Obsérvese, en el segundo ejemplo, que la condicional figura en segundo lugar, y P, que es precisamente el antecedente, está situado primero. Cuando el *modus ponendo ponens* o cualquiera de las otras reglas se aplica para sacar una conclusión de dos o más proposiciones, el orden de aquellas proposiciones es indiferente.

Recuérdese que una condicional se puede escribir $(P) \rightarrow (Q)$. Con los paréntesis, el *modus ponendo ponens* es:

$$\begin{array}{l} (P) \rightarrow (Q) \\ (P) \\ \hline (Q) \end{array}$$

Si es una ayuda, se pueden usar paréntesis cuando el antecedente o el consecuente son proposiciones moleculares, como en los tres últimos ejemplos anteriores o en el siguiente:

$$\begin{array}{l} \neg P \vee R \rightarrow S \ \& \ \neg Q \\ \neg P \vee R \\ \hline S \ \& \ \neg Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} (\neg P \vee R) \rightarrow (S \ \& \ \neg Q) \\ (\neg P \vee R) \\ \hline (S \ \& \ \neg Q) \end{array}$$

El nombre *modus ponendo ponens* se puede explicar de la siguiente manera: Esta regla de inferencia es el método *(modus)*, que afirma *(ponens)* el consecuente, afirmando *(ponendo)* el antecedente.

Ejercicio 1

A. ¿Qué conclusión se puede sacar de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas? Es decir, ¿qué proposición lógica se sigue de las premisas?

1. Si usted está en Madrid, entonces su reloj señala la misma hora que en Barcelona. Usted está en Madrid.
2. Si no nos despedimos ahora, entonces no cumpliremos nuestro plan. No nos despedimos ahora.
3. Si esta planta no crece, entonces o necesita más agua o necesita mejor abono. Esta planta no crece.
4. Son las cinco. Si son las cinco, entonces la oficina está cerrada.
5. Si vivo en la capital de los Estados Unidos, entonces no vivo en ninguno de los cincuenta estados. Vivo en la capital de los Estados Unidos.

B. Utilizando *modus ponendo ponens* sacar una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes. Escribir las conclusiones en la línea (3).

1. (1) $P \vee Q \rightarrow R$
   (2) $P \vee Q$
   (3)

2. (1) $\neg P \rightarrow \neg R$
   (2) $\neg P$
   (3)

3. (1) $\neg P$
   (2) $\neg P \rightarrow Q$
   (3)

4. (1) $P \rightarrow Q \ \& \ R$
   (2) P
   (3)

5. (1) $P \rightarrow Q \vee R$
   (2) P
   (3)

6. (1) $\neg R$
   (2) $\neg R \rightarrow Q \ \& \ P$
   (3)

C. Poner una «C» junto a cada ejemplo en el que la conclusión es correcta según el *modus ponendo ponens*. Poner una «I» junto a cada conclusión incorrecta.

1. Premisas: S y $S \rightarrow T$; conclusión: T
2. Premisas: $T \rightarrow V$ y T; conclusión: V
3. Premisas: $P \rightarrow Q$ y Q; conclusión: P
4. Premisas: S y $R \rightarrow S$; conclusión: R
5. Premisas: R y $R \rightarrow S$; conclusión: S

D. Utilizar el *modus ponendo ponens* para deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes:

1. Si $x \neq 0$ entonces $x+y>1$. $x \neq 0$.
2. Si $x+y=z$ entonces $y+x=z$. $x+y=z$.
3. Si x es un número e y es un número, entonces $x+y$ es un número. x es un número e y es un número.
4. Si $x>y$ y $y>z$, entonces $x>z$. A la vez $x>y$ y $y>z$.
5. A la vez $x=y$ y $y=z$. Si $x=y$ y $y=z$, entonces $x=z$.

Demostraciones. Cuando se usa una regla de inferencia para pasar de un conjunto de proposiciones a otra proposición se *demuestra* que la última proposición es consecuencia lógica de las otras. Esto se puede expresar de muchas maneras. Se puede decir que se ha *derivado* la conclusión de las premisas, que la conclusión se *infiere de* o es *implicada* por las premisas, que la conclusión se *deduce* de las premisas, y otras. Todas estas palabras o expresiones significan lo mismo: Dadas ciertas proposiciones, si una regla de inferencia nos permite pasar a otra proposición, entonces esta proposición es una conclusión lógica de las proposiciones dadas.

