Online Mirror Descent

万宗祺

更新:2022 年 4 月 1 日

1 Bregman 散度

定义 1.1 若 $f:\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ 是可微凸函数,并且 $x,y\in\mathbb{R}^d$,$y\in \mathrm{dom}(f)$. 则 f 在 y 诱导的 bregman 散度为

$$D_f(x,y) = f(x) - f(y) - \langle x-y, \nabla f(y)\rangle$$

定理 1.1 下面的结论成立

- $D_f(x,y)\ge 0, \forall y\in \mathrm{dom}(f)$
- $D_f(x,y) = 0, \forall x\in \mathrm{dom}(f)$
- 固定 $y\in\mathrm{dom}(f)$,$D_f(x,y)$ 是 x 的凸函数

我们把 f 在 y 处做泰勒展开,可以看到

$$f(x)\approx f(y) + \langle x-y,\nabla f(y)\rangle + \frac{1}{2}\|x-y\|^2_{\nabla^2 f(y)}$$

, 利用带余项的展开,可以得到下面的定理。

定理 1.2 如果 f 是二次可微的凸函数,且 $A=\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)), x,y\in A$, 那么存在 $\alpha\in[0,1]$ 和 $z\in \alpha x+(1-\alpha)y$ 使得

$$D_f(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$$

若还有 $\nabla^2 f$ 在 A 上连续,则存在一个可测函数 $g: A\times A\mapsto A$ 使得 $\forall x,y\in A$

$$D_f(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2_{\nabla^2 f(g(x,y))}$$

引理 1.3 (三点恒等式) 对于可微凸函数 f 以及 $x,y,z\in\mathrm{dom}(f)$, 下面的恒等式成立

$$D_f(x,z) = D_f(x,y) + D_f(y,z) + \langle \nabla f(z) - \nabla f(y), y-x\rangle$$

证明.

$$\begin{aligned}
D_f(x,y) + D_f(y,z) + \langle \nabla f(z)-\nabla f(y), y-x\rangle &= f(x)-f(y)+f(y)-f(z)-\langle\nabla f(y), x-y\rangle \\
&\quad - \langle \nabla f(z), y-z\rangle + \langle \nabla f(z)-\nabla f(y), y-x\rangle \\
&\quad f(x)-f(z)-\langle f(z), x-z\rangle = D_f(x,z)
\end{aligned}$$

2 Legendre 函数

定义 2.1 (Legendre 函数) 假设 f 是一个凸函数,并且 $A = \mathrm{dom}(f)$, $C = \mathrm{int}(A)$, 则 f 被称为 Legendre 函数等价于

- C 非空
- f 可微并且在 C 上严格凸
- 对任意趋向 ∂C 上某点的序列 $x_n \in C$, 有 $\lim_{n\to\infty} \|\nabla f(x_n)\|_2 = \infty$

Legendre 函数的直观是,它会在 C 的边界处变得非常陡峭。Legendre 函数有很方便的性质,尤其是在我们讨论其 Fenchel 共轭的时候。

定理 2.1 若 f 是一个 Legendre 函数,则

- ∇f 是一个 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ 与 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f^*))$ 之间的双射,并且它和其 Fenchel 共轭的梯度互为逆映射 (注意到梯度实际上是 f 所定义在的欧式空间上的映射), $(\nabla f)^{-1} = \nabla f^*$
- 假设 $x, y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, 则 $D_f(x, y) = D_{f^*}(\nabla f(x), \nabla f^*(y))$
- f 的 Fenchel 共轭也是 Legendre 的

直觉上,我们也可以得出如下结论

性质 2.2 若 f 是 Legendre 的,并且 $x^* \in \arg\min_{x\in\mathrm{dom}_f} f(x)$,那么 $x^* \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

这是因为,既然 f 在边界处十分陡峭,它自然不会在边界上取到最小值。

定理 2.3 让 z 与定理1.2中相同,$\eta > 0$, f 是二次可微的 Legendre 函数,$A = \mathrm{int}(\mathrm{dom})(f)$,$x, y \in A$, 则 $\forall u \in \mathbb{R}^d$

$$\langle x - y, u\rangle - \frac{D_f(x, y)}{\eta} \le \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}$$

证明. 令 $H = \nabla^2 f(z)$,则

$$\langle x - y, u\rangle \le \|x - y\|_H \|u\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^{-1}}\sqrt{2D_f(x, y)}$$

直接带入式子,对 $D_f(x, y) \ge 0$ 做优化即可。

3 Online Mirror Descent

定义 3.1 (Bregman 近映射) 给定一个 Legendre 函数 $F : \mathbb{R}^d \mapsto \bar{\mathbb{R}}$, 以及一个集合 A,$x, y \in A$, 和一个学习率 $\eta > 0$。定义 Bregman 近映射为

$$\mathcal{P}_y(x) = \arg\min_{x'\in A}\{\langle y, x - x'\rangle + D_f(x, x')\}$$

它将 $x \in A$ 映射到新的 $x' \in A$。

Mirror Descent 就是由一系列的 Bregman 近映射形成的。

注 注意到 Bregman 近映射还可以写成 $\mathcal{P}_y(x) = \nabla(f + \mathcal{I}_A)^*(y)$

注 有时候 Bregman 近映射会写成 $\mathcal{P}_x(y)$, 在这里,我们还是把参数和输入颠倒过来,强调其是从在线学习问题中的一个决策到另一个决策的映射。

在 Mirror Descent 中，算法产生一系列决策区域中的的决策 $\{a_t\} \subset A$, 其中初始决策

$$a_1 = \arg\min_{a \in A} F(a)$$

F 是我们给 Mirror Descent 输入的参数，一个 Legendre 函数，他在这里被称作势函数 (Potential function) 或者正则项 (regularizer)。随后的每一个决策都基于上一个决策，做一次 Bregman 迫近映射

$$a_{t+1} = \mathcal{P}_{y_t}(a_t)$$

y_t 是第 t 时间观测到的损失向量，在一般的优化问题中 (乃至于在线优化)，y_t 是一个可以被观测到的向量，然而在 bandit feedback 情形下，y_t 只能通过一些估计方法得到。