一份（不太）简短的 力学 笔记

或物理笔记之一

作者： wanzhao

日期： 2026 年 1 月 23 日

课程： 力学（H）

前言

前言先欠着，等我写了一些之后再补上。

目录

第零章　数学基础

物理的学习离不开数学，但学习时间的有限使得很多同学纠结数学应该学到多深。在普通物理的范畴内，作者在这里提出一些小小的建议。

数学知识分两类。

第一类是需要完全理解和掌握的，比如数列、导数和积分、微分方程……它们在题目中出现的概率很高，当我们遇到时要能从容应对。

第二类是有助于物理理解，但不要求完全掌握的，比如矢量分析与场论、张量代数……它们有助于加深你对物理情景的理解，但在普通物理的题目中出现的概率较低，这种知识需要学习，但学习的深度要视自身情况而定。

0.1　一元函数微积分

0.1.1　微分

一元函数可记为

$$y = y(x) \text{ 或 } y = f(x),$$

在它的连续区间内，如图 0.1

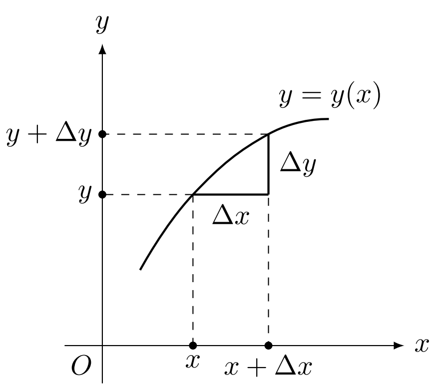

图 0.1

所示，自变量由 x 变到 $x + \Delta x$，相应的，y 由 $y(x)$ 变到 $y(x + \Delta x)$，则函数的增量定义为

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x).$$

自变量 $\Delta x \to 0$ 时，称为自变量微分，记为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x$ 是无穷小量，不是零。但因为它是无穷小量，它在与有限量的运算中，在一些情况下可以视为 0 （但不是在所有情况下都可以视为 0）。在连续区间内，自变

量增量 Δx 趋近于微分 $\mathrm{d}x$，函数增量 $\Delta y \to \mathrm{d}y$，称为函数微分，记为 $\mathrm{d}y$，它也是无穷小量。 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 之间的关系为

$$\mathrm{d}y = y(x+\mathrm{d}x) - y(x).$$

注释 0.1.1: 符号说明

显然，因为 $y(x)$ 不一定是单调函数，所以 Δy 和 $\mathrm{d}y$ 可以是正的、负的或零。所以只要你严格遵守定义与符号计算的基本规则，就不会出错。这句话在一些微元分析的场景下尤其适用。

例 0.1.1: 重要近似

$$\sin x \sim \tan x \sim x, (x \to 0). \tag{0.1}$$

证明：

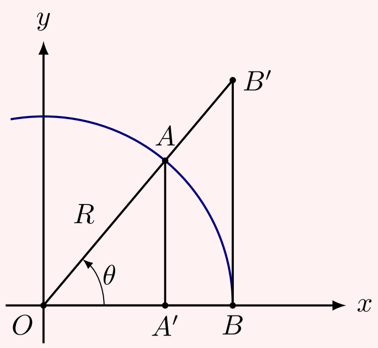

图 0.2: 重要近似的几何示意图

以 O 为原点建立直角坐标系，绘出以 R 为半径的圆弧如图 0.2 所示，其中圆心角 θ 对应的直线段 AA' ,BB' ,圆弧 $\widehat{AB}$ 的长度分别为

$$\overline{AA'} = R\sin\theta, \quad \overline{BB'} = R\tan\theta, \quad \widehat{AB} = R\theta.$$

$\theta \to 0$ 时，有

$$\overline{AA'} \sim \overline{BB'} \sim \widehat{AB}.$$

化简得

$$\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta, (\theta \to 0).$$

0.1.2 导数

定义 0.1.1: 导数

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的导数定义为

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{0.2}$$

如果极限存在，则称函数在点 x 处可导。

显然，导数的几何意义是函数图像在点 $(x, f(x))$ 处的切线的斜率。

在数学上可以证明导数与微分有如下关系：

定义 0.1.2: 微分与导数的关系

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导，则函数在该点的微分与导数的关系为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{0.3}$$

