A Fourier transzformáció célja

- Áttranszformálni a függvényt IDŐ tartományból FREKVENCIA tartományba;

- Frekvencia tartományban sokszor egyszerűbb eszközökkel oldható meg egy mérnöki számítás, illetve könnyebben értelmezhető az adott feladat.

Lineáris rendszerek tulajdonságai

- Linearitás:

$$\left.\begin{matrix} f(t) \\ g(t) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \boxed{\text{Lineáris rendszer}} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \tilde{f}(t) \\ \tilde{g}(t) \end{matrix}\right.$$

$$\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t) \longrightarrow \boxed{\text{Lineáris rendszer}} \longrightarrow \lambda \cdot \tilde{f}(t) + \mu \cdot \tilde{g}(t)$$

- Lineáris rendszerek sajátfüggvényei:

$$\left.\begin{matrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ e^{j\omega t} \end{matrix}\right\} \longrightarrow \boxed{\text{Lineáris rendszer}} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} a(\omega) \cdot \cos \omega t \\ b(\omega) \cdot \sin \omega t \\ c(\omega) \cdot e^{j\omega t} \end{matrix}\right.$$

$$a(\omega), b(\omega) \in R,\ c(\omega) \in C$$

Fourier transzformáció fajtái

A jel típusa alapján megkülönböztetünk:

- Folytonos és periodikus: Fourier-sor
- Folytonos és nem periodikus: Fourier-transzformáció vagy Fourier-integrál
- Diszkrét és periodikus: Diszkrét jel Fourier sorfejtése
- Diszkrét és nem periodikus: Diszkrét Fourier-transz-formáció (DFT) vagy z-transzformáció

Fourier sorfejtés

- Periodikus, folytonos jelekre alkalmazhatjuk;
- Periodikus jelek spektruma harmonikusakat tartalmaz a spektrumkép vonalas;
- Az alapharmonikus (f_0) a periodikus jel periódus idejének reciproka: $f_0=1/T$
- A spektrum csak az alapharmonikust és annak egész számú többszöröseinek megfelelő frekvenciákat (felharmonikusait) tartalmazza: $f_0,\ 2f_0,\ 3f_0,\ \ldots$

Ortogonalitási relációk

$$\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\cos(l\omega_0 t)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\cos(k-l)\omega_0 t dt + \int_0^T \frac{1}{2}\cos(k+l)\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2, & \text{ha } k = l \\ 0, & \text{ha } k \neq l \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\cos(k-l)\omega_0 t dt - \int_0^T \frac{1}{2}\cos(k+l)\omega_0 t dt = \begin{cases} T/2, & \text{ha } k = l \\ 0, & \text{ha } k \neq l \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega_0 t)\cos(l\omega_0 t)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\sin(k-l)\omega_0 t dt + \int_0^T \frac{1}{2}\sin(k+l)\omega_0 t dt = 0$$

$$\int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{j(k-l)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & \text{ha } k = l \\ 0, & \text{ha } k \neq l \end{cases}$$

$$\boxed{T = 2\pi/\omega_0}$$

Fourier sorfejtés

$x(t)$ folytonos és T-re ($T=2\pi/\omega_0$) periodikus ($x(t+T)=x(t)$) jel

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)}$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt; \quad a_{k>0} = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt; \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt.$$

Felhasználva, hogy $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\omega t - \mathrm{arctg}\left(b/a\right)\right)$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)}$$

ahol $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ és $\varphi_k = -\mathrm{arctg}\left(b_k / a_k\right)$

Fourier sor komplex alakja

Komplex együtthatókat is megengedve:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}}$$

ahol $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt}_{a_k/2} - \underbrace{\frac{j}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt}_{jb_k/2}$$

Euler: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}), \text{ha } k < 0; \\ a_k, \quad \text{ha } k = 0; \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \quad \text{ha } k > 0. \end{cases} \qquad c_{-k} = c_k^*$$

