Online Mirror Descent

万宗祺

更新:2022 年 4 月 2 日

1 Bregman 散度

定义 1.1 若 $f:\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ 是可微凸函数，并且 $x,y\in\mathbb{R}^d$,$y\in \mathrm{dom}(f)$. 则 f 在 y 诱导的 bregman 散度为

$$D_f(x,y)=f(x)-f(y)-\langle x-y,\nabla f(y)\rangle$$

定理 1.1 下面的结论成立

- $D_f(x,y)\geq 0,\forall y\in \mathrm{dom}(f)$
- $D_f(x,y)=0,\forall x\in \mathrm{dom}(f)$
- 固定 $y\in \mathrm{dom}(f)$,$D_f(x,y)$ 是 x 的凸函数

我们把 f 在 y 处做泰勒展开,可以看到

$$f(x)\approx f(y)+\langle x-y,\nabla f(y)\rangle+\frac{1}{2}\|x-y\|^2_{\nabla^2 f(y)}$$

, 利用带余项的展开,可以得到下面的定理。

定理 1.2 如果 f 是二次可微的凸函数，且 $A=\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, $x,y\in A$, 那么存在 $\alpha\in[0,1]$ 和 $z\in \alpha x+(1-\alpha)y$ 使得

$$D_f(x,y)=\frac{1}{2}\|x-y\|^2_{\nabla^2 f(z)}$$

若还有 $\nabla^2 f$ 在 A 上连续，则存在一个可测函数 $g: A\times A\mapsto A$ 使得 $\forall x,y\in A$

$$D_f(x,y)=\frac{1}{2}\|x-y\|^2_{\nabla^2 f(g(x,y))}$$

引理 1.3 (三点恒等式) 对于可微凸函数 f 以及 $x,y,z\in \mathrm{dom}(f)$, 下面的恒等式成立

$$D_f(x,z)=D_f(x,y)+D_f(y,z)+\langle\nabla f(z)-\nabla f(y),y-x\rangle$$

证明.

$$\begin{aligned}D_f(x,y)+D_f(y,z)+\langle\nabla f(z)-\nabla f(y),y-x\rangle &= f(x)-f(y)+f(y)-f(z)-\langle\nabla f(y),x-y\rangle\\ &\quad-\langle\nabla f(z),y-z\rangle+\langle\nabla f(z)-\nabla f(y),y-x\rangle\\ &\quad f(x)-f(z)-\langle f(z),x-z\rangle=D_f(x,z)\end{aligned}$$

2 Legendre 函数

定义 2.1 (Legendre 函数) 假设 f 是一个凸函数，并且 $A = \mathrm{dom}(f)$, $C = \mathrm{int}(A)$, 则 f 被称为 Legendre 函数等价于

- C 非空
- f 可微并且在 C 上严格凸
- 对任意趋向 ∂C 上某点的序列 $x_n \in C$, 有 $\lim_{n\to\infty} \|\nabla f(x_n)\|_2 = \infty$

Legendre 函数的直观是，它会在 C 的边界处变得非常陡峭。Legendre 函数有很方便的性质，尤其是在我们讨论其 Fenchel 共轭的时候。

定理 2.1 若 f 是一个 Legendre 函数，则

- ∇f 是一个 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ 与 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f^*))$ 之间的双射，并且它和其 Fenchel 共轭的梯度互为逆映射 (注意到梯度实际上是 f 所定义在的欧式空间上的映射), $(\nabla f)^{-1} = \nabla f^*$
- 假设 $x, y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, 则 $D_f(x, y) = D_{f^*}(\nabla f(x), \nabla f^*(y))$
- f 的 Fenchel 共轭也是 Legendre 的

直觉上，我们也可以得出如下结论

性质 2.2 若 f 是 Legendre 的，并且 $x^* \in \arg\min_{x\in\mathrm{dom}_f} f(x)$，那么 $x^* \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

这是因为，既然 f 在边界处十分陡峭，它自然不会在边界上取到最小值。

定理 2.3 让 z 与定理1.2中相同，$\eta > 0$, f 是二次可微的 Legendre 函数，$A = \mathrm{int}(\mathrm{dom})(f)$，$x, y \in A$, 则 $\forall u \in \mathbb{R}^d$

$$\langle x - y, u\rangle - \frac{D_f(x, y)}{\eta} \leq \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{(\nabla^2 f(z))^{-1}}$$

证明. 令 $H = \nabla^2 f(z)$，则

$$\langle x - y, u\rangle \leq \|x - y\|_H \|u\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^{-1}} \sqrt{2D_f(x, y)}$$

直接带入式子，对 $D_f(x, y) \geq 0$ 做优化即可。

3 Online Mirror Descent

定义 3.1 (Bregman 迫近映射) 给定一个 Legendre 函数 $F : \mathbb{R}^d \mapsto \bar{\mathbb{R}}$, 以及一个集合 $A \subset \mathrm{dom}(f)$,$x, y \in A$, 和一个学习率 $\eta > 0$。定义 Bregman 迫近映射为

$$\mathcal{P}_y(x) = \arg\min_{x' \in A}\{\eta\langle y, x' - x\rangle + D_f(x', x)\}$$

它将 $x \in A$ 映射到新的 $x' \in A$。

Mirror Descent 就是由一系列的 Bregman 迫近映射形成的。

注 注意到 Bregman 迫近映射还可以写成 $\mathcal{P}_y(x) = \nabla(f + \mathcal{I}_A)^*(y)$

注 有时候 Bregman 迫近映射会写成 $\mathcal{P}_x(y)$, 在这里, 我们还是把参数和输入颠倒过来, 强调其是从在线学习问题中的一个决策到另一个决策的映射。

