Óbudai Egyetem
Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar

Bugyjás József

Mérnöki alapismeretek

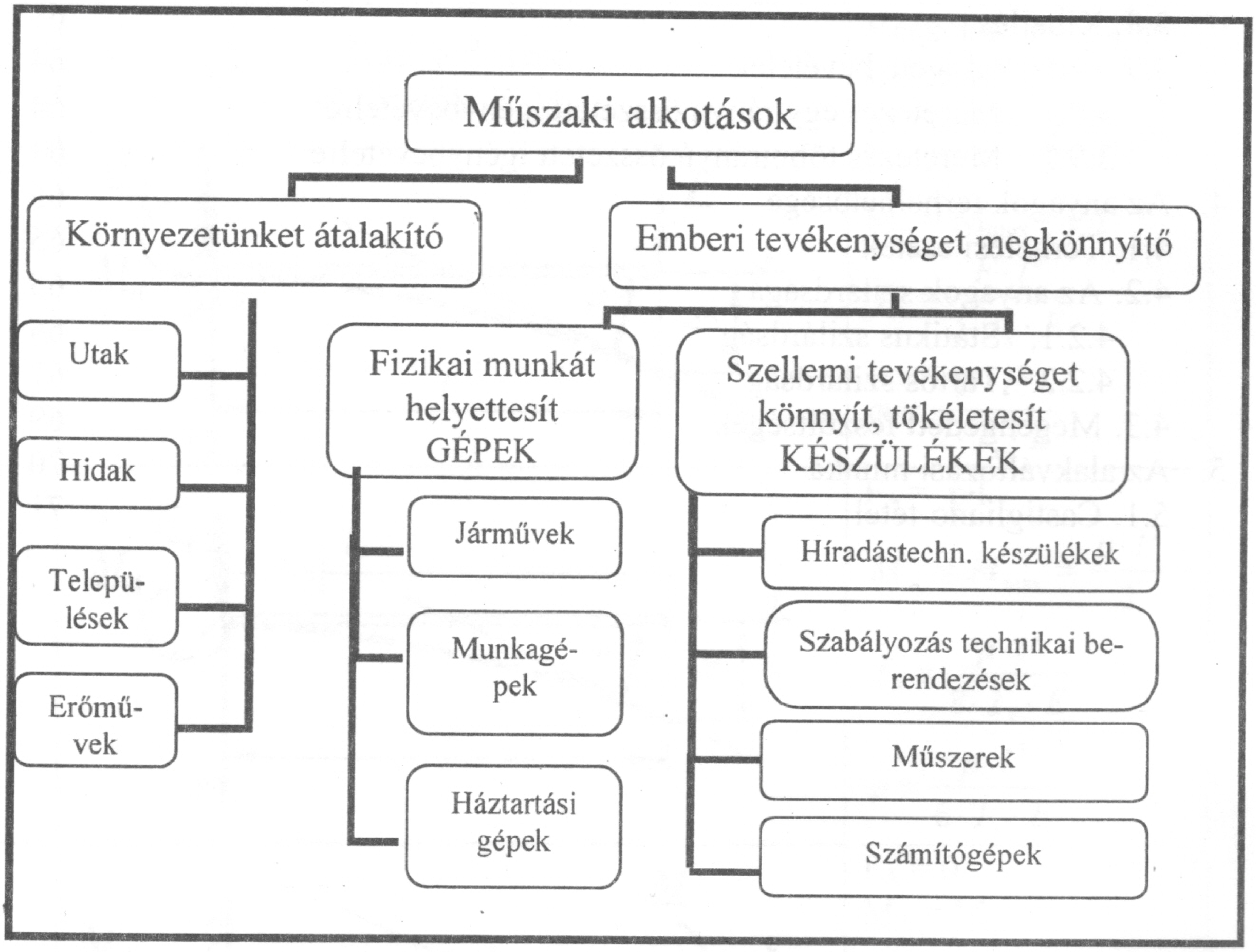
Változatlan utánnyomás

ÓE KVK 2045
Budapest, 2010.

Felelős kiadó: Dr. Turmezei Péter az ÓE KVK dékánja
Készült az ÓE Nyomdájában
Munkaszám: 7/2008
Műszaki vezető: Bélteky István
Jegyzetszám: ÓE KVK 2045
Példányszám: 200

Tartalomjegyzék: **old.**

1.Bevezetés



1.1. ábra

A fenti ábra a műszaki alkotások csoportosítását mutatja. A korszerű gépek, készülékek, elektromos és elektronikus műszerek és berendezések elképzelhetetlenek finommechanikai elemek és szerkezetek nélkül. Főiskolánkon olyan széles látókörű mérnököket képzünk, akik összefüggéseiben látják és ismerik a villamos berendezések gyártásához kapcsolódó mechanikai szerkezetek, egységek összefüggéseit, működésbeli és gyártási problémáinak kérdéseit. Így a felhasználói (ipari) igényeknek magas szinten megfelelő mérnökökké válnak, akik villamosmérnök tevékenységüket olyan működési területein kamatoztathatják tudásukat, mint:

- villamos berendezések elektromos bemérése, beállítása

- elektromos bemérési és szerelési technológiák ill. technológiai folyamatok tervezése, irányítása
- szerviz-, telepítés-, üzemeltetési feladatok végzése, irányítása
- villamos berendezése tervezése

Éppen ezért a villamos berendezések és készülékek tervezéséhez, szereléséhez, a bemérési feladatok során felmerült szerelési hibák behatárolásához feltétlenül szükséges a finommechanikai konstrukciós és technológiai ismeretek. De szükséges mert az elektronikus szerelvények, gyártási folyamatok tervezési vagy irányítási feladatainak végrehajtása szintén megköveteli ezeket az ismereteket is. A finommechanikai elemek tárgyalása, de az általános mérnöki ismeretek is megkövetelik a statika és a szilárdságtan alapfogalmainak és összefüggéseinek az ismeretét.

1.1.Mechanika tárgykörei

A mechanika görög eredetű szó "találékony" a jelentése. A fizika legrégibb és ma is alapvető jelentőségű ága. A munkavégzés során szerzett tapasztalatok, a környező világ szemlélete, a nappalok és éjszakák váltakozásának, a színek, a mozgások, az ár-apály és egyéb természeti jelenségek észlelése jelentette a fizikai és ezzel együtt a mechanikai megfigyelések kezdetét. A mechanika legősibb ága valószínűleg a mai kinematika, mivel a legtöbb megfigyelés a mozgással kapcsolódott. Kezdettben csak a mozgásjelenség megfigyeléséig jutottak el, okát évezredek után kezdte az emberiség felismerni, nem is azonnal a leghelyesebb módon.

A mechanika fejlődésének fázisai tehát: a jelenségek puszta megfigyelése, majd leírása, később következtetések levonása. A fejlődés további szakaszában önálló kísérletekkel igyekeztek a jelenségeket igazolni. Az igény ezek után abban jelentkezett, hogy ne csak leírni tudják a jelenségeket, hanem matematikai alakban is ki tudják azokat fejezni. Ezen a téren hatalmas munkásságot fejtett ki a mechanika egyik legnagyobb tudósa NEWTON (1643-1727), aki a matematika óriási fejlődését segítette elő munkájával, s megteremtette a klasszikus mechanika alapjait.

Hosszú ideig úgy látszott, hogy Newton törvényei minden esetben alkalmasak a mozgások leírására. Csak a legújabb kor megfigyelései mutattak rá érvényességük határaira. Kiderült, hogy Newton törvényei, bár meglehetősen általános érvényűek, a jelenségek bizonyos csoportjánál a tapasztalatokkal nem egyező eredményeket adnak. Így a fénysebességet megközelítő sebességű mozgásoknál az EINSTEIN (1879-1955) által felállított relatívisztikus mechanika, az atomi méretű mozgásoknál pedig a SCHRÖDINGER (1887-1961) által megalapozott kvantum mechanika alkalmas a mozgások vizsgálatára. Mind a relatívisztikus mechanika, mind a kvantum mechanika határesetként magában foglalja a newtoni mechanikát, jelezve ezzel érvényességük általánosabb voltát.

A mechanika, mint tudomány ma szinte beláthatatlan fejlődés előtt áll. Mind a közlekedés, mind a rakétatechnika, az űrhajózás, az automatikus működésű gyárak, valamint még a technika számtalan területe igénylik a mechanika segítségét.

Feladata tehát az anyagi pontok, ill. testek egymáshoz képesti helyváltozása, **a mozgás** megfigyelése, leírása, a mozgást kiváltó okok meghatározása ill. a nyugalmi állapot, az **egyensúly törvényeinek felállítása**. Röviden a mechanika az anyagi test mozgásával és az erőkkel foglalkozó tudomány. Mivel a közönséges értelemben vett mozgások, a testek helyzetváltozásai a legszembetűnőbb jelenségek közé tartoznak, és aránylag egyszerű eszközökkel vizsgálhatók, érthető, hogy valamennyi tudományág közül először a mechanika fejlődött egységes, átfogó tudományos rendszerré.

A mechanika területeit többféle módón lehet felosztani, mint például elméleti-, csillagászati-, műszaki mechanika stb. Másik felosztás a halmazállapot szerint, így a folyadékok, gázok és ***szilárdtestek*** mechanikája. Ez utóbbi tovább bontható merev- és deformálható testekre.

Merev testnek nevezzük azt az idealizált anyagi testet, amelynek alakja az erők hatására nem változik, azaz bármely két pontjának távolsága állandó.

Szilárd testek mechanikája

KINEMATIKA
görög <mozgás>
A mozgások leírásával és osztályozásával foglalkozik, de nem vizsgálja a mozgás okát, az erőket

DINAMIKA (erőtan)
görög <erő >
A mozgások, leírásával foglalkozik úgy, hogy figyelembe veszi a mozgások okát, azaz a mozgásokat előidéző erők figyelembe vételével tárgyalja

Merev testek statikájában a testek alakváltozásától tekinthetünk el, a szilárdságtanban az alakváltozásokat és a testek teherbírását vizsgáljuk

A valóságban merev test nincs, ezért számításaink eltérnek a valóságtól, de amikor a bekövetkező alakváltozások kicsinyek és így számításaink eredményében jelentkező hiba elhanyagolható, munkát ill. bonyolult számításokat takaríthatunk meg. Természetesen meg kell becsülni, hogy ez az egyszerűsítés milyen nagyságrendű hibát okoz és meg kell fontolni, hogy megengedhető e. Ennek eldöntéséhez a statikai és szilárdságtani problémák megoldásában kellő elméleti ismeret, jártasság és gyakorlati tapasztalat szükséges.

2. STATIKA

A statika az egyensúlyban levő erőrendszerek törvényeivel foglalkozik, vagyis azokat az eseteket vizsgálja, amelyeknél a testek a rájuk ható erők ellenére nyugalomban vannak és maradnak.

2.1. Alapfogalmak

2.1.1 Az erő fogalma

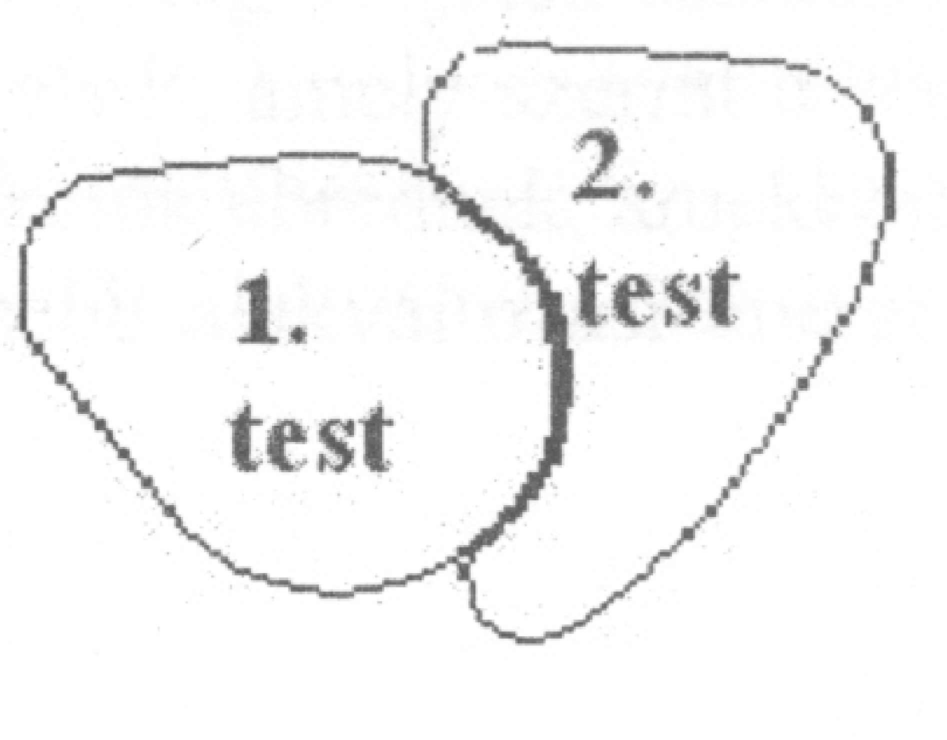
Fizikában kialakított fogalom szerint a testeknek egy más testre gyakorolt olyan hatása, amely a test mozgásállapot megváltozásában nyilvánul meg. Az erő **sebességállapot** változás mellet, **alakváltozást** is okoz. Amikor tehát egy erőről beszélünk, akkor ezen az egyik testnek a másikra való hatását értjük.

Erő két test kölcsönhatásakor keletkezik, tehát mindig **kölcsönös** és így **párosával** lépnek fel. Ez a **statika I. alaptörvénye: a hatás-ellenhatás törvénye**. A két erő közül gyakran csak az egyiket kísérjük figyelemmel. A vizsgálatainkban szereplő erőkről mindig tudni kell, hogy azok mely testeknek a hatását fejezik ki és a hatás mely testekre irányul.

2.1.2 Az erő helye

Az erő helye ott van, ahol az egyik test hatása átadódik a másikra. Helyük szerint az erőket két csoportba sorolhatjuk:

- Az egyik csoport a térfogat mentén megoszló erő, melyek a testek teljes térfogatában adódik át. Ezeket térfogat mentén vagy **térfogati erőknek** nevezzük. Ilyen például a nehézségi erő, amely a Föld vonzó hatását fejezi ki. Ha a testet magára hagyjuk, akkor a nehézségi erő gyorsuló mozgást hoz létre. A feldarabolt test részei külön-külön is gyorsulnak, tehát az erő valóban az egész térfogatra megoszló. Egy másik példa az elektromágneses erőhatások egy része. Ebben az esetben a testek közvetlenül nem érintkeznek egymással.
- Az erők egy része úgy jön létre, hogy két test egymással közvetlenül érintkezik. Véges nagyságú érintkezési v. támasztási felületen támaszkodnak egymásra, tehát az erők ezen keresztül adódnak át. Ezeket felületén mentén megoszló v. **felületi erőnek** nevezzük.



2.1. ábra

Az erő helyét képező geometriai alakzatokat gyakran a vizsgálatok leegyszerűsítése céljából ideális tartományokkal helyettesítjük, azaz idealizáljuk. Ha a keresztmetszeti méretek elhanyagolhatóak a hosszúság menti mérethez képest, akkor **vonal mentén megoszló** erőről beszélünk. Ha valamennyi kiterjedés elhanyagolhatóan kicsiny, akkor geometriailag pontnak idealizáljuk és **koncentrált erőről** beszélünk. Ezzel a statikai vizsgálatok leegyszerűsödnek. A számítások ugyan közelítőek, de a műszaki gyakorlat igényeit általában kielégítik. A mérnök, a tervező felelősége, hogy eldöntse hol, mikor lehet idealizálni, vagyis a számításokat egyszerűsíteni és mikor nem. A továbbiakban koncentrált erőkről beszélünk.

2.1.3 A koncentrált erő tulajdonságai:

1. Támadási pont, az erő helye

2. Nagyság (mérőszám + mértékegység [N]) skaláris mennyiség. A nagyságra abból következtethetünk, hogy milyen mértékű mozgásállapot változást hoz létre, vagy rögzített szerkezetre hatva milyen nagy alakváltozást idéz elő.

