

$$y = y_h + y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p.$$

类似的, 关于二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法不难推广到  $n$  阶常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \quad (0.71)$$

按实根、重根与复根的不同情况, 可得如下结论:

#### 定理 0.1.7: $n$ 阶常系数齐次线性微分方程的基本解组

设  $n$  阶常系数齐次线性微分方程的特征方程为

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

它有  $k$  个互不相同的实根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , 其中, 第  $i$  个实根  $\lambda_i$  的重数为  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), 则该微分方程的基本解组为

$$\{e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{\lambda_k x}\}.$$

若  $\lambda_{k+1} = \alpha + \beta i$  与  $\lambda_{k+2} = \alpha - \beta i$  ( $\beta > 0$ ) 为一对共轭复根, 且它们的重数均为  $m$ , 则该微分方程的基本解组还应包括

$$\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)\}.$$

则方程 0.71 的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \dots + C_{m_1} x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} + C_{m_1+1} e^{\lambda_2 x} + C_{m_1+2} x e^{\lambda_2 x} + \dots + C_{m_1+m_2} x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x} + \dots$$

通解的系数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  可由初值条件确定。

齐次方程通解的求解尚且如此, 对于非齐次方程, 也就是通解的计算, 类比二阶情形, 我们可以想象其复杂度会大幅提升。

为此, 我们引入一种计算方法——算子法。

#### 定义 0.1.17: 微分算子

设  $D = \frac{d}{dx}$ , 则称  $D$  为微分算子。由此可定义  $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ 。

#### 注释 0.1.8: 关于微分算子的说明

在如下的推导中, 有诸多地方并不严格, 读者大可不必过于纠结这些细节。一来算子理论是有严格数学基础的, 亦即若尔当 (Jordan) 标准形等线性代数的内容; 二来在我学习普通物理学的实践中, 你

可能会用到算子法的情形并不会触及这些所谓严格的边界。

于是,  $n$  阶常系数线性微分方程可表示为

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = f(x). \quad (0.72)$$

设特征多项式  $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ , 则可将上式写为

$$P(D)y = f(x). \quad (0.73)$$

首先, 我们研究  $f(x) = e^{ax}$  的情形, 其中,  $a$  为常数。

若  $P(a) \neq 0$ , 则有如下定理:

#### 定理 0.1.8: 指数代换法则

设  $P(D)$  为  $n$  阶常系数线性微分算子,  $a$  为常数, 且  $P(a) \neq 0$ , 则

$$P(D)e^{ax} = P(a)e^{ax}. \quad (0.74)$$

**证明:**

注意到  $P(D)$  是由  $D$  的多项式构成的, 因此只需证明

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax}.$$

这是显然的。 □

由此可得如下结论:

#### 定理 0.1.9: 指数输入定理

设  $P(D)$  为  $n$  阶常系数线性微分算子,  $a$  为常数, 且  $P(a) \neq 0$ , 则方程

$$P(D)y = e^{ax}$$

的一个特解为

$$y_p = \frac{1}{P(a)}e^{ax}. \quad (0.75)$$

**证明:**

由指数代换法则, 有

$$P(D)y_p = P(D)\left(\frac{1}{P(a)}e^{ax}\right) = \frac{1}{P(a)}P(D)e^{ax} = \frac{1}{P(a)}P(a)e^{ax} = e^{ax}.$$

□

注意到三角函数是可以用指数函数表示的, 即欧拉 (Euler) 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (0.76)$$

而这有什么用呢? 由于复变函数的求导可以简单理解为分别对实部与虚部求导, 于是就容易证明对于一个在复数域上的微分方程 (但  $P(x) \in R[x]$ , 就是  $P(x)$  为实系数多项式)

$$P(D)y = f(x) \quad (0.77)$$

的特解的实部恰好是

$$P(D)y = \Re(f(x)) \quad (0.78)$$

的特解，同样虚部恰好是

$$P(D)y = \Im(f(x)) \quad (0.79)$$

的特解。所以对于  $f(x)$  为三角函数的情形完全可以转化为指数函数的情形来处理，最后根据要求保留实部或虚部即可。所以我们讨论的  $e^{ax}$  中的  $a$  可以是任意复数，即  $a \in \mathbb{C}$ 。

到现在其实已经得到了一个挺不错的结果了，但这其实还不够。注意到指数输入定理 0.1.9 中有一个限制条件  $P(a) \neq 0$ ，因为分母显然不能为零。但是在实际中， $P(a) = 0$  的情况比比皆是。所以有如下定理：

#### 定理 0.1.10: 指数位移法则

设  $P(D)$  为  $n$  阶常系数线性微分算子， $a$  为常数， $u(x)$  为可微函数，则

$$P(D)(e^{ax}u(x)) = e^{ax}P(D+a)u(x). \quad (0.80)$$

**证明：**

注意到  $P(D)$  是由  $D$  的多项式构成的，因此只需证明

$$D^n(e^{ax}u(x)) = e^{ax}(D+a)^n u(x).$$

那么很明显可以运用数学归纳法

1. 当  $n = 1$  时，显然成立：

$$D(e^{ax}u(x)) = e^{ax}(D+a)u(x).$$

2. 假设当  $n = k$  时成立，即

$$D^k(e^{ax}u(x)) = e^{ax}(D+a)^k u(x).$$

则当  $n = k + 1$  时，有

$$\begin{aligned} D^{k+1}(e^{ax}u(x)) &= D(D^k(e^{ax}u(x))) \\ &= D(e^{ax}(D+a)^k u(x)) \\ &= e^{ax}(D+a)(D+a)^k u(x) \\ &= e^{ax}(D+a)^{k+1} u(x). \end{aligned}$$

由数学归纳法原理，定理得证。  $\square$

这个命题的作用将会在后面揭晓。

一般我们只会讨论二阶常系数微分方程，因为正常人是不会解三次及以上（甚至五次及以上是没有根式解）的方程的，所以我们先由二阶微分方程入手。

显然如果  $P(a) = 0$ ，则  $a$  必为  $P(x) = 0$  的一个根。而学过待定系数法后也知道应该分两种情况讨论，即  $a$  是单根与重根的情形。

