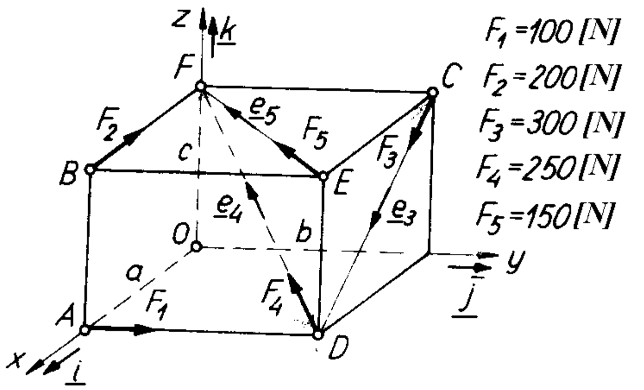
Alapműveletek koncentrált erőkkel

1/a. példa Az F 1.17. ábrán feltüntetett, a = 0,5 [m], b = 1,2 [m] és c = 0,7 [m] oldalú hasábot a bejelölt erők terhelik. A berajzolt koordinátarendszer figyelembevételével ***írjuk fel komponens-alakban az erővektorokat, az erők A, B, C, D, E támadáspontjainak helyvektorait és az E-ből B-be mutató helyvektort!***



F 1.17. ábra

A helyvektorok: $\underline{r}_A = a\,\underline{i} = 0.5\,\underline{i}$ [m]

$\underline{r}_B = a\,\underline{i} + c\underline{k} = 0.5\,\underline{i} + 0.7\underline{k}$ [m]

$\underline{r}_C = b\,\underline{j} + c\underline{k} = 1.2\,\underline{j} + 0.7\underline{k}$ [m]

$\underline{r}_D = a\,\underline{i} + b\underline{j} = 0.5\,\underline{i} + 1.2\underline{j}$ [m]

$\underline{r}_E = a\,\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k} = 0.5\,\underline{i} + 1.2\underline{j} + 0.7\underline{k}$ [m]

$\underline{r}_{EB} = -\,b\underline{j} = -\,1.2\underline{j}$ [m]

Az erővektorokat (1.1) képlet alapján, úgy határozzuk meg, hogy az erőnagyságot megszorozzuk az irányt mutató egységvektorral. Az általános helyzetű egységvektort megkapjuk, ha a hatásvonal két ismert pontja között lévő helyvektort elosztjuk annak nagyságával, azaz a két pont távolságával. A valamelyik tengellyel párhuzamos irányú erő vektor a megfelelő egységvektorral ($\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$) közvetlenül felírható. Ezek alapján az alábbi erővektorok írhatók fel:

$\underline{F}_1 = F_1\,\underline{j} = 100\,\underline{j}$ [N] $\quad F_{1x} = 0 \quad F_{1y} = 100$ [N] $\quad F_{1z} = 0$

$\underline{F}_2 = -F_2\,\underline{i} = -200\,\underline{i}$ [N] $\quad F_{2x} = -200$[N] $\quad F_{2y} = 0 \quad F_{2z} = 0$

$\underline{r}_{CD} = \underline{r}_D - \underline{r}_C = a\,\underline{i} + b\underline{j} - b\,\underline{j} - c\underline{k} = a\,\underline{i} - c\underline{k} = 0.5\,\underline{i} - 0.7\underline{k}$

$$\left|\underline{r}_{CD}\right| = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.7^2} = 0.86$$

$$\underline{e}_3 = \frac{\underline{r}_{CD}}{\left|\underline{r}_{CD}\right|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}\underline{i} - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\underline{k} = \frac{0.5}{0.86}\underline{i} - \frac{0.7}{0.86}\underline{k} = 0.58\underline{i} - 0.814\underline{k}$$

$\underline{F}_3 = F_3 \cdot \underline{e}_3 = 300\cdot(0.58\,\underline{i} - 0{,}814\,\underline{k}) = 174\,\underline{i} - 244\,\underline{k}$ [N]

$$\underline{e}_4 = \frac{\underline{r}_{DF}}{|\underline{r}_{DF}|} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\underline{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\underline{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\underline{k} = -0.338\underline{i} - 0.813\underline{j} + 0.474\underline{k}$$

$\underline{F}_4 = F_4 \cdot \underline{e}_4 = -84.5\ \underline{i} - 203.2\ \underline{j} + 118.5\ \underline{k}$ [N]

$$\underline{e}_5 = \frac{\underline{r}_{EF}}{|\underline{r}_{EF}|} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\underline{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\underline{j} = -0.385\underline{i} - 0.923\underline{j}$$

$\underline{F}_5 = F_5 \cdot \underline{e}_5 = -57.7\ \underline{i} - 138.5\ \underline{j}$ [N]

1./b Határozzuk meg az előző példában szereplő erők vektorösszegét!