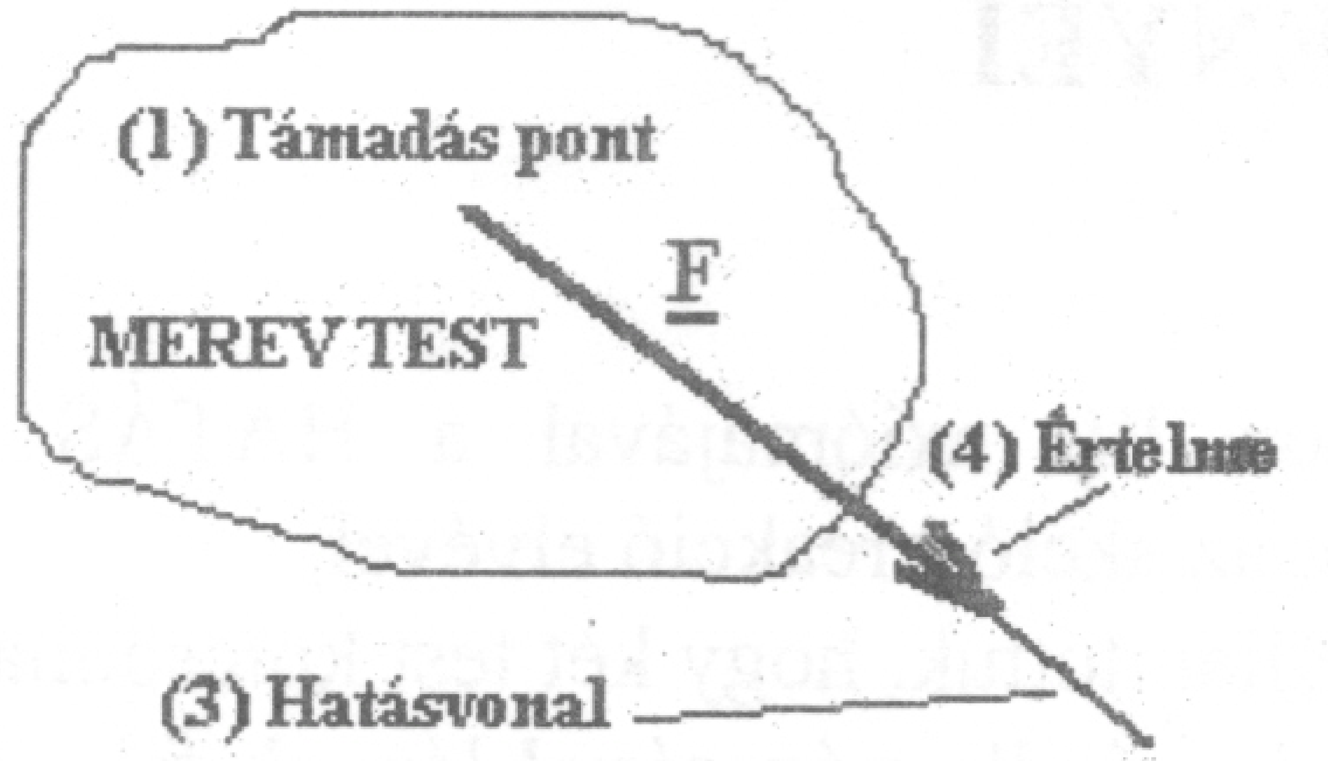
Az erő mértékegysége: 1[Newton] $= \dfrac{m \cdot kg}{s^2}$, 9.80665[N]= 1 [kp]

Az az erő, amely 1 kg tömegű testet 1 $\dfrac{m}{s^2}$ gyorsulással mozgat.

3. Hatásvonal (az erő hatásából következtethetünk) helytől független fogalom, az a térbeli hatásvonal, amelyen az erő a testet elmozdítani igyekszik.

4. Értelme (az egyenes irányítását szokás így nevezni) az adott hatásvonalon lehetséges kétféle elmozdulás egyikének meghatározása.

A fenti jellemzőket együttesen egy vektorral adhatjuk meg. **A vektor irányt, értelmet és nagyságot együttesen tartalmazó mennyiség.**



2.2. ábra

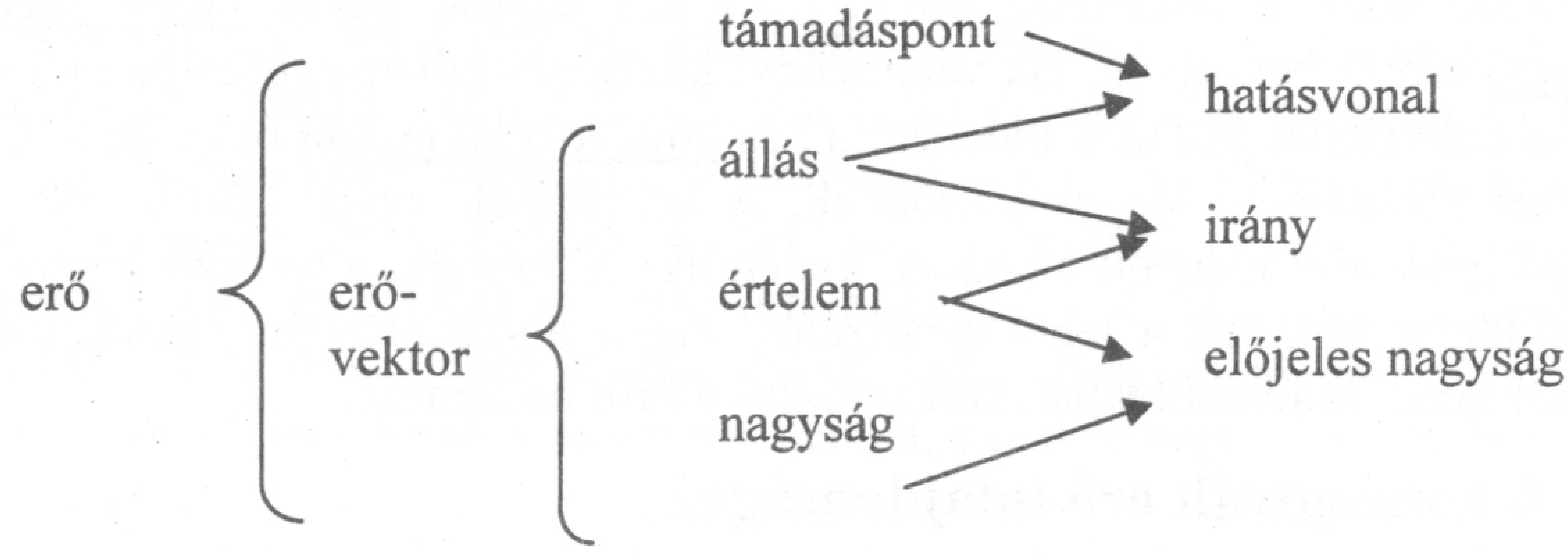
(1) a támadás pont, a vektor kezdőpontja

(2) az erővektor hosszúsága az erő nagysága

(3) „F" az erő vektor, a nyíl szára a hatásvonal

(4) a nyíl hegye az értelme

A fenti fogalmak az alábbi kombinációba hozhatók egymással:



A koncentrált vektor helyét akkor ismerjük, ha ismerjük a vektor adatait (nagyság, irány) és tudjuk hol van a támadáspontja ill. az erővektor hatásvonala. Az erőkkel kapcsolatos vizsgálati módszerek :

a/ **szerkesztő** (méretarányos ábrázolás), síkbeli erőrendszereknél használatos. Hátránya, hogy pontossága a szerkesztő eszközök fogyatékosságai miatt korlátolt. Előnye viszont az áttekinthetőség, az egyes tényezők befolyásának szemléletessége. Előzetes becsléshez gyakran alkalmazzák.

b/ **számító** (koordináta rendszerben). Előnye, hogy pontossága korlátlanul fokozható, és számítógép alkalmazásával a munka ideje rövidíthető. Hátránya a szerkesztő eljárással szemben, hogy nem olyan szemléletes, emiatt az esetleges hiba nehezen észrevehető.

c/ **vegyes** vagy grafoanalitikus. A módszer lényege, hogy a szerkesztés nyomán geometriai törvényszerűségek alapján számolunk.

2.2. A STATIKA ALAPTÖRVÉNYEI

2.2.1. A statikai első alaptörvénye

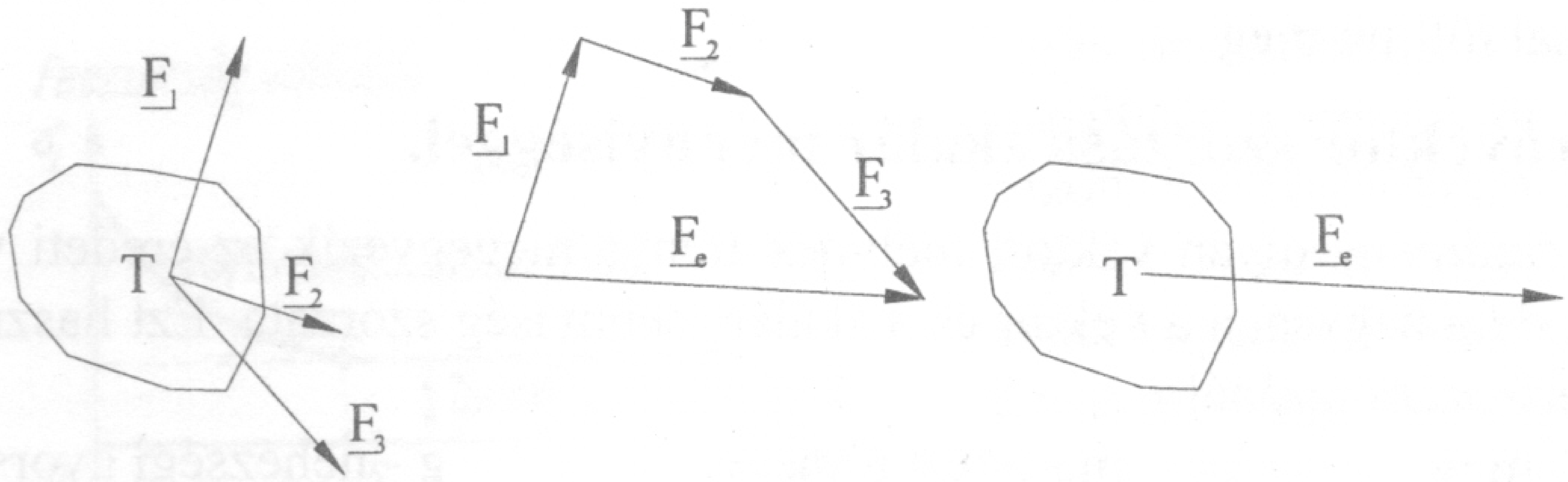
Az első alaptörvény azonos Newton III. axiómájával a HATÁS - ELLENHATÁS törvényével vagy más néven az akció - reakció elvével.

Az erő fogalmának tárgyalásakor megállapítottuk, hogy két test kölcsönhatásakor keletkezik, tehát mindig **kölcsönös** és mindig **párosával** lépnek fel. A két erő tulajdonságai a statikai első alaptörvénye szerint egymástól nem függetlenek. Két test kölcsönhatásánál fellépő két erő (F és - F) azonos nagyságú, közös hatásvonalú, de ellentétes értelmű.

2.2.2. A statikai második alaptörvénye (Két erő egyensúlya)

Merev testre ható két erő csak akkor alkot egyensúlyi erőrendszert, ha közös hatásvonalúak, megegyező nagyságúak és ellentétes értelműek, vagyis vektorösszegük zérus. A törvény alkalmazásakor szem előtt kell tartanunk az erőrendszerekről elmondottakat, tehát csak olyan erőket szabad figyelembe vennünk, amelyek ugyanarra a testre hatnak.

2.2.3. A statikai harmadik alaptörvénye (A vektortörvény)



2.3. ábra

Merev testre ható közös T pontban támadó erők eredője egyetlen $\underline{F}_e$ erő, melynek hatásvonala átmegy a közös T ponton, és az eredő vektor a támadó erők vektorainak összege.

A vektortörvény kimondja, hogy az egyenértékű erőrendszerek vektorainak összege megegyező.

2.2.4. A statikai negyedik alaptörvénye.

Csak merev testre igaz, hogy merev testre ható erőkből vagy azok egy részéből képzett erőrendszer hatása nem változik, ha hozzáadunk vagy elveszünk belőle egy másik, önmagában egyensúlyban lévő erőrendszert.

A tétel következménye, hogy az erő hatásvonalukon eltolhatók.

2.2.5. A statikai ötödik alaptörvénye.

Kapcsolatot teremt a statika és szilárdságtan között. Kimondja, hogy ha bármilyen szilárd test a ráható külső erők hatására alakváltozást szenved majd ismét nyugalomba kerül, akkor ebben a deformált állapotában helyettesíthető egy vele egyező alakú merev testtel.

2.3. Alapműveletek koncentrált erőkkel

A vektort legegyszerűbben a nagyságot jellemző skalármennyiségnek és az irányra jellemző egységvektornak a szorzataként adható meg. $\underline{F_1} = F_1 \cdot \underline{e_1}$ (2.1)

Derékszögű koordinátarendszerben bármilyen vektort megadhatunk komponens alakban

$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y} + \underline{F_z} = F_x\,\underline{i} + F_y\,\underline{j} + F_z\,\underline{k}$ ($\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ a koordinátarendszer 'x', 'y', 'z' tengelyéhez tartozó egységvektor)

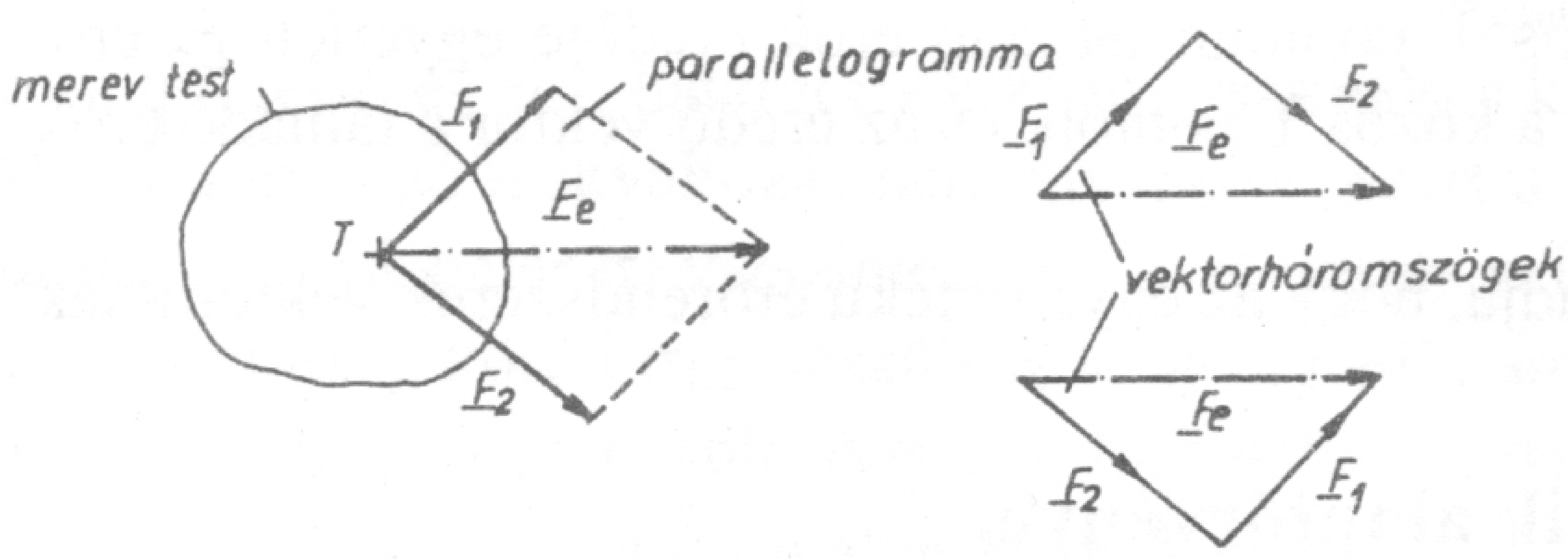
A matematikában megismert vektor- mátrix- és tenzorszámítási ismereteket ill. műveleteket használjuk itt is azzal a különbséggel, hogy ezeket fizikai tartalommal töltjük meg.

2.3.1. Erővektor szorzása skalár mennyiséggel.

Az eredmény olyan vektor, melynek iránya megegyezik az eredeti vektor irányával, de a nagysága a vektor és a skalár mennyiség szorzata. Ezt használjuk pl. a súlyerő számításánál.

$\underline{G} = m \cdot \underline{g}$ m - a test tömege, $\underline{g}$ - nehézségi gyorsulás

2.3.2. Erővektorok összegzése



2.4. ábra

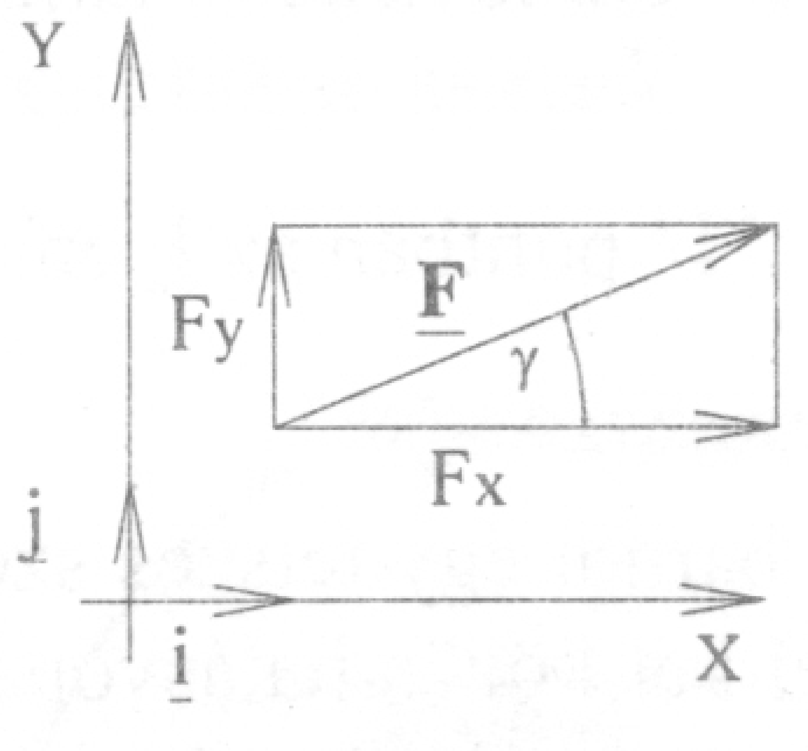
Szerkesztő eljárásként megegyezik a vektorok PARALELOG-RAMMA módszerrel történő összegzésével.