#### 定理 0.1.11: 单根指数输入定理

若  $a$  为  $P(x) = 0$  的单根，则有：

$$y_p = \frac{x e^{ax}}{P'(a)}. \quad (0.81)$$

**证明：**

不妨设  $a, b$  ( $a \neq b$ ) 为  $P(x) = 0$  的两个根，为方便起见，我们假设  $P(x)$  的最高次项系数为 1。那么有：

$$P(D) = (D - a)(D - b)$$

所以

$$P'(D) = 2D - (a + b)$$

故有  $P'(a) = a - b$ ，于是将  $y_p$  代入方程可得：

$$\begin{aligned} P(D)y_p &= \frac{e^{ax}P(D+a)x}{P'(a)} \quad (\text{由指数位移法则}) \\ &= \frac{e^{ax}(D+a-b)Dx}{a-b} \\ &= \frac{e^{ax}(a-b)}{a-b} \\ &= e^{ax}. \end{aligned}$$

□

类似地，有如下定理：

**定理 0.1.12: 二重根指数输入定理**

若  $a$  为  $P(x) = 0$  的二重根，则有：

$$y_p = \frac{x^2 e^{ax}}{P''(a)}. \quad (0.82)$$

证明类似单根情形，此处略去。

由此，我们可以推出如下结论：

**定理 0.1.13:  $n$  重根指数输入定理**

若  $a \in \mathbb{C}$  为  $P(x) = 0$  的  $n$  重根，则有：

$$y_p = \frac{x^n e^{ax}}{P^{(n)}(a)}. \quad (0.83)$$

证明：

由于  $a$  为  $P(D) = 0$  的  $n$  重根，因此  $P(D)$  可表示为

$$P(D) = (D-a)^n \tilde{P}(D)$$

则：

$$P^{(n)}(D) = n! \tilde{P}(D) + (D-a)Q(D)$$

其中， $Q(D)$  为某个微分算子。因此， $P^{(n)}(a) = n! \tilde{P}(a)$ 。于是，将  $y_p$  代入方程可得：

$$\begin{aligned} P(D)y_p &= \frac{e^{ax}P(D+a)x^n}{P^{(n)}(a)} \quad (\text{由指数位移法则}) \\ &= \frac{e^{ax}\tilde{P}(D+a)(D)^n x^n}{P^{(n)}(a)} \\ &= \frac{e^{ax}\tilde{P}(a)n!}{n!\tilde{P}(a)} \\ &= e^{ax}. \end{aligned}$$

□

而当  $f(x)$  为多项式函数时，我们先考虑一个例子：

### 例 0.1.3: 算子法求特解——多项式函数情形

求微分方程

$$-y' + y = x$$

的一个特解。解：

显然我们可以轻易的构造出一个特解  $y_p = x + 1$ 。这个方程用算子法可以写作：

$$(-D + 1)y = x.$$

如果大胆地把算子除到右边，会得到

$$y = \frac{x}{-D + 1}.$$

如果联想到  $\frac{1}{1-D}$  的泰勒级数：

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \dots,$$

并更大胆地将其代入：

$$y = (1 + D + D^2 + D^3 + \dots)x = x + 1.$$

这正是我们之前构造的特解。 ■

但是根据我们在前面讨论的内容，我们会知道

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (0.84)$$

是有条件的，即当且仅当  $|x| < 1$  时才成立。但是  $D$  是一个算子，根本没有什么度量概念！所以其实我们是在考虑  $\frac{1}{P(D)}$  的形式幂级数，也就是不考虑其收敛性，只关注它的形式。

关于这么做是否正确，我可以得出一个简单的说明（并非严格证明）：

#### 注释 0.1.9: 关于算子法中形式幂级数的说明

如果考虑  $1 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$  这  $n$  项，那么就有：

$$(1 - D)(1 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}) = (1 - D) \frac{1 - D^n}{1 - D} = 1 - D^n.$$

如果记  $Q_n(D) = 1 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$ ，那么我们期望的答案是

$$Q(D)f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(D)f(x).$$

那么将其带回原方程，并且注意到将算子  $D$  作为多项式不定元的多项式是满足结合律的：

$$\begin{aligned} P(D)(Q(D)f(x)) &= P(D) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(D)f(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(D)(Q_n(D)f(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - D^n)f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

所以现在问题转化成了求出  $\frac{1}{P(D)}$  的形式幂级数展开式，这可以利用泰勒展开或者利用多项式除法。个人觉得多项式除法更直观一些，多项式的除法一般是长除法，并且原则是从高位向低位以此消去高次项，而在此处则反过来，从低位向高位消。

$$\begin{array}{r}
 & \frac{x^3 + x^2 + 3x - 2}{x+1} \\
 x+1) & \overline{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 1} \\
 & \underline{-x^4 - x^3} \\
 & \quad x^3 + 4x^2 \\
 & \quad \underline{-x^3 - x^2} \\
 & \quad \quad 3x^2 + x \\
 & \quad \quad \underline{-3x^2 - 3x} \\
 & \quad \quad \quad -2x + 1 \\
 & \quad \quad \quad \underline{2x + 2} \\
 & \quad \quad \quad \quad 3
 \end{array}$$

这是正常情况下的长除法（注意与部分数论教材稍有不同），长除法可以对给定的被除式  $f(x)$ ，除式  $g(x)$ ，求出商式  $h(x)$  与余式  $r(x)$ ，使得

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x),$$

其中  $r(x)$  的次数小于  $g(x)$  的次数。而对于一般的  $P(D)$ ，我们利用相反的方法，找到一个  $H(D)$ ，使得

$$1 = P(D)H(D) + R(D),$$

而  $R(D)$  的最低次数是可以无限增大的，于是我们记长除法（反过来的）第  $k$  次的余式为  $R_k(D)$ ，商式为  $H_k(D)$ ，于是有

$$1 = P(D)H_k(D) + R_k(D).$$

在极限存在的情况下，记

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_k(D) = H(D), \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(D) = R(D).$$

那么将  $H(D)f(x)$  带回原方程：

$$\begin{aligned}
 P(D)(H(D)f(x)) &= P(D) \left( \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(D)f(x) \right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} P(D)(H_k(D)f(x)) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - R_k(D))f(x) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