A (1.2) képlet szerint :

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{5}\underline{F}_i = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4 + \underline{F}_5 = \left(\sum F_{ix}\right)\underline{i} + \left(\sum F_{iy}\right)\underline{j} + \left(\sum F_{iz}\right)\underline{k} =$$

$= (0 - 200 + 174 - 84.5 - 57.7)\ \underline{i} + (100 + 0 + 0 - 203.2 - 138.5)\underline{j} + (0 + 0 - 244 + 118.5 + 0)\underline{k} =$

$= -168.2\ \underline{i} - 241.7\ \underline{j} - 125.5\ \underline{k}$

1./c. Határozzuk meg az első példában szereplő $\underline{F}_5$ és $\underline{r}_{EB}$ vektorok skaláris szorzatát!

A (1.3) képlet alapján :

$\underline{F}_5 \cdot \underline{r}_{EB} = F_{5x} \cdot r_{EBx} + F_{5y} \cdot r_{EBy} + F_{5z} \cdot r_{EBz} = (-57.7) \cdot 0 + (-138.5\ [N]) \cdot (-1.2\ [m]) + 0 \cdot 0 =$

$= 166.2$ [Nm]

1./d Határozzuk meg az első példában szereplő F_4 erő támadáspontja hekyvektorának és az erő vektorának vektoráliális szorzatát!

A (1.4) képletnek megfelelően:

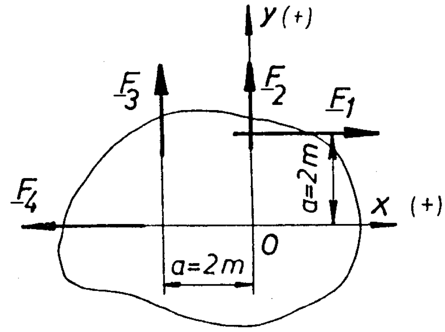
$$\underline{r}_D \times \underline{F}_4 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0.5 & 1.2 & 0 \\ -84.5 & -203.2 & 118.5 \end{vmatrix} =$$

$$= (1.2 \cdot 118.5 - 0)\underline{i} - (0.5 \cdot 118.5 - 0)\underline{j} + (0.5 \cdot (-203.2) - (-84.5) \cdot 1.2)\underline{k} =$$

$142.2\ \underline{i} - 59.25\ \underline{j} - 0.2\ \underline{k}$ [Nm]

Általános síkbeli erőrendszer eredőjének meghatározása

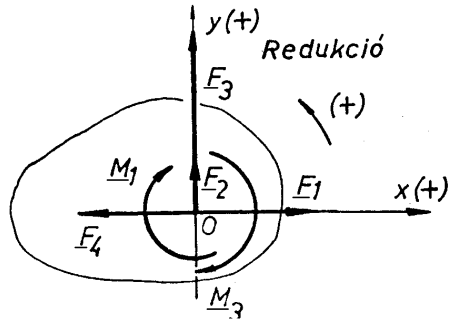
<u>2. példa:</u> ***Határozzuk meg az F 1.18. ábrán látható síkbeli erőrendszereredőjét!***



F 1.18. ábra

Az merev testre ható erők egyenlő nagyságúak, azaz
$|\underline{F}_1| = |\underline{F}_2| = |\underline{F}_3| = |\underline{F}_4| = 10$ [N]

Az erővektorokat helyezzük át a koordinátarendszer "0" pontjába. A redukció eredménye a F 1.19. ábrán látható.

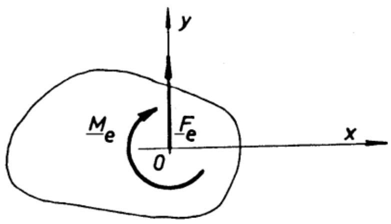


F 1.19. ábra

Így nyerünk <u>egy '0' ponton átmenő hatásvonalú</u> $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, $\underline{F}_3$ és $\underline{F}_4$ <u>erőrendszert</u> és $\underline{M}_1$, $\underline{M}_3$ <u>nyomatékokat.</u> (Az $\underline{F}_2$ erő '0'-ra számított $\underline{M}_2$ nyomatéka és az $\underline{F}_4$ erő '0'-ra számított nyomatéka zérus, mert hatásvonala keresztül megy az origón) Keressük az '0' ponton átmenő erők $\underline{F}_e$ összegét. Először összegezzük az 'x' irányú erőket, ez adja az eredő 'x' irányú összetevőjét /F_{ex}/, majd összegezzük az '*y'* irányú erőket, ez adja az eredő '*y'* irányú összetevőjét /F_{ey}/.

Ezek ismeretében az eredő az alábbiak szerint adódik $|\underline{F}_e| = \sqrt{F_{ex}^2 + F_{ey}^2}$

Példánkban:



$$F_{ex} = \sum_{i=1}^{4} F_{ix} = F_{1x} - F_{4x} = 10 - 10 = 0[N]$$

$$F_{ey} = \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = F_{2y} + F_{3y} = 10 + 10 = 20[N]$$