A számító eljárással nem más, mint a vektorkomponensek összeadása. Ennek a műveletnek az inverz művelete a vektorok felbontása komponenseire.

$$\underline{F_1} + \underline{F_2} = (F_{1x}\,\underline{i} + F_{1y}\,\underline{j} + F_{1z}\,\underline{k}) + (F_{2x}\,\underline{i} + F_{2y}\,\underline{j} + F_{2z}\,\underline{k}) =$$

$$= (F_{1x} + F_{2x})\underline{i} + (F_{1y} + F_{2y})\,\underline{j} + (F_{1z} + F_{2z})\,\underline{k} \quad (2.2)$$

2.3.3 Erővektor felbontása komponenseire



$F_x = |\underline{F}| \cdot \cos\gamma$

$F_y = |\underline{F}| \cdot \sin\gamma$

2.5. ábra

2.3.4. Két vektor skaláris szorzata

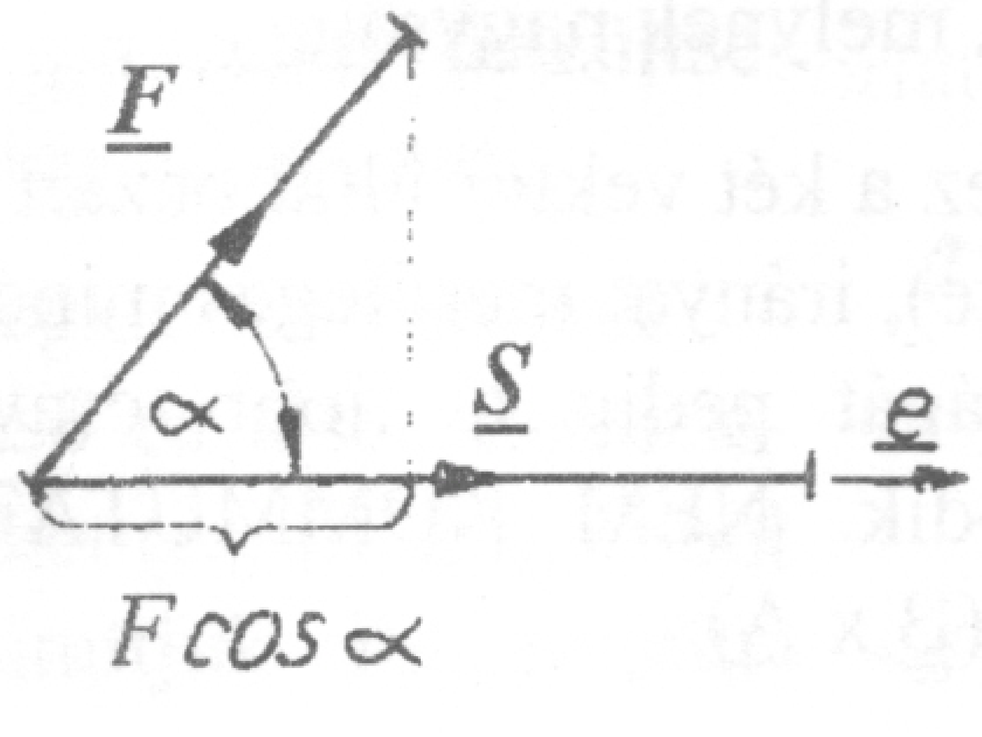
Az '$\underline{F}$' és az '$\underline{S}$' vektorok skaláris szorzata a következő előjeles skalármennyiség:

$\underline{F} \bullet \underline{S} = |\underline{F}| \cdot |\underline{S}| \cdot \cos\alpha$ ahol $|\underline{F}|$, $|\underline{S}|$ a vektorok abszolút értékei,

α pedig a két vektor által bezárt szög.

A skalár komponenseivel adott két vektor skaláris szorzatát a következő képen számítjuk:

$$\underline{F} \bullet \underline{S} = F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z \qquad (2.3)$$



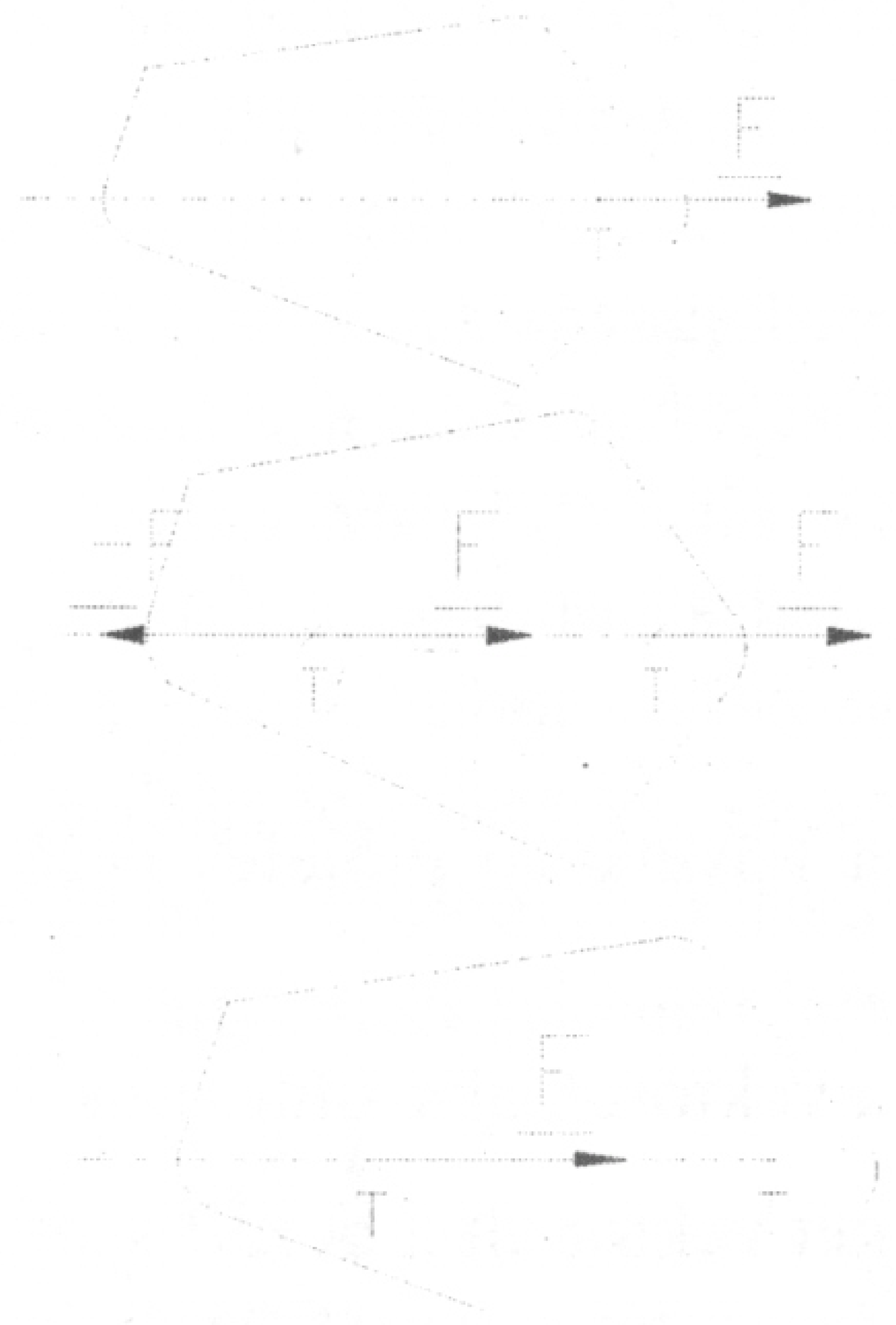
Az 2-6. ábrából látható, hogy az egyik ($\underline{F}$) vektor nagyságának és a szög koszinuszának szorzata nem más, mint az egyik ($\underline{F}$) vektor vetülete a másik ($\underline{S}$) vektorra. Ha az egyik vektor egységvektor ($\underline{S} = \underline{e}$), akkor a két vektor skaláris szorzata a másik ($\underline{F}$) vektor $\underline{e}$ irányú skalár komponensét adja.

2.6. ábra

2.3.5. Erővektor eltolása

Merev testre ható erő vektorát hatásvonalában bárhová eltolhatjuk. Bizonyítására tekintsünk az alábbi 2-7. ábra sorozatra.

A merev testre a 'T' pontban az F erő hat.

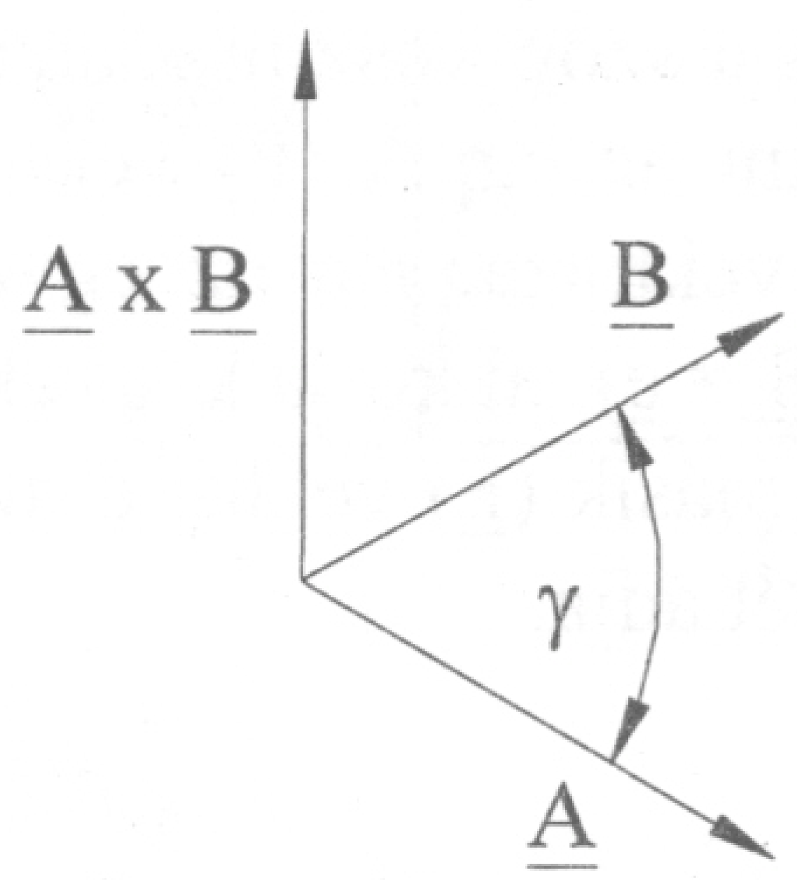


Az F hatásvonalán bárhol egy tetszés szerinti 'T' pontban vegyünk fel két közös hatásvonalú, 'F' -el megegyező, de egymással ellentétes értelmű F és -F erőt (a kettő összege 0). Ezt a felvett két erőt a későbbiekben egyensúlyi erőrendszernek nevezzük.

Ha viszont a 'T' pontban ható F-et és a T' támadáspont működő -F - et összegezzük, akkor ezek összege is 0 és marad a „T'" pontban eltolt F.

2.7. ábra

2.3.6. Két vektor vektoriális szorzata (A x B)



2.8. ábra

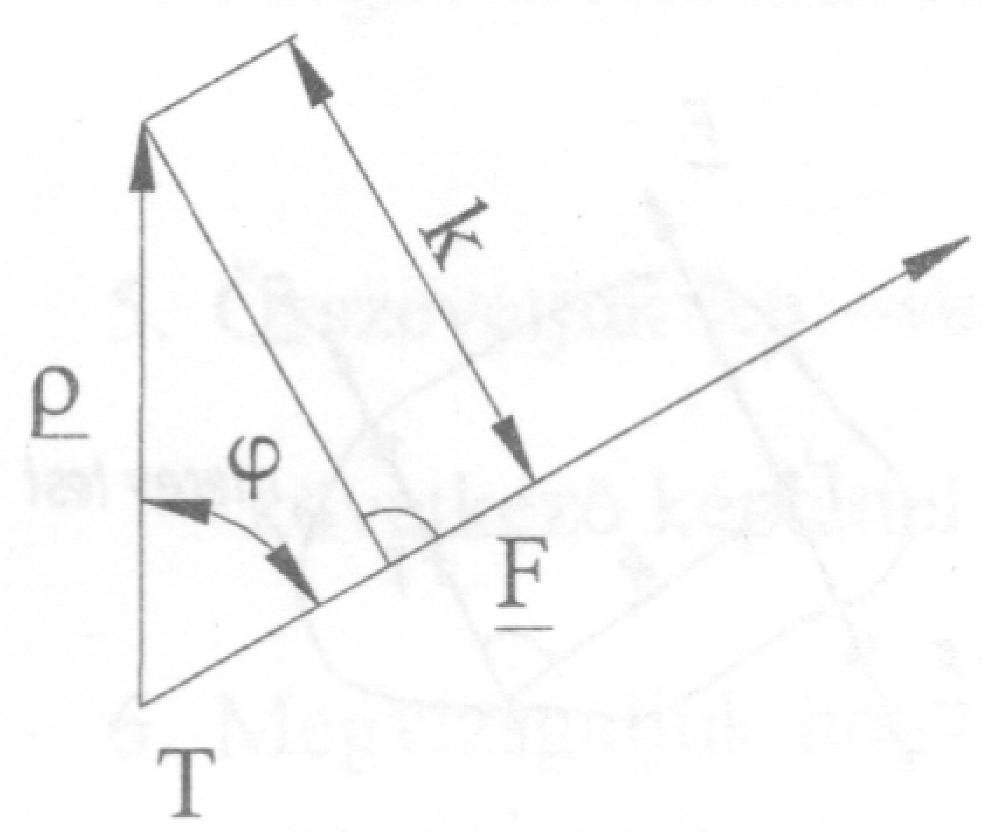
Az eredmény vektor, melynek nagysága :

| A | · | B | · sinγ (ez a két vektor által bezárt paralelogramma területe), iránya: merőleges mindkét vektorra, irányítottságát pedig a „jobb csavar" szabály szerint adódik. NEM KOMMUTATÍV művelet A x B = - (B x A)

A derékszögű koordináta rendszerben skalár komponenseivel megadott két vektor vektoriális szorzatát,az alábbi mátrix determináns szerinti kifejtésével számíthatjuk ki.

$$\underline{A}X\underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y)\,\underline{i} - (A_x \cdot B_z - A_z \cdot B_x)\,\underline{j} + +(A_x \cdot B_z - A_z \cdot B_x)\,\underline{k} \qquad (2.4)$$

Az erővektor jellegzetes tulajdonsága, hogy hatásvonalán kívüli pontokra is van hatása. Ez AZ ERŐ PONTRA SZÁMÍTOTT NYOMATÉKA.



2.9. ábra

Ha $\underline{A}$ helyében $\underline{F}$ erővektort, $\underline{B}$ helyében $\underline{\rho}$ helyvektort írjuk (2.9. ábrának megfelelően) $\underline{M}_A$ statikai nyomatékot kapjuk. A $\underline{F}$ erővektor és 'T' támadáspontból a pont felé mutató '$\underline{\rho}$' helyvektor vektoriális szorzataként.

$\underline{M}_A = \underline{F} \times \underline{\rho} = |\underline{F}| \cdot k \qquad k = \rho \cdot \sin\varphi$

Ismertebben erő · erőkar = nyomaték

A pontra számított nyomaték nem változik, ha az F erőt hatásvonalában eltoljuk.

