No.7

warab1moch1
https://github.com/warab1moch1

Contents

1. 測度変換

Theorem 1.1: Levy の定理
$M : \mathcal{F}_t$ マルチンゲールで $M_0 = 0$
$\langle M \rangle_t = t$

$M : (\mathcal{F}_t)$ - BM

Proof: $f(t,x) := \exp\left(i\alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ とおくと[1]

$$f_x = i\alpha f \tag{1}$$

$$f_{xx} = -\alpha^2 f \tag{2}$$

$$f_t = \frac{1}{2}\alpha^2 f \tag{3}$$

Ito fomula

$$\begin{aligned} f(t, M_t) &= f(0, M_0) + \int_0^t f_t(s, M_s) ds \\ &\quad + \int_0^t f_x(s, M_s) dM_s + \int_0^t \frac{1}{2} f_{xx}(s, M_s) ds \\ &= 1 + i\alpha \int_0^t f_x(s, M_s) dM_s \end{aligned} \tag{4}$$

martingale.

$$\therefore \mathbb{E}\left[e^{i\alpha M_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} | \mathcal{F}_s\right] = e^{i\alpha M_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s} \tag{5}$$

両辺に$e^{-i\alpha M_s - \frac{1}{2}\alpha^2 t} : \mathcal{F}_s$ 可測

$$\mathbb{E}\left[e^{i\alpha(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 (t-s)} \tag{6}$$

Tower Law

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\alpha(M_t-M_s)}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{i\alpha(M_t-M_s)}|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)}\right] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)}
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\therefore M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \tag{8}
$$

2

next, $(\mathcal{F}_t)$ - 独立増分性

$\forall A \in \mathcal{F}_s \quad C \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$

$$
\mathbb{P}(\{M_t - M_s \in C\} \cap A) = \mathbb{P}(\{M_t - M_s \in C\})\mathbb{P}(A) \tag{9}
$$

$\mathbb{P}(A) = 0$の時自明、$\mathbb{P}(A) > 0$に興味あり

$$
\mathbb{P}_A(B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \tag{10}
$$

新しい確率測度を導入する。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A e^{i\alpha(M_t-M_s)}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A e^{i\alpha(M_t-M_s)}|\mathcal{F}_s\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbb{E}\left[e^{i\alpha(M_t-M_s)}|\mathcal{F}_s\right]\right] \quad (\because A \in \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)}\right] \quad (\because \text{Equation 7}) \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)} \\
&= \mathbb{P}(A) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Lemma 1.2: $f : \mathbb{P}$ - 可積分

$$
\mathbb{E}^{P_A}[f] = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A f]}{\mathbb{P}(A)} \tag{12}
$$

Proof: 簡単のため、指標関数の時のみ示す。以降は standard-machine に従うと考えればよい。 $f = \mathbf{1}_B$ のとき、確率の定義から

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{P_A}[\mathbf{1}_B] &= \int_\Omega \mathbf{1}_B d\mathbb{P}_A(\omega) \\
&= \int_B 1 d\mathbb{P}_A(\omega) \\
&= \mathbb{P}_A(B) \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(A)}
\end{aligned} \tag{13}
$$

■

上の補題より、次が従う。

$$\mathbb{E}^{P_A}\left[e^{i\alpha(M_t-M_s)}\right]=e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)} \tag{14}$$

すると、M_t-M_s の分布は $\mathbb{P}$ 上でも $\mathbb{P}^{P_A}$ 上でも変わらないことがわかる。これより、

$$\therefore \frac{\mathbb{P}(\{M_t-M_s\in C\}\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\mathbb{P}(\{M_t-M_s\in C\}) \tag{15}$$

よって

$$M_t-M_s\perp\mathcal{F}_s \tag{16}$$

1.1. Radon-Nikodym 微分

いま、Ω 上に確率測度 $\mathbb{P}$、$\mathbb{Q}$ があり、同値とする[3]。このとき、ある

$$D\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \tag{17}$$

が存在して

$$\mathbb{Q}(A)=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[DA] \tag{18}$$

を満足する。

これを、$\mathbb{Q}$ の $\mathbb{P}$ による Radon-Nikodym 微分と言い、$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ で表す。