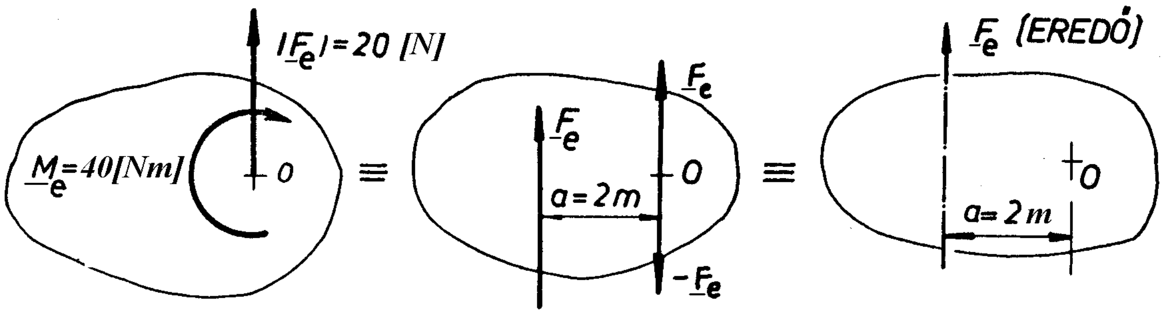
Tehát az $\underline{F}_e$ az 'y' irányában felfelé mutató 20 [N] nagyságú vektor . Az $\underline{M}_e$ vektor az $\underline{M}_1$ és $\underline{M}_3$ összege.

$$M_e = \sum_{i=1}^{4} M_i = -F_1 \cdot a - F_3 \cdot a = -40[Nm]$$

Az $\underline{M}_e$ negatív előjele arra utal, hogy a nyomaték forgatási értelme az óramutató járásával megegyező értelmű. Pozitvnak az óramutató járásával ellentétes forgatási értelmét tekintjük.

Tehát az $\underline{M}_e$ vektor abszolút értéke 40 [Nm], forgatási értelme az óramutató járásával megegyező .

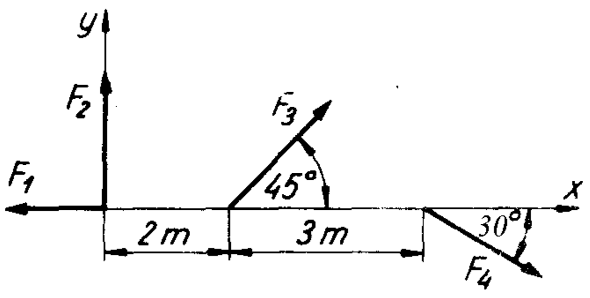
Az $\underline{F}_e$ és $\underline{M}_e$ vektorok összegezhetők (erő és erőpár összegezése) és így nyerjük az alábbi



F 1.20. ábra

F1.20. ábrán látható erőrendszerrel egyenértékű legegyszerűbb erőrendszert, vagyis az $\underline{F}_e$ hatásvonalával párhuzamosan "a" távolsággal eltolt hatásvonalú egyetlen $\underline{F}_e$ erőt . Ez lesz az erőrendszer EREDŐJE, vagyis a vele egyenértékű legegyszerűbb erőrendszer.

<u>3.példa</u> ***Határozzuk meg a F1.21. ábrán feltüntetett erőrendszer eredőjét!***



Adatok:

$F_1 = 100$ [N];

$F_2 = 200$ [N];

$F_3 = 250$ [N];

$F_4 = 150$ [N].

F 1.21. ábra

A számításhoz felhasználjuk az x, y koordinátarendszert.Az erőket ‘x’ és ‘y’ irányú összetevőire bonjuk és a (1.2) képletnek megfelelően a komponenseket összegezzük.

Az eredő komponenseit :

$R_x = \sum F_{ix} = - F_1 + F_3 \cos 45^0 + F_4 \cos 30^0 = -100 + 250 \bullet 0{,}707 + 150 \bullet 0{,}866 = 206{,}7$ [N]

$R_y = \sum F_{iy} = F_2 + F_3 \sin 45^0 - F_4 \bullet \sin 30^0 = 200 + 250 \bullet 0{,}707 - 150 \bullet 0{,}5 = 301.8$[N]

Az eredő nagysága:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{206.7^2 + 301.8^2} = 365.8 \text{ [N]}$$

Az eredő az “x” tengellyel bezárt szöge:

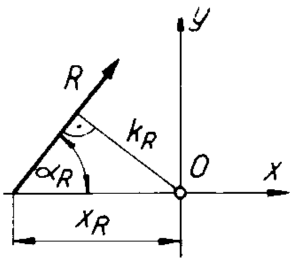
$$\mathrm{tg}\,\alpha_R = \frac{|R_y|}{|R_x|} = \frac{301.8}{206.7} = 1.46 \qquad \alpha_R = 55^{\circ}\ 35'$$