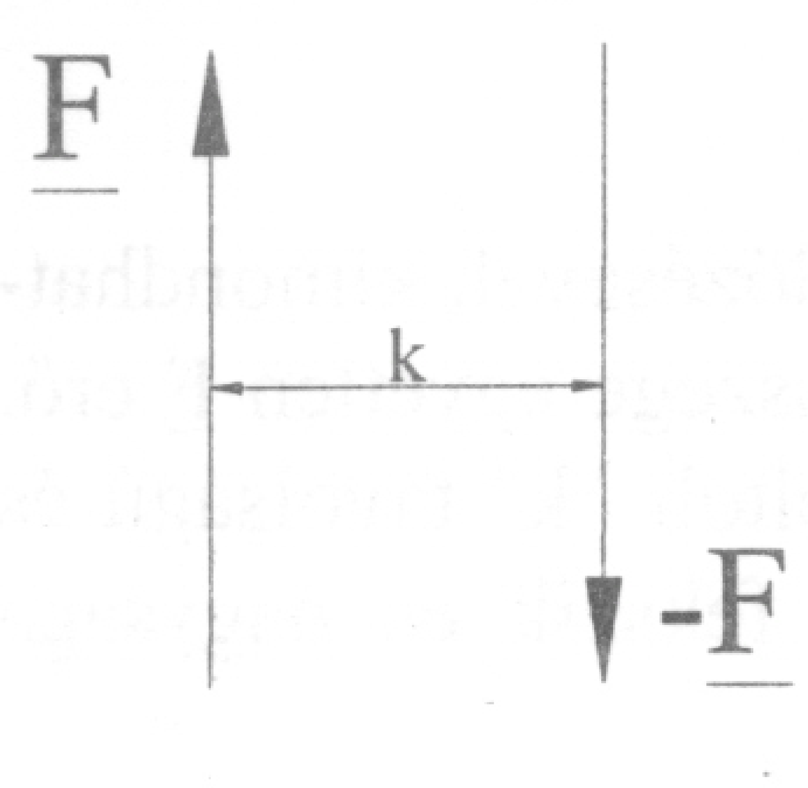
Az erőnek saját hatásvonalán levő pontokra nincs nyomatéka.

A nyomatékvektorokat csak akkor adhatjuk össze, ha azonos pontra számították.

Nyomatéki tétel

Az erő valamely pontra számított nyomatéka egyenlő a komponensek ugyanerre a pontra vett nyomatékának összegével. Másképpen egy erőrendszer eredőjének nyomatéka a sík bármely pontjára ugyanakkora, mint az egyes erők ugyanarra a pontra számított nyomatékainak összege.

2.3.7. Az erőpár



2.10. ábra

Két párhuzamos egyenlő nagyságú, de ellentétes értelmű koncentrált erő kettőst nevezzük erőpárnak.

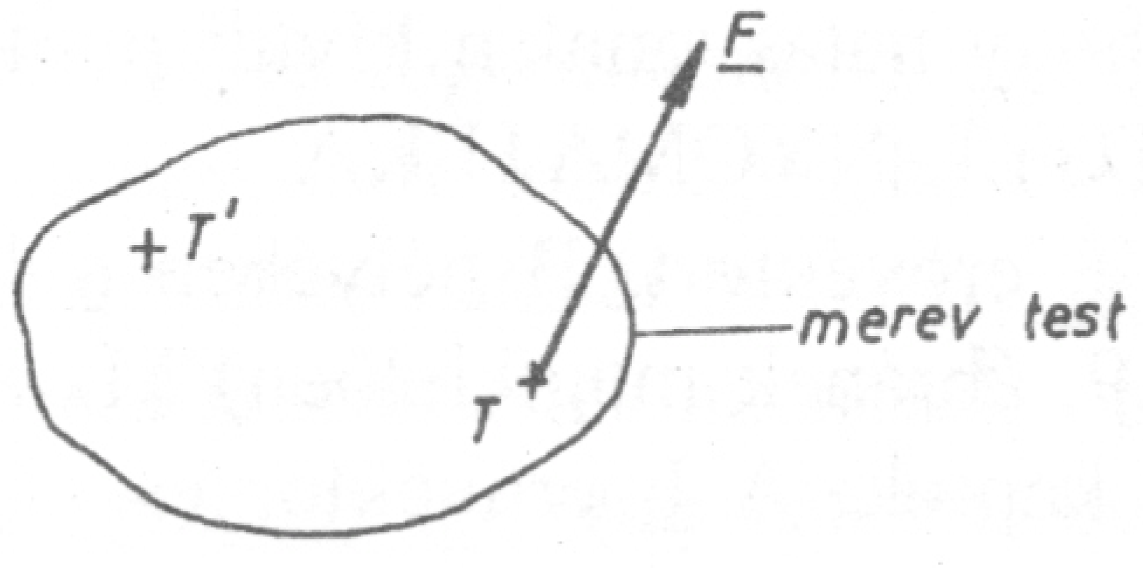
k = a két erővektor egymástól mért távolsága

Az erőpár nyomatéka.: $\underline{M} = |\underline{F}| \cdot k$

A nyomatékvektor iránya merőleges az erőpár által meghatározott síkra, értelme pedig a " jobbcsavar " szabály szerint állapítható meg.

A mozgásállapot változtató hatás szempontjából közömbös, hogy az erőpár ill. vektor hol támadja meg a testet. A test a súlypontja körül forog. Az erőpár hatására csak nyomatékának nagysága, síkjának helyzete, és síkjában forgatási értelme jellemző. Más szóval az erőpár hatása nem változik, ha síkjában eltoljuk, elforgatjuk ill. az alapot és a kart úgy változtatjuk, hogy szorzatuk ugyanakkora maradjon.

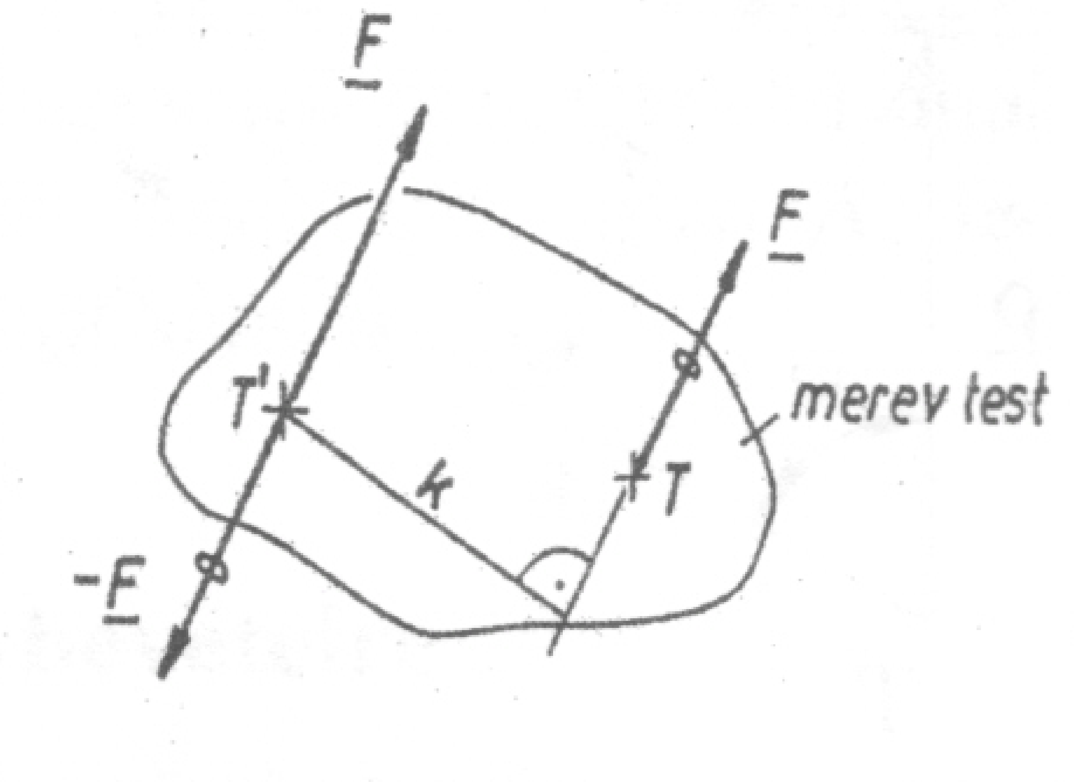
2.3.8. Az erő áthelyezése



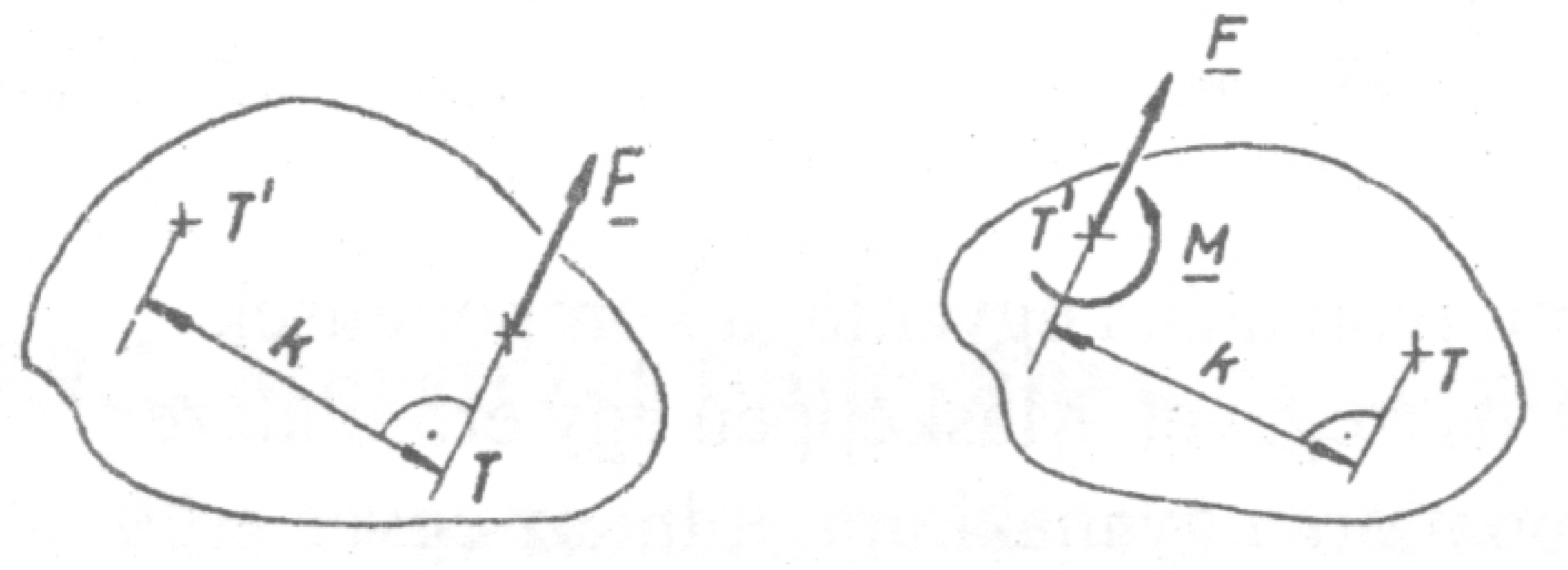
2.11.a ábra

A 2-11.a ábrán látható merev testre T támadáspontban működjön $\underline{F}$ erő. Vizsgáljuk meg, hogyan lehet áthelyezni T' pontba.

Mint tudjuk erőt csak saját hatásvonalán szabad minden következmény nélkül eltolni. Máshová nem. De a merev test bármely pontjába tehetünk két olyan erőt, aminek az összege zérus. Közös hatásvonalú, azonos nagyságú, de ellentétes értelmű erő összege zérus. Helyezzük el az 2-11.b ábrán látható módon. Vegyük észre, hogy létrejött egy erőpár.



2.11.b ábra



2.11.c ábra

Összefoglalva: $\underline{F}$ erő T' pontba történő áthelyezésénél (redukálásánál) egy T' pontba működő $\underline{F}$ erő és egy $\underline{M}$ nyomatékú erőpárt nyerünk. $|\underline{M}| = |\underline{F}| \cdot k$

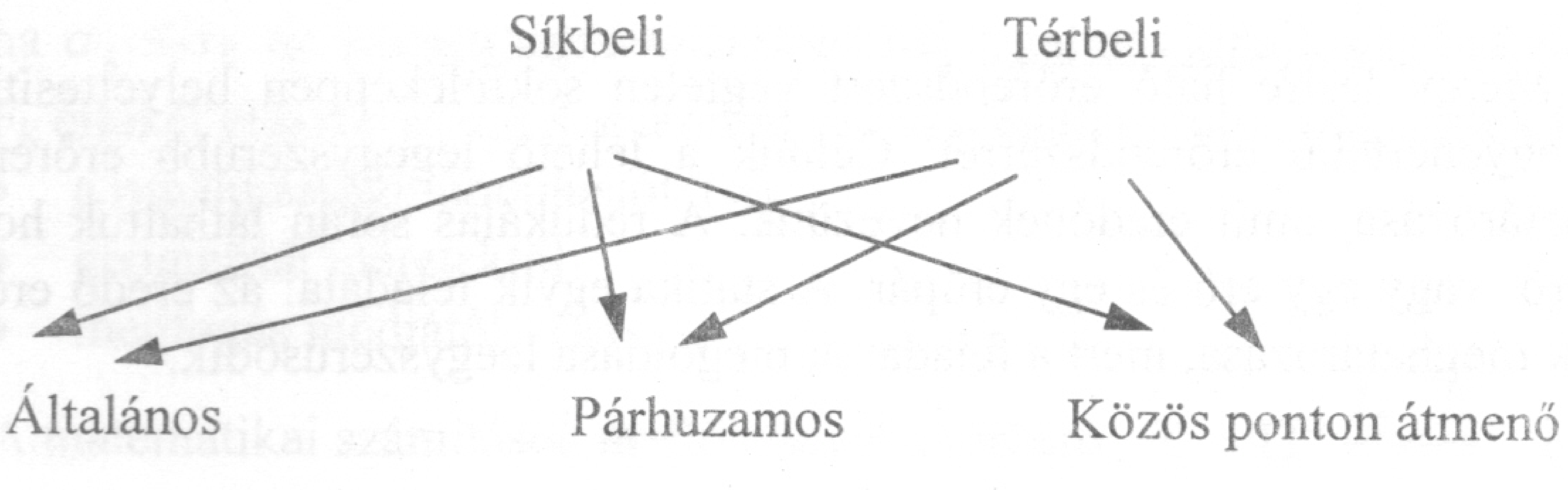
2.3.9. Erő és erőpár összegzése

A fenti gondolatmenethez hasonlóan, a részletek mellőzésével, kimondhatjuk: T támadáspontú $\underline{F}$ erővektor és $\underline{M}$ nyomatékvektor összege egyetlen $\underline{F}$ erő, amely az eredeti T támadásponttól a megfelelő irányban eltolt "k" távolságú és az eredeti erő hatásvonalával párhuzamos hatásvonalon fekszik és nagysága egyenlő az eredeti $|\underline{F}|$ erővel.

2.4. Erőrendszerek

Környezetünkben minden időpillanatban nagyon sok test lép kölcsönhatásba egymással, tehát erők sokasága figyelhető meg. Ezek közül kell kiválasztani azokat, amelyek vizsgálatunkban szerepet játszanak, amelyeket figyelembe kell vennünk. A vizsgálat céljára kiválasztott erők együttesét nevezzük erőrendszernek. Statikai vizsgálatoknál azokat az erőket soroljuk erőrendszerbe, amelyek ugyanarra a testre, vagy szerkezetre hatnak. Tehát erőrendszernek az egy testre ható erők összességét nevezzük.

Az erőrendszert az erők hatásvonalai alapján az alábbiak szerint csoportosíthatjuk:



2.4.1. Egyensúlyi erőrendszer

Tágabb értelemben az az erőrendszert nevezzük egyensúlyi erőrendszernek, amelyik nem változtatja meg a test mozgásállapotát ill. nyugalmi állapotát. Ha a környezetéhez képest nyugalomban lévő test a rá ható erők ellenére is nyugalomba marad, akkor egyensúlyi erőrendszerről beszélünk.

Az egyensúlyi erőrendszer fogalmából adódik a következő tétel:

Bármely erőrendszerhez hozzátehetünk vagy elvehetünk olyan erőket, amelyek önmagukban egyensúlyi erőrendszert alkotnak. Ezt tettük az erő áthelyezése ill. hatásvonalában történő áthelyezésekor.

Csak olyan erőrendszer lehet egyensúlyi, amelyben az erők vektori összege zérus

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = 0 \quad (2.6)$$

és ugyanarra a pontra számított nyomatéka is zérus.

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{M_{i0}} = 0 \quad (2.7)$$

Sokszor tapasztalhatjuk, hogy nyugvó testre erőt fejtünk ki és gyakorlatilag mégis nyugalomban marad. Ez úgy lehetséges, hogy olyan erők is megjelennek, melyek az egyensúlyt, jelen esetben a nyugalmi állapotot, fenntartják.

2.4.2. Egyenértékű erőrendszer

Két erőrendszer statikailag akkor tekintünk egyenértékűnek, ha ugyan olyan körülmények között ugyanolyan mozgásállapotot hoznak létre. Ez más szóval azt jelenti, hogy merev test egyensúlyának vizsgálatakor a testre ható erőkből vagy azok egy részéből képzett erőrendszer helyettesíthető vele egyenértékű erőrendszerrel, és ha ezt megfelelően tesszük, megkönnyíthetjük a vizsgálatot anélkül, hogy az eredmény helyességét befolyásolnánk.