Tulajdonságok

- Páros függvény Fourier-sora csak páros (konstans + koszinuszos) tagokat tartalmaz:

$$x(-t) = x(t) \quad \Rightarrow \quad b_k = 0$$

- Páratlan függvény Fourier-sora csak páratlan (szinuszos) tagokat tartalmaz:

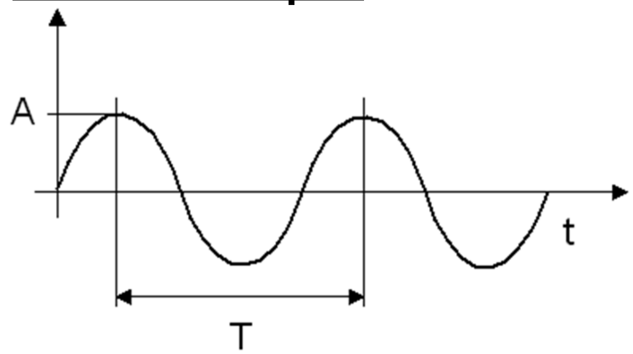
$$x(-t) = -x(t) \quad \Rightarrow \quad a_k = 0$$

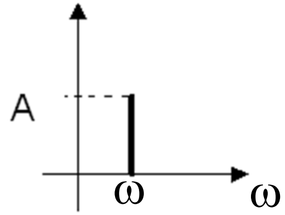
- Szimmetrikus félperiódusú függvény Fourier-sora csak páratlan felharmonikusokat tartalmaz:

$$x(t + T/2) = -x(t) \quad \Rightarrow \quad a_{2k}, b_{2k} = 0$$

Legfontosabb jelek és spektruma

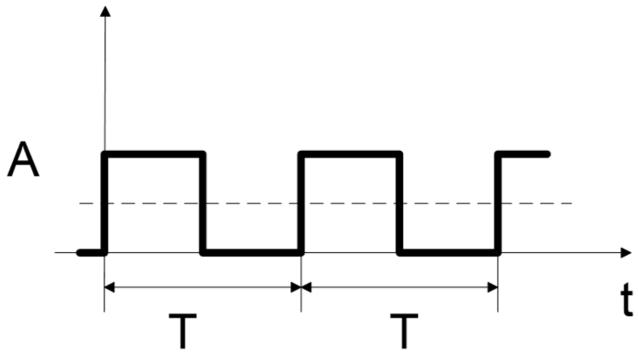
Szinuszos jel:

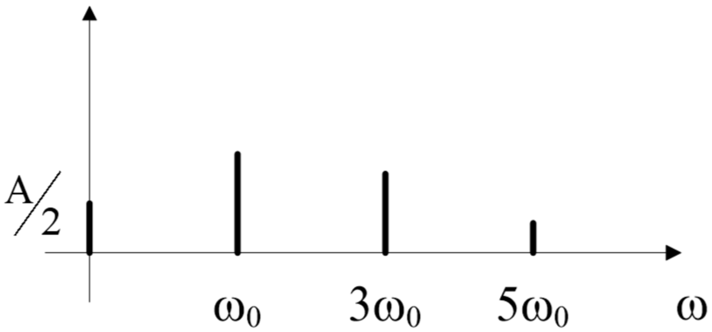




$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Négyszög jel:





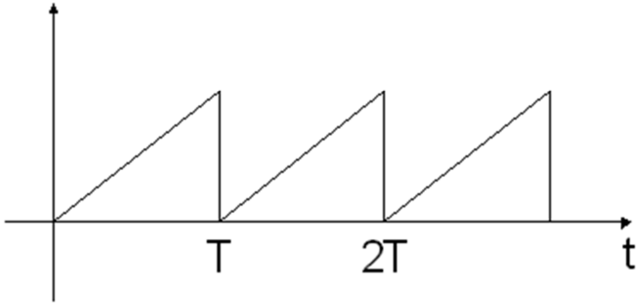
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