Az eredő hatásvonalának távolsága az origótól:

$$k_R = \frac{\sum M_{0i}}{R} = \frac{\sum x_i \cdot F_{iy}}{R} = \frac{2 \cdot F_3 \cdot \sin 45° - 5 \cdot F_4 \cdot \sin 30°}{R} = \frac{2 \cdot 250 \cdot 0.707 - 5 \cdot 150 \cdot 0.5}{365.8} =$$

$$= \frac{-21.5}{365.8} = -0.0587 [\mathrm{m}]$$

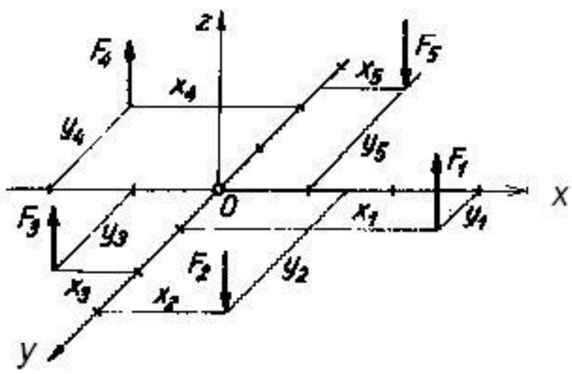
Az eredő hatásvonala az “x” tengelyt az origótól x_R távolságban metszi:



$$x_R = \frac{\sum M_{0i}}{R_y} = \frac{-21.5}{301.8} = -0.071 \text{ [m]}$$

Párhuzamos térbeli erőrendszer eredője

<u>4.példa</u> ***Határozzuk meg a F 1.22. ábrán látható és a következő adatokkal megadott párhuzamos térbeli erőrendszer eredőjét!***



F 1.22 ábra

F_1 = 100 [N] , x_l = 30 [cm]; y_l = 10 [cm];

F_2 = -150 [N]; x_2 = 15 [cm]; y_2 = 30 [cm];

F_3 = 200 [N]; x_3 = -10 [cm]; y_3 = 20 [cm];

F_4 = 250 [N], x_4 = -20 [cm]; y_4 = - 20 [cm];

F_5 = -300 [N]; x_5 = 10 [cm]; y_5 = - 25 [cm];.

Az eredő erő nagysága:

R= ΣF_i= $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$ =100 - 150 + 200 + 250 - 300= 100 [N]

Az eredő hatásvonalának döféspontkoordinátái a (1.11) képletek felhasználásával:

$$x_R = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{R} \qquad y_R = \frac{\sum y_i \cdot F_i}{R}$$

$x_l F_1$ = 30 • 100 = 3000 [Ncm] — $y_l F_1$ = 10 • 100= 1000 [Ncm]

$x_2 F_2$ = 15 • (-150) = - 2250 [Ncm] — $y_2 F_2$ = 30• (-150)= - 4500 [Ncm]

$x_3 F_3$ = - 10 • 200 = - 2000 [Ncm] — y3 F_3 = 20 • 200 = 4000 [Ncm]

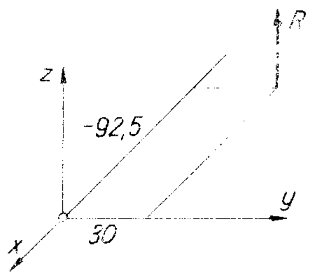
$x_4 F_4$ = - 20 • 250 = - 5000 [Ncm] — $y_4 F_4$ = - 20 • 250 = - 5000 [Ncm]

$x_5 F_5$ = 10 • (-300) = - 3000 [Ncm] — $y_5 F_5$ = - 25 • (-300) = 7500 [Ncm]

$$\sum x_i F_i = -9250[\mathrm{Ncm}] \qquad \sum y_i F_i = 3000[\mathrm{Ncm}]$$

$$x_R = \frac{-9250}{100} = -92.5[\mathrm{cm}] \qquad y_R = \frac{3000}{100} = 30[\mathrm{cm}]$$

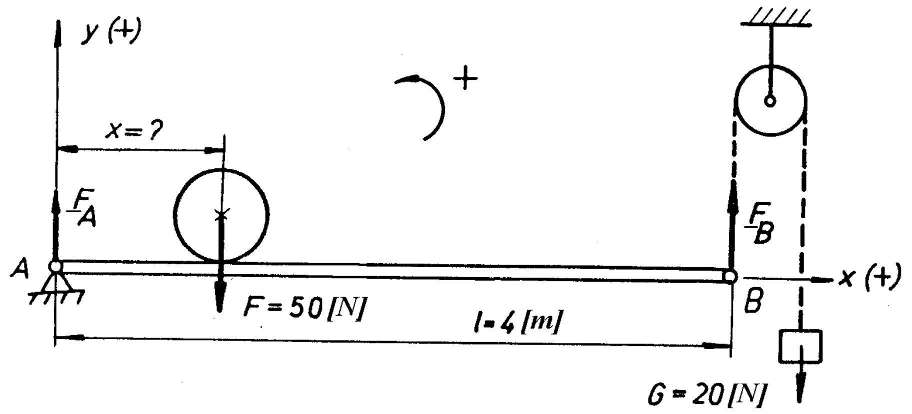
Az eredményt az F1.23. ábra szemlélteti.



F 1.23 ábra

Általános síkbeli erőrendszer egyensúlya

5. példa:



F 1.24. ábra

Az ábrán látható 1 = 4 [m] hosszú vizszintes egyenes rúd. 'A' vége helytálló csuklóhoz kapcsolódik 'B' végéhez pedig G = 20 [N] súllyal terhelt függőleges fonál csatlakozik. A rúdon 'F' = 50 [N] súlyú henger mozoghat.

Kérdés, hogy a henger milyen helyzetében /x = ?/ marad az 'AB' rúd egyensúlyban? Mekkora az 'A' csuklóban ébredő F_A reakcióerő nagysága?