2.4.3. Eredő erőrendszer

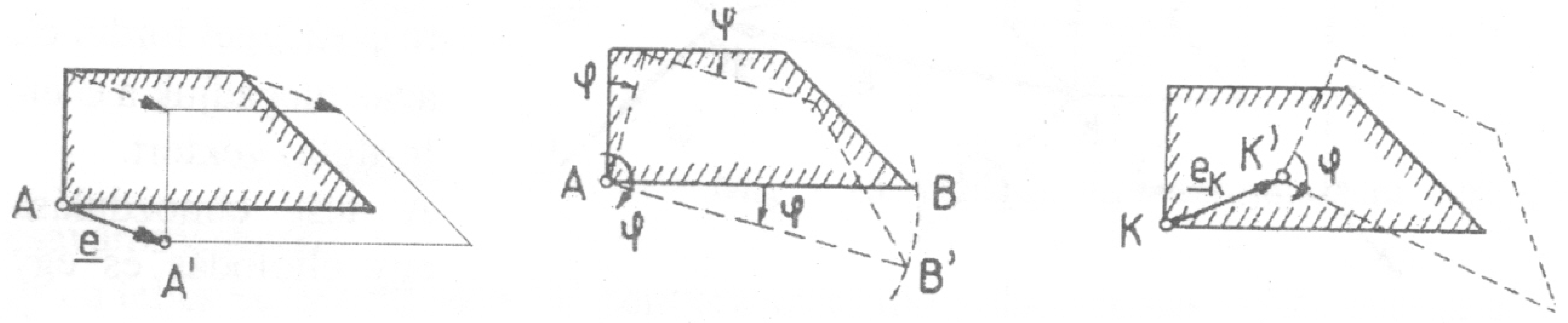
Merev testre ható erőrendszert végtelen sokféleképpen helyettesíthetjük vele egyenértékű erőrendszerrel. Célunk a lehető legegyszerűbb erőrendszer meghatározása, amit eredőnek nevezünk. A redukálás során láthattuk hogy ez egy erő, vagy egy erő és egy erőpár. A statika egyik feladata: az eredő erőrendszerek meghatározása, mert a feladatok megoldása leegyszerűsödik.

2.5. Kényszerek

2.5.1. Merev test elmozdulása.

Síkbeli elmozdulás

Kétféle elmozdulás típust különböztetünk meg: az eltolódást és az elfordulást. Az elmozdulás ezek összefoglaló elnevezése.

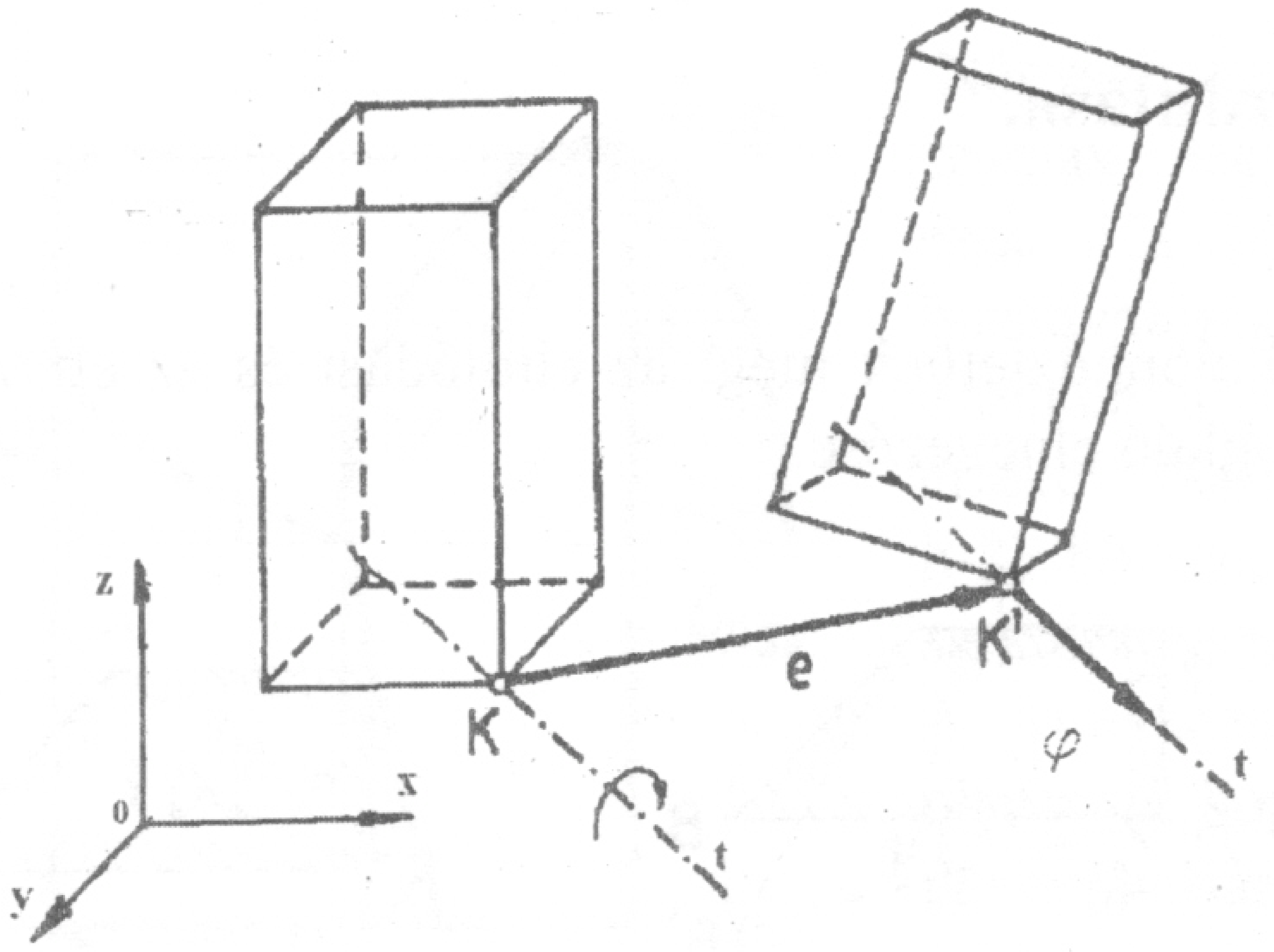


2.12. ábra

Eltolódást akkor végez a síkbeli test, ha elmozdulása közben minden egyenese párhuzamos marad. Az eltolódás egyetlen e eltolódás vektorral adható meg.	**Elfordulást** akkor végez, ha elmozdulása során egy pontja helyben marad, ez a 'A' pont és a többi pont az e pont körüli íven mozdul el ugyanakkora 'φ' szöggel. Ha adott az elforduláspont, akkor az elfordulást egy adattal a 'φ' szöggel lehet magadni.	Egy merev test tetszőleges síkbeli **elmozdulását** úgy adhatjuk meg, hogy megadjuk egy pontjának $\underline{e_k}$ eltolódás vektorát és'φ' elfordulás szögét. Mivel $\underline{e_k}$ két skalár adatot jelent (e_{kx}, e_{ky}), a merev test általános síkbeli elmozdulása s=3 adattal adható meg.

A **szabadságfok** azt mutatja, hogy valamely elmozdulás hány skalár adattal írható le. Ezek szerint a merev test síkbeli elmozdulása 3 szabadság fokú.

Térbeli elmozdulás



2.13. ábra

Valamely merev test elmozdulását úgy adhatjuk meg, hogy megadjuk egy 'K' pontjának eltolódását és az e ponton átmenő milyen irányú 't' tengely körül mekkora φ szöggel fordul el, azaz megadjuk a φ elfordulás vektort.

A test elmozdulása egy eltolódás és egy elfordulás vektorból együtteséből tevődik össze. Mivel ezek a vektorok 3-3 skalár komponenssel adhatók meg, a test elmozdulását hat adat határozza meg. Tehát a merev test síbeli elmozdulása hat szabadságfokú.

Gépek, műszerek, készülékek olyan alkatrészekből épülnek fel, amelyek nyugalomban vannak, vagy csak meghatározott fajtájú ún. üzemszerű mozgást végeznek. A nem üzemszerű mozgást végző alkatrészeket mozgásukban akadályozni ill. a nyugalmi helyzetüket rögzíteni kell. Így jutunk el a kényszer fogalmához.

A kényszer két test között létesített olyan kapcsolat, amely a testek egymáshoz viszonyított szabad mozgását korlátozza. A kényszerek mindig valamilyen mozgási lehetőséget megakadályoznak, ugyanakkor rendszerint más mozgási lehetőséget nyitva hagynak. (az elmozdulás szabadságfokát csökkentik)

Aszerint, hogy a kényszer hány adattal megadható elmozdulást akadályoz meg, beszélünk a kényszer fokszámáról.

A kényszerek az egyensúlyi helyzetet csak úgy tudják fenntartani, hogy maguk is erőhatást fejtenek ki a testre. Egyensúlyi helyzet az az erőrendszer, amely a test mozgásállapotát nem változtatja meg. Az egyensúly megszüntetésére törekvő erőket rendszerint ismerjük, ezek az AKTÍV erők. A kényszerek által kifejtett erők egyes jellemzőit a kényszer tulajdonságai szabják meg. Ezeket REAKCIÓ erőknek nevezzük.

Az alkalmazott kényszer jellege megszabja a támasztóerő vektorának irányát, nagyságát pedig a statika alaptörvénye alapján határozhatjuk meg.

A leggyakoribb kényszerfajták:

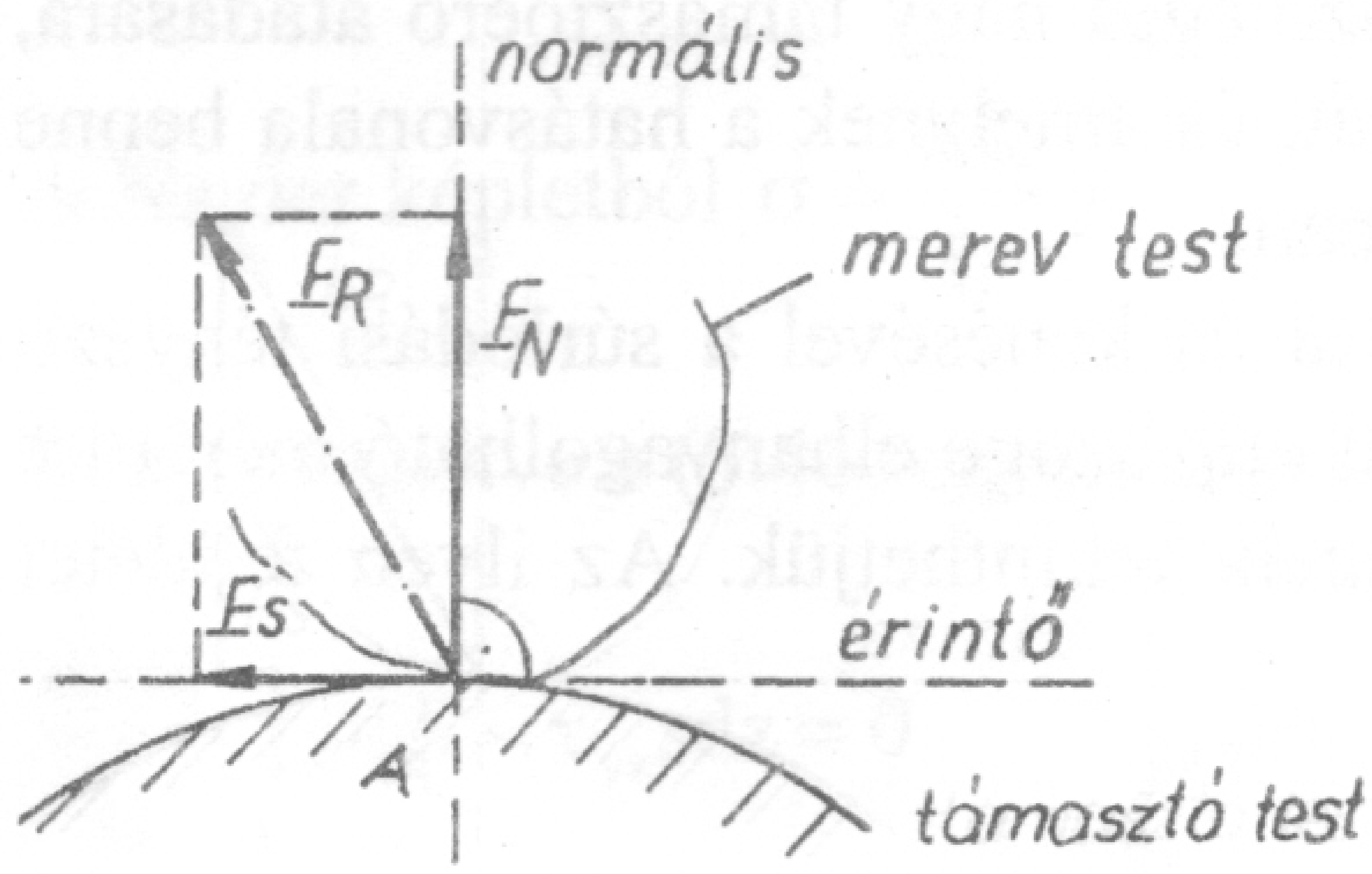
2.5.2. A Támasztás:

Két test között közvetlen érintkezés útján létrejött kapcsolat. Létrejöhet a, véges felületen, mint pl. a villamos gépekben a kefék a kommutátoron, csúszógyűrűn. b, pontszerű felületen (ilyen pontszerű érintkezés jön létre domború felületű testek, gömbök érintkezése során.) Természetesen ez idealizált eset, mert a valóságban benyomódnak.

A támasztás oly módon korlátozza a testek egymáshoz viszonyított mozgását, hogy megakadályozza a két érintkező test egymásba nyomulását.

Pontszerű támasztás

Pontszerű támasztás esetén koncentrált támaszerőről beszélünk.



2.14. ábra

$\underline{F}_N$ - normális erő

$\underline{F}_S$ - súrlódó erő (0, ha a két felület tökéletesen sima) $\underline{F}_S = \mu \cdot \underline{F}_N$ (2.8)

$\underline{F}_R$ - a paralelogramma módszerrel kiszerkesztett reakció erő

Tökéletesen sima felületeket feltételezve a közös érintő sík irányában nem lép fel erő, így a test ebben az irányban el is mozdulhat, - emiatt a felületek egymást kölcsönösen a közös normális irányában nyomják. Vagyis megtámasztásánál fellépő kényszererő mindig normális irányú. (Mechanikai rendszerekben az ilyen eseteket a 2.16. ábrán látható módon jelöljük)

A megtámasztás 1 ismeretlent jelent: az erő előjeles nagyságát.

De az érintkező felületek nem teljesen simák, *emiatt az egymással érintkező testek az érintősík irányába eső elmozdulással szemben ellenállást fejtenek ki. Ez a jelenség a súrlódás.* Tehát mint a 2.14. ábrán is látható a támasztásból eredő $\underline{F}_R$ erő nem merőleges az érintkezés síkjára. Ez az erő felbontható komponenseire, $\underline{F}_N$ - normális erőre és $\underline{F}_S$ - súrlódó erőre. A normális erő értelme csak a hatást kifejtő testtől a másik felé mutató lehet, mert a támasztás a testek egymástól való eltávolodást nem tudja megakadályozni. Nagyságát csak szilárdsági tulajdonságok korlátozzák.

A vizsgált merev test nyugalmi vagy más szóval egyensúlyi állapotában ébredő súrlódást NYUGVÁSBELI SÚRLÓDÁS - nak nevezzük. A nyugvásbeli súrlódó erő nagysága és iránya éppen olyan, amilyen irányúra és nagyságúra szükség van a merev test egyensúlyának fenntartásához. De nem lehet nagyobb egy határértéknél. A határérték nagysága függ $\underline{F}_N$ a normális erőtől és a $\underline{F}_S$ - súrlódó erőtől, pontosabban a

$\underline{F}_S = \mu_0 \cdot \underline{F}_N$ képletben szereplő μ_0 un. nyugvó súrlódási tényezőtől.

A 2.14. ábrán látható $\mathrm{tg}\,\rho_0 = \dfrac{F_S}{F_N}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\,\rho_0 = \mu_0$

A $\underline{F}$ erő a vízszintes síkban bármilyen irányú lehet, és egyensúly esetén $0 \leq F \leq F_{s\ max,}$ ha a keletkező $\underline{F}_R$ reakcióerő a vázolt $\rho_0 = \mathrm{arctg}\mu_0$ félnyílásszögű súrlódási kúp felületén van, akkor elcsúszási határhelyzet jön létre, vagy ha azon belül, a kúp csúcsán áthaladva bárhol elhelyezkedve egyensúlyi helyzet áll elő.

Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy a merevnek idealizált testek pontszerű érdes felületű támasztására képes tetszőleges nagy támasztóerő átadására, amely a testtől az érintkezési pont felé mutat, és amelynek a hatásvonala benne van a súrlódási kúpban, vagy annak palástjában.

A felületek csiszolásával, polírozásával és kenésével a súrlódási tényező jelentősen csökkenthető. Ilyenkor a súrlódási kúp szöge elhanyagolható méretűre csökken, és a támasztóerőt normális irányúnak tekinthetjük. Az ilyen felületet simának, a támasztást ideálisnak nevezzük.

Mozgásbeli súrlódás

Ha az eredő erő kilép a félkúp palástból, azaz az érintő irányú komponense nagyobb a súrlódó erőnél a test mozgásnak indul. Ebben az esetben mozgásbeli súrlódásról beszélünk.