在 Mirror Descent 中,算法产生一系列决策区域中的的决策 $\{a_t\} \subset A$, 其中初始决策

$$a_1 = \arg\min_{a \in A} F(a)$$

F 是我们给 Mirror Descent 输入的参数，一个 Legendre 函数，他在这里被称作势函数 (Potential function) 或者正则项 (regularizer)。随后的每一个决策都基于上一个决策,做一次 Bregman 迫近映射

$$a_{t+1} = \mathcal{P}_{-y_t}(a_t)$$

y_t 是第 t 时间观测到的损失向量,在一般的优化问题中 (乃至于在线优化),y_t 是一个可以被观测到的向量,然而在 bandit feedback 情形下,y_t 只能通过一些估计方法得到。

引理 3.1 (镜像梯度) 假设 F 是一个 Legendre 函数, 它是 $\mathcal{P}$ 的势函数,$x \in A$,$y \in \mathbb{R}^d$, 则有

(a). $x' = P_y(x) \Rightarrow \langle x^* - x', \nabla F(x') - \nabla F(x) \geq \langle x^* - x', \eta y\rangle\rangle$ 对任意 $x^* \in A$ 成立

(b). 特别地, 若 $A = \mathrm{dom}(F)$, 则 $x' = P_y(x) \Leftrightarrow \nabla F(x') = \nabla F(x) + y$

证明. 对于 (a), 考虑 $\arg\min$ 的一阶条件即可。对于 (b), 注意此时 $x' \in \mathrm{int}(A)$, 然后考虑 (a) 即可。

引理 3.2 (镜像步) 假设 $x^*, x \in A$, $x' = \mathcal{P}_y(x)$, 则有

$$D_F(x^*, x') \leq D_F(x^*, x) - D_F(x', x) + \eta\langle y, x' - x^*\rangle$$

以及

$$D_F(x^*, x') \leq D_F(x^*, x) - D_F(x', x) + \eta\langle y, x' - x\rangle + \eta\langle y, x - x^*\rangle$$

以及

$$D_F(x^*, x') \leq D_F(x^*, x) - D_F(x', x) + \eta\|y\| + \|x' - x\|_* + \eta\langle y, x - x^*\rangle$$

其中 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_*$ 是一对互为共轭的范数。

证明. 应用引理1.3, 有

$$D_F(x^*,x) = D_f(x^*,x') + D_f(x',x) + \langle \nabla F(x) - \nabla F(x'), x' - x^* \rangle$$

则

$$\begin{aligned} D_F(x^*,x') &\leq D_F(x^*,x) - D_F(x',x) + \langle \nabla F(x') - \nabla F(x), x' - x^* \rangle \\ &\leq D_F(x^*,x) - D_F(x',x) + \langle \eta y, x' - x^* \rangle \end{aligned}$$

为了得到含有 $\langle y, x - x^* \rangle$ 项的界 (这是因为 regret 是这一项的累计，而非 $\langle \eta y, x' - x^* \rangle$, 实际上这里我们得到了著名的 Follow the leader lemma)，我们继续往下做

$$\begin{aligned} D_F(x^*,x') &\leq D_F(x^*,x) - D_F(x',x) + \langle \eta y, x' - x \rangle + \langle \eta y, x - x^* \rangle \\ &\leq D_F(x^*,x) - D_F(x',x) + \|y\| + \|x' - x\|_* + \langle \eta y, x - x^* \rangle \end{aligned}$$

最后一步由 Fenchel 不等式得到。

应用在在线学习中，我们终于得到了其 regret 上界

定理 3.3 (Regret) 若学习率 η_t 不减少 (这里的学习率其实意味着 '利用率'), 在线学习的 online learning 算法的 regret 满足

$$R(T) \leq \frac{F(a^*) - F(a_1)}{\eta_1} + \sum_{t=1}^{T} \langle y_t, a_t - a_{t+1} \rangle - \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\eta_t} D_F(a_{t+1}, a_t)$$

证明. 将 $y = -y_t, x = a_t, x' = a_{t+1}$ 带入引理3.2. 得到

$$D_F(a^*, a_{t+1}) \leq D_F(a^*, a_t) - D_F(a_{t+1}, a_t) - \eta_t \langle y_t, a_{t+1} - a_t \rangle - \eta_t \langle y_t, a_t - a^* \rangle$$

而

$$\begin{aligned} R(T) &= \sum_{t=1}^{T} \langle y_t, a_t - a^* \rangle \\ &\leq \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\eta_t} (D_F(a^*, a_t) - D_F(a^*, a_{t+1})) - \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\eta_t} D_F(a_{t+1}, a_t) - \sum_{t=1}^{T} \langle y_t, a_{t+1} - a_t \rangle \\ &\leq \frac{1}{\eta_1} D_F(a^*, a_1) + \sum_{t=1}^{T} \langle y_t, a_t - a_{t+1} \rangle - \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\eta_t} D_F(a_{t+1}, a_t) \\ &\leq \frac{F(a^*) - F(a_1)}{\eta_1} + \sum_{t=1}^{T} \langle y_t, a_t - a_{t+1} \rangle - \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\eta_t} D_F(a_{t+1}, a_t) \end{aligned}$$

最后一个不等式是因为我们选择 $a_1 = \arg\min_{a \in A} F(a)$, 因此 $\langle a^* - a_1, \nabla F(a_1) \rangle \geq 0$, 所以 $D_F(a^*, a_1) \leq F(a^*) - F(a_1)$