Egyensúly esetén a (1.16) és (1.17) képletek szerint $\underline{F}_e = 0$ és $\underline{M}_e = 0$. Az $\underline{F}_e = 0$ feltétel azt jelenti, hogy az 'AB' rúdra, mint merev testre ható erők 'x' és 'y' koordináta irányú összetevői is zérusok. Így az egyensúlyt kifejező, egymástól független skaláris STATIKAI EGYENSULYI EGYENLETEK általános síkbeli erőrendszer esetén az alábbiak lesznek:

$F_{ex} = 0 = \Sigma F_{ix}$

$F_{ey} = 0 = \Sigma F_{iy}$

$M_e = 0 = \Sigma M_i$

Példánkra alkalmazva az egyensulyi egyenleteket /az erők nyomatékát az "A" pontra írjuk fel/

$$F_{ex} = 0 = \sum F_{ix} = 0 \quad (1) \qquad F_{ey} = 0 = \sum F_{iy} = 0 = F_A - F + F_B \quad (2)$$

$$M_e = 0 = \sum M_{iA} = 0 = -F \cdot x + F_B \cdot l \quad (3) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_B \cdot l}{F} = \frac{20 \cdot 4}{50} = \frac{80}{50} = 1.6[m]$$

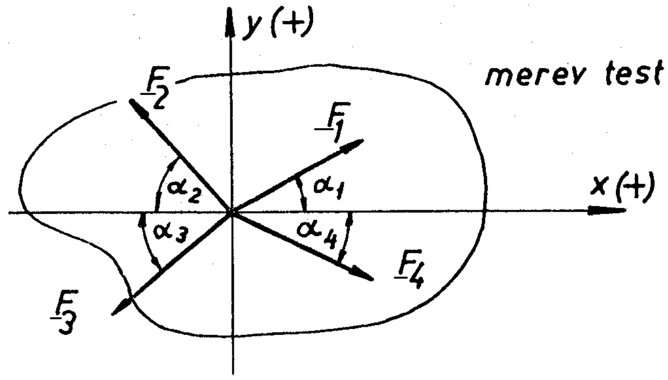
A (2) egyenletből: $F_A = F - F_B = 50 - 20 = 30$ [N]

Közös ponton átmenő síkbeli erőrendszer egyensulya

<u>6. példa:</u>

Határozzuk meg az F 1.25. ábrán látható, négy erőből álló, közös pontban metsződő síkbeli erőrendszer eredőjé!

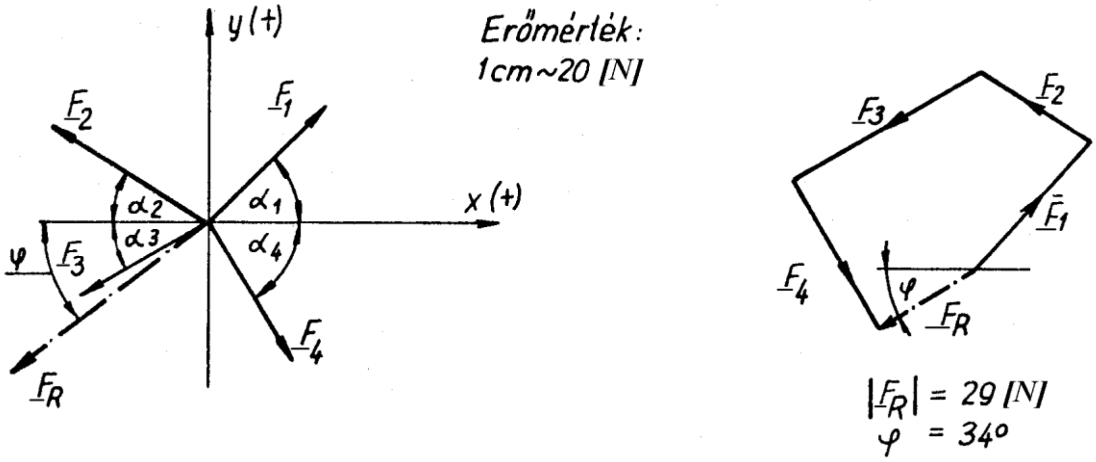
Az erők nagyságát és irányát kijelölő szögeket az táblázatban foglaltuk össze.



$F_1 = 50$ [N]	$\alpha_1 = 45^0$
$F_2 = 35$ [N]	$\alpha_2 = 30^0$
$F_3 = 60$ [N]	$\alpha_3 = 30^0$
$F_4 = 45$ [N]	$\alpha_4 = 60^0$

F 1.25 ábra

A vizsgált erőrendszer eredője a négy vektor összege lesz, amit az alábbi F1.26.ábrán.láthatóan szerkesztéssel is meghatároztunk.



F 1.26 ábra

A feladatot számítással is megoldottuk. Az erőket ‘x’ és ‘y’ irányú összetevőkre bontjuk.

