图论–王树禾

万宗祺

2018 年 4 月 30 日

目录

1 图

1.1 图的基本概念

定义 1. 数学结构$G = \{V(G), E(G), \Phi_G\}$为一个图，$V$是顶点集，$E$是边集，$\Phi_G$是$E$到$V \times V$的关联函数。

定义 2 (图的一些基本定义)**.**
*(1)*边的端点
*(2)*边与顶点相关联*:*边与他的两个端点是关联的
*(3)*邻顶*:*同一个边的两个端点相邻
*(4)*邻边*:*与同一个顶相关联的两条边叫做邻边
*(5)*环*:*只与一个顶相关联的边叫做环
*(6)*重边*:*端点一样的边是重边
*(7)*完全图*:*任意两个顶点都相邻的图，记作K_v
*(8)*单图*:*无环无重边的图
*(9)*二分图*:*$V(G) = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$，且$X$中任意两个顶点不相邻，$Y$中任意两个顶点不相邻，则称$G$为二分图。若$X$中每个顶点与$Y$中每个顶点相邻，就称为完全二分图。记作$K_{m,n}, m = |X|, n = |Y|$
*(10)*星*:*$K_{1,n}$叫做星
*(11)*完全r分图*:*同*(9)*类似
*(12)*顶点的度数*(*次数*):*与该点相邻的边数，环计算两次，记作$d(v)$

定理 1 (Euler)**.** $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\epsilon$

推论. 图中奇次顶的总数是偶数

定义 3. 同构，定义略

定义 4 (边图)**.** 设G是一个图，$L(G)$是另一个图，满足$V(L(G)) = E(G), L(G)$中两顶相邻当且仅当他们是G中两条相邻的边，则称$L(G)$是G的边图。

命题 1. $G \cong L(G)$当且仅当G是多边形。

1.2 轨道和圈

定义 5. 道路定义略，轨道就是各顶点不一样的道路，记作$P(v_0, v_k), v_0, v_k$是起点和终点，起点终点重合的道路叫做回路，起点终点重合的轨道叫做圈，长为k的圈叫做k阶圈，u, v两顶的距离指以u,v为起点的最短轨道长度，记作$d(u,v)$。若存在道路以u, v为起止点，则称u,v在G中连通，若G中任意两点都连通，则称G为连通图。

定义 6. 子图概念略，若子图S顶点和图G顶点一样，就称子图为生成子图。若$V(S)=V'$,$E(S)$是由两端都在V'中的边构成，就称S是由V'导出的G的导出子图。连通片定义略。

命题 2. —V—=$2k$,$d(v) \geq k$,则图连通

命题 3. 在仅两个奇次顶的图中，这两个顶连通

定理 2. 图G是二分图当且仅当G中无奇阶圈

命题 4. 无零次与1次顶的单图中有圈

注. 使用了“最长轨”技巧

定义 7. 单图G中最长的圈称为该图的周长；最短的圈之长称为该图的围长；两顶点间距离最大值称为直径，记作$d(G)$，图G的中心是指使$\max\limits_{v \in V(G)} d(u, v)$最小的顶$u$;这个最小值就是图的半径$r(G)$

定义 8. 单图G的补图记作G^C，$V(G^C) = V(G)$,当且仅当在G中两顶不相邻，该二顶在G^C中相邻。

命题 5. 单图G和他的补图不能都不连通

1.3 求最短轨长度的算法

算法 1 (Dijkstra)**.**
*(1)*初始化边长度矩阵ω，若两顶点不相邻，$\omega(uv) = \infty$
*(2)*维护一个数组l，初始化$l(v)=\infty, l(u_0)=0$;令$S_0=u_0, i=0$;
*(3)*对每个不属于S_i的顶点v，赋值$l(v) := min\{l(v), l(u_i) + \omega(u_i v)\}$;设$u_{i+1}$是使$l(v)$取最小值的$V(G) - S_i$中的顶，令$S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.
(4)$i=v-1$,就停止，否则用$i+1$代替i，转*(3)*

2 树

2.1 树的定义和性质

定义 9. 无圈连通图称为树。每个连通片都为树的不连通图称为森林；树上次数为1的顶称为叶；如果一个树T是图G的生成子图，则称T是G的生成树，G-$E(T)$称为树余。