Example: $\Omega=[0,1]$

$$\mathbb{P}([a,b])=b-a \tag{19}$$

$$\mathbb{Q}([a,b])=b^2-a^2 \tag{20}$$

とする。このとき $x\in\Omega$

$$\mathbb{P}([x,x+\Delta x])=\Delta x \tag{21}$$

$$\mathbb{Q}([x,x+\Delta x])=\Delta x^2+2\Delta x\cdot x \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\mathbb{Q}([x,x+\Delta x])}{\mathbb{P}([x,x+\Delta x])}&=\Delta x+2x\\&\simeq 2x\end{aligned} \tag{23}$$

となっていることがわかる。これより、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[2x,[a,b]]&=\int_a^b 2x d\mathbb{P}(x)\\&=\left[x^2\right]_a^b\\&=b^2-a^2\\&=\mathbb{Q}([a,b])\end{aligned} \tag{24}$$

[1]連続セミマルチンゲールとしてtを扱うことを明記

[2]$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$の特性関数$\mathbb{E}[e^{itX}]=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

[3]

$$\forall A\in F\quad \mathbb{P}(A)=0\Leftrightarrow\mathbb{Q}(A)=0$$

$$\therefore \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega) = 2\omega \tag{25}$$

　であるから、$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ は測度が何倍の密度を持っているかを表現している。
いま、次のような確率過程 (Density process) を考える。

$$D_t \coloneqq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t\right] \tag{26}$$

定義より、上の確率変数 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ に対して、$\mathbb{P}$ における条件付期待値を考えていることがわかる。

fact [D_t の性質

– マルチンゲール

定義より、条件付期待値の Tower Law から従う。

–

$$\inf_{t \geq 0} D_t \geq 0 \tag{27}$$

として ($\mathbb{P}$ - $a.s.\ \omega$) にとれる、即ち

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0 \tag{28}$$

でない点は可算個程度しかない。

– もし、D_t を連続過程としてとれるなら、 L : 連続過程として

$$D_t = \mathcal{E}(L)_t \tag{29}$$

として、stochastic exponential の形で表せる[4]。]

これらの性質と定義から、次が従う。

1. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XD]$

$$\begin{aligned} \because \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] &= \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{Q}(\omega) \\ &= \int_\Omega X(\omega) \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] \end{aligned} \tag{30}$$

2. $X_t : \mathcal{F}_t$ 可測であるとき、 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D_t]$

$$\begin{aligned} \because \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D | \mathcal{F}_t]] \quad (\because \text{Tower Law}) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[D | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D_t] \quad (\because D_t \text{ のマルチンゲール性}) \end{aligned} \tag{31}$$

3. $X_t : \mathcal{F}_t$ 可測であるとき、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t | \mathcal{F}_s] = D_s^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D_t | \mathcal{F}_s] \quad (s \leq t)$

[4]次節では、この事実を逆引き的に用いる。

∵ 右辺が、（左辺を条件付期待値たらしめる）部分平均の性質を満たしていればよく、$\forall A \in \mathcal{F}_s$ に対し、

$$\begin{aligned}
\int_A D_s^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D_t|\mathcal{F}_s] &= \int_\Omega \mathbf{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D_t|\mathcal{F}_s] D_s^{-1} d\mathbb{Q} \\
&\quad \text{上の 2 より、} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_t}{D_t}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t] \\
&= \int_\Omega \underbrace{\mathbf{1}_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D_t|\mathcal{F}_s]}_{\mathcal{F}_s \text{ 可測}} d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A X_t D_t|\mathcal{F}_s]] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A X_t D_t] \\
&\quad \mathbf{1}_A X_t D_t \text{は} \mathcal{F}_t \text{ 可測であることに注意すれば、} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_A X_t] \quad (\because 2 \text{ より、} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t]) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t, A]
\end{aligned} \tag{32}$$

これより、右辺は正に $\mathbb{Q}$ の下での部分平均となっており、所望の結果である。

1.2. Gilsanov の定理

いま、次のような確率過程を考える。

$$L_t := \int_0^t \theta_s dW_s \tag{33}$$

この L_t を用いた次のような stochastic exponential を考えると、伊藤の等長性から

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(-L)_t &= \exp\left(-L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)
\end{aligned} \tag{34}$$

