LFM推导

	item 1	item 2	item 3	item 4
user 1	R11	R12	R13	R14
user 2	R21	R22	R23	R24
user 3	R31	R32	R33	R34

R

=

	class 1	class 2	class 3
user 1	P11	P12	P13
user 2	P21	P22	P23
user 3	P31	P32	P33

P

×

	item 1	item 2	item 3	item 4
class 1	Q11	Q12	Q13	Q14
class 2	Q21	Q22	Q23	Q24
class 3	Q31	Q32	Q33	Q34

Q

$$L=\sum_{u=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(P_u^TQ_i-R_{ui})^2+\sum_{u=1}^{m}\lambda|P_u|^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda|Q_i|^2$$

因为我们认为用户之间是相互独立的，也就是说可以求出P1的增量，P2的增量

再把这些Pu给拼起来，成为一个矩阵P。所以有

$$L_u=\sum_{i=1}^{n}(P_u^TQ_i-R_{ui})^2+\lambda|P_u|^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda|Q_i|^2$$

两个未知数怎么办? P 和Q

思路：先固定Q，求P；再反过来，固定P，求Q；

循环反复，交替进行，直到达到要求或者一定批次

想最小化损失函数？　求导数、负梯度方向走

$$P_u=P_u-\alpha\frac{\partial L_u}{\partial P_u}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L_u}{\partial P_u} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2(P_u^T Q_i - R_{ui})Q_i + 2\lambda P_u \\
&= 2\left[\sum_{i=1}^{n}(P_u^T Q_i - R_{ui})Q_i + \lambda P_u\right] \\
&= 2\left[(P_u^T Q_1 - R_{u1})\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ \cdots \\ Q_{1K} \end{bmatrix} + (P_u^T Q_2 - R_{u2})\begin{bmatrix} Q_{21} \\ Q_{22} \\ \cdots \\ Q_{2K} \end{bmatrix} + \ldots + (P_u^T Q_n - R_{un})\begin{bmatrix} Q_{n1} \\ Q_{n2} \\ \cdots \\ Q_{nK} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ \cdots \\ P_{1K} \end{bmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

所以，有

$$
P_u = P_u - \alpha \frac{\partial L_u}{\partial P_u}
$$

$$
\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ \cdots \\ P_{1K} \end{bmatrix} - \alpha * 2\left[(P_u^T Q_1 - R_{u1})\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ \cdots \\ Q_{1K} \end{bmatrix} + (P_u^T Q_2 - R_{u2})\begin{bmatrix} Q_{21} \\ Q_{22} \\ \cdots \\ Q_{2K} \end{bmatrix} + \ldots + (P_u^T Q_n - R_{un})\begin{bmatrix} Q_{n1} \\ Q_{n2} \\ \cdots \\ Q_{nK} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ \cdots \\ P_{1K} \end{bmatrix}\right]
$$

所以

$$
P_{uk} = P_{uk} - \alpha * \sum_{i=1}^{n}(P_u^T Q_i - R_{ui})Q_{ik}
$$

推出这条公式，我们就去写代码啦