No.7

warab1moch1
https://github.com/warab1moch1

Contents

1. 確率積分

H : 連続適合[1]過程、$W : \mathcal{F}_t$ によって生成された BM (Brownian Motion) であるとする。

いま、

$$\int_0^t H_s dW_s$$

なる確率変数を定めたい。 あるいは、

$$\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{t\geq 0}$$

なる確率過程を定めたい。

改めて前提を整理すると、

$$\int_0^t H_s dW_s$$

において考えているのは、$\omega \in \Omega$ をひとつ fix したとき、ある時刻 s を与えると

- $s \mapsto H_s(\omega)$: 普通の関数（Path）

- $s \mapsto W_s(\omega)$: 普通の関数（Path）

であるように、それぞれはこれまでに定義してきた（見知った）関数である。

一方で、上の確率変数を Lebersgue - Stieltjes 積分（$\Leftrightarrow$ Path ω ごとの積分）として定めるのは無理であることが知られている。即ち、

---

[1]

Definition 1.1: $X_t : F_t$ - 適合であるとは、

$$\forall t \quad X_t : \mathcal{F}_t \text{ - 可測}$$

即ち、その時点までの情報で決まっていることを意味している

$$\sum_{i=1}^{n} H_{t_i}(\omega)\Big(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)\Big)$$

を考えられないということである。

これは、W_t が 2 次変分を持つことから、有界変動[2]な Path を確率 1 で持たないことによる。

そこで、Lebersgue 積分のように各点収束を考えるのではなく、分割における左側の関数値を代表点として L^2 収束[3]を考えればよい、というのが確率積分（伊藤積分）の骨子である。

これより､積分の構成や証明などで高度な部分は割愛しつつ､満たしてほしい性質から天下り的に確率積分を考える。

例によって、$\Delta : 0 = t_0 < \cdots < t = t_n$ を $[0, t]$ の分割とする。 このとき、

$$A_t^{\Delta} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} H_{t_{i-1}}\Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big)$$

$$B_t^{\Delta} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} H_{t_i}\Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big)$$

なる確率変数を考える。それぞれ、各分割地点における左（右）側を代表点とした確率積分の近似である。

$$B_t^{\Delta} - A_t^{\Delta} = \sum_{i=1}^{n}\Big(H_{t_i} - H_{t_{i-1}}\Big)\Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big)$$

であるから、例えば $H = W$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned} B_t^{\Delta} - A_t^{\Delta} &= \sum_{i=1}^{n}\Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big)^2 \\ &\overset{|\Delta|\to 0}{\to} t \quad (\neq 0) \end{aligned}$$

つまり $B_t^{\Delta} \neq A_t^{\Delta}$ である。

また、

$$\begin{aligned} B_t^{\Delta} + A_t^{\Delta} &= \sum_{i=1}^{n}\Big(W_{t_i}\Big) + W_{t_{i-1}}\Big(W_{t_i}\Big) - W_{t_{i-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(W_{t_i}^2 - W_{t(i-1)}^2\Big) \\ &= W_t^2 - 0 \\ &= W_t^2 \end{aligned}$$

よって

$$A_t^{\Delta} \simeq \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$$

$$B_t^{\Delta} \simeq \frac{1}{2}(W_t^2 + t)$$

[2]ブラウン運動が無限にギザギザしているという性質は、積分において都合が悪いということである。
[3]これより、確率収束していることが言える ($\because$ No.5) **ここら辺ブラウン運動の回を見直して直しておく**

と考えられる。特に、上の A_t^{Δ} の右辺はマルチンゲールであり、性質がよさそうである。

これを念頭に、左側を代表点とするものを確率積分であると考えると、今後の見通しがよさそうである。

例えば、

$$\Delta : (0 = t_0 < \cdots < s = t_k < \cdots < t = t_n)$$

として、$[0, t]$ の s を通る分割を以下では考える。 このとき、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[A_t^{\Delta} | \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} H_{t_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_k}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} H_{t_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{t_{i-1}}}\right) \\
&+ \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{t_{i-1}}}\right) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] | \mathcal{F}_{t_k}\right] \\
&(\because \mathcal{F}_{t_k}\text{- 可測性と Tower Law}) \\
&= A_s^{\Delta} + \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}} \mathbb{E}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] | \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= A_s^{\Delta} (\because W \text{ はマルチンゲールだから増分は } 0)
\end{aligned}$$

よって、$\int_0^t H_s dW_s$ は、t についてマルチンゲールになるべき量である

加えて、天下り的ではあるが、H : 有界として

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(A_t^{\Delta}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right] \\
&+ 2 \sum_{i>j} \mathbb{E}[H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)]
\end{aligned}$$