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1 = 50 \cos 45^0 = 50 \cdot 0.7071 = 35.4$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = 35 \cos 30^0 = 35 \cdot 0.866 = -30.3$$

$$F_{3x} = F_3 \cos \alpha_3 = 60 \cos 30^0 = 60 \cdot 0.866 = -52$$

$$F_{4x} = F_4 \cos \alpha_4 = 45 \cos 60^0 = 45 \cdot 0.5 = 22.5$$

$$F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1 = 50 \sin 45^0 = 50 \cdot 0.7071 = 35.4$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 35 \sin 30^0 = 35 \cdot 0.5 = 17.5$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3 = 60 \sin 30^0 = 60 \cdot 0.5 = -30$$

$$F_{4y} = F_4 \sin \alpha_4 = 45 \sin 60^0 = 45 \cdot 0.866 = -39$$

A komponenseket a (1.2) képlet szerint összegezzük.

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{4} F_{ix} = 35.4 - 30.3 - 52 + 22.5 = -24.4 [N]$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = 35.4 + 17.5 - 30 - 39 = -16.1 [N]$$

$$|\underline{F_R}| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 29.2 [N]$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{-16.1}{-24.4} = 0.66 \quad \Rightarrow \varphi = 33^0 \ 25'$$

Látható a számítás eredményeitől a szerkesztés eredményei kissé eltérnek. Ez a szerkesztésből adódó pontatlanságok miatt van.

7.példa

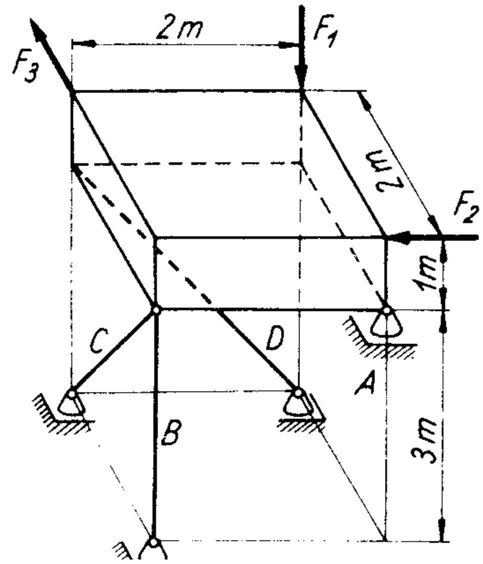
Az F1.27. ábra derékszögű hasáb alakú testet mutat, amelyet térbeli csuklóval és három rúddal rögzítettünk. ***Határozzuk meg az F_1, F_2, F_3 aktív erők hatására ébredő reakcióerőket!***

Adatok:

$F_1 = 200$ [N] ;

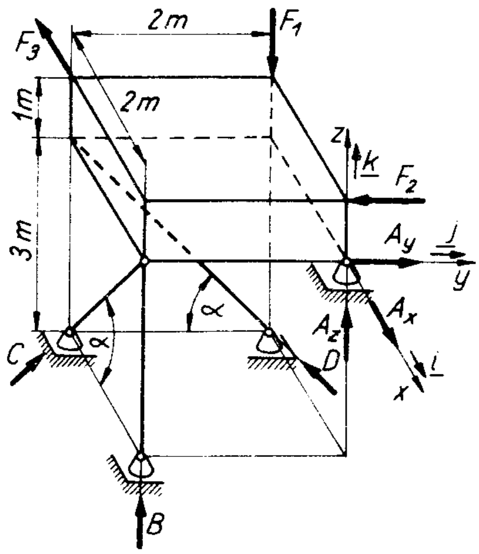
$F_2 = 500$ [N];

$F_3 = 300$ [N].



F 1.27 ábra

Az F 1.28. ábrán láthatóan megválasztottuk a derékszögű koordinátarendszert és bejelöltük a reakcióerők pozitív irányát.



F1.28. ábra

Először meghatározzuk az α szöget:

$tg\,\alpha = \frac{3}{2} = 1.5$ $\qquad \alpha = 56°\ 20'$

majd az erővektorokat:

$\underline{F_1} = -F_1 \cdot \underline{k} = -200\,\underline{k}$ [N]

$\underline{A} = A_x\,\underline{i} + A_y\,\underline{j} + A_z\,\underline{k}$;

$\underline{F_2} = -F_2 \cdot \underline{j} = -500\,\underline{j}$ [N]

$\underline{B} = B \cdot \underline{k}$

$\underline{F_3} = -F_3 \cdot \underline{i} = -300\,\underline{i}$ [N];

$\underline{C} = C\cos\alpha\,\underline{i} + C\sin\alpha\,\underline{k} = 0,554\,C\,\underline{i} + 0,832\,C\,\underline{k}$;

$\underline{D} = -D\cos\alpha\,\underline{j} + D\sin\alpha\,\underline{k} = -0,554\,D\,\underline{j} + 0,832\,D\,\underline{k}$.