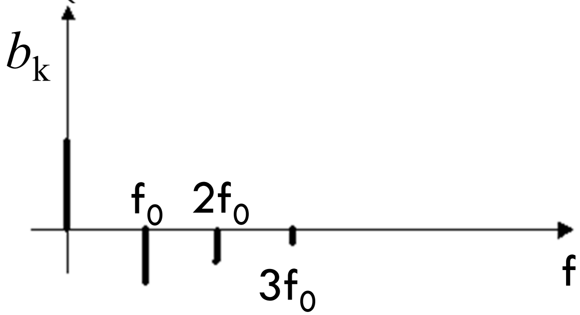
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right)$$

Legfontosabb jelek és spektruma

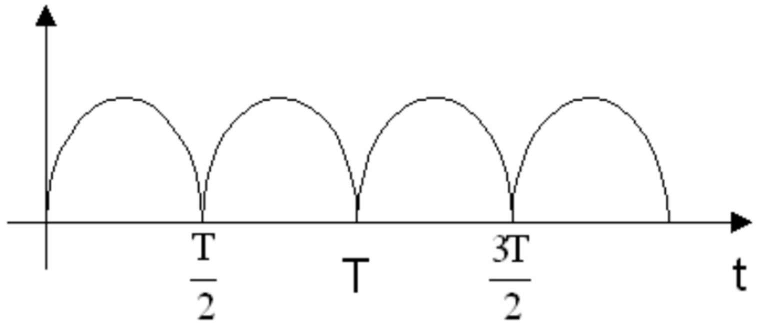
Fűrészjel:

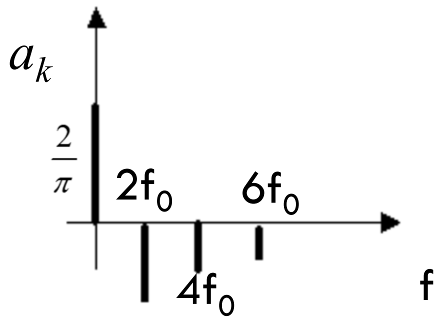
$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \dots\right)$$





Szinuszos jel kétutas egyenírányítás után:





$$x(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega_0 t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega_0 t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega_0 t - \dots\right)$$

Összetett jel teljesítménye

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [a_1\cos(2\pi f_1 t) + a_2\cos(2\pi f_2 t)]^2\, dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T a_1^2\cos^2(2\pi f_1 t)dt}_{a_1^2/2} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T 2a_1a_2\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)dt}_{0} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T a_2^2\cos^2(2\pi f_2 t)dt}_{a_2^2/2} = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2}$$

Általában:

$$x(t) = a_0 + \sum_i a_i \cos(2\pi f_i t) + \sum_k b_k \sin(2\pi f_k t)$$

$$\overline{P} = a_0^2 + \sum_i \frac{a_i^2}{2} + \sum_k \frac{b_k^2}{2} \qquad U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_i a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_k b_k^2}$$

Különböző frekvenciájú jelkomponensek **teljesítményben** összegződnek

Fourier-transzformált

Ha $x(t)$ folytonos, aperiodikus és abszolút integrálható függvény, vagyis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

ahol

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Az $X(\omega)$ függvényt $x(t)$ Fourier-transzformáltjának nevezzük.

(A Fourier-sorfejtésből $T \rightarrow \infty$ és $\omega_0 \rightarrow 0$ határátmenettel és a $k\omega_0 = \omega$ helyettesítéssel vezethető le.)

Fourier-transzformált

Legyen $x_T(t)$ T-re periodikus függvény:

$$x_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Delta\omega t}, \quad \text{ahol} \quad X_k = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt$$

$$\left.\begin{array}{l} T = 2\pi/\Delta\omega \to \infty, \\ \Delta\omega \to 0, \\ \omega = \lim\limits_{\Delta\omega\to 0} k\Delta\omega \end{array}\right\} \quad x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t) = \lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Delta\omega t}\frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

ahol

$$X(\omega) = \lim_{\Delta\omega\to 0} X_k = \lim_{\substack{\Delta\omega\to 0 \\ T\to\infty}} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fourier-transzformált