このとき、Radon-Nykodim 微分における fact(後で上手く引用する形で記述する) から、この $\mathcal{E}(-L)_t$ を Density Process に持つような $\mathbb{Q}$ について考える。
実際、$\forall A \in \mathcal{F}$ について

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \mathcal{E}(-L)_\infty d\mathbb{P} \tag{35}$$

とすればよい[5]。

[5]

> **Theorem 1.2.1**: M : 一様可積分マルチンゲールであるとき、
> M_t から M_∞ (L^1 収束かつ概収束) かつ $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t] = M_t$ なる M_∞ の存在が言える。
> マルチンゲール収束定理**（要調査）**

一般に、L^2 有界マルチンゲール ($\sup_{t>0} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$) ⇒ 一様可積分マルチンゲール ⇒ L^1 有界マルチンゲールという関係性が成立している。
ブラウン運動 W は $\sup \mathbb{E}[W_t^2] = t \to \infty$ であることに注意。

すなわち、

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-L)_{\infty} \tag{36}$$

であり、Density Process D_t の一般形は

$$\begin{aligned} D_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathcal{E}(L)_{\infty} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathcal{E}(-L)_t \end{aligned} \tag{37}$$

とすればよい。このとき、$\mathcal{E}(-L)_{\infty}$ が存在するための十分条件は

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds}\right] < \infty \tag{38}$$

であり、これを Novikov 条件という。これは、$\mathcal{E}(-L)_t$ の指数部分の正規性と L^2 有界性に関する条件である。

Theorem 1.2.2: Gilsanov の定理
(θ_t) から新たな（確率）測度 $\mathbb{Q}$ を作ることを考える。
ここで、ブラウン運動 W : $\mathbb{P}$ - BM とすると

$$W_t^{\mathbb{Q}} := W_t + \int_0^t \theta_s ds \tag{39}$$

によって定義された $W_t^{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ - BM である。

このとき、Equation 39 の微分形は

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t + \theta_t dt \tag{40}$$

であることに注意する。

このとき、実際に $W_t^{\mathbb{Q}}$ が $\mathbb{Q}$ - BM であることを示すには、**Levy** の定理から(記号)

– 0 スタート

– $\mathbb{Q}$ - マルチンゲール

– 2 次変分 t

であればよい。

表式から、0 スタートは自明に従う。また、2 次変分も

$$\begin{aligned} dW_t^{\mathbb{Q}} dW_t^{\mathbb{Q}} &= (dW_t + dt)^2 \\ &= dW_t dW_t \\ &= dt \end{aligned} \tag{41}$$

より確認できる。

ここで、$\mathbb{Q}$ - マルチンゲールについては

$$D_t = \mathcal{E}(-L)_t \tag{42}$$

より、

$$\frac{d\mathcal{E}(-L)_t}{d(-L)_t} = \mathcal{E}(-L)_t \tag{43}$$

であるから、

$$\begin{aligned} dD_t &= d\mathcal{E}(-L)_t \\ &= \mathcal{E}(-L)_t d(-L)_t \\ &= -D_t dL_t \\ &= -D_t \theta_t dW_t \end{aligned} \tag{44}$$

これから、$\mathbb{P}$ 上で

$$\begin{aligned} d\left(W_t^{\mathbb{Q}} D_t\right) &= W_t^{\mathbb{Q}} dD_t + D_t dW_t^{\mathbb{Q}} + dD_t dW_t^{\mathbb{Q}} \\ &= -W_t^{\mathbb{Q}} D_t \theta_t dW_t + D_t(dW_t + \theta_t dt) - D_t \theta_t dt \\ &= \left(1 - W_t^{\mathbb{Q}} \theta_t\right) D_t dW_t \end{aligned} \tag{45}$$

$$\therefore W_t^{\mathbb{Q}} D_t : \mathbb{P} \text{ - マルチンゲール} \tag{46}$$

ここで、測度の変換に際し

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t | \mathcal{F}_s] = D_s^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t D_t | \mathcal{F}_s] \tag{47}$$