であるから、Tower Law により

$$\begin{aligned}
(\text{第一項の中身}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2 \mathbb{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2 (t_i - t_{i-1})\right] \quad (\because \text{分散})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{第二項の中身}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}}\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \mathbb{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] \quad (\because \text{独立増分性}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

より、

$$
\mathbb{E}\left[\left(A_t^{\Delta}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} H_{t_{i-1}}^2 (t_i - t_{i-1})\right]
$$

$$
\overset{|\Delta|\to 0}{\to} \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]
$$

である。これより、冒頭で正体がつかめなかった『確率積分』の 2 乗の期待値は、（適合過程として）知っている関数の 2 乗の期待値に収束していることがわかる。

これまでの結果をまとめると、$\int_0^t H_s dW_s$ は、次の伊藤の等長性という式を満たすべきである。

$$
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]
$$

このとき、確率積分 $\int_0^t H_s dW_s \coloneqq I$ は L^2 可積分でマルチンゲールであり、

$$
\| I \|_{L^2(\Omega,\mathbb{P})}^2 = \| H \|_{L^2(\Omega\times[0,t],\mathcal{P},\mathbb{P}\times\lambda)}^2
$$

と言える[4]。

これより、この I の 2 次変分を考えたい[5]。$I = \int_0^t H_s^2 ds$ において、

– $H_s(\omega) : \omega$ を与えるごとに生成される連続な Path

– ds は普通の Lebersgue 積分

であるから、ω を与えるごとに値が確定する積分であることに注意する。

2 次変分の性質（ちゃんとしたやつ）のっける

– 0 スタート – 増加 – 連続なパスを持つ – $A^2 - X$ がマルチンゲール このとき、上の 3 つは直観的に成立を期待できる。そこで、

$$
\Delta : (0 = t_0 < \cdots < s = t_k < \cdots < t = t_n)
$$

として、

$$
X_t^{\Delta} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} H_{t_{i-1}}^2 (t_i - t_{i-1})
$$

$$
X_s^{\Delta} \coloneqq \sum_{i=1}^{k} H_{t_{i-1}}^2 (t_i - t_{i-1})
$$

とおくと、

[4]右辺の $\mathbb{P}$ は確率測度で λ はルベーグ測度、また $\mathcal{P}$ はこの積分を成立させるための（舞台設定としての）加法族である。

[5]証明なしで以下を考えることになるが、確率積分 $\int_0^t H_s dW_s$ が連続であると都合がよい

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(A_t^\Delta\right)^2 - X_t^\Delta | \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{i=1}^n H_{t_{i-1}}^2 \left(t_i - t_{i-1}\right) \ | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2 \left(\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 - \left(t_i - t_{i-1}\right)\right) | \mathcal{F}_{t_k}\right] \\
&\qquad + 2 \sum_{i>j} \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_k}\right]
\end{aligned}
$$

であるから、

第一項の各項は

- $i \leq k$ のとき

$$
= H_{t_{i-1}}^2 \left(\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 - \left(t_i - t_{i-1}\right)\right)
$$

として可測性より外に出せる

- $i > k$ のとき

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2 \left(\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 - \left(t_i - t_{i-1}\right)\right) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] | \mathcal{F}_{t_k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2 \mathbb{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2 \left(t_i - t_{i-1}\right) | \mathcal{F}_{t_k}\right] \quad (\because t_i - t_{i-1} \text{ は定数}) \\
&= \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2 \left(t_i - t_{i-1}\right) | \mathcal{F}_{t_k}\right] - \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}}^2 \left(t_i - t_{i-1}\right) | \mathcal{F}_{t_k}\right] \qquad (\because \text{独立増分性}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

また、第二項の各項は $i > k$ のとき

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] | \mathcal{F}_{t_k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}} \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \mathbb{E}\left[\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] | \mathcal{F}_{t_k}\right] \\
&= 0 \quad (\because \text{独立増分性})
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(A_t^\Delta\right)^2 - X_t^\Delta | \mathcal{F}_s\right] &= \sum_{i=1}^k H_{t_{i-1}}^2 \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 - \sum_{i=1}^k H_{t_{i-1}}^2 \left(t_i - t_{i-1}\right) \\
&\qquad + 2 \sum_{k \geq i > j} H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \\
&= \left(A_s^\Delta\right)^2 - X_s^\Delta
\end{aligned}
$$

となり、所望の結果を得る[6]。

[6] ここで、$\left(A_s^\Delta\right)^2$ への変形には一般形 $H_{t_{i-1}} H_{t_{j-1}} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)$ の対角線領域と三角形領域の和が $k \times k$ の正方形となることを用いた。