这就说明了算子法的正确性。

所以很自然的，我们有如下定义：

#### 定义 0.1.18: 微分算子多项式的逆

若  $P(D)$  中的常数项不为零，我们定义：

$$\frac{1}{P(D)} := H(D) \tag{0.85}$$

那么由上文的讨论，当  $f(x)$  为多项式函数时，其解特解形式已经得到了：

**定理 0.1.14: 多项式输入定理**

若  $f(x)$  为有限次多项式函数, 且  $P(D)$  中的常数项不为零, 则方程  $P(D)y = f(x)$  的一个特解为:

$$y_p = \frac{1}{P(D)} f(x). \quad (0.86)$$

类似地, 我们可以推广到  $f(x)$  为指数函数与多项式函数乘积的情形:

**定理 0.1.15: 指数-多项式输入定理**

设  $a \in \mathbb{C}$ ,  $f(x)$  为有限次多项式函数, 则方程

$$P(D)y = e^{ax}f(x)$$

的一个特解为:

$$y_p = e^{ax} \frac{1}{P(D+a)} f(x). \quad (0.87)$$

当然到了这一步, 这个公式已经趋近于完美了, 只有一个小问题, 就是  $\frac{1}{P(D+a)}$  的常数项可能为零。但这不足为虑, 因为位移法则其实在表明这样的一个事实: 只要把  $P(D+a)y = f(x)$  的特解乘上  $e^{ax}$  就是原方程的特解。所以就回到了一开始讨论的问题, 可以先把  $D^k$  提取出来, 最后在一步步积分即可。

为了让结论“更正确”, 我们对  $\frac{1}{P(D)}$  做如下补充定义:

**定义 0.1.19: 微分算子多项式的广义逆**

设  $P(D) = D^k \tilde{P}(D)$ , 其中,  $\tilde{P}(D)$  中的常数项不为零, 则定义

$$\frac{1}{P(D)} := D^{-k} \frac{1}{\tilde{P}(D)}, \quad (0.88)$$

其中,  $D^{-k}$  表示对函数进行  $k$  次不定积分, 即

$$\frac{1}{D^k} f(x) = \underbrace{\int \int \cdots \int}_{k \text{ 次}} f(x) dx. \quad (0.89)$$

而对于任意定义在  $\mathbb{R}[D]$  上的多项式  $P(D) = D^k \tilde{P}(D)$ , 其中  $D \nmid \tilde{P}(D)$ , 我们定义:

$$\frac{1}{P(D)} := \frac{1}{D^k} \frac{1}{\tilde{P}(D)}. \quad (0.90)$$

下面给出一个最终的例子, 并附带完整过程

**例 0.1.4: 算子法求特解——综合例子**

求微分方程

$$y'' + 4y = x \cos x$$

的一个特解。

**解:** 复化:

$$(D^2 + 4)\tilde{y} = xe^{ix}.$$

故:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y} &= \frac{1}{D^2 + 4} xe^{ix} \\
 &= e^{ix} \frac{1}{(D + i)^2 + 4} x \quad (\text{由指数-多项式输入定理}) \\
 &= e^{ix} \frac{1}{D^2 + 2iD + 3} x \\
 &= e^{ix} \left( \frac{1}{3} - \frac{2i}{9} D + \dots \right) x \quad (\text{由多项式输入定理}) \\
 &= (\cos x + i \sin x) \left( \frac{x}{3} - \frac{2i}{9} \right).
 \end{aligned}$$

故:

$$y_p = \Re(\tilde{y}) = \frac{x}{3} \cos x + \frac{2}{9} \sin x.$$

■

如下为升幂长除法的计算示例:

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3} \quad -\frac{2}{9}iD \\
 \hline
 3 + 2iD + D^2 \Big) \quad 1 \\
 -1 - \frac{2}{3}iD - \frac{1}{3}D^2 \\
 \hline
 -\frac{2}{3}iD - \frac{1}{3}D^2 \\
 \frac{2}{3}iD - \frac{4}{9}D^2 + \frac{2}{9}iD^3 \\
 \hline
 -\frac{7}{9}D^2 + \frac{2}{9}iD^3
 \end{array}$$

## 0.2 多元函数微积分

多元函数微积分是对单变量微积分的推广，研究多个自变量的函数的微分与积分性质。但此处只能做简单介绍，一来篇幅有限，二来在普物力学中，多元函数微积分的应用并不多见，更多的是在电动力学与量子力学中才会频繁使用。更详细的介绍可以参考有关数学教材或者笔者后续的电磁学笔记。

### 0.2.1 偏微商（偏导数）

多元函数是由多个独立自变量构成的函数。将  $k$  个自变量记为  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ )，则多元函数可表示为:

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (0.91)$$

仅由自变量  $x_1$  的无穷小变化引起的函数增量

$$y(x_1 + dx_1, x_2, \dots, x_k) - y(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

称为函数对  $x_1$  的偏微分，将

$$y'_{x_1} = \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{y(x_1 + dx_1, x_2, \dots, x_k) - y(x_1, x_2, \dots, x_k)}{dx_1} \quad (0.92)$$

称为函数对  $x_1$  的偏微商或偏导数。为了在形式上与一元函数导数  $\frac{dy}{dx}$  区分开来，偏导数通常记为

$$y'_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}. \quad (0.93)$$

类似地，可定义函数对其他自变量的偏导数：

#### 定义 0.2.1: 偏导数的定义

设  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ，则函数对自变量  $x_i$  的偏导数定义为

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{y(x_1, \dots, x_i + dx_i, \dots, x_k) - y(x_1, x_2, \dots, x_k)}{dx_i} (i = 1, 2, \dots, k). \quad (0.94)$$

类似的，我们可以定义高阶偏导数：

#### 定义 0.2.2: 高阶偏导数的定义

设  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ，则函数对自变量  $x_i$  的  $n$  阶偏导数定义为

$$\frac{\partial^n y}{\partial x_i^n} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x_i^{n-1}} \right) (i = 1, 2, \dots, k; n = 2, 3, \dots). \quad (0.95)$$

设  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  且  $i \neq j$ ，则函数对自变量  $x_i$  与  $x_j$  的混合偏导数定义为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial y}{\partial x_j} \right). \quad (0.96)$$

#### 注释 0.2.1: 关于偏导数的说明

偏导数的计算与一元函数的导数计算类似，只是在计算时将其他自变量视为常数。

而对于混合偏导数，我们有一个常用的性质：若  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_k)$  在点  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$  的某邻域内具有连续的二阶偏导数，则在该点处有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, k; i \neq j).$$