Ezután írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket:

(1) $\sum X_i = 0$ (2) $\sum Y_i = 0$ (3) $\sum Z_i = 0$

(4) $\sum M_{ix} = 0$ (5) $\sum M_{iy} = 0$ (6) $\sum M_{iz} = 0$

(1) $-300 + A_x + 0.554\,C = 0$

(2) $-500 + Ay - 0.554\,D = 0$

(3) $-200 + A_z + B + 0.832\ C + 0.832\ D = 0$

(4) $1\cdot F_2 - 2\cdot B - 2\cdot C \sin\alpha - 3\cdot D\cos\alpha = 500 - 2\cdot B - 1.664\ C - 1.664\ D = 0$

(5) $-2\cdot F_1 - 1\cdot F_3 + 2\ D\sin\alpha - 2\cdot C\sin\alpha + 3\cdot C\cdot\cos\alpha =$

$-400 - 300 + 1.664\ D - 1.664\ C + 1.664\ C = -700 + 1.664\ D = 0$

(6) $-2\cdot F_3 + 2\cdot C\cdot\cos\alpha + 2\cdot D\cdot\cos\alpha = -600 + 1.109\ C + 1{,}109\ D = 0.$

Az egyenletrendszer megoldása:

(5)-ből: $D = \dfrac{700}{1.664} = 421$ [N] (6)-ból: $C = \dfrac{600}{1.109} - D = 541 - 421 = 120$ [N]

(4)-ből: $B = \dfrac{500 - 1.664\cdot C - 1.664\cdot D}{2} = \dfrac{500 - 1.664\cdot 120 - 1.664\cdot 421}{2} = -200$ [N]

(1)-ből: $A_x = 300 - 0.554\cdot C = 300 - 0.554 \bullet 120 = 233$ [N];

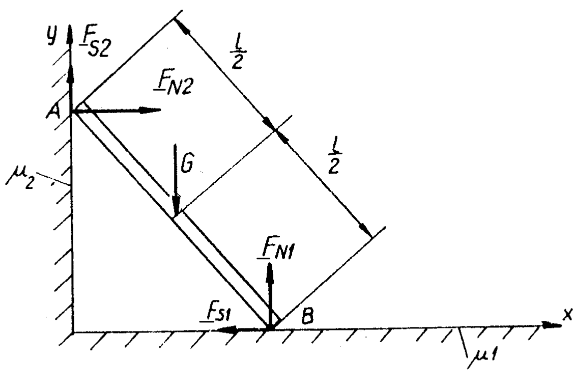
(2)-ből: $A_y = 500 + 0.554\ D = 500 + 0.554 \bullet 421 = 733$ [N];

(3)-ból: $A_z = 200 - B - 0.832\cdot C - 0.832\cdot D = 300 - 200 - 0.832\cdot 541 = -351$ [N];

$A = \sqrt{A_x^2 + B_y^2 + C_z^2} = \sqrt{233^2 + 733^2 + 351^2} = 845$ [N];

8.példa Az ‘AB’= l hosszúságú, homogén, ‘G” súlyú rúd a függőleges falnak és a vízszintes padlónak támaszkodik. A nyugvásbeli súrlódás értéke a padlón μ_1, a falon μ_2. A tapasztalat azt mutatja, hogy ha a rudnak a padlóval bezárt ‘α’ szöge egy meghatározott ‘α_o’ érték alá csökken, a rúd lecsúszik, nem marad egyensulyban.

Határozzuk meg az egyensúly határhelyzetét jellemző ' α_o’ szög értékét!



F 1.29. ábra

A ‘G’ súlyerő hatására a rúd csak lecsúszhat, ezért az ébredő F_{S1} és F_{S2} surlódóerők iránya csak az F 1.29 ábrán berajzolt irányú lehet. A surlódóerők nagysága, mivel az egyensúly HATÁRHELYZET-éről van szó:

$F_{S1} = \mu_1\cdot F_{N1}$

$F_{S2} = \mu_2\cdot F_{N2}$

A STATIKAI EGYENSÚLYI EGYENLETEK:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{N2} - \mu_1 \cdot F_{N1} \qquad (1)$$

$$\sum F_{yi} = 0 = F_{N1} + \mu_2 \cdot F_{N2} - G \qquad (2)$$

nyomaték "B" pontra

$$\sum_B M_i = 0 = G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha_0 - F_{N2} \cdot l \cdot \sin\alpha_0 - \mu_2 \cdot F_{N2} \cdot l \cdot \cos\alpha_0 \qquad (3)$$

A (3) egyenlet rendezésével és átalakitásával,

$$G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha_0 = F_{N2} \cdot l \cdot \sin\alpha_0 + \mu_2 \cdot F_{N2} \cdot l \cdot \cos\alpha_0$$

$G = 2 \cdot F_{N2} \cdot tg\, \alpha_o + 2 \cdot \mu_2 \cdot F_{N2}$ (4)

A (1)- ből kifejezhetjük F_{N1}-et

$$F_{N1} = \frac{F_{N2}}{\mu_1}$$

a (2) egyenletbe behelyettesítve és “G”-re rendezve kapjuk

$$G = \frac{F_{N2}}{\mu_1} + \mu_2 \cdot F_{N2} \qquad (5)$$

A (4) = (5) és F_{N2}-vel egyszerűsítve kapjuk

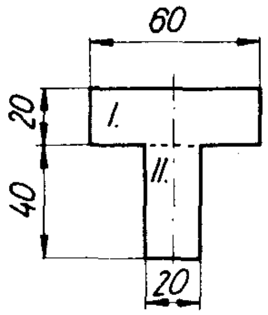
$$\frac{1}{\mu_1} + \mu_2 - 2 \cdot tg\,\alpha_0 - 2 \cdot \mu_2 = 0$$

$$tg\,\alpha_0 = \frac{1 - \mu_1 \cdot \mu_2}{2 \cdot \mu_1}$$

Egyensúly van ha a rúd α hajlásszöge $\geq \alpha_o$

Súlypont számítás

9.példa ***Határozzuk meg az F 1.30. ábrán vázolt “T” alakú síkidom súlypontját!***