Az ilyenkor fellépő mozgásbeli súrlódó erő a két test relatív sebességével ellentétes értelmű. Nagysága függ a normális erőtől, a felületek fizikai állapotától (a 'μ' csúszási súrlódási tényező), a mozgás sebességétől.

'μ_0' az érintkező felületek anyagi minőségétől függ, mindig nagyobb, mint a 'μ' csúszási súrlódási tényező.

2.1. Táblázat

	μ_0	μ
acél - acélon	0.14	0.06
fa - fán	0.65	0.4
fa- fémen	0.6	0.4
acél - bronzon	0.19	0.18

A nyugvásbeli súrlódás értékét egyenlőtlenség, a mozgásbeli súrlódósát egyenlőség fejezi ki.

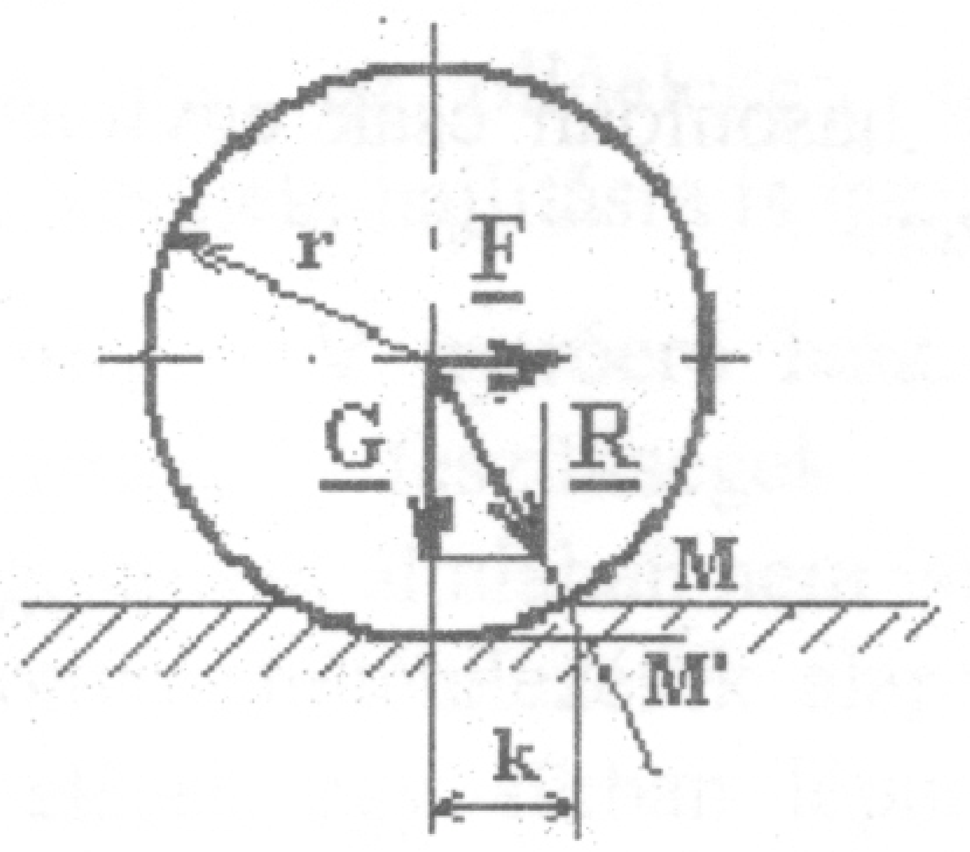
A valóságban, amikor üzemszerű körülmények között mozognak felületek egymáson, a súrlódást kétféleképpen szokás modellezni:

- Coulomb-féle súrlódással, amikor feltételezzük, hogy az érintkezï felületek szárazak, közöttük folyadék vagy más kenőanyag nincs.
- Folyadéksúrlódással, amikor a két felület közötti részeket valamilyen folyadék, kenőanyag tölti ki. Ilyenkor a felületek relatív mozgásánál a folyadéknak jelentős szerepe van.

A valóságos esetek tulajdonképpen mindkét modellt magukban foglalják úgy, hogy nyugvó súrlódás esetén a felületeket összenyomó erő mintegy kipréseli a folyadékot, és ezért inkább a száraz súrlódás esete valósul meg. Mozgás esetén a mozgó felület "úszik" a folyadékfilmen, ezáltal a súrlódó erő kisebb lesz.

2.5.3. Görgők támaszkodása (Gördülő ellenállás)

Bármely forgástestnek sík felületen való gördüléséhez szükséges követelmény az, hogy ébredjen súrlódás, ill. súrlódó erő a test és a sík között.



2.15. ábra

Görgők, kerekek erőviszonyainak vizsgálatakor gyakran nem hagyható figyelmen kívül az érintkező felületek belapulása. Ha nem lenne belapulás a legkisebb vízszintes erő is gördülést okozna. A valóságban nincs így, mert a belapulás folytán a gördüléssel szemben ellenállás jön létre. Ezt az okozza, hogy pont helyett felületen történik a támaszkodás. A felület alakját és méreteit nehéz meghatározni.

Ha 'F' erőt növeljük, akkor 'G' és 'F' erő „R" eredője a függőlegestől egyre jobban elhajlik, míg hatásvonala eléri a 'M' metszéspontot. A támaszfelület alakjának ismerete híján, keressük meg mennyivel tolódik előre a kerék eredeti alakjának megfelelő támasztóerő hatásvonalának M' pontja.

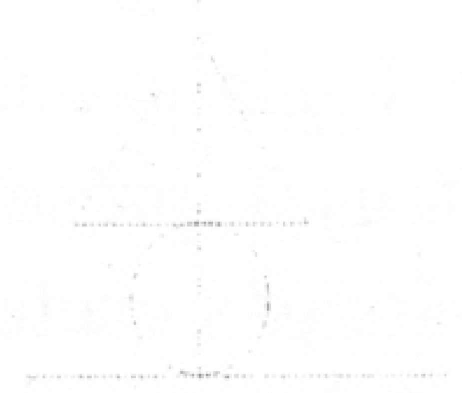
M' pontra felirt nyomatéki egyensúlyi egyenlet:

$\sum M_{M'} = G \cdot k - F \cdot r$ amelyből $k = \frac{F}{G} r$ 'k'-nak azt a legnagyobb értékét, amely a gördítés határhelyzetét előidéző F_H erőhöz tartozik, a gördülő-ellenállás karjának nevezzük és k_0- al (egyes jelöljük szakirodalom λ). Gördülő ellenállási együtthatónak nevezik. Értéke főleg a testek anyagától függ.

Pl.: acél - acél esetén $k_0 = 0.1$ mm
öntöttvas - öntöttvas esetén $k_0 = 0.5$ mm
fa - fa esetén $k_0 = 1.5$ mm

A gördülő-ellenállás karjának ismeretében $F_H = G \frac{k_o}{r} = G \mu_0$ (2.9)

μ_0 -t gördülési ellenállási tényezőnek nevezzük.



Rúd alátámasztására szolgáló görgős támasz esetén a súrlódást és a gördülési ellenállást rendszerint elhanyagoljuk.

Ideális eset jön létre, ahol csak normális irányú erő hat.

A reakció erő iránya ismert, közvetlenül csak a nagysága ismeretlen.

2.16. ábra

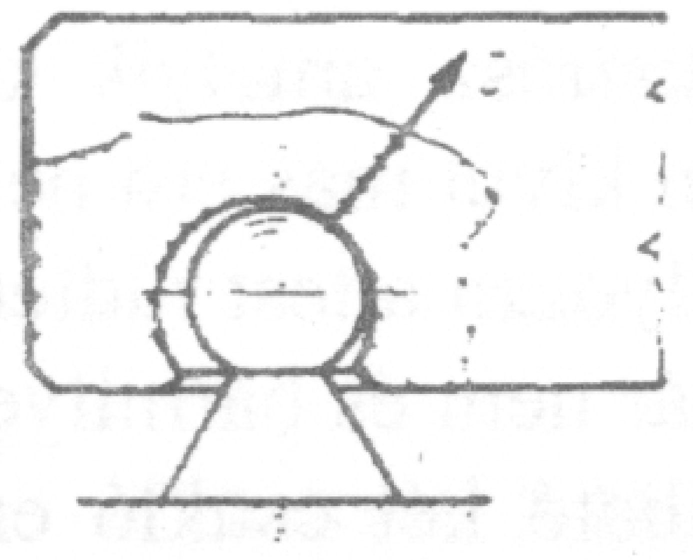
A görgős támasztás az egyszerű megtámasztáshoz hasonlóan csak egyféle elmozdulást akadályoz meg, így ez is elsőfokú kényszer.

2.5.4. Csukló

A gömbcsukló

A térbeli vagy a **gömbcsuklóban** egy gömb alakú üregben kisebb átmérőjű golyó mozog.

Ilyen található, pl. a gépkocsi botváltójában. A gömbcsukló megakadályozza a testek gömbközéppontjához tartozó pontjainak egymáshoz képesti elmozdulását, de lehetővé teszi, hogy e pont körül egymáshoz képesti elfordulását.



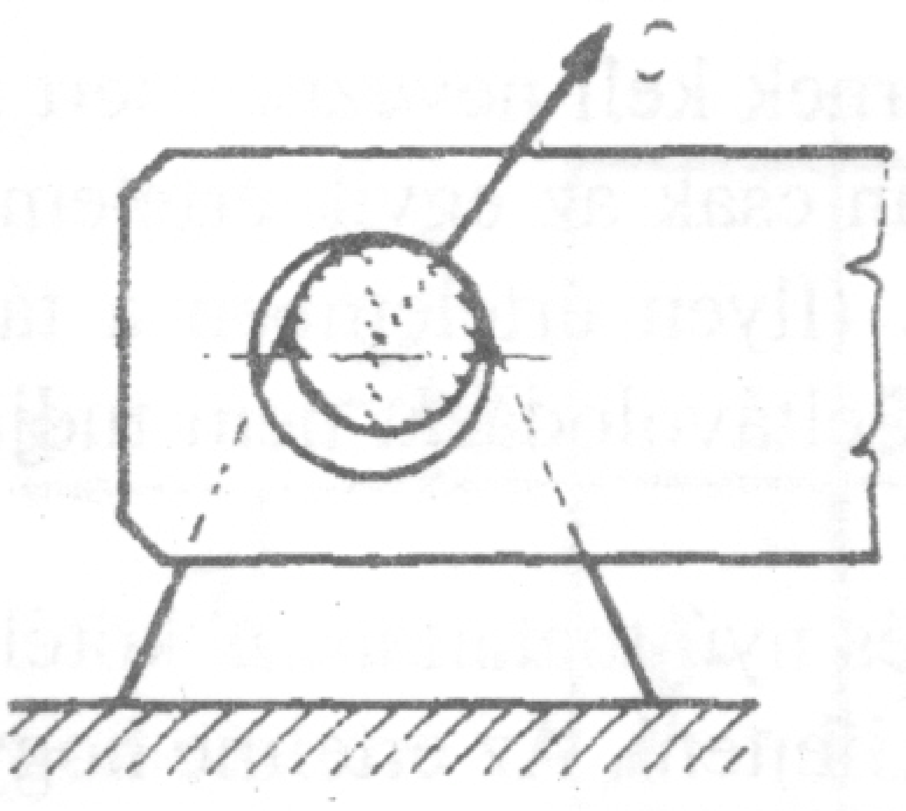
2.17. ábra

E kényszer fokszáma 3. A gömbcsukló három rúd erővel, az ún. csuklóponton átmenő három komponensével megadható erővel egyenértékű. A csuklóban ébredő reakcióerőről csak annyit tudunk, hogy hatásvonala átmegy a csukló középpontján, (súrlódásmentes esetben), iránya, nagysága ismeretlen. Az erőhatást támasztás útján adja át.

A gömbcsukló két ismeretlent jelent: egy térbeli erő nagyságát és irányát.

A síkbelicsukló

Síkbeli csukló két test között hengeres csap segítségével létesített kapcsolat.



2.18. ábra

A testek a csap körül egymáshoz képest elfordulhatnak és a csap tengelyének irányában elmozdulhatnak.

Erőátadás támasztás útján történik, vonal mentén megoszlónak tekinthető. Az eredő hatásvonala metszi a csukló tengelyét és rá merőleges. Tehát a reakció erő iránya és nagysága közvetlenül nem ismeretes.

A síkcsukló két ismeretlent jelent: egy síkbeli erő nagyságát és irányát.

A tapasztalat szerint a csap körüli elfordulás nem teljesen akadálytalan, mert jelen van un csapsúrlódás. Oka a csap és csapágy között fellépő csúszósurlódás. A mozgást akadályozó, az elfordulással ellentétesen működő erőpárt csapsúrlódási erőpárnak nevezzük.

A kísérletek szerint a csapsúrlódási erőpár maximális nyomatéka:

$W_{max} = \rho N$ (2.10)

N -csap reakció erő

ρ - arányossági tényező, amit csapsúrlódási sugárnak nevezünk, és kísérletek alapján $\rho = \mu \cdot r$ (2.11) képlettel számítható,

ahol' 'μ a csap és kerék közötti súrlódási tényező, 'r' a csap sugara.

2.5.5. A rúd

A statikai rúd (nevezik támasztó rúdnak is) az az alkatrész, amelyik két másik alkatrészhez csuklóval kapcsolódik és rá a csukló erőn kívül más erő nem hat. A rudat súlytalannak tekintjük. Ez a kényszer megakadályozza a test rúdtengely irányú eltolódását, erre merőleges eltolódást azonban már nem és bármilyen irányban el is fordulhat. Ha a rúd egyensúlyban van a ráható két csukló erő egyensúlyi erőrendszert alkot. Ideális, vagyis súrlódásmentes kapcsolatot feltételezve, csak rúdirányú erő hat.(A rudakra ható súlyerőt elhanyagoljuk) A rúddal húzást és nyomást is ki lehet fejteni. A reakció erő iránya ismert, közvetlenül csak a nagysága ismeretlen.

Mivel egyféle elmozdulást akadályoz meg ezért ez első fokú kényszer.

A statikai rúd és a mindennapi életben használatos rúd alakú test nem azonos, mert ez utóbbiban a csukló erőn kívül más erő is ébred.

2.5.6. Kötél

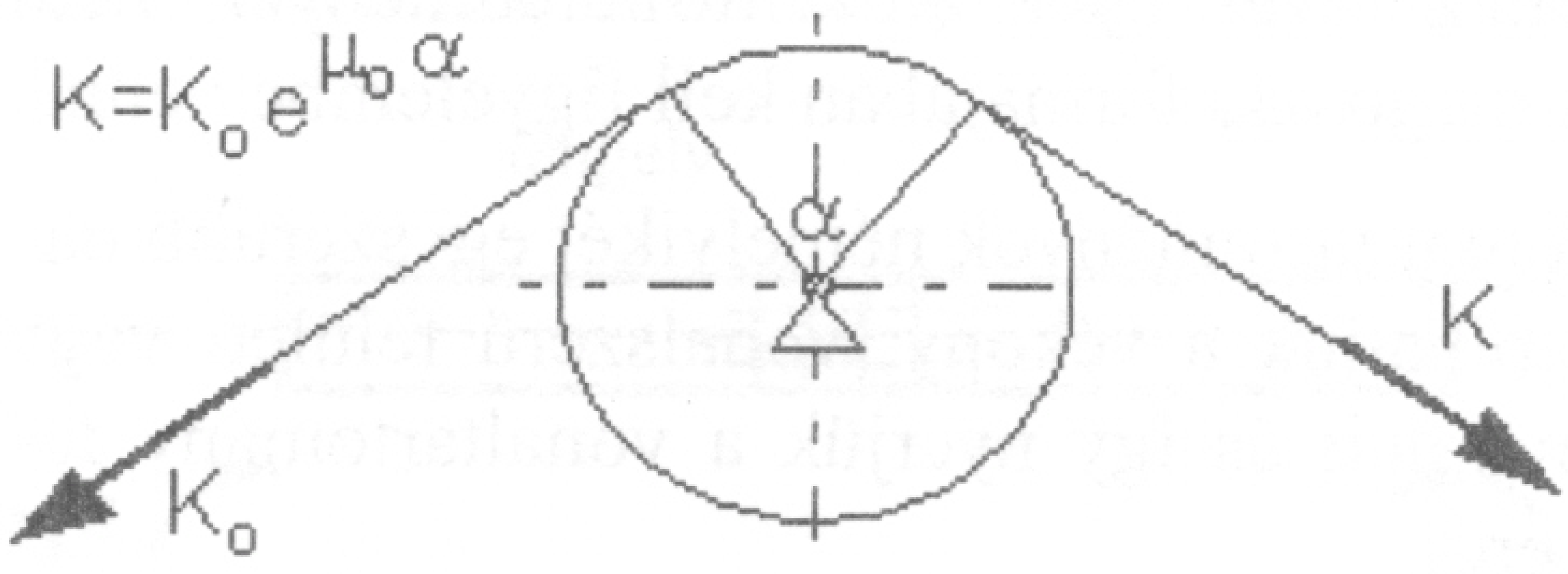
Ez is elsőfokú kényszer, de ezt feltételes kényszernek kell nevezni, mert a kötél az elmozdulást csak a kötél tengelyének irányában csak az egyik értelemben tudja megakadályozni, amikor a kötél megfeszül. (Ilyen értelemben a támasztás és görgő is feltételes kényszer, mert a két test eltávolodását nem tudja megakadályozni.