定理 3 (树的等价命题)**.** 若G是一个单图，则下面诸命题等价：
(1)G是树
(2)G中任二顶点间恰有一条轨
(3)G中无圈，—E—=—V—-1
(4)G是连通图,—E—=—V—-1
(5)G是连通图，G-e不连通，e是G的任意一条边
(6)G无圈，G+e恰含一个圈，其中e是任意一个不在$E(G)$中的以$V(G)$中的顶为端点的边

推论. G是连通图的充分必要条件是G有生成树

命题 6. $|V| \geq 2$的树T至少有两个叶。

命题 7. 连通图G的无圈子图是G的某个生成树的子图

2.2 生成树的个数

定义 10. 用$\tau(G)h$:GØ1J$*p$

定理 4. $\tau(K_n) = n^{n-2}$

定理 5. e是连通图G中的一条边，则

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e),$$

其中$G \cdot e$是把边e的长度收缩成零，e的两个端点重合成一个顶形成的图。

注. 用这个公式可以每次减少G的一条边，简化图来计算生成树个数

2.3 求生成树的算法

广度优先算法与深度优先算法，此处不再赘述

2.4 求最优生成树算法

算法 2 (Kruskal)**.**
(1)从$E(G)$中选一条权最小的边e_1
(2)若$e_1, e_2, \cdots, e_i$已选出，则从$E(G)$-$e_1, e_2, \cdots, e_i$中选e_{i+1},使得(i)G[$e_1, e_2, \cdots, e_i$]中无圈，(ii)e_{i+1}权值最小.
(3)反复执行上述步骤直到选出e_{v-1}

2.5 有序二元树

定义 11. $d^+(v)$表示出度，$d^-(v)$表示入度。若T是树，把T的每一边标志一个方向，使得除顶$v_0 \in V(T)$外，每个$v \in V(T) - \{v_0\}$皆存在由v_0到v的有向轨，则称T是以v_0为根的外向树。

定义 12 (Huffman树). 以v_0为根，$v_1, v_2, \cdots, v_n$为叶的有序二元树T中，v_i代表的事物出现的概率为p_i，满足$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,称轨$P(v_0, v_i)$的长为v_i的码长，且使得

$$m(T) = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = min$$

则称T为带权$p_1, p_2, \cdots, p_n$的$Huffman$树，又称最优二元树。

定理 6. *若T是$Hoffman$树，$p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n, v_1, v_2, \cdots, v_n$为叶，(1)若$v_i$与$v_j$是兄弟，则$l_i = l_j$;(2)$v_1$与$v_2$是兄弟;(3)设$T^+$是带权$p_1 + p_2, p_3, \cdots, p_n$的$Hoffman$树，与$p_1 + p_2$相应的叶子生出两个新叶分别带权$p_1$和$p_2$，则得到带权$p_1, p_2, \cdots, p_n$的$Hoffman$树。*

注. 以上定理其实给出了生成$Hoffman$树的算法

2.6 n顶有序编码二元树的数目

注. 括号列技巧

定理 7. *n顶有序林与n顶有序编码二元树的数目皆为c(n).其中c(n)为$Catalen$数，$c(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$*

3 平面图

3.1 平面图及其平面嵌入

定义 13. 把一个图G的图示画在曲面上，使得任二边不在内点相交，则称G可以嵌入这个曲面。若G可以嵌入平面，则称其为平面图。

定理 8. *图G可平面嵌入的充分必要条件是G可以球面嵌入*

注. 球极平面投影，使球面顶点不在图的边或点上即可。

3.2 Euler公式

定理 9 (Euler公式). *G是连通平面图，则有公式*

$$v - \epsilon + \phi = 2$$

其中v=$V(G)$是G的顶数，$\epsilon = \epsilon(G)$是G的边数，$\phi = \phi(G)$是G的面数

定义 14 (面的度数). 记$F(G) = \{f_1, f_2, \cdots, f_\phi\}$是平面图$G$的面集合，$f_i$边界上的边条数记为$d(f_i)$,称为面的度数，是沿面边界行一周时，历经的边的条数，其中桥需要算两次

命题 8.