が成立しているのであったから

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W_t^{\mathbb{Q}} | \mathcal{F}_s\right] &= D_s^{-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W_t^{\mathbb{Q}} D_t | \mathcal{F}_s\right] \\ &= D_s^{-1} W_s^{\mathbb{Q}} D_s \\ &= W_s^{\mathbb{Q}} \end{aligned} \tag{48}$$

$$\therefore W_t^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \text{ - マルチンゲール} \tag{49}$$

となり、所望の結果を得る。

これまでに得られた結果を踏まえると、$\mathcal{E}(-L)_t$ による Gilsanov 変換は、

- M : $\mathbb{P}$ - 局所マルチンゲール

から

- $M + \langle M, L\rangle$: $\mathbb{Q}$ - 局所マルチンゲール

を得るための操作であると言い換えられる。

実際、

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t + \theta_t dt \tag{50}$$

とすることで、

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \text{ on } \mathbb{P} \tag{51}$$

$$dX_t = (\mu_t - \theta_t\sigma_t)dt + \sigma_t dW_t \text{ on } \mathbb{Q} \tag{52}$$

であることから、確率測度 $\mathbb{Q}$ を（適当に）取り換えればドリフト項が何にでもなることがわかる。

fact[マルチンゲール表現定理
completed Brownian filtration $(\mathcal{F}_t{}^{\sim})$ 上において M : 連続マルチンゲールとする。
このとき、$C \in \mathbb{R}$ で

$$M_t = C + \int_0^t h_s dW_s \tag{53}$$

と、ある h によって書ける。
あるいは、一般に、マルチンゲール M に対し

$$dM_t = h_t dW_t \tag{54}$$

と書ける。]

これより、N : 連続マルチンゲールのとき

$$dN_t = \sigma_t dW_t \quad (\sigma_t \neq 0) \tag{55}$$

として

$$M_t = C + \int_0^t \varphi_s dN_s \tag{56}$$

なる φ が存在する。というのは、

$$\begin{aligned} dM_t &= h_t dW_t \\ &= (h_t\sigma_t^{-1})\sigma_t dW_t \\ &= (h_t\sigma_t^{-1})dN_t \end{aligned} \tag{57}$$

とできるからである。

いま、割引株価過程

$$Z_t \coloneqq B_t^{-1} S_t \tag{58}$$

$$\begin{aligned} dB_t &= -B_t^{-2} dB_t \\ &= -rB_t^{-1} dt \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} dZ_t &= B_t^{-1} dS_t + dB_t^{-1} S_t \\ &= B_t^{-1}\{dS_t + (-rdt)S_t\} \\ &= B_t^{-1}\{S_t(\mu dt + \sigma dW_t - rdt)\} \\ &= Z_t\{(\mu - r)dt + \sigma dW_t\} \end{aligned} \tag{60}$$

$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ Gilsanov

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t + \theta dt \tag{61}$$

$$dZ_t = Z_t \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \tag{62}$$

$$E_t \coloneqq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t] \tag{63}$$

$$dE_t = \varphi_t dZ_t \tag{64}$$

$$\psi_t \coloneqq E_t - \varphi_t Z_t \tag{65}$$

(φ, ψ)

1. (φ, ψ)
3.

$$\begin{aligned} V_t &= \varphi_t S_t + \psi_t B_t \\ &= \varphi_t S_t + (E_t - \varphi_t Z_t) B_t \\ &= B_t E_t \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} \therefore V_T &= B_T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B_t^{-1} X | \mathcal{F}_T] \\ &= B_T B_T^{-1} X \\ &= X \end{aligned} \tag{67}$$

2.

$$\begin{aligned} dV_t &= E_t dB_t + B_t dE_t + dE_t dB_t \\ &= (\varphi_t Z_t + \psi_t) dB_t + B_t(\varphi_t dZ_t) + dB_t(\varphi_t dZ_t) \\ &= \varphi_t (Z_t dB_t + B_t dZ_t + dB_t + dZ_t) + \psi_t dB_t \\ &= \varphi_t d(B_t Z_t) + \psi_t dB_t \\ &= \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t \end{aligned} \tag{68}$$

Corollary 1.2.2.1: デリバティブ価格公式

$$\begin{aligned} V_t &= B_t E_t \\ &= B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \tag{69}$$