即交换偏导顺序，结果不变，该性质称为混合偏导数的对称性。

在此基础上，我们可以定义多元函数的全微分：

#### 定义 0.2.3: 全微分的定义

设  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ，则函数  $y$  的全微分定义为

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_k} dx_k. \quad (0.97)$$

全微分表示函数在各个自变量发生微小变化时的总变化量。

## 0.2.2 重积分

重积分是对多元函数在某个区域上的积分运算，是一元积分的推广。设  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  为定义在区域  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  上的多元函数，则其在区域  $D$  上的重积分定义为

## 定义 0.2.4: 重积分的定义

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k = \lim_{\max \Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i f(\xi_i) \Delta V_i, \quad (0.98)$$

其中, 区域  $D$  被划分为若干小体积  $\Delta V_i$ ,  $\xi_i$  为  $\Delta V_i$  内的某点,  $\max \Delta V_i$  表示所有小体积的最大值。

## 注释 0.2.2: 关于重积分的说明

这里的“体积”并非我们通常所说的三维空间中的体积, 而是  $k$  维空间中的“超体积”。同时上述定义实际上非常模糊且并不严谨, 关于  $\Delta V_i$  的划分方式, 极限的存在性等问题都需要更为严谨的数学语言来描述, 限于篇幅, 此处便不做展开了。

重积分的计算通常可以通过迭代积分来实现, 即将多重积分转化为一系列一元积分。例如, 对于二重积分, 有:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

其中,  $y_1$  与  $y_2$  为区域  $D$  在  $y$  方向的边界,  $x_1(y)$  与  $x_2(y)$  为区域  $D$  在  $x$  方向的边界。具体的操作及一些技巧可以参考相关数学教材。

## 0.2.3 线积分、面积分与体积分

物理学中有些标量是空间位置  $\mathbf{r}$  的函数, 例如非均匀物质场中的密度分布  $\rho(\mathbf{r})$ , 电势分布  $V(\mathbf{r})$  等。这类标量与位置之间的函数可一般地记作

$$\phi(\mathbf{r}) \text{ 或 } \phi(x, y, z). \quad (0.99)$$

它是一个由空间中的三个独立坐标  $x, y, z$  决定的三元函数。

类似地, 物理学中有些矢量是空间位置  $\mathbf{r}$  的函数, 例如速度场  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , 电场强度分布  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  等。这类矢量与位置之间的函数可一般地记作

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \text{ 或 } \mathbf{A}(x, y, z). \quad (0.100)$$

他可分解成

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z, \quad (0.101)$$

其中,  $A_x(\mathbf{r}), A_y(\mathbf{r}), A_z(\mathbf{r})$  均为标量性三元函数。

## 注释 0.2.3: 关于单位矢量表示法的说明

关于  $Oxyz$  中单位矢量的表达, 有一部分教材使用的是  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , 但是笔者偏爱使用  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , 特在此说明。

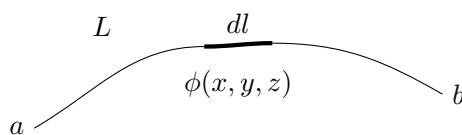


图 0.3

将图 0.3 中  $a$  到  $b$  的曲线段  $L$  上的任意一段曲线元记为  $dl$ , 并忽略曲线元上各点的位置变化, 则曲线元上各点的函数值可视为常数, 记为  $\phi(\mathbf{r})$  或  $\phi(x, y, z)$ 。将该位置处的函数值与曲线元长度的乘积  $\phi(x, y, z) dl$ , 从曲线段  $L$  的起点  $a$  积分到终点  $b$ , 即得到沿曲线段  $L$  的线积分:

**定义 0.2.5: 线积分的定义**

$$\int_L \phi(x, y, z) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_i \phi(\xi_i) \Delta l_i, \quad (0.102)$$

其中, 曲线段  $L$  被划分为若干小曲线元  $\Delta l_i$ ,  $\xi_i$  为  $\Delta l_i$  上的某点,  $\max \Delta l_i$  表示所有小曲线元的最大值。

若取  $\phi(x, y, z) = 1$ , 则线积分即为曲线段  $L$  的长度。如果  $L$  为闭合曲线, 则称该线积分为闭合线积分, 记为

$$\oint_L \phi(x, y, z) dl. \quad (0.103)$$

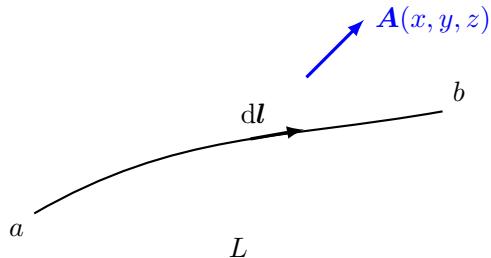


图 0.4

图 0.4 中从线元始端到终端的矢量  $dl$  称为线元矢量。各  $dl$  所在位置  $(x, y, z)$  均有函数值  $A(x, y, z)$ , 将该位置处的矢量函数值与线元矢量的标量积  $A(x, y, z) \cdot dl$ , 从曲线段  $L$  的起点  $a$  积分到终点  $b$ , 即得到沿曲线段  $L$  的矢量线积分:

**定义 0.2.6: 矢量线积分的定义**

$$\int_L \mathbf{A}(x, y, z) \cdot dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{A}(\xi_i) \cdot \Delta l_i, \quad (0.104)$$

其中, 曲线段  $L$  被划分为若干小曲线元矢量  $\Delta l_i$ ,  $\xi_i$  为  $\Delta l_i$  上的某点,  $\max \Delta l_i$  表示所有小曲线元长度的最大值。

如果  $L$  为闭合曲线, 则称该矢量线积分为闭合矢量线积分, 记为

$$\oint_L \mathbf{A}(x, y, z) \cdot dl. \quad (0.105)$$

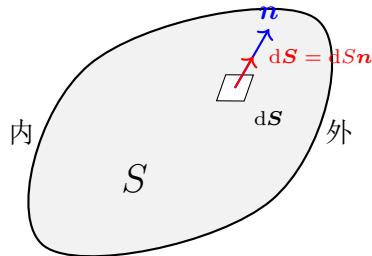


图 0.5

讲一个曲面(包括平面)  $S$ , 如图 0.5 所示, 分割成一系列无穷小的小片, 称为面元, 面积一般地记为  $dS$ 。在面元处引一个与面元法线方向相同的单位矢量  $n$ , 并规定曲面的一侧为内侧, 另一侧为外侧,  $n$  指向