$$\sum_{i=1}^{\phi} d(f_i) = 2\epsilon$$

注. 对面数量递推.$Euler$公式表明了，同样的图以不同方式嵌入不会改变面的数量。

推论. *若G是$v \ge 3$的连通平面图，则$\epsilon \le 3v - 6$.*

推论. *平面图G的最小顶次数$\delta \le 5$*

注. 上面两个推论具体地告诉我们，图的边数如果过多就无法嵌入到平面中。

3.3 极大平面图

定义 15 (极大平面图). 若G是$v \geq 3$的平面图，当$u, v \in V(G), nv \notin E(G)$时，$G$+$uv$不再是平面图，则称$G$是极大平面图。

定理 10. $v \geq 3$的平面图G是极大平面图的充分必要条件是G的平面嵌入的每个面是三角形

推论. $v \geq 3$的平面图是极大平面图的充分必要条件是$\epsilon = 3v - 6$

定理 11. G是$v \geq 4$的极大平面图，则$\delta(G) \geq 3$

3.4 平面图的充要条件

定理 12 (Kuratowsky). G是平面图当且仅当G中不含与K_5和$K_{3,3}$同胚的子图

定义 16. 如果一个图不是平面图，那么我们可以把它的边分成n个部分，使每个部分的导出子图都可以镶嵌到一个平面中，最小的n就叫做这个图的厚度。

定理 13. 若$\theta(G)$代表图G的厚度，则有以下估计
(i)$\theta(G) \geq \{\frac{\epsilon}{3v-6}\}, v > 2, x$是$x$向上取整
*(ii)*连通图G无三阶圈，则$\theta(G) \geq \{\frac{\epsilon}{2v-4}\}, v > 2$
(iii)$\theta(K_v) \geq [\frac{v+7}{6}], v \geq 3$

3.5 平面嵌入的灌木生长算法

待补全。。。。

4 匹配理论

4.1 匹配与许配

定义 17. 独立边构成的集合M称为一个匹配，若U中的每个顶点都与M中一个边关联，就称M是U的一个匹配，或者说U中顶点被M匹配，而不与M中顶点相关联的就称为非匹配顶点，M中每边的两个端点称为在M中相配，M中每边的端点称为被M许配，若G中每个顶点都被M许配，称M为一个完备匹配，G中边数最多的匹配称作最大匹配。

定义 18 (可增广轨). 设M是G中一个匹配，G中一条轨道$P(u,v)$上，u,v未被许配，但$P(u,v)$上的边交错出现在M中，就称P是一条可增广轨。由可增广轨可以把原匹配改进成一个多一条边的更大匹配*(*取对称差*)*

4.2 匹配定理

定理 14 (Berge). M是图G中的一个最大匹配当且仅当G中无M的可增广轨

定理 15 (Hall). 设G是二分图，X, Y是它的两个部分。则存在把X中顶都许配的匹配的重要条件是$\forall S \subseteq X, |N(S)| \geq |S|$，其中$N(S)$是$S$中每个顶的邻顶组成的集合，称为邻集

推论. k次正则*2*分图有完备匹配

定义 19. 设$B \subset V(G)$，G的每条边皆与B中顶关联，则称B是G的一个覆盖集;字面意思定义出极小覆盖，最小覆盖。最小覆盖的顶数目称为G的覆盖数，记为$\beta(G)$

定理 16 (Konig)**.** 若G是二分图，则其最大匹配的边数为$\beta(G)$

定理 17 (Tutte)**.** 图G有完备匹配当且仅当$\forall S \subset V(G), o(G-S) \leq |S|$，其中$o(G-S)$是$G$-$S$中奇数个顶点的连通片个数。

定理 18. 无桥三次正则图有完备匹配

4.3 匹配算法

算法 3 (匈牙利算法)**.**

*(1)*设G是连通二分图，在G中任取初始匹配M

*(2)*若M把X中顶全部匹配，止，M就是最大匹配；否则取X中未被匹配的顶u，令S=$\{u\}$,T=$\emptyset$

*(3)*若$N(S)$=T，中止，否则取$y \in N(S)-T$

*(4)*若y被M许配，设$yz \in M$,$S \leftarrow S \cup \{z\}, T \leftarrow T \cup \{y\}$,转*(3)*;否则$P(u,y)$是增广轨，与原匹配取对称差可得到更大的匹配，然后转*(2)*

