No.8

warab1moch1
https://github.com/warab1moch1

Contents

1. 伊藤の補題

No.7 で導入した確率積分により、次を得たことを思い出す。

Lemma 1.1: 伊藤の補題

$$df(X^1,\cdots,X^n)=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^1,\cdots,X^n)dX^i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(X^1,\cdots,X^n)dX^idX^j$$

上の微分形は、積分形を天下り的に表現したものである。即ち、

$$\begin{aligned}f(X_t^1,\cdots,X_t^n)=f(&X_0^1,\cdots,X_0^n)\\&+\sum_i\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s^1,\cdots,X_s^n)dX_s^i\\&+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s^1,\cdots,X_s^n)d\langle X^iX^j\rangle\end{aligned}$$

が真の姿であることに注意する。

これより、伊藤の補題（公式）を実際に使用してみる。典型的な例としては、

1. $f(x)=x^n$ のとき

$$\begin{aligned}f'(x)&=nx^{n-1}\\f''(x)&=n(n-1)x^{n-2}\end{aligned}$$

であるから、1 変数の時を考えて

$$df(X_t)=f'(X_t)dX_t+\frac{1}{2}f''(X_t)dX_tdX_t$$

$$d(X_t^n)=nX_t^{n-1}dX_t+n(n-1)X_t^{n-2}dX_tdX_t$$

Example:

$f(x) = x^2$ で $X = W$ のとき（即ち X は Brownian Motion）

$$
\begin{aligned}
d(W_t^2) &= 2W_t dW_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 dW_t dW_t \\
&= 2W_t dW_t + 1dt
\end{aligned}
$$

$$\therefore d(W_t^2 - t) = 2W_t dW_t$$

これを積分して、

$$(W_t^2 - t) = (W_0^2 - 0) + \int_0^t 2W_s dW_s$$

$$\therefore W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s$$

ここで、左辺がマルチンゲールであることを以前確認したが、確かに右辺が確率積分となっていることから整合的である。

また、そのマルチンゲール性から 2 次変分の形がわかる。

2. $f(x) = e^x$ のとき

$$f'(x) = f''(x) = e^x \quad (= f(x))$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
d(e^{X_t}) &= e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} e_t^X dX_t dX_t \\
&= e^{X_t}\left(dX_t + \frac{1}{2} dX_t dX_t\right)
\end{aligned}
$$

3. $f(x) = \log x$ のとき

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

であるから、

$$d(\log X_t) = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{dX_t dX_t}{2X_t^2}$$

4. $f(x, y) = xy$ のとき

$$f_x(x, y) = y \quad f_y(x, y) = x$$

$$f_{xx}(x, y) = 0 \quad f_{yy}(x, y) = 0$$

$$f_{xy}(x, y) = 1$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
d(X_tY_t) &= Y_t dX_t + X_t dY_t \\
&\quad + \frac{1}{2}(0 \cdot dX_t dX_t + 1 dX_t dY_t + 1 dY_t dX_t + 0 \cdot dY_t dY_t) \\
&= Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t + dY_t
\end{aligned}
$$

5. $f(x) = \frac{1}{x}$ のとき

$$
f'(x) = -\frac{1}{x^2}
$$

$$
f'' = \frac{2}{x^3}
$$

であるから、

$$
d\left(\frac{1}{X_t}\right) = -\frac{dX_t}{X_t^2} + \frac{dX_t dX_t}{X_t^3}
$$

2. SDE : Stochastic Differencial Equation

いま、次のような確率微分方程式 (SDE) の解を考える。

$$
dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (\text{ on } \mathbb{P})
$$

即ち、 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$: フィルトレーション付き確率空間 (Filtrated Probability Space) 、 W : $\mathcal{F}_t$ - BM の下で[1]

$$
X_t - X_0 = \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s
$$

が成立する X を考える。

このとき、解には

- （弱い）解 : $\mathcal{F}_t$ - 適合な解

- （強い）解 : $\mathcal{F}_t^W$ - 適合な解、即ち W が生成する $\mathcal{F}$ に適合な解

の 2 種類が存在しており、

以下の Lipschitz 条件を満たすと強い解が一意的に存在することが知られている。

- (t, x) に関して μ, σ : 連続、かつ

$$
\begin{aligned}
\exists K : \forall t, x, y \quad & |\mu(t,x) - \mu(t,y)| \le K|x-y| \\
& |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le K|x-y|
\end{aligned}
$$