En la última sección se han visto algunas demostraciones cortas. Utilizando *modus ponendo ponens* como regla, se demostró una conclusión a partir de un conjunto de premisas. Por ejemplo, de $R \rightarrow S$ y R se demostró S. Se podría esquematizar la demostración de manera clara poniendo

(1)	$R \rightarrow S$	P
(2)	R	P
(3)	S	PP

Cada línea en la demostración está numerada. Después de las proposiciones simbolizadas se indican como se obtiene cada proposición. Se han indicado con P las premisas dadas. Las líneas que son premisas se representan por P en la *regla de premisas*. Se parte de ellas y se deduce la línea (3) por el *modus ponendo ponens,* lo que se indica en la línea por la abreviatura PP, escrita después de la proposición.

Ejercicio 2

A. A continuación se dan conjuntos de premisas. Deducir una conclusión de cada conjunto, indicando cómo se obtienen cada una de las terceras líneas por medio de las abreviaturas P en la regla de premisas, o PP en el *modus ponendo ponens.*

Ejemplo:

(1)	$\neg P \rightarrow S$	P
(2)	$\neg P$	P
(3)	S	PP

1. (1) $\neg A \rightarrow \neg B$
   (2) $\neg A$
   (3)

2. (1) M
   (2) $M \rightarrow N$
   (3)

3. (1) R
   (2) $R \rightarrow \neg T \vee Q$
   (3)

4. (1) $\neg B \rightarrow \neg D$ & A
   (2) $\neg B$
   (3)

B. Simbolizar cada uno de los conjuntos de premisas del apartado **A** en el Ejercicio 1. Después indicar una demostración como en la Sección **A** de este ejercicio, numerando cada línea y señalando por medio de las abreviaturas P para las premisas y PP para *modus ponendo ponens,* cómo se justifica cada línea.

C. Simbolizar las proposiciones matemáticas de la Sección **D** del Ejercicio 1. Después indicar una demostración como en la Sección **A** de este ejercicio.

Demostraciones en dos pasos. Algunas veces no se puede ir directamente de las premisas a la conclusión por un solo paso. Pero esto no impide poder llegar a la conclusión. Cada vez se deduce una proposición por medio de una regla, entonces esta proposición se puede utilizar junto con las premisas para deducir otra proposición. Considérese un ejemplo en el que se tienen tres premisas:

(1)	$A \to B$	P
(2)	$B \to C$	P
(3)	A	P

Se quiere probar la proposición C. Para llegar a C, se necesitan dos pasos, cada uno permitido por el *modus ponendo ponens*, PP. Estos dos pasos son las líneas (4) y (5) escritas a continuación:

(1)	$A \to B$	P
(2)	$B \to C$	P
(3)	A	P
(4)	B	PP 1, 3
(5)	C	PP 2, 4

Observemos atentamente el esquema de la demostración. Cada línea está numerada, tanto si es una premisa como una línea deducida. Cada línea está justificada, bien por ser premisa (indicada por P), bien deducida por una regla de inferencia (indicada por la abreviatura PP). Además, después de las abreviaturas correspondientes a las reglas empleadas para obtener las líneas *deducidas,* se ha indicado el número de las líneas a partir de las cuales se ha deducido esta línea. Por ejemplo, en la línea (4) la sigla «PP 1, 3» significa que B se ha deducido por el *modus ponendo ponens* de las líneas (1) y (3). Análogamente, en la línea (5) se ha deducido de la C por medio de la regla PP de las líneas (2) y (4). Obsérvese que se puede utilizar una línea que se ha deducido, junto con otras líneas, para deducir una nueva línea. Cada línea que puede ser justificada ya sea como una premisa o por el uso de una regla, se puede utilizar en otros pasos posteriores de la demostración.

Antes de intentar hacer algunas demostraciones cortas, consideremos todavía un ejemplo. Se suponen dadas las premisas siguientes y se quiere demostrar R :

(1)	$S \to \neg T$	P
(2)	S	P
(3)	$\neg T \to R$	P
(4)	$\neg T$	PP 1, 2
(5)	R	PP 3, 4

Se utiliza el *modus ponendo ponens* para deducir una línea (4) y entonces se puede aplicar el *modus ponendo ponens* a aquella línea y a otra, tal como la (3) para deducir la conclusión (5). Se da un paso (permitido por una regla) y después se puede dar otro paso usando la proposición deducida.