注. 具体实现算法的时候需要记录增广轨的轨迹。*Berge*定理保证了算法的正确性。

接下来的问题是最佳匹配问题，问题模型为，对完全二分图$G = K_{n,n}$的每个边e，加权$\omega(e) \geq 0$，求总权最大的匹配。

定义 20. 对$K_{n,n}$每顶给一个顶标$l(v)$,当$x \in X, t \in Y, l(x) + l(y) \geq \omega(xy)$时，称此种顶标为正常顶标。正常顶标是存在的

$$l(x) = \max_{y \in Y} \omega(xy), x \in X$$

$$l(y) = 0, y \in Y$$

就是一个正常顶标。

定理 19. 设$G = K_{n,n}$是具有正常顶标l的加权图，取G的边子集

$$E_l = \{xy | xy \in E(G), l(x) + l(y) = \omega(xy)\}$$

令G_l是以E_l为边集的生成子图，如果G_l有完备匹配M，则M是G的最佳匹配

而如果没有完备匹配，KM算法给出了一种不断修改顶标使得最终可以达到完备匹配的方法

算法 4 (KM算法)**.**

*(1)*设G是连通二分图，在G中任取初始匹配M和初始顶标

*(2)*若M把X中顶全部匹配，止，M就是最大匹配；否则取X中未被匹配的顶u，令S=$\{u\}$,T=$\emptyset$

*(3)*若$N(S)=T$，且X未被全部匹配，取

$$a_l = \min_{x\in S, y\notin T}\{l(x)+l(y)-\omega(xy)\}$$

$$\bar{l} = \begin{cases} l(v)-a_l & v\in S \\ l(v)+a_l & v\in T \\ l(v) & v \end{cases}$$

$l \leftarrow \bar{l}, G_l \leftarrow G_{\bar{l}}$ 否则取$y\in N(S)-T$

*(4)*若y被M许配，设$yz\in M, S\leftarrow S\cup\{z\}, T\leftarrow T\cup\{y\}$,转*(3)*;否则$P(u,y)$是增广轨，与原匹配取对称差可得到更大的匹配，然后转*(2)*

注. 相比起匈牙利算法，多了一步修改顶标操作

4.4 图的因子分解

定义 21. 将给定的图G分解成若干两两无公共边的生成子图$G_1, G_2\cdots G_n$，且要求G_i具有某种性质，即$V(G_i)=V(G), \bigcup\limits_{i=1}^{n} E(G_i)=E(G), E(G_i)\cap E(G_j)=\emptyset$，并且要求$G_i$有性质$p_i$。称$G_i$是$G$的因子，这个过程叫因子分解。一个因子是$m$次正则图时，称此因子是$G$的$m$因子；如$G$的因子全部是$m$因子，则称$G$可以$m$因子分解。

定理 20. K_{2n}可以*1*因子分解

定理 21. K_{2n+1}存在每个因子皆生成圈的*2*因子分解，共计n个生成圈

5 着色理论

5.1 边着色

略

5.2 顶着色

定义 22. 如果使用n种颜色把图G的每顶分配一种颜色，使得邻顶异色，则称此为对G的顶的正常着色。图G的顶的正常着色种所需颜色数最小值为G的顶色数，简称色数，记为ξ，色数为k的图称为k色图

命题 9.

(1)G是有边二分图的充要条件是$\xi(G)=2$

(2)G是无边图当且仅当$\xi(G)=1$

(3)G是完全图当且仅当$\xi(G)=|V(G)|$

(4)$\xi(G)\le\Delta(G)+1$

定理 22. 平面图色数不大于*4*

5.3 颜色多项式

定义 23. 用$P(G,k)$表示对图G用k种颜色顶正常着色的方式数，若G给定，则其是关于k的一元函数。但G不同，这个函数$P(G,k)$未必相同。

命题 10.

(1)$\xi(G) \leq k$的充要条件是*P(G,k)¿0*

(2)$P(G,k) = k(k-1)\cdots(k-v+1)$的充要条件是$G = K_v$

(3)$P(G,k) = k^v$的充要条件是$|E(G)| = 0$

*(4)*若$G_1, G_2, \cdots, G_\omega$是$G$的连通片，则$P(G,k) = \prod_{i=1}^{\omega} P(G_i,k)$

(5)$P(G-e,k) = P(G,k) + P(G \cdot e,k)$

定理 23. $P(G,k)$是k的v次多项式，$v = |V(G)|$，且按降幂排列，首项为k^v，第二项为$-\epsilon k^{v-1}$，无常数项，系数为正负交错的整数。