2.1. Black-Scholes 型

$$
\frac{dX_t}{X_t} = \mu_t dt + \sigma_t dt
$$

であって、$X_0 \in \mathbb{R}$ かつ μ_t, σ_t : 決定的、とする。

[1] このような設定からもわかるように、本当は $dW_t^{\mathbb{P}}$ と記述するべきである。

いま、$d(\log X_t)$ を考えると

$$\begin{aligned}
d(\log X_t) &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{dX_t dX_t}{2X_t^2} \\
&= \frac{\mu_t X_t dt + \sigma_t X_t dW_t}{X_t} - \frac{1}{2}\frac{(\mu_t X_t dt + \sigma_t X_t dW_t)^2}{X_t^2} \\
&= \mu_t dt + \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)^2 \\
&= \mu_t dt + \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}(\sigma_t^2 dW_t dW_t) \\
&= \left(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)dt + \sigma_t dW_t
\end{aligned}$$

であるから、

$$\log X_t - \log X_0 = \int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

これより、

$$\begin{aligned}
X_t &= e^{\log X_0}\, e^{\int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)ds + \int_0^t \sigma_s dW_s} \\
&= X_0\, e^{\int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)ds + \int_0^t \sigma_s dW_s}
\end{aligned}$$

今後、株価のモデリングに使用することを踏まえ、この X（幾何ブラウン運動）の性質を簡単に評価する。

– 平均

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t] &= X_0 \mathbb{E}\left[\exp\left(\underbrace{\int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)ds}_{\text{定数}} + \int_0^t \underbrace{\sigma_s}_{\text{決定的な関数}} dW_s\right)\right] \\
&\qquad (\because \text{伊藤の等長性から、第二項} \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t \sigma_s^2 ds\right)) \\
&= X_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) \quad (\because \mathbb{E}\left[e^{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}\right] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}) \\
&= X_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s ds\right)
\end{aligned}$$

– 分散

$$
\begin{aligned}
V[X_t] &= \mathbb{E}[X_t^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X_0^2 \exp\left(\underline{2\int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)ds + 2\int_0^t \sigma_s dW_s}\right)\right] - X_0^2 \exp\left(2\int_0^t \mu_s ds\right) \\
&\quad (\because \text{上と同様に考え、下線部は正規分布}) \\
&= X_0^2 \exp\left(2\int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)ds + \frac{1}{2}\cdot 4\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) - X_0^2 \exp\left(2\int_0^t \mu_s ds\right) \\
&= X_0^2 \exp\left(2\int_0^t \mu_s ds\right)\left\{\exp\left(\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) - 1\right\}
\end{aligned}
$$

とわかる。

特に、パラメータが時間変動しない場合

$$X_t = X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

$$\mathbb{E}[X_t] = X_0 e^{\mu t}$$

$$V[X_t] = X_0 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

となる。

2.2. Ornstein-Uhlenbeck 型

$$dX_t = \kappa_t(\mu_t - X_t)dt + \sigma_t dt$$

であって、$X_0 \in \mathbb{R}$ かつ $\kappa_t, \mu_t, \sigma_t$: 決定的、とする。

形態からわかるように、κ は平均回帰速度 (mean reversion speed) である。

いま、この形の X_t を解くために次のような変形を考える。 まず、

$$Y_t = \int_0^t \kappa_s ds$$

とする。このとき、

$$dY_t = \kappa_t dt$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
d(e^{Y_t}) &= e^{Y_t}\left(dY_t + \frac{1}{2}dY_t dY_t\right) \\
&= e^{Y_t}(\kappa_t dt + 0) \\
&= e^{\int_0^t \kappa_s ds}\kappa_t dt
\end{aligned}
$$

これより、

$$
\begin{aligned}
d\left(e^{\int_0^t \kappa_s ds} X_t\right) &= e^{\int_0^t \kappa_s ds}\kappa_t dt X_t + e^{\int_0^t \kappa_s ds} dX_t + e^{\int_0^t \kappa_s ds}\kappa_t dt dX_t \\
&= e^{\int_0^t \kappa_s ds}\{\kappa_t dt X_t + \kappa_t(\mu_t - X_t)dt + \sigma_t dW_t + 0\} \\
&= e^{\int_0^t \kappa_s ds}(\kappa_t \mu_t dt + \sigma_t dW_t)
\end{aligned}
$$

を得る。これを積分して、

$$
e^{\int_0^t \kappa_s ds} - 1 \cdot X_0 = \int_0^t \kappa_s \mu_s e^{\int_0^s \kappa_u du} ds + \int_0^t \sigma_s e^{\int_0^s \kappa_u du} dW_s
$$

整理して、

$$
X_t = X_0 e^{-\int_0^t \kappa_s ds} + \int_0^t \kappa_s \mu_s e^{-\int_s^t \kappa_u du} + \int_0^t \sigma_s e^{-\int_s^t \kappa_u du} dW_s
$$

ここで、第二項までは定数、第三項はやはり正規分布となっていることに注意する。

2.3. 1 次元線形 SDE