外侧, 称

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$$

为面元矢量。若面元处有函数值  $\phi(x, y, z)$ , 则将该位置处的函数值与面元面积的乘积  $\phi(x, y, z) dS$ , 从曲面  $S$  的各个面元上积分, 即得到曲面  $S$  上的面积分:

#### 定义 0.2.7: 面积分的定义

$$\iint_S \phi(x, y, z) dS = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \phi(\xi_i) \Delta S_i, \quad (0.106)$$

其中, 曲面  $S$  被划分为若干小面元  $\Delta S_i$ ,  $\xi_i$  为  $\Delta S_i$  上的某点,  $\max \Delta S_i$  表示所有小面元的最大面积。

若取  $\phi(x, y, z) = 1$ , 则面积分即为曲面  $S$  的面积。如果  $S$  为闭合曲面, 则称该面积分为闭合面积分, 记为

$$\oint\!\!\!\oint_S \phi(x, y, z) dS. \quad (0.107)$$

类似地, 若面元处有矢量函数值  $\mathbf{A}(x, y, z)$ , 则将该位置处的矢量函数值与面元矢量的标量积  $\mathbf{A}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ , 从曲面  $S$  的各个面元上积分, 即得到曲面  $S$  上的矢量面积分:

#### 定义 0.2.8: 矢量面积分的定义

$$\iint_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{A}(\xi_i) \cdot \Delta S_i, \quad (0.108)$$

其中, 曲面  $S$  被划分为若干小面元矢量  $\Delta S_i$ ,  $\xi_i$  为  $\Delta S_i$  上的某点,  $\max \Delta S_i$  表示所有小面元的最大面积。

如果  $S$  为闭合曲面, 则称该矢量面积分为闭合矢量面积分, 记为

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{A}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}. \quad (0.109)$$

将某空间区域  $V$  分割成一系列无穷小的小体积, 称为体元, 体积一般地记为  $dV$ 。在体元处有函数值  $\phi(x, y, z)$ , 则将该位置处的函数值与体元体积的乘积  $\phi(x, y, z) dV$ , 从空间区域  $V$  的各个体元上积分, 即得到空间区域  $V$  上的体积分:

#### 定义 0.2.9: 体积分的定义

$$\iiint_V \phi(x, y, z) dV = \lim_{\max \Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \phi(\xi_i) \Delta V_i, \quad (0.110)$$

其中, 空间区域  $V$  被划分为若干小体元  $\Delta V_i$ ,  $\xi_i$  为  $\Delta V_i$  上的某点,  $\max \Delta V_i$  表示所有小体元的最大体积。

若取  $\phi(x, y, z) = 1$ , 则体积分即为空间区域  $V$  的体积。

关于线积分、面积分与体积分的完整讨论与各种算例, 可以参考相关数学教材或者笔者后续的电磁学笔记。在普物力学的范围内, 就只介绍到这里了。

## 0.3 行列式

### 0.3.1 行列式

行列式用被  $\parallel$  符号包围的一个方阵表示，其中放置的数量或变量等称为行列式的元素，记为  $a_{ij}$ ，其中  $i$  表示行号， $j$  表示列号。行列式的行数与列数相等，称为行列式的阶数， $n$  阶行列式表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (0.111)$$

限于篇幅，此处无法给出行列式的定义，但我们要知道的是，行列式是一个数值，可以通过行列式的元素计算出来。

在普物力学的范围内，最常用的是 2 阶与 3 阶行列式。2 阶行列式的计算较为简单，设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (0.112)$$

则

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (0.113)$$

3 阶行列式的计算可以使用“对角线法则”。设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (0.114)$$

则

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (0.115)$$

用对角线的方法，可以更直观地记忆 3 阶行列式的计算方法。将行列式的前两列复制粘贴到行列式的右侧，构成一个  $3 \times 5$  的矩阵（在此处就是一个数阵），如下所示：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

然后从左上角到右下角画三条对角线，分别计算每条对角线上的元素乘积之和，记为  $S_1$ ；再从右上角到左下角画三条对角线，分别计算每条对角线上的元素乘积之和，记为  $S_2$ ；则行列式的值为  $D = S_1 - S_2$ 。

对于一般的  $n$  阶行列式，有如下的归递性质：

#### 定理 0.3.1: 行列式的归递性质

设  $D_n$  为  $n$  阶行列式，则

$$D_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad (0.116)$$

其中， $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ， $M_{ij}$  为由去掉行列式  $D_n$  的第  $i$  行与第  $j$  列所构成的  $(n-1)$  阶行列式，称为  $a_{ij}$  的余子式，余子式就是去掉某行某列后剩下的行列式。

此外，笔者认为行列式的如下 4 个性质在普物力学中也较为常用，特此列出：

**定理 0.3.2: 行列式的常用性质**

设  $D$  为行列式, 则有如下性质:

1. 若行列式的某两行 (或两列) 互换位置, 则行列式的值变号;
2. 若行列式的某一行 (或某一列) 的各元素同时乘以一个常数  $k$ , 则行列式的值也乘以  $k$ ;
3. 若行列式的某一行 (或某一列) 的各元素同时加上另一行 (或另一列) 的各元素乘以一个常数  $k$ , 则行列式的值不变;
4. 行列式经过转置, 也就是将行与列互换位置后, 行列式的值不变。

上述内容的证明此处从略。

**0.3.2 行列式的应用**

行列式在普物力学中的应用主要体现在解线性方程组与计算矢量的混合积等方面, 有关矢量的内容见后续 0.4 节。

线性方程组的一般形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \quad (0.117)$$

其中,  $a_{ij}$  与  $b_i$  均为已知常数,  $x_j$  为未知数。当  $m = n$  时, 称该方程组为  $n$  元线性方程组。设  $n$  元线性方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (0.118)$$

则有如下定理:

**定理 0.3.3: 克莱姆法则**

设  $D \neq 0$ , 则  $n$  元线性方程组有唯一解, 且该解可表示为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (0.119)$$

其中,  $D_j$  为将系数行列式  $D$  的第  $j$  列替换为常数列  $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  后所得到的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (0.120)$$