定理 24. 图G的颜色多项式为$k(k-1)^{v-1}$当且仅当G是v个顶的树

5.4 独立集

定义 24. 设$I \subseteq V(G), \forall u,v \in I, u$与$v$不相邻，就说$I$是一个独立集。按通常定义方式定义出极大独立集和最大独立集。

定义 25. 若把图G的顶集*V(G)*划分成$V_1, V_2, \cdots, V_k$这k个子集，即$V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} V_i, V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j, V_i$是$G - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$的极大独立集，其中$V_0 = \emptyset$,把$V_i$种的顶染上$i$色，则称这种上色是对$G$的一种$k$顶规范着色。

注. 规范着色一定是正常着色，实际上，规范着色是在正常着色种按顺序尽量多着色一些无色边。

定理 25. 如果G可以k顶正常着色，则G存在k顶规范着色。

命题 11 (独立集与覆盖集)**.**

*(1)I*为G的独立集的充要条件是*V(G)-I*是G的覆盖集

*(2)I*为G的极大独立集，则$V(G) - I$是G的极小覆盖集

(3)$\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$

算法 5 (求极小覆盖集)**.** 规定*:*

*a*或*b*，写成*a+b*

*a*与*b*，写成ab $\forall v \in V(G)$，为了覆盖一切与v关联的边，或是v参加覆盖集，或是v的一切邻顶参加覆盖集，可以写成

$$v + \prod_{u \in N(v)} u$$

所以极小覆盖集由下面多项式给出

$$\prod_{v \in V(G)} (v + \prod_{u \in N(v)} u)$$

此式每一项是一个极小覆盖集

定义 26. $V_1 \subseteq V(G), \forall v \in V(G)$,则$v \in V_1$，不然$v$与$V_1$内一顶相邻，则称$V_1$为$G$的最小支配集。同字面意思定义极小与最小支配集。

注. 任何图的极大独立集必为极小支配集

按逻辑运算展开下式，每一项给出一个极小支配集

$$\prod_{v \in V(G)} (v + \sum_{u \in N(v)} u)$$

事实上，在G中，为了v接收支配，或者v参与支配集，或者v的某个邻顶参与。

5.5 Ramsey数

6 Euler图与Hamilton图

6.1 Euler图

定义 27. 在图G中含一切边的行迹叫做$Euler$行迹，含一切边的闭行迹叫做$Euler$回路，若G中存在$Euler$回路，则称G为$Euler$图。

定理 26. 对于连通图G,*(1)*G是$Euler$图的充分必要条件是$\forall v \in V(G), d(v)$是偶数，*(2)*G是$Euler$图的充要条件是G可表为无公共边的圈之并。

定理 27. 连通图G是$Euler$行迹当且仅当G中至多两个奇次项。

6.2 中国邮递员问题

定义 28 (问题模型)**.** 任给一个图G，对*E(G)*加权，即对每个$e \in E(G)$,任意指定一个非负实数$\omega(e) = min$

算法 6 (求Euler回路的FE算法)**.**

*(1)*任取$v_0 \in V(G), W_0 = v_0$

*(2)*设行迹$W_i = v_0 v_1 \cdots v_i$已选定，则从*E(G)*-*E(W)*中选一条边e_{i+1}使得e_{i+1}与v_i关联，且非必要时，e_{i+1}不要选$G - E(W)$的桥*.*

*(3)*反复执行*(2)*

算法 7 (中国邮递员算法)**.**

*(1)*求G中奇次顶集合V_0

*(2)*对V_0中每个顶对，用$dijsktra$算法求距离*d(u,v)*

*(3)*构作加权完全图$K_{|V_0|}$，$V(K_{|V_0|}) = V_0, K_{|V_0|}$中*u,v*权为*d(u,v).*

*(4)*求加权图$K_{|V_0|}$的总权最小的完备匹配

*(5)*在G中求M中同一边之端点间的最短轨

*(6)*把G中在*5*求得的每条最短轨之边变成同权倍边，得到$Euler$图*G'*(这个图没有奇顶点*)*

*(7)*用FE算法求G‘一条$Euler$回路，即G的中国邮路

6.3 Hamilton

定义 29. 称含图的一切顶的圈为*Hamilton*圈，有*Hamilton*圈的图为*Hamilton*图；把含图的一切顶的轨称为*Hamilton*轨。

定理 28. G是*Hamilton*图的必要条件是任取$S \subset V(G), S \neq$，则$\omega(G-S) \leq |S|$，其中$\omega(\cdot)$是连通片个数.