Az ideális kötél súlytalan, tökéletesen hajlékony és nyújthatatlan. A kötélerő hatásvonala a kötél egyenese. Csak húzó erőt lehet kifejteni. Az értelme hogy a kötél feszüljön. A reakcióerő iránya ismert, nagysága ismeretlen. Pl. villamos vezetékek, lámpatestek kifeszítése.

A kötélsúrlódás

Egy kötél a középponti szögnek megfelelő íven nyugszik érdes hengerfelületre hajlítva. Teljesen sima hengerfelszín esetén a kötél a nagyobb erő irányába megcsúszik. Érdes felszínnél viszont a henger és a ráfeszülő kötél között súrlódó erők ébrednek, amelyek a mozgást gátolják, esetleg meg is akadályozzák. Az elmozdulás határán, az egyensúly határhelyzetében a kötél két ágában ható erők közötti összefüggés:

$$K=K_0 e^{\mu_0 \alpha} \qquad (2.12)$$



2.19. ábra

ahol

μ : a súrlódási tényező a kötél és a henger között

α : a felfekvő kötélkerület középponti szöge [rad].

2.5.7. Befogás

Általában rúd alakú alkatrész szilárd rögzítése állványhoz, falhoz, alaphoz. A szilárd rögzítés sem elfordulást, sem elmozdulást nem enged meg, tehát képes bármilyen tulajdonságú akti erőrendszer kiegyensúlyozására. A megfogásban a reakció a rúd befogási keresztmetszetének súlypontjába redukálva $\underline{F}_R$ reakció erő is és $\underline{M}_R$ reakciós nyomaték (vagy erőpár) ad. Ezeknek sem nagyságát, sem irányát közvetlenül nem ismerjük. Ez a kényszer hatod fokú.

Összefoglalva

2.2. Táblázat

Kényser fokszáma	Kényszer típusa	Reakció erő		
		nagysága	iránya	hatásvonala
elsőfokú	Támasztás	?	√	√
	kötél	?	√	√
	görgő	?	√	√
	statikai rúd	?	√	√
harmadfokú	gömb csukló	?	?	√
ötödfokú	síkbeli csukló	?	?	√
hatodfokú	befogás	?	?	?

? számítandó érték

√ ismert

2.6. MEGOSZLÓ ERŐRENDSZEREK

Ha az erő helye a vizsgálatban szereplő többi mérethez nem elhanyagolható, vagy a koncentrált erő alkalmazásával nyert közelítő eredmények nem kielégítőek, akkor az erőt valóságos megoszló formájában kell figyelembe venni.

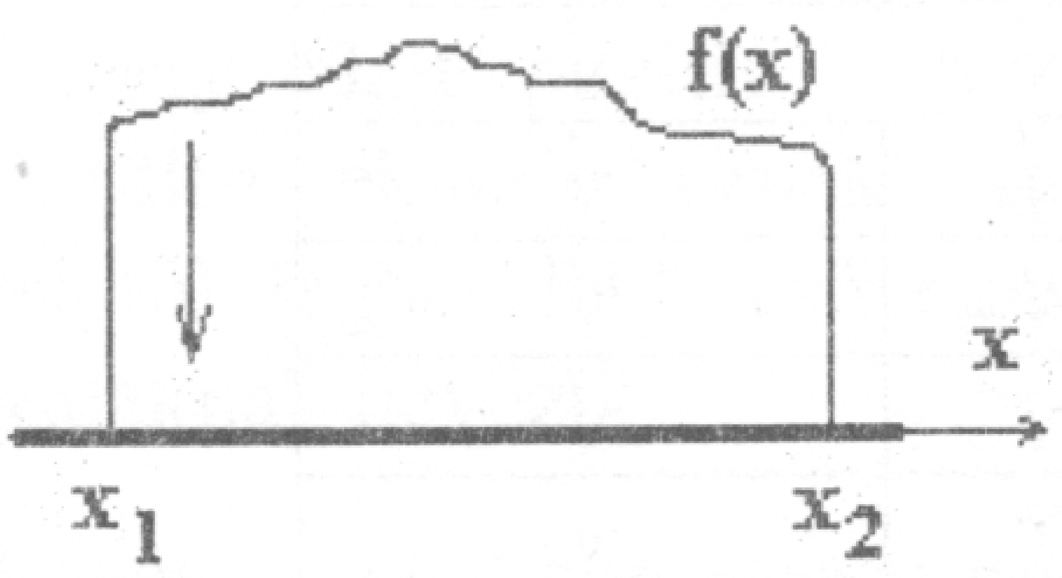
A valóságos felületi vagy térfogati tartományok némelyikét egyszerűbb tartománnyá alakíthatjuk át. Elhanyagolhatjuk a vékony, vonalszerű felületi vagy térfogati tartományok vastagsági méreteit és így nyerjük a vonaltartomány fogalmát, ill. vonal mentén megoszló erőt.

A megoszló erők vizsgálatához felhasználhatjuk a koncentrált erők statikájában megismert módszereket, eredményeket, ha a megoszlási tartományt pontszerű részekre osztjuk. Ily módon a megoszló erőt sok kis koncentrált erők összegégévé alakítjuk át, és megoszló erőrendszer elnevezést használjuk. A felosztás minden határon túli finomításával a differenciál- és integrálszámítás felhasználásával eredményeink pontossá tehetők.

A megoszló erőrendszer eredőjének nevezzük a vele egyenértékű legegyszerűbb felépítésű, koncentrált erőkből álló erőrendszert, vagyis lehet egyetlen koncentrált erő, vagy erőpár vagy erő és erőpár. De természetesen a megoszló erőrendszer is alkothat egyensúlyi erőrendszert.

2.6.1. Az erőrendszer jelölése és megadása

A következő 2.20.ábrán egy egyenes vonal mentén megoszló és a vonalakra merőleges irányú terhelési ábra látható. (fajlagos erő vagy intenzitás ábrának is nevezik)



2.20 ábra

Valamely „P” pontban az intenzitás arányos a hozzárajzolt metszék hosszúságával.

Az intenzitást f = f(x) függvény írja le.

Gyakori eset a f = konstans (egyenletesen megoszló erőrendszer)

2.6.2. A megoszló erőrendszer eredője

Az eredő erő nagyságát $R = \int f(x)dx$ képlettel számíthatjuk. (2.13)

Ha ismert f(x) intenzitás függvény, valamint a tartomány határát meghatározó X_1, X_2 koordináták, a jelölt összegzés az integrálszámítás segítségével pontosan meghatározható: (2.20 . ábra alapján)

$$R = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad (2.14)$$

Az eredő helyét a nyomatéki tétel alapján határozzuk meg. A tétel így fogalmaz, hogy két egyenértékű erőrendszernek a tér tetszőleges pontjára vonatkozó nyomatéka egymással megegyezik. Más megfogalmazásban úgy is mondhatjuk, hogy az erőrendszer bármely pontra számított nyomatéka megegyezik az eredő erő ugyanarra a pontra számított nyomatékával.

Koncentrált erők esetén a

$$x_R \cdot R = \sum x_i \cdot F_i \quad (2.15) \qquad x_R = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{R} \quad (2.16)$$

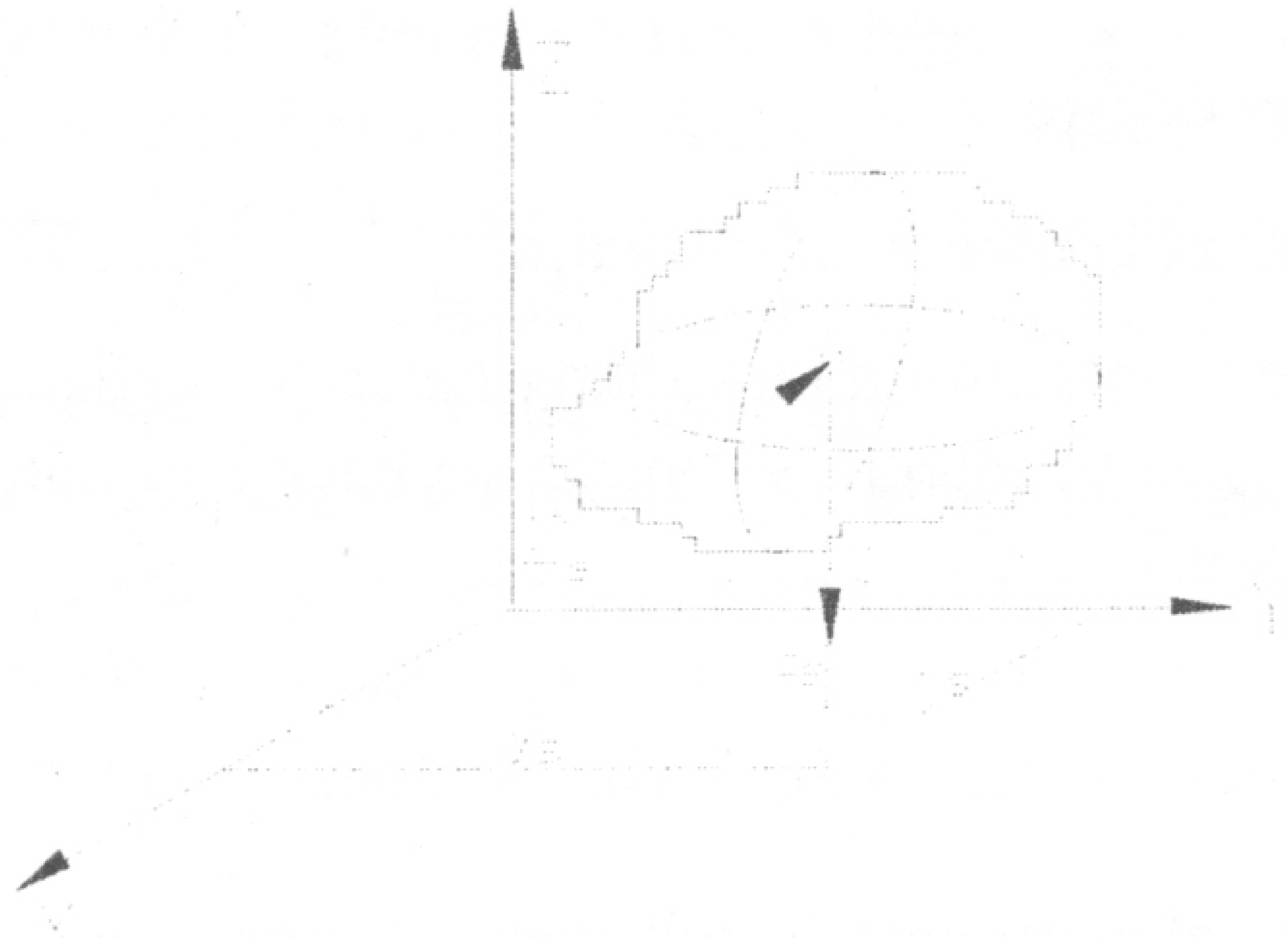
Megoszló erőrendszer esetén $$x_R = \frac{\int x \cdot f(x)dx}{R} \quad (2.17)$$

A képlet alapján kimondható, hogy az eredő erő a terhelési ábra súlypontján megy keresztül.

2.6.3. Testek súlypontja

Műszaki faladataink során a nehézségi erőt ($g = 9.81\ m/s^2$) a test térfogatában folyamatosan megoszló párhuzamos erőrendszernek tekinthetjük. A testet mindenhatáron túl finomítva un. elemi koncentrált erők összességeként fogjuk fel. Azt a pontot, amelyen a testre ható nehézségi erőrendszer erdője minden helyzetben keresztül megy a test súlypontjának, nevezzük és a hatóerőt, pedig súlyerőnek nevezzük. A súlypont helyét a test alakja és a ráható nehézségi erő intenzitásfüggvénye határozza meg.

Ha a testet homogénnak tekintjük a súlypont csak a test alakjától függ. Ez ad lehetőséget arra, hogy elvonatkoztassunk a test anyagi tulajdonságaitól és a súlypont fogalmát, kiterjesszük a síkbeli ill. vonal menti tartományokra is. E utóbbi esetekben természetesen átvitt értelmű. Súlyvonalnak a súlyponton áthaladó bármely egyenest nevezzük. A szimmetria pont egyben súlypont is.



2.21. ábra

A súlypont helyvektorát a nyomatéki tétel alapján a következőképpen számítjuk:

$$\underline{r}_S = \frac{\int\limits_{(G)} \underline{r} \cdot dG}{G} = \frac{\int\limits_{(V)} \underline{r} \cdot g \cdot \rho \cdot dV}{\int\limits_{(V)} g \cdot \rho \cdot dV}$$

(2.18)

$\underline{r}$ - az elemi részhez mutató helyvektor

ρ – a sűrűség

2.6.4. Síkidomok súlypontja

A $\underline{G}$ súlyú, állandó vastagságú homogén lemezt bontsuk nagyszámú kis részekre. Az egyes részekre ható súlyerőket G_1, G_2,....G_i -vel jelöljük, míg az egyes részek felületeit rendre A_1, A_2, ...A_i -vel. A G súlyerő vektora az egyes részekre ható súlyerők eredője, ennek hatásvonala átmegy a test S súly pontján. A fenti képlet alapján ill. a lemezvastagság elhanyagolásával a térbeli integrálás síkra redukálódik.

A műszaki gyakorlatban gyakran találkozunk olyan testekkel, tartományokkal, amelyek ismert súlypontú részekre bontható. Itt is alkalmazva a nyomatéki tételt

$G_1 \cdot \underline{R}_1 + G_2 \cdot \underline{R}_2 + .. + G_i \cdot \underline{R}_i = G \cdot \underline{R}_S$

$\Sigma\, G_i \cdot \underline{R}_i = G \cdot \underline{R}_S \underline{R}_s = \dfrac{\sum \underline{R}_i \cdot G_i}{G}$ (2.19)

A fenti összefüggéssel felírtuk a súlypont keresett $\underline{R}_s$ koordinátáját meghatározó egyenletet. Figyelembe véve, hogy

$G_i = A_i \cdot v \cdot \rho \cdot g$ v - homogén lemez állandó lemezvastagsága

$G = A \cdot v \cdot \rho \cdot g$

$\underline{R}_s = \dfrac{\sum \underline{R}_i \cdot A_i}{A}$ Komponenseire bontva

$X_s = \dfrac{\sum x_i \cdot A_i}{A}$ (2.20) $Y_s = \dfrac{\sum y_i \cdot A_i}{A}$ (2.21)

Ha a vizsgált lemezalakú test folytonos tömegeloszlású a fenti képletekben a summázások helyett integrálás irható.

$$X_s = \frac{\int x \cdot dA}{A} \qquad Y_s = \frac{\int y \cdot dA}{A} \qquad (2.22)$$

A fenti összefüggés számlálóiban szereplő integrálokat a vizsgált síkidom ELSŐRENDŰ NYOMATÉK-nak, vagy statikai nyomatéknak nevezik. Pontosabban a vizsgált síkidom tengelyre számított elsőrendű nyomatéka:

$$M_{Sy} = \int x \cdot dA \qquad M_{SX} = \int y \cdot dA \qquad (2.23)$$

2.6.5. Elemi síkidomok súlypontjának koordinátái

Ha a vizsgált testben vagy síkidomban szimmetria mutatkozik, akkor a súlypont különleges helyen található. Ismerve az alábbi tételeket a súlypont meghatározása egyszerűbbé válik.
Síkszimmetria esetén a súlypont egyik koordinátája zérus, azaz a súlypont a szimmetria síkra esik. Tengely szimmetria a esetén két koordináta zérus, vagyis a súlypont a szimmetriatengelyen van. Pontszimmetria esetén a szimmetriapont egyben a súlypont is.

A műszaki életben leggyakrabban előfordulók síkidomok súlypontjai a I.. mellékeltbe található

2.6.6. Összetett síkidomok súlypontjának koordinátái

Bontsuk a síkidomot olyan részekre, amelyeknek ismert a súlypontjának számítási képletei, majd 5.3.2. pontban leírtakhoz hasonlóan a nyomatéki tétel felhasználásával a következő képleteket kapjuk:

$$X_s = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{A} \qquad (2.18)$$

$$Y_s = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{A} \qquad (2.19)$$

x_i, y_i - elemi síkidomok koordinátái,
A_i - elemi síkidomok területei
Igen előnyösen használható a kiegészítés tétele, amely szerint csonka idomot kiegészítjük teljes idommá és a kiegészítő rész statikai nyomatékát és területét kivonjuk a teljes idom statikai nyomatékából ill. területéből.

Egyensúlyi feladatok megoldása

Az egyensúlyi feladatok célja az ismert aktív erőket egyensúlyban tartó ismeretlen reakció erők meghatározása.