例如对于三元线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{array} \right.$$

的解及其展开式为

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}, \\x_2 &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{-b_1(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + b_2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - b_3(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}, \\x_3 &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \frac{b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - b_2(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}.\end{aligned}$$

显然，克莱姆法则可以极大的简化线性方程组的求解过程。

行列式在数学物理中的其他应用，后面陆续给出。

## 0.4 矢量的代数运算

### 0.4.1 矢量的叠加与分解

直观地说，没有方向的量称为标量，标量带有正负号，有大小，但没有方向，例如温度、质量、时间等。而有方向的量称为矢量，矢量既有大小，又有方向，例如位移、速度、力等，此处我们将其记为粗体字母形式，如  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  等。

#### 注释 0.4.1: 关于矢量表示法的说明

关于矢量的表示法，印刷时常用粗体字母形式表示矢量，而手写时常用带箭头的字母形式表示矢量，例如  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  等。

矢量  $\mathbf{A}$  的大小称为  $\mathbf{A}$  的模，记为  $|\mathbf{A}|$  或  $A$ ，是一个非负的标量。标量  $\alpha$  与矢量  $\mathbf{A}$  的乘积仍是一个矢量，记为

$$\alpha\mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (0.121)$$

$\mathbf{B}$  的模为

$$|\mathbf{B}| = |\alpha||\mathbf{A}| = |\alpha|A. \quad (0.122)$$

此处  $|\alpha|$  表示标量  $\alpha$  的绝对值。若  $\alpha > 0$ ，则矢量  $\mathbf{B}$  与矢量  $\mathbf{A}$  方向相同；若  $\alpha < 0$ ，则矢量  $\mathbf{B}$  与矢量  $\mathbf{A}$  方向相反；若  $\alpha = 0$ ，则矢量  $\mathbf{B}$  为零矢量，记为  $\mathbf{0}$ ，其模为零，且没有确定的方向。

沿着  $\mathbf{A}$  的方向取一单位矢量，记为  $a$  或  $e_A$ ，则有

$$\mathbf{A} = A e_A. \quad (0.123)$$

矢量  $\mathbf{A}$  的单位矢量  $e_A$  的模为 1。

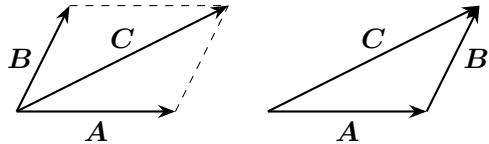


图 0.6

如图 0.6 所示, 设有两个矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ , 它们的和称为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  的叠加, 记为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}. \quad (0.124)$$

矢量叠加的几何意义可通过“平行四边形法则”来理解, 即以矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  为邻边作平行四边形, 则从平行四边形的一个顶点到对角顶点的矢量即为矢量  $\mathbf{C}$ ; 也可通过“首尾相接法则”来理解, 即将矢量  $\mathbf{B}$  的起点与矢量  $\mathbf{A}$  的终点相接, 则从矢量  $\mathbf{A}$  的起点到矢量  $\mathbf{B}$  的终点的矢量即为矢量  $\mathbf{C}$ 。矢量叠加满足交换律与结合律, 即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (0.125)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}). \quad (0.126)$$

矢量的减法可视为加上一个方向相反的矢量, 即

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \quad (0.127)$$

矢量的分解是将一个矢量表示为几个互相垂直的分量矢量之和。

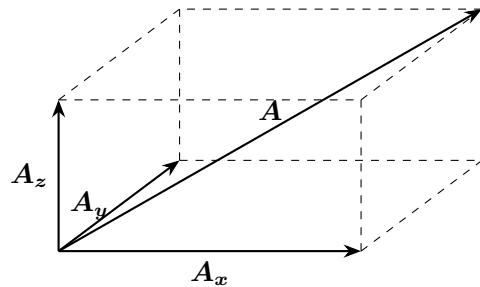


图 0.7

如图 0.7 所示, 对于三维空间中正交的  $Oxyz$  坐标系, 任何矢量  $\mathbf{A}$  都可以分解为沿  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴方向的三个分量矢量之和, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z, \quad (0.128)$$

其中,

$$\mathbf{A}_x = A_x \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{A}_y = A_y \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{A}_z = A_z \mathbf{e}_z. \quad (0.129)$$

这里,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  分别为矢量  $\mathbf{A}$  在  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴方向的投影“长度”(这里的“长度是有向长度”), 称为矢量  $\mathbf{A}$  在各坐标轴方向的分量。  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  分别为  $x$  轴、 $y$  轴与  $z$  轴的单位矢量。则矢量  $\mathbf{A}$  可表示为

$$(A_x, A_y, A_z) = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z. \quad (0.130)$$

矢量  $\mathbf{A}$  的模与各分量之间的关系为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (0.131)$$

两个三维矢量相加时, 可将它们分别在各坐标轴方向的分量相加, 得到新矢量在各坐标轴方向的分量。例如, 设有两个三维矢量  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  与  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , 则它们的和为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z). \quad (0.132)$$

类似地, 对于  $k$  维空间中的正交坐标系, 任何矢量  $\mathbf{A}$  都可以分解为沿各坐标轴方向的  $k$  个分量矢量之和, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_k = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + \dots + A_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^k A_i \mathbf{e}_i, \quad (0.133)$$

且矢量  $\mathbf{A}$  的模与各分量之间的关系为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k A_i^2}. \quad (0.134)$$

两个维数相同的矢量相加时，可将它们分别在各坐标轴方向的分量相加，得到新矢量在各坐标轴方向的分量。例如，设有两个  $k$  维矢量  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$  与  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_k)$ ，则它们的和为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, \dots, A_k + B_k) = \sum_{i=1}^k (A_i + B_i) \mathbf{e}_i. \quad (0.135)$$

#### 0.4.2 矢量的点积

##### 注释 0.4.2: 关于矢量标积的名称说明

矢量的点积在物理学中也称为矢量的标积或数量积。所谓标积、标量积、点积、数量积、内积等，实际上都是同一个概念，只是名称不同而已。

矢量的点积定义如下：

##### 定义 0.4.1: 矢量的点积

设有两个矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ ，它们的点积记为  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ，定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \quad (0.136)$$

其中， $A$  与  $B$  分别为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  的模， $\theta$  为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  之间的夹角。