定理 29. 设$|V(G)| \geq 3$，G的任一对顶u,v皆有$d(u)+d(v) \geq |V(G)|-1$,则G中有*Hamilton*轨；若$d(u)+d(v) \geq |V(G)|$，则G是*Hamilton*图

7 有向图

7.1 弱连通，单连通与强连通

定义 30. 若G是有向图，如果对$u, v \in V(G)$，存在从u到v的有向轨，则称u可达v；$\forall u, v \in V(G)$,u可达v或v可达u时，则称G是单连通有向图；$\forall u, v \in G$，不但u可达v，而且v可达u，则称G是强连通有向图；若把G的每边箭头取消，得到的无向图称为G的底图，底图连通的有向图叫做弱连通有向图。

定理 30. G是强连通有向图当且仅当G中存在有向生成回路(包含所有点的有向回路)

定理 31. 当且仅当无向图是无桥连通图时，G可以定向成强连通有向图

定理 32. G为单连通有向图当且仅当G中有含G所有点的有向道路

命题 12. G是弱连通有向图时，G为有向*Euler*图的充要条件是对每个顶$v \in V(G)$，皆成立$d^-v = d^+v$，其中d^-v, d^+v是v的入度和出度

命题 13. G是弱连通有向图，G为有向*Euler*图的充要条件是$G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$,$C_i$是$G$中有向圈，且$E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset, 1 \leq i, j \leq n$,$n$是某个自然数

命题 14. 若G是弱连通有向图，且

$$d^-(v) = \begin{cases} d^+(v) & v \in V(G) - \{u_1, u_2\}, u_1, u_2 \in V(G); \\ d^+(v) - 1 & v = u_1; \\ d^-(v) + 1 & v = u_2 \end{cases}$$

则G中存在从u_1到u_2的有向*Euler*行迹

7.2 循环赛图，有向轨和王

所谓循环赛图，又称竞赛图或赛图，是一个无向完全图K_n，把其每个边加一个方向而得到的有向图。它的实际背景是n位运动员，每位选手都要和其它选手比赛一场，当甲选手胜乙选手时，加一条甲到乙的边。

定理 33. 若有向图底图为G，则此有向图有长$\xi(G)-1$的有向轨

注. 由于$\xi(K_v) = v$，故每个赛图都有*Hamilton*轨

定义 31. 在赛图中，若从一个顶出发，通过至多长*2*的顶可达任何一个顶，就称这个顶为王。顶的得分为顶胜利的次数。

定理 34. 赛图中得分最多的顶为王

定理 35. 赛图G中v为唯一王的充要条件是u得分为*1*，其中n是赛图顶数

7.3 有向Hamilton图

定义 32.

$$\delta^- = \min_{v \in V(G)} \{d^-(v)\}$$

$$\delta^+ = \min_{v \in V(G)} \{d^+(v)\}$$

定理 36 (泛圈定理)**.** 设G是强连通竞赛图，$\forall u \in V(G)$，则G中存在k阶圈，u在此k阶圈上，k=$3, 4, \cdots, |V(G)|$

定理 37. 设$P(u_0, v_0)|E(P(u_0, v_0))| \geq \max\{\delta^-, \delta^+\}$

推论. 严格有向图中有长度大于$\max\{\delta^+, \delta^-\}$的有向圈

定理 38. $\min\{\delta^-, \delta^+\} \geq \frac{1}{2}|V(G)| > 1$的严格有向图$G$是有向$Hamilton$图.

8 最大流算法

8.1 2F算法

最大流问题的实际问题原型如下：

把一种商品从产地通过铁路或公路运往市场，交通网络中每一路段的运输能力有一定限度.问如何安排运输，使得运输最快？

图论模型如下：

设G是弱连通严格有向加权图,$s \in V(G)$称为源,$t \in V(G) - \{s\}$称为汇,每边e之权c(e)称为边容量，这时称G上定义了一个网络，记成$N(G, s, t, c(e))$.在E(G)上定义一个函数$f(e) : E \to \mathbb{R}, f(e)$满足

$$C(1) \quad 0 \leq f(e) \leq c(e), \quad e \in E(G)$$

$$C(2) \quad \sum_{e \in \alpha(v)} f(e) = \sum_{e \in \beta(v)} f(e), \quad v \in V(G) - \{s, t\}$$

其中$\alpha(v)$是以v为头的边集，$\beta(v)$是以v为尾的边集，称上述函数为网络N上的流函数，简称流，称

$$F = \sum_{e \in \alpha(t)} f(e) - \sum_{e \in \beta(t)} f(e)$$

为流函数流量.