Ha körfrekvencia helyett frekvenciát használunk, vagyis az $\omega = 2\pi f$ helyettesítéssel az oda-vissza transzformáció szimmetrikussá válik:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \qquad \text{és} \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df,$$

A Fourier-spektrum tulajdonságai

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad X(-\omega) = X^*(\omega)$$

$X(\omega)$ valós része páros: $\mathrm{Re}[X(-\omega)] = \mathrm{Re}[X(\omega)]$

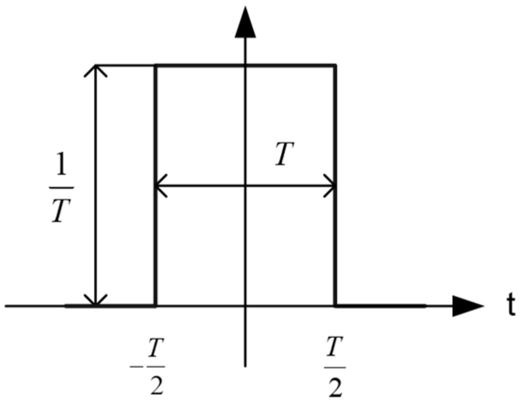
$X(\omega)$ képzetes része páratlan: $\mathrm{Im}[X(-\omega)] = -\mathrm{Im}[X(\omega)]$

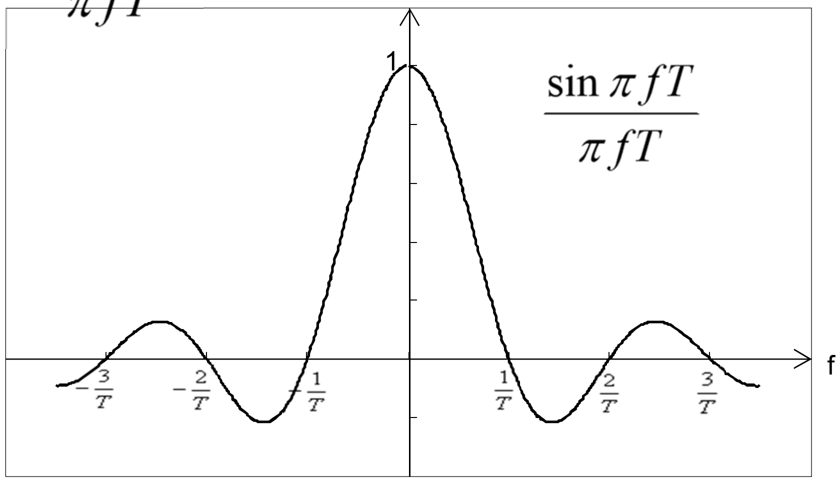
- $x(-t) = x(t) \quad \Rightarrow \quad X(-\omega) = X(\omega)$
  Páros függvények spektruma páros és tiszta valós
- $x(-t) = -x(t) \quad \Rightarrow \quad X(-\omega) = -X(\omega)$
  Páratlan függvények spektruma páratlan és tiszta képzetes

Négyszögimpulzus Fourier-transzformáltja

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft}\,dt = \frac{1}{T}\,\frac{e^{-j\pi fT}-e^{j\pi fT}}{-j2\pi f} = \frac{-2j\sin\pi fT}{-j2\pi fT} = \frac{\sin\pi fT}{\pi fT}$$