矢量的点积是一个标量。

通过点积，可将  $\mathbf{A}$  的模和分量各自表示成

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}, \quad (0.137)$$

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x, \quad A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_y, \quad A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z. \quad (0.138)$$

由点积的定义，不难得到如下性质：

##### 定理 0.4.1: 矢量点积的性质

设有三个矢量  $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{C}$ ，以及一个标量  $k$ ，则有如下性质：

1. 交换律： $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ；
2. 分配律： $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ ；
3. 结合律： $(k\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ 。
4. 正定性： $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \geq 0$ ，且当且仅当  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  时取等号。

在三维空间中有

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0, \quad (0.139)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1. \quad (0.140)$$

借此可以将两个三维矢量  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  与  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  的点积表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (0.141)$$

类似地，在 $k$ 维空间中有

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (0.142)$$

其中， $\delta_{ij}$  称为克罗内克 (Kronecker) 符号。借此可以将两个 $k$ 维矢量  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$  与  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_k)$  的点积表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^k A_i B_i. \quad (0.143)$$

### 0.4.3 矢量的叉积

#### 注释 0.4.3: 关于矢量叉积的名称说明

矢量的叉积在物理学中也称为矢量的外积或向量积。所谓叉积、外积、向量积、矢积、矢量积等，实际上都是同一个概念，只是名称不同而已。

矢量的叉积定义如下：

#### 定义 0.4.2: 矢量的叉积

设有两个三维矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ ，它们的叉积记为  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ，定义为一个新矢量，其模为

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta, \quad (0.144)$$

其中， $A$  与  $B$  分别为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  的模， $\theta$  为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  之间的夹角；该新矢量的方向由右手定则确定，即将右手的四指从矢量  $\mathbf{A}$  的方向弯向矢量  $\mathbf{B}$  的方向，则大拇指所指的方向即为新矢量的方向。

矢量的叉积是一个矢量。

#### 注释 0.4.4: 关于右手定则的说明

关于为什么选择右手，而不是左手来确定矢量叉积的方向。这实际上是没问题的，因为这两个体系的结构是相同的，但是如今大多数教材与文献都采用右手定则来确定矢量叉积的方向，所以我们也沿用这一传统。

叉积也有一些性质：

#### 定理 0.4.2: 矢量叉积的性质

设有三个矢量  $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{C}$ ，以及一个标量  $k$ ，则有如下性质：

1. 反交换律： $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ ；
2. 分配律： $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ ；
3. 结合律： $(k\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = k(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ ；
4. 向量共线性：若矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  共线，则  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。

在三维空间中有

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y, \quad (0.145)$$

$$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y, \quad (0.146)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \quad (0.147)$$

借此可以将两个三维矢量  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  与  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  的叉积表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z. \quad (0.148)$$

这里的行列式见前面 0.3 节。

#### 注释 0.4.5: 关于叉积定义维数的说明

关于叉积的定义，肯定会有读者提出疑问：为什么叉积只能定义在三维空间中，而不能定义在二维空间或更高维空间中呢？实际上，叉积还可以定义在七维空间中，至于为什么是三维与七维空间，为什么要这样定义，这里便不做展开了。但是我可以说的是这与四元数及李群和李代数有关，感兴趣的读者可以自行查阅相关资料。

#### 注释 0.4.6: 关于极矢量和轴矢量的说明

矢量根据其在空间中的变换性质，可分为极矢量与轴矢量两种。极矢量（polar vector）也称为真矢量，是我们通常所说的矢量，例如位移、速度、力等，极矢量在空间反射变换下，与镜面垂直的分量会反向，而与镜面平行的分量不变；轴矢量（axial vector）也称为伪矢量，是由两个极矢量通过叉积运算得到的矢量，例如角动量、磁场强度等，轴矢量在空间反射变换下，与镜面垂直的分量不变，而与镜面平行的分量会反向。

矢量的加法与点积运算不改变矢量的性质，而矢量的叉积运算会改变矢量的性质，即两个极矢量的叉积是一个轴矢量，两个轴矢量的叉积是一个极矢量，一个极矢量与一个轴矢量的叉积是一个极矢量。

### 0.4.4 矢量的多重积

矢量的多重积包括混合积与三重叉积等。

混合积定义如下：

#### 定义 0.4.3: 矢量的混合积

设有三个三维矢量  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{C}$ ，它们的混合积记为  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ，定义为

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = ABC \sin \theta \cos \phi, \quad (0.149)$$

其中， $A$ ,  $B$  与  $C$  分别为矢量  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{C}$  的模， $\theta$  为矢量  $\mathbf{B}$  与矢量  $\mathbf{C}$  之间的夹角， $\phi$  为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$  之间的夹角。

混合积是一个标量，并且满足循环对称性与反对称性，即

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (0.150)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}). \quad (0.151)$$

运用行列式可以将三个三维矢量  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  与  $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$  的混合积表示为

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (0.152)$$

三重叉积定义如下：

#### 定义 0.4.4: 矢量的三重叉积

设有三个三维矢量  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{C}$ , 它们的三重叉积记为  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , 定义为一个新矢量, 其方向与矢量  $\mathbf{B}$  与矢量  $\mathbf{C}$  所在平面内的某个方向相同, 其模为

$$|\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})| = ABC \sin \theta \sin \phi, \quad (0.153)$$

其中,  $A$ ,  $B$  与  $C$  分别为矢量  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{C}$  的模,  $\theta$  为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{B}$  之间的夹角,  $\phi$  为矢量  $\mathbf{A}$  与矢量  $\mathbf{C}$  之间的夹角。

三重叉积是一个矢量, 并且满足如下恒等式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (0.154)$$

在  $Oxyz$  坐标系中可以轻易的证明这个恒等式, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (A_y B_z C_x - A_z B_y C_x) \mathbf{e}_x + (A_z B_x C_y - A_x B_z C_y) \mathbf{e}_y + (A_x B_y C_z - A_y B_x C_z) \mathbf{e}_z \\ &= [B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)] \mathbf{e}_x \\ &\quad + [B_y(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_y(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)] \mathbf{e}_y \\ &\quad + [B_z(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_z(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)] \mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (0.155)$$

下面给出几个例子, 帮助理解矢量的代数运算。

#### 例 0.4.1: 点积的逆运算

设有两个矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ , 已知  $\mathbf{B}$ , 以及它们的点积  $\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , 求矢量  $\mathbf{A}$ 。解:

将  $\mathbf{A}$  分解为沿  $\mathbf{B}$  方向的分量  $\mathbf{A}_{\parallel}$  与垂直于  $\mathbf{B}$  方向的分量  $\mathbf{A}_{\perp}$ , 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}. \quad (0.156)$$

则有

$$\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\parallel} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}_{\perp} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\parallel} \cdot \mathbf{B}, \quad (0.157)$$

因为  $\mathbf{A}_{\perp}$  与  $\mathbf{B}$  垂直, 所以  $\mathbf{A}_{\perp} \cdot \mathbf{B} = 0$ 。设  $|\mathbf{B}| = B$ , 则有

$$\mathbf{A}_{\parallel} = \frac{\alpha}{B^2} \mathbf{B}. \quad (0.158)$$

因为  $\mathbf{A}_{\perp}$  与  $\mathbf{B}$  垂直, 但具有不确定性, 可表达成

$$\mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{C} \times \mathbf{B}, \quad (0.159)$$

其中,  $\mathbf{C}$  为任意矢量。因此, 矢量  $\mathbf{A}$  可表示为

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha}{B^2} \mathbf{B} + \mathbf{C} \times \mathbf{B}. \quad (0.160)$$

#### 例 0.4.2: 叉积的逆运算

设有两个矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ , 已知  $\mathbf{B}$ , 以及它们的叉积  $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , 求矢量  $\mathbf{A}$ 。解:

将  $\mathbf{A}$  分解为沿  $\mathbf{B}$  方向的分量  $\mathbf{A}_{\parallel}$  与垂直于  $\mathbf{B}$  方向的分量  $\mathbf{A}_{\perp}$ , 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}. \quad (0.161)$$

则有

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\parallel} \times \mathbf{B} + \mathbf{A}_{\perp} \times \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\perp} \times \mathbf{B}, \quad (0.162)$$

因为  $\mathbf{A}_{\parallel}$  与  $\mathbf{B}$  共线, 所以  $\mathbf{A}_{\parallel} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。设  $|\mathbf{B}| = B$ , 则有

$$\mathbf{A}_{\perp} = \frac{1}{B^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{D}). \quad (0.163)$$

因为  $\mathbf{A}_{\parallel}$  与  $\mathbf{B}$  共线, 但具有不确定性, 可表达成

$$\mathbf{A}_{\parallel} = \lambda \mathbf{B}, \quad (0.164)$$

其中,  $\lambda$  为任意标量。因此, 矢量  $\mathbf{A}$  可表示为

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B} + \frac{1}{B^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{D}). \quad (0.165)$$

这说明了在一定程度上, 点积与叉积是不可逆的运算。

## 0.5 其他可能的数学工具

### 0.5.1 数列(序列)

有关于数列(序列)的技巧, 主要还是依靠高中的数学知识, 比如凑等比、等差, 裂项, 线性递推, “不动点”等。此处便不详述了。

### 0.5.2 不等式

在物理中, 常用的不等式主要有基本不等式等。

#### 定理 0.5.1: 基本不等式链

设有任意实数  $a$  与  $b$ , 则有如下基本不等式链:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad (0.166)$$

其中, 当且仅当  $a = b$  时, 各等号成立。

类似地, 对于  $n$  个正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 则有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (0.167)$$

其中, 当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时, 各等号成立。

### 0.5.3 复数

复数在物理中有着广泛的应用, 尤其是在处理振动与波动现象时。设有一个复数  $z = x + iy$ , 其中,  $x$  与  $y$  分别为复数  $z$  的实部与虚部, 它们均为实数,  $i$  为虚数单位, 满足  $i^2 = -1$ 。取实部与虚部分别作为横轴与纵轴, 则复数  $z$  可表示为平面上的一个点, 此平面称为复平面。复数  $z$  的共轭复数记为  $z^* = x - iy$ 。且有

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (0.168)$$

取实部和取虚部的运算可表示为

$$\Re(z) = \frac{z + z^*}{2} = x, \quad (0.169)$$

$$\Im(z) = \frac{z - z^*}{2i} = y. \quad (0.170)$$

复数  $z$  也可以表示成极坐标形式, 即

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (0.171)$$

其中,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  为复数  $z$  的模,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  为复数  $z$  的辐角。复数的乘法与除法在极坐标形式下有着简单的表示:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \quad (0.172)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad (0.173)$$

其中, 复数  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  与复数  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ 。

欧拉公式是复数的一个重要公式, 内容为

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (0.174)$$

利用欧拉公式, 可以将复数  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  表示成指数形式, 即

$$z = r e^{i\theta}. \quad (0.175)$$

复数的乘法与除法在指数形式下也有着简单的表示:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (0.176)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (0.177)$$

其中, 复数  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  与复数  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ 。

#### 0.5.4 三角函数

三角函数在物理中有着广泛的应用, 尤其是在处理周期性现象时。首先给出三倍角公式:

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \quad (0.178)$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta. \quad (0.179)$$

它们可以用复数法轻易的证明

$$\begin{aligned} \sin 3\theta + i \cos 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + i(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta). \end{aligned} \quad (0.180)$$

另外还有和差化积与积化和差公式:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{aligned} \quad (0.181)$$

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \\
 \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)], \\
 \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \\
 \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].
 \end{aligned} \tag{0.182}$$

### 0.5.5 求和公式

在物理中，常用的一些求和公式如下：

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{0.183}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{0.184}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \tag{0.185}$$

这三个公式可以用数学归纳法证明。

$$\sum_{i=1}^n \sin i\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}, \tag{0.186}$$

$$\sum_{i=1}^n \cos i\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \cos \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}. \tag{0.187}$$

三角函数的求和公式可以用复数法证明：

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sin i\theta &= \Im \left( \sum_{i=1}^n e^{ii\theta} \right) = \Im \left( e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \\
 &= \Im \left( \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} (e^{-i\frac{n\theta}{2}} - e^{i\frac{n\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} \right) = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}},
 \end{aligned} \tag{0.188}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \cos i\theta &= \Re \left( \sum_{i=1}^n e^{ii\theta} \right) = \Re \left( e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) \\
 &= \Re \left( \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} (e^{-i\frac{n\theta}{2}} - e^{i\frac{n\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} \right) = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \cos \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.
 \end{aligned} \tag{0.189}$$