目标是使F最大

定义 33. 设$S \subset V(G), s \in S, t \in \bar{S} = V(G) - S$.则称$(S, \bar{S})$是网络的一个截.

$$C(S) = \sum_{e \in (S, \bar{S})} c(e)$$

注. 截量表示从S中的各站运往S以外各站的货物量的一个上界.由于除s与t外，其他站皆中转站，所以$C(S)$也就是单位时间从s运往t的货物量的一个上界.

定理 39. 对于任一截$(S, \bar{S})$,成立公

$$F = \sum_{e \in (S, \bar{S})} f(e) - \sum_{e \in (\bar{S}, S)} f(e)$$

推论. *对任何流函数f和任意截$(S,\bar{S})$*

$$F \le C(S)$$

推论. *若F=C(S),则F是最大流量，C(S)是最小截量.*

定义 34 (2F算法中的一些规定)**.**

(1).若$e=uv\in E(G)$,u已有标志，v尚未标志，且边e未满载，即c(e)¿f(e),则称沿e可前向标志v，且规定

$$\Delta(e)=c(e)-f(e)$$

标志了边e.

(2).若$e=xy\in E(G)$,y已有标志，而x尚未标志,且f(e)¿0,则称沿e可向后标志顶x，且规定

$$\Delta(e)=f(e)$$

标志了边e.

算法 8 (2F算法)**.**

(1)取初始流函数$f(e)=0,\forall e\in E(G)$

(2)标志顶s，其它顶未标志

(3)选一个可向前或可向后标志的顶v，若选不到这种顶就中止，得到的就是最大流，若可选到v，就标志v且标志边e；若v=t，转(4),否则转(3).

(4)设已得到一条标志了的无向轨$se_1v_1e_2v_2\cdots e_lt$，取$\Delta=\min\limits_{1\le i\le l}\{\Delta(e_i)\}$，若在有向图$G$中$e_i=u_{i-1}v_i(s=v_0,t=v_l)$则

$$f(e_i)\leftarrow f(e_i)+\Delta$$

若e_i在有向图G中为$e_i=v_iv_{i-1}$则

$$f(e_i)\leftarrow f(e_i)-\Delta$$

(5)转(2)

定理 40. *2F算法终止时的流函数时最大流，其流量等于G中最小截量*

推论 (双最定理)**.** *f是最大流，$(S,\bar{S})$是最小截的充要条件是f的流量F等于$(S,\bar{S})$的截量C(S).*

8.2 Dinic分层算法

2F算法在面对图中存在小权边时，每次增加的流量被小权边限制，从而要花费大量迭代才能求得最大流，Dinic算法则避免了这个缺点

Dinic把2F的“沿e可向前标志”或“沿e可向后标志”的边e称为“有用边”

算法 9 (Dinic分层算法)**.**

(1)$V_0\leftarrow\{s\},i\leftarrow 0$

(2)$T\leftarrow\{v|v\notin V_j,j\le i,$且存在从$V_i$中某项与$v$之间的有用边$\}$

*(3)*若$T=\emptyset$,止，现在的流就是最大流

*(4)*若$t\in T$,则$l\leftarrow i+1, V_l\leftarrow \{t\}$，止

*(5)*令$V_{i+1}\leftarrow T$增大i,转*(2)*

上述算法得到的V_i叫做第i层，仅相邻两层间有边，得到的网络叫层状网络.

定理 41. 若*Dinic*终止于*(3)*,则现网络上的流f是最大流.

若在(4)终止，就需要在已经分层的网络上求得最大流

设原来网络中的流为f,E_j是层状网络中从V_{j-1}到V_j的边子集，若$e=uv\in E_j$

$$\bar{c}(e)=\begin{cases} c(e)-f(e) & u\in V_{j-1} \quad v\in V_j \\ f(e) & v\in V_{j-1} \quad u\in V_j \end{cases}$$

$\bar{c}$是$e=uv$上可增载的上界,我们把层状网络的边权取成$\bar{c}e$,取初始流$\bar{f}(e)=0$，且把层状网络上的边定向成从V_{j-1}到V_j(边的原来方向可能变成其反向)

若在层状网络中，每条从s到t的轨

$$sv_1v_2\cdots v_{l-1}t$$

上至少有一边e_j,满足$\bar{f}(e_j)=\bar{c}(e_j)$,其中$v_j\in V_j, e_j\in E_j$，则称$\bar{f}$为层状网络上的一个极大流.