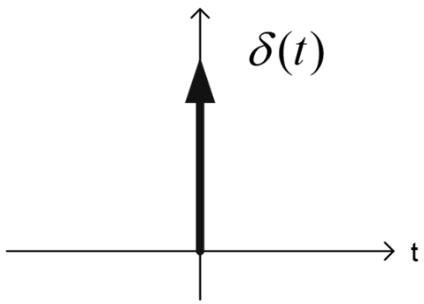
$\frac{1}{T}\mathrm{rect}(t/T)$

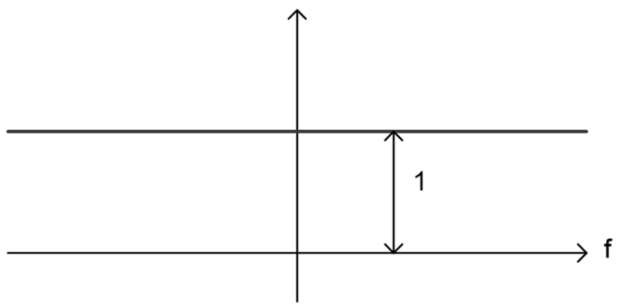




Ha $T \to 0, \quad \frac{1}{T}\mathrm{rect}(t/T) \to \delta(t)$

Az impulzus szélesség és a sávszélesség fordítottan arányosak $\quad B \propto \frac{1}{T}$





Hálózat jellemző függvények

időtartomány: $\delta(t) \longrightarrow$ **Lineáris rendszer** $\longrightarrow h(t)$ súlyfüggvény

frekvencia-tartomány: 1 $\qquad H(\omega)$ frekvencia transzfer függvény

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \qquad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

időtartomány: $x(t) \longrightarrow$ **Lineáris rendszer** $h(t), \quad H(\omega)$ $\longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

frekvencia-tartomány: $X(\omega)$ $\qquad Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Átviteli függvények

- Frekvencia transzfer függvény: $H(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$
- Amplitúdó karakterisztika: $A(\omega) = |H(\omega)|$
  - erősítés karakterisztika $A_{dB}(\omega) = 20\lg A(\omega) = 10\lg |H(\omega)|^2$
  - csillapítás karakterisztika $a_{dB}(\omega) = 20\lg \dfrac{1}{A(\omega)} = -A_{dB}(\omega)$
- Fázis karakterisztika: $\varphi(\omega) = \mathrm{arc}H(\omega) = \arctan \dfrac{\mathrm{Im}\,H(\omega)}{\mathrm{Re}\,H(\omega)}$ [rad]
  - fázisfutási idő $\tau_{\mathrm{f}}(\omega) = \dfrac{\varphi(\omega)}{\omega}$
  - csoportfutási idő $\tau_{\mathrm{g}}(\omega) = \dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$
- Torzítás mentes átvitel: $A(\omega) = const,\ \tau(\omega) = const$

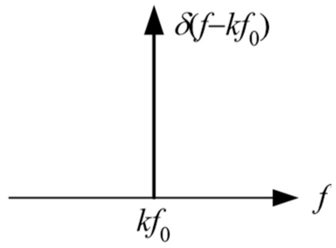
Fourier-transzformált tulajdonságai

$$\mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Derivált: $\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} x(t)\right] = j\omega \mathcal{F}[x(t)]$
- Integrál: $\mathcal{F}\left[\int x(t)dt\right] = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[x(t)]$
- Eltolás: $\mathcal{F}[x(t-\tau)] = e^{-j\omega\tau}\ \mathcal{F}[x(t)]$ $\qquad \mathcal{F}^{-1}[X(\omega-\omega_0)] = e^{j\omega_0 t}\ \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$
- Konvolució: $\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = \mathcal{F}[x(t)] \cdot \mathcal{F}[y(t)]$ $\qquad x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$
- Inverz konvolució: $\mathcal{F}[x(t) \cdot y(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[y(t)]$

Periodikus jel spektruma

- Eltolt Dirac-impulzus inverz Fourier-transzformáltja:

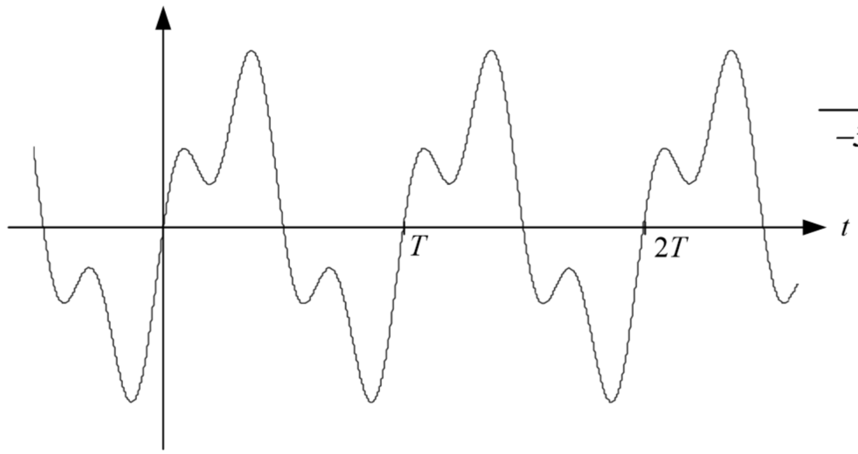


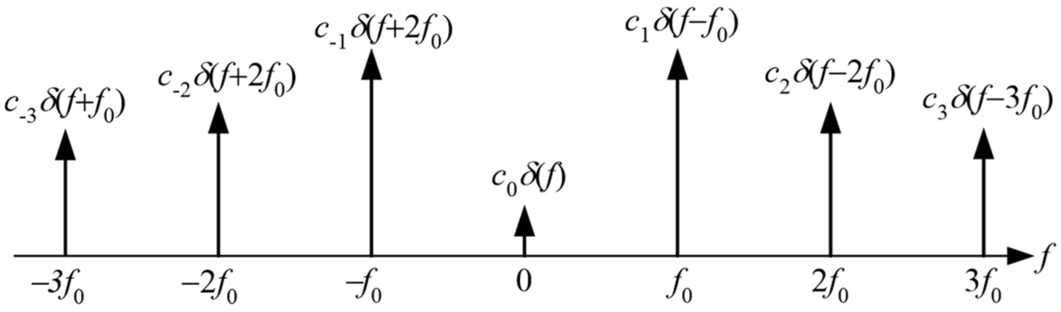
$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f-kf_0)] = e^{j2\pi kf_0 t}\,\underbrace{\mathcal{F}^{-1}[\delta(f)]}_{1} = e^{j2\pi kf_0 t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-kf_0)e^{j2\pi f t}df = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)e^{j2\pi(f+kf_0)t}df = e^{j2\pi kf_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)e^{j2\pi f t}df$$

- Periodikus jel spektruma:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kf_0 t}$$





$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f-kf_0)$$

Periodikus jel spektruma fésűs

Energia és teljesítmény spektrum

- Energia spektrum: $E_x(f) = \left|X(f)\right|^2 = X(f)\cdot X^*(f)$

  Az abszolút integrálható $x(t)$ jel teljes energiája (Parseval-tétel):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df\right]}_{x(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt\right]}_{X^*(f)}df = \int_{-\infty}^{\infty} E_x(f)df$$

- Spektrális sűrűség (véletlen jelekre)

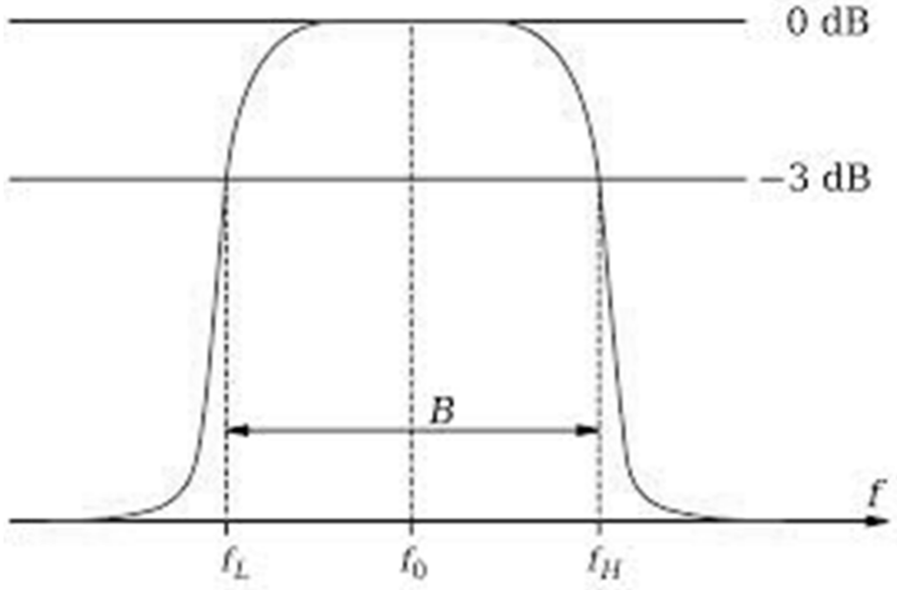
  A jelteljesítmény frekvencia szerinti eloszlása