注释 0.1.2: 导数与微分的区别

导数是一个极限值，是一个确定的数值，而微分是函数增量的线性主部，不是一个确定的数值。导数表示函数在某点处的变化率，而微分表示函数在该点处变化量的线性近似。

并且导数不能视为 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$的比值，这只是 Leibniz 记号下的一个形式上的表示方法。当然，在非严格的物理推导中，我们经常会把导数视为 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的比值来进行计算。并且可以用类似的方法处理常微分中的微元计算，这种做法（形式计算）在物理学中是被广泛接受的。

当然，如果从更高级的数学角度来看，我们的操作是有严格依据的，这也保证了我们不会出错，这里便不再深入了。

导数有一些重要性质，举例如下：

示例 0.1.1: 导数的性质

$$(1)\quad (A_1y_1 + A_2y_2)' = A_1y_1' + A_2y_2'; \tag{0.4}$$

$$(2)\quad (y_1y_2)' = y_1'y_2 + y_1y_2'; \tag{0.5}$$

$$(3)\quad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2}; \tag{0.6}$$

$$(4)\quad (y_1 \circ y_2)' = (y_1' \circ y_2) \cdot y_2'. \tag{0.7}$$

证明略去。

其中，式 0.7 被称为复合函数的求导法则。在微分的形式下，式 0.7 可写为

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} \cdot \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}. \tag{0.8}$$

这也在一定程度上为我们对导数执行的“消去”操作的正确性提供了依据。

常用的导数公式列举如下：

示例 0.1.2: 常用导数公式

$$(1)\quad (x^n)' = nx^{n-1}; \tag{0.9}$$

$$(2)\quad (a^x)' = a^x \ln a; \tag{0.10}$$

$$(3)\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}; \tag{0.11}$$

$$(4)\quad (\sin x)' = \cos x; \tag{0.12}$$

$$(5)\quad (\cos x)' = -\sin x; \tag{0.13}$$

(0.14)

此外，还有几个常用的 n 阶导数公式：

示例 0.1.3: 常用 n 阶导数公式

$$(1)\quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}; \tag{0.15}$$

$$(2)\quad (\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right); \tag{0.16}$$

$$(3)\quad (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right). \tag{0.17}$$

在数学上，导数还可以用来讨论函数曲线的极值位置与凹凸性，这在物理中经常用到，而且有如下结论：

定义 0.1.3: 极值与凹凸性的判定

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = 0$。

- 若 $f''(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值，且曲线在该点处向下凸，称为“凸”；
- 若 $f''(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值，且曲线在该点处向上凸，称为“凹”；
- 若 $f''(x_0) = 0$，则不能确定 $f(x)$ 在点 x_0 处是否取得极值，需考察更高阶导数。

注意到，函数的凹凸与“凹”“凸”这两个字的字型是相反的，这是因为函数的凸性与凸集有关，而凸集的定义是明确的，因此相反。

接下来，我们介绍与导数有关的另一个重要工具——泰勒公式。

定理 0.1.1: 泰勒公式

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处具有 $n+1$ 阶导数，则在点 x_0 附近，函数 $f(x)$ 可展开为

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n, \tag{0.18}$$

其中，余项 R_n 有如下两种形式：

- 拉格朗日（Lagrange）余项形式：

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}; \tag{0.19}$$

- 皮亚诺（Peano）余项形式：

$$R_n = o\left((x - x_0)^n\right), \quad x \to x_0. \tag{0.20}$$

显然，函数如果想展成泰勒级数，至少要求通项趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = 0.$$

但事实上，函数能否展成泰勒级数，还需要满足更强的条件，这里不再赘述。

函数 $f(x)$ 若能在点 x_0 两侧某范围内展开成泰勒级数，且级数在该范围内收敛于函数值，便称这一范围为 $f(x)$ 的收敛区间。例如，在数学上可以证明：

示例 0.1.4: 常见函数的泰勒展开

$$(1)\quad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty); \tag{0.21}$$

$$(2)\quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty); \tag{0.22}$$

$$(3)\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty); \tag{0.23}$$

$$(4)\quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1]; \tag{0.24}$$

$$(5)\quad (1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n,\quad x\in(-1,1). \tag{0.25}$$