Az idomot két téglalapra bonthatjuk, amelyeknek a területe:

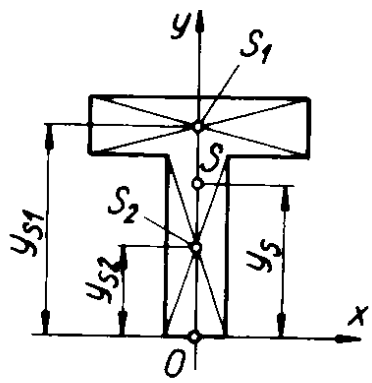
$A_1 = 20 \cdot 60 = 1200\ mm^2$;

$A_2 = 20 \cdot 40 = 800\ mm^2$.

A keresett súlypont az idom szimmetriatengelyén (a ‘y’ tengelyen) helyezkedik el. $\Rightarrow x_S = 0$

F 1.30 ábra

A számítást az x, y koordinátarendszer felhasználásával végezhetjük el

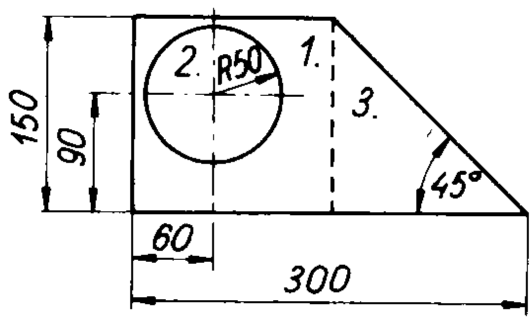


$y_{S1} = 40 + 10 = 50$ mm;

$y_{S2} = 20 = 20$ mm;

$$y_S = \frac{\sum y_{Si} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{S1} \cdot A_1 + y_{S2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{50 \cdot 1200 + 20 \cdot 800}{2000} = 38$$

10 példa ***Határozzuk meg az F 1.31. ábrán vázolt síkidom súlypontját***!



F 1.31. ábra

A síkidom érdekessége, hogy a körön belül lévő terület nem tartozik a tartományhoz. Bontsuk fel e tartományt három részre, a teljes négyzetre (1), a kör belsejére (2) és a háromszögre (3). A kör területét negativ előjellel kell számítani, így kompenzáljuk a teljes négyzet figyelembevételével keletkező többletet. A negatív előjel azt jelenti, hogy ezen a területen a többivel ellentétes irányú megoszló erő hat. Ez az erő és a teljes négyzet ugyanezen pozitív területrészén ható erő egyensúlyi erőrendszert alkot. Ez megfelel a valóságnak: s kör belseje nem tartozik a tartományhoz, benne erő nem hat.

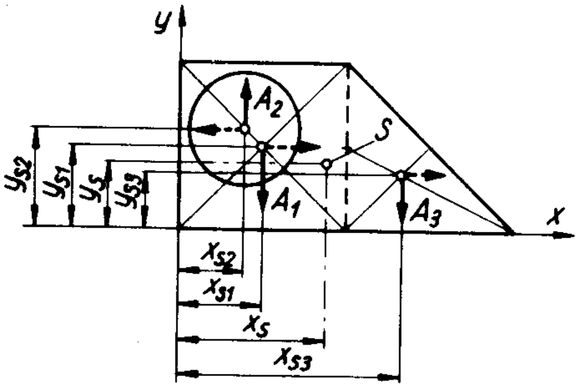
A részterületek:

$A_1 = 150^2 = 22500\ mm^2$;

$A_2 = -50^2\ \Pi = -7854\ mm^2$;

$A_3 = 0.5\ A_1 = 11250\ mm^2$

A vázolt koordinátarendszerben a részidomok sulypontjainak koordinátái:



$x_{S1} = 75$ mm;

$x_{S2} = 60$ mm;

$x_{S3} = 150 + 50 = 200$ mm;

$y_{S1} = 75$ mm;

$y_{S2} = 90$ mm;

$$y_{S3} = \frac{150}{3} = 50\ \text{mm}$$

A sulypont koordinátái:

$$x_S = \frac{\sum x_{Si} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{x_{S1} \cdot A_1 + x_{S2} \cdot A_2 + x_{S3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{75 \cdot 22500 - 60 \cdot 7854 + 200 \cdot 11250}{22500 - 7854 + 11250} = 134[\text{mm}]$$

$$y_S = \frac{\sum y_{Si} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{S1} \cdot A_1 + y_{S2} \cdot A_2 + y_{S3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{75 \cdot 22500 - 90 \cdot 7854 + 50 \cdot 11250}{22500 - 7854 + 11250} = 59.6[\text{mm}]$$