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{M}\left[\frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right)\cdot\left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{j2\pi ft}dt\right)\right] \qquad S_y(f) = \left|H(f)\right|^2 S_x(f)$$

  A véletlen jel átlagteljesítménye: $\overline{P} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df$

□ Sávszélesség

A sávszélesség az a frekvencia-tartomány, amelyben az áramkör használható, vagy az adott jel még jelentősebb torzulás nélkül átvihető. A sávszélességet az $f_H - f_L$ különbséggel definiáljuk, ahol f_1 az alsó és f_2 az ún. felső határfrekvencia. Ezekben a pontokban a jel teljesítménye a maximális érték felére (amplitúdója a $\sqrt{2}$-ed részére) esik vissza.

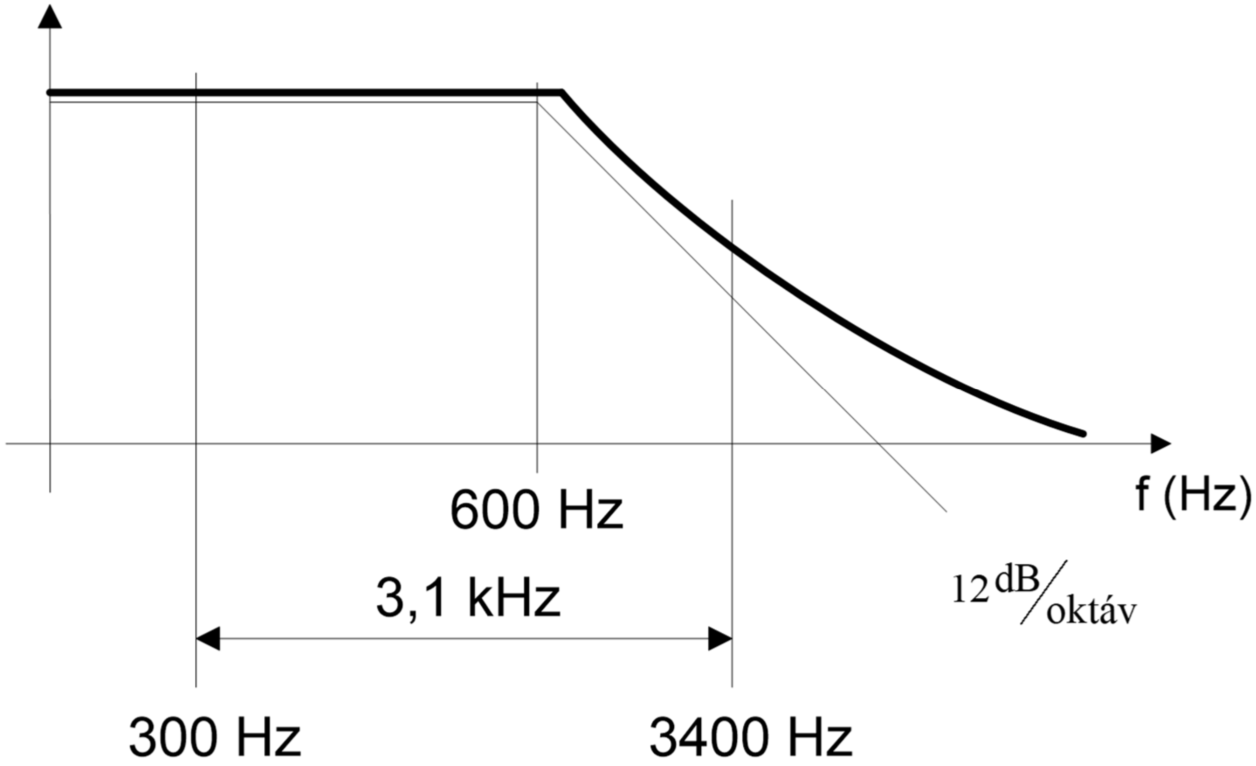


$$B = f_H - f_L$$

□ Alapsávi jel

Ha $f_L = 0$

Beszéd spektrumsűrűsége



A zenei hangátvitel frekvencia igénye jóval nagyobb.