其中，式 0.25 中的二项式系数定义为

$$\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{n!}. \tag{0.26}$$

$x_0=0$ 时，称为麦克劳林（Maclaurin）级数。

0.1.3 积分

有许多数学书上把积分分为了不定积分与定积分两类，还有“积分是导数的逆运算”这样的说法。

但实际上，积分的本质是求和，而我更愿意把求不定积分看作是求原函数的问题，而把定积分视为真正意义上的“积分”，即求和。

定义 0.1.4: 不定积分

设函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，则称函数 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一个原函数。函数 $f(x)$ 的所有原函数的集合称为函数 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

其中，C 为任意常数。

根据 示例 0.1.1 中导数的性质，可以得到不定积分的一些性质，举例如下：

示例 0.1.5: 不定积分的性质

$$(1)\quad \int[A_1f_1(x)+A_2f_2(x)]\,\mathrm{d}x=A_1\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+A_2\int f_2(x)\,\mathrm{d}x; \tag{0.27}$$

$$(2)\quad \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x; \tag{0.28}$$

$$(3)\quad \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x=\int f(u)\,\mathrm{d}u,\quad u=g(x). \tag{0.29}$$

同时，根据 示例 0.1.2 中常用的导数公式，可以得到一些常见函数的不定积分，举例如下：

示例 0.1.6: 常见函数的不定积分

$$\text{(1)} \quad \int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1); \tag{0.30}$$

$$\text{(2)} \quad \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C; \tag{0.31}$$

$$\text{(3)} \quad \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C; \tag{0.32}$$

$$\text{(4)} \quad \int \log_a x \,\mathrm{d}x = x(\log_a x - \log_e a) + C; \tag{0.33}$$

$$\text{(5)} \quad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C; \tag{0.34}$$

$$\text{(6)} \quad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C. \tag{0.35}$$

有了这些，我们就可以计算几乎所有可解的不定积分了。

定义 0.1.5: 定积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，且在该区间上可积，则称

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{0.36}$$

其中，区间 $[a,b]$ 被分成 n 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$。若极限存在，则称该极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分。

这是定积分的黎曼（Riemann）定义，它的几何意义是曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴及直线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成的面积（注意符号）。但是这个定义在实际计算中并不实用，我们需要借助不定积分来计算定积分（这也正是不定积分这个概念被提出的原因）。

这就需要用到著名的微积分基本定理。

定理 0.1.2: 微积分基本定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{0.37}$$

证明：

设区间 $[a,b]$ 被分成 n 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$。则有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$

当 $n \to \infty$ 时，右端不变，因此

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

上述证明中运用了微分中值定理，亦即拉格朗日（Lagrange）中值定理，此处不再赘述。

由此，我们可以通过求不定积分来计算定积分了。

类似于不定积分，定积分也有一些性质，举例如下：

示例 0.1.7: 定积分的性质

$$(1)\quad \int_a^b [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)]\,\mathrm{d}x = A_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + A_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x; \tag{0.38}$$

$$(2)\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x; \tag{0.39}$$

$$(3)\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{0.40}$$

注释 0.1.3: 积分变量的选择

在积分运算中，积分变量是一个“虚拟变量”，它可以是任何符号，只要在积分式中前后一致即可。例如，下面两个积分式是等价的：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

这是因为积分变量只是一个占位符号，并不影响积分的结果。

下面给出一个定积分计算的例子，即曲线段长度的计算。

例 0.1.2: 曲线段长度

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且可导，求曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的弧长。

证明：

设区间 $[a, b]$ 被分成 n 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$。则曲线段在子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的弧长近似为

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

当子区间足够小时，有

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \approx f'(\xi_i).$$

因此，曲线段在区间 $[a, b]$ 上的弧长近似为

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

当子区间无限细分时，近似变为等于，即

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

注释 0.1.4: 微分形式下的曲线段长度

在一些书上也有类似于下面的表达式：

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

这种表达式其实是对微分形式的曲线段长度公式的非严格表达，但也是形式计算奏效的一个例子。