层状网络上的极大流未必是最大流，但如果能求得层状网络的一个极大流，则可把原来网络上的流f改进成更大的流f':

$$f'(e)=\begin{cases} f(e)+\bar{f}(e) & e=uv\in E(G), u\in V_{j-1}, v\in V_j \\ f(e)-\bar{f}(e) & e=vu\in E(G), u\in V_{j-1}, v\in V_j \\ f(e) & otherwise \end{cases}$$

理论证明了每一轮分层层数严格增加，那么在有限轮后，算法必定在(3)终止，求得了最大流，下面只需要给出在层状网络求极大流的算法

算法 10 (极大流算法)**.**

*(1)*把层状网络$\bar{N}$上每条边标志“未堵塞”,$\bar{f}\leftarrow 0$

(2)$v\leftarrow s, S=\emptyset$

*(3)*若无未堵塞的边$e=vu$,u在下一层，则执行

*(3.1)*若s=v,止，$\bar{f}$即极大流

*(3.2)*从S移除顶部的边e=uv

*(3.3)*标志e堵塞,$v\leftarrow u$

*(3.4)*转*(3).*

*(4)*选一未堵塞的边e=vu,u在下一层,把e放入S,$v\leftarrow u$，若$v\neq t$，转*(3)*

(5)S中的边构成一个可增载轨

$$se_1v_1e_2\cdots v_{l-1}e_lt$$

(5.1)$\Delta\leftarrow \min 1\leq i\leq l\{\bar{c}(e_i)-\bar{f}(e_i)\}$

*(5.2)*对每个$1\leq i\leq l, \bar{f}(e_i)\leftarrow\bar{f}(e_i)+\Delta$,当$\bar{f}(e_i)=\bar{c}(e_i)$，标志$e_i$堵塞

(5.3)转(2)

注. 具体实现应该要利用深度优先搜索，思想还是寻找增广轨

8.3 有上下界网络的最大流算法

现在对于上一节中的问题模型，有向图G每边有了两个权$b(e), c(e)$，同时C1条件变为

$$b(e) \leq f(e) \leq c(e)$$

对这种网络，可能不存在流函数，需要先解决存在判定问题.

定义 35 (伴随网络). *N(G,s,t,b(e),c(e))的伴随网络N'(G'(V',E'),s',t',b'(e),c'(e)):*

(i)$V' = \{s', t'\} \cup V(G)$,其中$s', t' \notin V(G)$

(ii)$\forall v \in V(G)$，加新边$e = vt'$，且令$c'(e) = \sum_{e \in \beta(v)} b(e), c'(e)$是$N'$中$e$的容量上界，下界$b'(e) = 0$

(iii)$\forall v \in V(G)$，加新边$e = s'v$，且令$c'(e) = \sum_{e \in \alpha(v)} b'(e), c'(e)$是$N'$中$e$的上界，下界$b'(e)=0$

*(iv)E(G)*中的边e在N'中仍保留,但权发生变化，下界变成0，上界$c'(e) = c'(e') = +\infty$

*(v)*加新边$e=st$与$e'=ts$,且令e与e'的下界$b'(e)=b'(e')=0$，上界$c'(e) = c'(e) = +\infty$

定理 42. *N(G,s,t,b(e),c(e))*存在可行流当且仅当伴随网络N'上的最大流f'使流出s'的一切边e皆满足$f'(e)=c'(e)$.这时$f'(e)+b(e)$是N上一个可行流.

注. 由以上，得到求上下界网络N的最大流步骤：

*(1)*求出N的伴随网络N'

*(2)*求N'的最大流f'

*(3)*检验f'是否使N'中出s'的边e皆满足$f'(e)=c'(e)$,否则，无可行流，是，有可行流$f(e)$

$$f(e) = f'(e) + b(e)$$

*(4)*若已经得到可行流$f(e)$,则基于$f(e)$用2F或Dinic求最大流(这时可以不考虑下界)