Jelek időtartománybeli jellemzői

- Csúcsérték: $U_{\mathrm{p}} = \max |x(t)|$
- Csúcstól csúcsig (peak to peak): $U_{\mathrm{pp}} = \max x(t) - \min x(t)$
- Effektív érték: $U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt}$
- Csúcstényező (crest factor): $C = \frac{U_{\mathrm{p}}}{U_{\mathrm{eff}}}$

Távközlésben használt fontosabb fogalmak

Minden olyan jelet, ami nem része az információnak, a kommunikációs összeköttetésben **zajnak** tekintünk.

- **Jel-zaj viszony (Signal to Noise Ratio, SNR)**
  A jel/zaj viszony a jel és a zaj átlagos teljesítményeinek hányadosa:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\overline{P}_{\mathrm{jel}}}{\overline{P}_{\mathrm{zaj}}} \qquad \mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log\frac{\overline{P}_{\mathrm{jel}}}{\overline{P}_{\mathrm{zaj}}}\ [\mathrm{dB}]$$

Távközlésben használt fontosabb fogalmak

□ A decibel skála

Mindig két teljesítmény hányadosát fejezi ki logaritmikus egységekben:

$$a_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\frac{P_1}{P_2}$$

Logaritmikus azonosságok:

$$\log a + \log b = \log(a \cdot b)$$

$$\log a - \log b = \log(a/b)$$

$$b \cdot \log a = \log a^b, \qquad -\log a = \log(1/a)$$

$$\frac{1}{b}\log a = \log \sqrt[b]{a}$$

dB	**P_1/P_2**
0	**1**
1=10-9	10/8=**1.25**
2=5-3	3.16/2=**1.58**
3	**2**
4=10-6	10/4=**2.5**
5=10/2	$10^{1/2}=\sqrt{10}$=**3.16**
6=2*3	2^2=**4**
7=10-3	10/2=**5**
8=5+3	3.16*2=**6.32**
9=3*3	2^3=**8**
10	**10**
-7=3-10	2/10=**0.2**

Távközlésben használt fontosabb fogalmak

A távközlésben használt néhány fontosabb logaritmikus mennyiség

Megnevezés	Mértékegység	Definíció	Ref. szint
Teljesítményerősítés	dB	$10 \cdot \log_{10}(P_{ki}/P_{be})$	
Feszültségerősítés	dB	$20 \cdot \log_{10}(U_{ki}/U_{be})$	
Csillapítás (teljesítmény)	dB	$10 \cdot \log_{10}(P_{be}/P_{ki})$	
Csillapítás (feszültség)	dB	$20 \cdot \log_{10}(U_{be}/U_{ki})$	
Hangnyomás-szint (SPL)	dB_{SPL}	$20 \cdot \log_{10}(p/p_{ref})$	$20\mu Pa$
Hangintenzitás-szint (SIL)	dB_{SIL}	$10 \cdot \log_{10}(I/I_{ref})$	$1 pW/m^2$
Elektromos teljesítményszint	dBm	$10 \cdot \log_{10}(P/P_{ref})$	1mW
Elektromos teljesítményszint	dBW	$10 \cdot \log_{10}(P/P_{ref})$	1W
Elektromos feszültségszint	dBV	$20 \cdot \log_{10}(U/U_{ref})$	1V
Effektív elektromos feszültségszint (600Ω terhelésnél azonos mintdBm)	dBu	$20 \cdot \log_{10}(U/U_{ref})$	$0.775V_{RMS}$