Ejercicio 3

A. En cada uno de los ejercicios siguientes se ha de demostrar que una proposición es consecuencia lógica de las premisas dadas. Deducir la conclusión, escribiendo la abreviatura que corresponde a la regla que permite obtener cada línea, y cuando se empleen líneas deducidas anteriormente, indicar el número de cada línea que ha sido utilizada al aplicar la regla.

1. Demostrar: $\neg T$

(1)	$R \rightarrow \neg T$	P
(2)	$S \rightarrow R$	P
(3)	S	P
(4)		
(5)		

2. Demostrar: G

(1)	$\neg H \rightarrow \neg J$	P
(2)	$\neg H$	P
(3)	$\neg J \rightarrow G$	P
(4)		
(5)		

3. Demostrar: C

(1)	$A \rightarrow B \ \& \ D$	P
(2)	$B \ \& \ D \rightarrow C$	P
(3)	A	P
(4)		
(5)		

4. Demostrar: $M \vee N$

(1)	$\neg J \rightarrow M \vee N$	P
(2)	$F \vee G \rightarrow \neg J$	P
(3)	$F \vee G$	P
(4)		
(5)		

5. Demostrar: $\neg S$

(1)	T	P
(2)	$T \rightarrow \neg Q$	P
(3)	$\neg Q \rightarrow \neg S$	P
(4)		
(5)		

B. Simbolizar cada una de las proposiciones de los conjuntos siguientes y demostrar que la conclusión (la proposición que empieza por «Por tanto...») es consecuencia lógica. Se seguirá el mismo método de las demostraciones de la pág. 50.

1. Si 2 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 1.
   Si 3 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 0.
   2 es mayor que 1.
   Por tanto, 3 es mayor que 0.

2. $x+1=2$.*
   Si $x+1=2$ entonces $y+1=2$.
   Si $y+1=2$ entonces $x=y$.
   Por tanto, $x=y$.
3. Si $x+0=y$ entonces $x=y$. $x+0=y$.
   Si $x=y$ entonces $x+2=y+2$.
   Por tanto, $x+2=y+2$.
4. Si $x>y$ y $y>z$ entonces $x>z$.
   $x>y$ y $y>z$.
   Si $x>z$ entonces $x>10$.
   Por tanto, $x>10$.
5. Si $x=y$ y $y=z$ entonces $x=z$.
   Si $x=z$ entonces $z=x$.
   $x=y$ y $y=z$.
   Por tanto, $z=x$.
6. Si se levanta aire húmedo, entonces refrescará.
   Si refresca, entonces se formarán nubes.
   Se levanta aire húmedo.
   Entonces se formarán nubes.

C. No existe limitación respecto al número de veces que se puede aplicar en una demostración la regla *modus ponendo ponens*. Los ejercicios que siguen requieren más de dos aplicaciones. Deducir la conclusión que se desea demostrar, expresando la regla aplicada para deducir cada línea e indicando las líneas que se han utilizado al aplicar la regla.

Demostrar: $\neg N$

(1) $R \rightarrow \neg S$ P
(2) R P
(3) $\neg S \rightarrow Q$ P
(4) $Q \rightarrow \neg N$ P

Demostrar: B

(1) $\neg G \rightarrow E$ P
(2) $E \rightarrow K$ P
(3) $\neg G$ P
(4) $K \rightarrow \neg L$ P
(5) $\neg L \rightarrow M$ P
(6) $M \rightarrow B$ P

Demostrar: $R \vee S$

(1) $C \vee D$ P
(2) $C \vee D \rightarrow \neg F$ P
(3) $\neg F \rightarrow A \ \& \ \neg B$ P
(4) $A \ \& \ \neg B \rightarrow R \vee S$ P

---

* Cuando para expresar una proposición atómica se usan símbolos matemáticos, no es necesario utilizar letras mayúsculas para simbolizar la proposición atómica, pues se utilizarán los símbolos matemáticos como lógicos. Por ejemplo, en el Ejercicio 2, Sección **B**, las premisas se pueden escribir

$$x+1=2$$
$$x+1=2 \rightarrow y+1=2$$
$$y+1=2 \rightarrow x=y$$