A feladat megoldásának elve, hogy a testre ható aktív erők és reakció erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak, amelyekre teljesülniük kell az egyensúly feltételeinek. A reakció erők ismeretlen jellemzőinek betűjeleit tartalmazó egyensúly feltételeket egyensúlyi egyenleteknek nevezzük. Feladatunk tehát az egyensúlyi egyenletek megoldása.

Egyensúlyi egyenletek

Az egyensúly általános feltételei vektorfeltételekben: $\sum \underline{F}_i = 0$, $\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_i = 0$ amelyek skalár alakba kibontva 6 skalár egyenletnek felel meg. Az egyensúlyi egyenletek megoldása megadja az ismeretlen reakció jellemzőket.

Statikai határozottság kérdése

Az egyensúlyi feladatok megoldása során három esettel találkozhatunk:

1. Az aktív- és reakcióerőkből álló erőrendszer a reakcióerők ismeretlen jellemzőinek csak egyetlen, egyenként meghatározott értéke mellett lehet egyensúlyban. A feladatnak tehát egyértelmű megoldása van. Az ilyen feladatot statikailag határozottnak nevezzük.
2. A reakciójellemzők többféle értékcsoportja mellett is teljesülnek az egyensúly feltételei. Tehát az egyensúlyi egyenleteknek több, általában végtelen sok megoldása van. Ezeket statikailag határozatlannak nevezzük.
3. Ha a reakciójellemzőknek nem lehet olyan értéket adni, amely mellett az egyensúly feltételei teljesülnek. Ekkor a feladat statikailag túlhatározott.

A fenti esetek azzal vannak összefüggésbe, hogy a testet aktív erők ellenében sokféleképpen rögzíthetjük. Ha az alkalmazott kényszerek mennyisége és minősége nem megfelelő, akkor nem lehet egyensúly, tehát statikailag határozatlan feladatot kapunk.

Ha a szükségesnél több kényszert alkalmazunk a test rögzítéséhez, akkor a reakcióerők meghatározása statikailag határozatlan feladatot jelent.

A statikai határozottság kérdését, úgy döntjük el, hogy összevetjük a reakcióerők ismeretlen jellemzőinek számát a felírható egyensúlyi egyenletek számával. Egyensúlyi egyenletek száma általános térbeli erőrendszer esetén legfeljebb hat, síkbeli feladatnál három.

Ha az ismeretlenek száma kevesebb, mint a felírható független egyenletek száma, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, tehát statikailag túlhatározott feladatról van szó.

Ha az ismeretlenek száma több, végtelen sok megoldás van, tehát statikailag határozatlan feladat.

Ha az egyenletek száma és az ismeretlenek száma egyenlő, akkor egyértelmű megoldás van, tehát statikailag határozott feladatunk van. A továbbiakban ilyen statikailag határozott feladatokról beszélünk.

3. SZILÁRDSÁGTAN

Az alkatrészeket, részegységeket úgy kell méretezni, hogy az üzemi terhelések mellett megjelenő járulékos igénybevételek következtében károsodást ne szenvedjen. Ilyen járulékos igénybevételek keletkezhetnek szállítás, raktározás vagy helytelen kezelés következtében.

Finommechanikai gyártmányokban az üzemi terhelés általában nem nagy, sokkal jelentékenyebbek a már említett járulékos igénybevételek. A méretezés ill. a számítások elvégzése mindig tanácsos, főleg ha az alkatrészek, készülékék terhelési adatai megbízhatóan felvehetők és ezek az értékek nem csekélyek. A számítási képletek segítségével összefüggéseket kaphatunk az erők és méretek között, amely a tervezést és ennek következtében a gyártmány méretét befolyásolja, ill. más irányú következtetéseket is le tudunk vonni belőlük.

A tervezés során két módszert követhetünk:

Az adott vagy felvett terhelésekből az alkatrész szóban forgó helyén, ez a hely az ún. kritikus keresztmetszet, ébredő feszültségeket vagy alakváltozásokat hasonlítjuk össze a megengedett feszültséggel vagy alakváltozással.

Vagy fordítva járunk el. A terhelésből, a megengedett alakváltozásból és az anyag által megengedett feszültségből számítjuk ki a szükséges méreteket.

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy a szilárdságtan a terhelés folytán keletkezett alakváltozások és belső erők tanulmányozása, különböző méretezési módszerek kidolgozása.

Gyakran nem lehetséges a valóságos terhelési viszonyokat pontos rögzítése, ezért egyszerűsítő feltevéseket kell szabni. Természetesen törekedni kell arra, hogy a valóságos viszonyokat minél inkább megközelítsük. Az egyszerűsítő feltevések olyan célt is szolgálnak, hogy a számítások pontossága értelemszerűen ne menjen túl bizonyos határon.

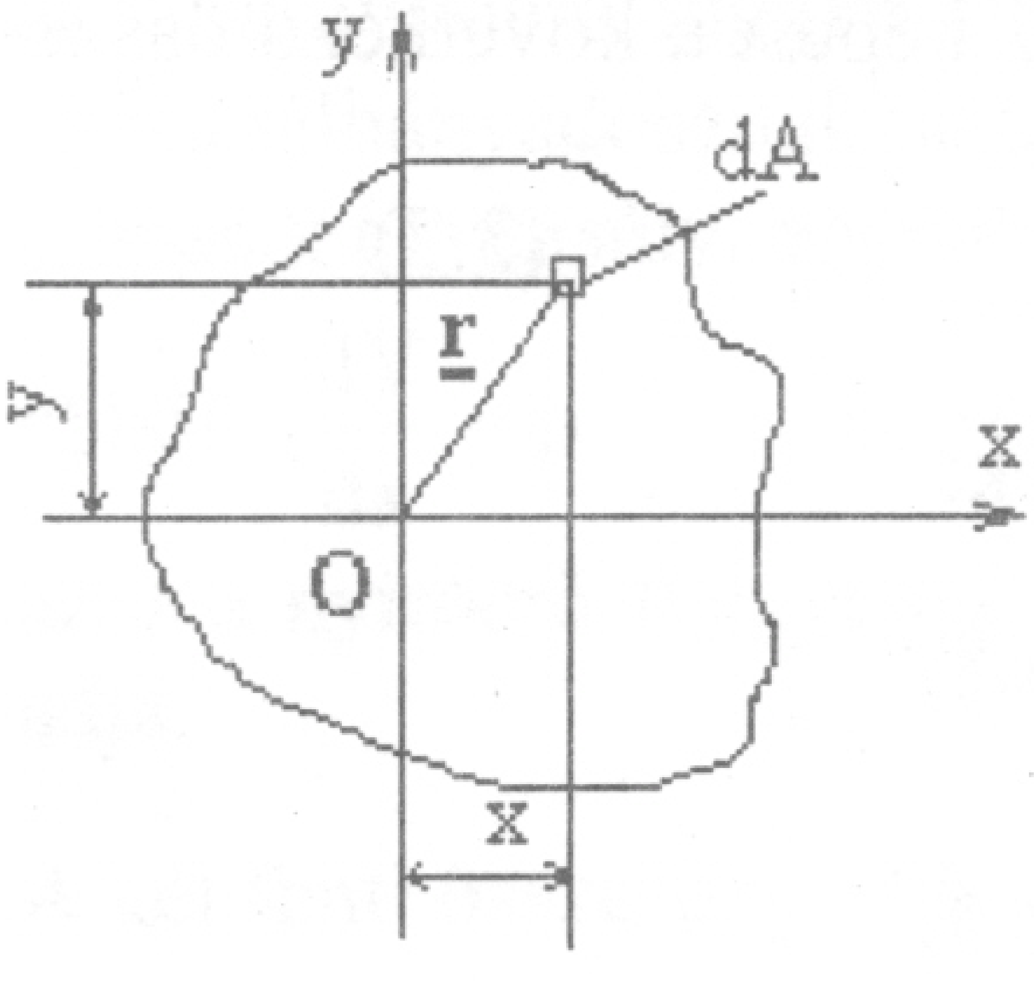
Egyszerűsítő feltételezések:

- ⇒ a vizsgált alkatrészekre ható külső erők és az általa okozott vagy keletkezett belső erők egyensúlyban vannak.
- ⇒ az anyag homogén, izotróp (a rugalmas alakváltozás minden irányban azonos)
- ⇒ a terheletlen szerkezeti elemek, egységek feszültségmentesek (gyártási eljárás során, hőkezelésből visszamaradóan stb.)
- ⇒ a terhelés és az alakváltozás közötti összefüggés egyértelmű és lineáris.

3.1 Síkidomok másodrendű nyomatékai

3.1.1 Alapfogalmak

Ezek a mennyiségek csak a vizsgált keresztmetszetek geometriai alakjától függnek. A másodrendű nyomaték jele: „I" (Inercia), az indexelésben szereplő betűk annak a tengelynek, tengelypárnak vagy pontnak a jelei, amelyikre számítjuk. A 3.1. ábra jelölései szerint a következő másodrendű nyomatékokat definiáljuk:



3.2. ábra

1. Tengelyre számított másodrendű nyomaték (equatoriális)

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA\,,\quad I_y = \int_{(A)} x^2 dA \qquad (3.1)$$

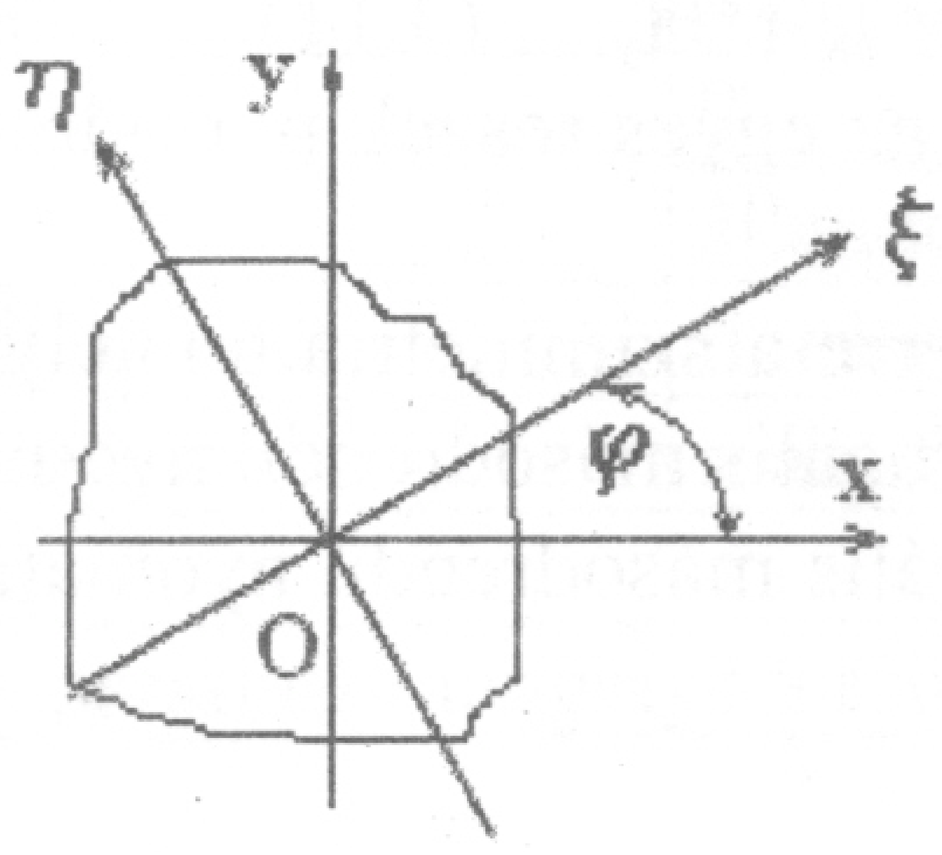
2. Tengelypárra vonatkozó (centrifugális) másodrendű nyomaték:

$$I_{xy} = \int_{(A)} x \cdot y dA \qquad (3.2)$$

3. Pontra vonatkozó (poláris) másodrendű nyomaték

$$I_O = \int_{(A)} r^2 dA \qquad (3.3)$$

Egymással szöget bezáró tengelyekre vonatkozó másodrendű nyomatékok közötti összefüggés:



$$I_\xi = \underline{n}_\xi^* \underline{\underline{I_0}} \cdot \underline{n_\xi} = \frac{\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{matrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{matrix}}{\cos\varphi \quad \sin\varphi} =$$

$$I_x\cos^2\varphi + I_y \sin^2\varphi - 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \qquad (3.4)$$

A [] a síkidom 'O' ponthoz tartozó másodrendű nyomatéki mátrixnak nevezzük.

3.2. ábra

Úgy fogalmazhatunk, hogy a nyomatéki mátrixot meg kell szorozni a másodrendű nyomaték indexének megfelelő tengely(ek) egységvektorának egy sor- és oszlopvektorával.

A fentieknek megfelelően:

$$I_\varphi = \underline{n}_\varphi^* \, \underline{\underline{I}}_0 \cdot \underline{n}_\varphi \quad = I_x \sin^2\varphi + I_y \cos^2\varphi + 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \qquad (3.5)$$

$$I_{\xi\varphi} = \underline{n}_\xi^* \, \underline{\underline{I}}_0 \cdot \underline{n}_\varphi \quad = I_y \sin\varphi \cos\varphi - I_y \sin\varphi \cos\varphi + I_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \qquad (3.6)$$

A ponton átmenő valamennyi tengelyre számított másodrendű nyomatékok közül a legnagyobb és legkisebb értéket adó tengelyt főtengelynek nevezzük és 1, 2 -vel indexeljük.

A főtengelyek φ_0 hajlásszögét az eredeti x tengelyhez képest a következő összefüggéssel számíthatjuk ki: $\varphi_0 = \left[\operatorname{arctg}\dfrac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \pm k\Pi\right]$ (3.7)

A főtengelyekre számított fő- másodrendű nyomatékok:

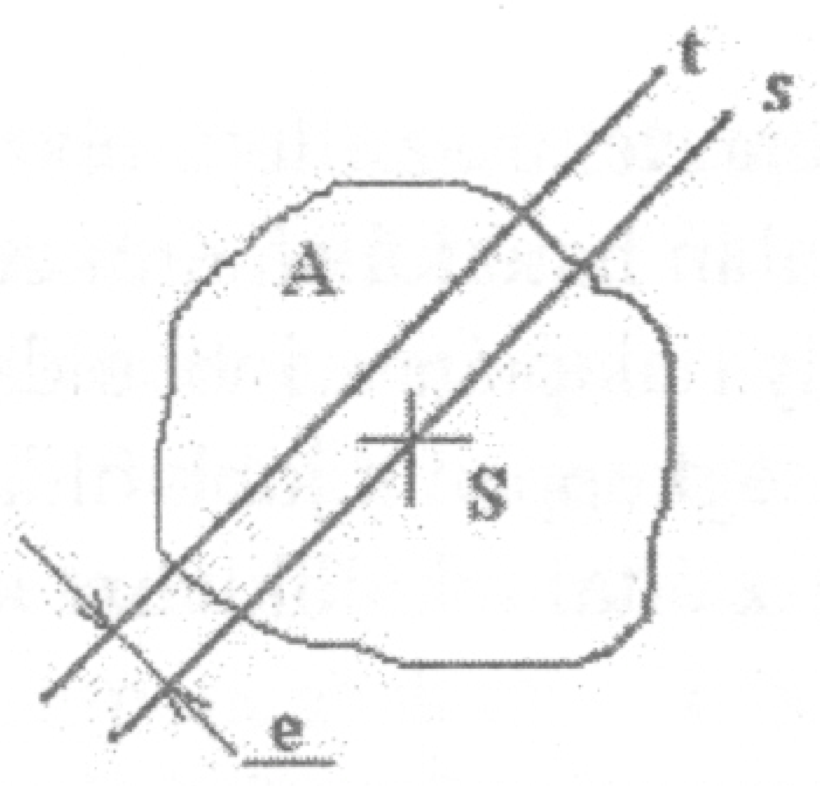
$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} \qquad (3.8)$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} \qquad (3.9)$$

$$I_{12} = 0 \qquad (3.10)$$

3.1.2. Tételek

1. Egy tetszőleges "O" pontra számított poláris másodrendű nyomaték egyenlő a ponton átmenő, két egymásra merőleges, különben tetszőleges irányú tengelyekre számított másodrendű nyomaték összegével. $I_p = I_x + +I_y$ (3.11)
2. Az egész síkidom másodrendű nyomatéka egyenlő az egyes részek másodrendű nyomatékainak összegével.
3. Ha a síkidomnak van szimmetria tengelye, akkor erre a szimmetria tengelyre és az erre merőleges bármely másik tengelyre a centrifugális másodrendű nyomaték zérus. Azokat a tengelyeket, melyekre a centrifugális másodrendű nyomaték zérus főtengelyeknek nevezik.
4. Steiner tétel, vagy párhuzamos tengelyek tétele:



3.3. ábra

A síkidomnak egy "t" jelű tetszőleges egyenesre számított másodrendű nyomatékát megkapjuk, ha "t" -vel párhuzamos, és a 'S' súlyponton átmenő tengelyre számított másodrendű nyomatékhoz hozzáadjuk a síkidom területének és a tengelytávolság négyzetének szorzatát.

$$I_t = I_s + e^2 A \qquad (3.12)$$

3.2. Igénybevétel

3.2.1 Az igénybevétel fogalma

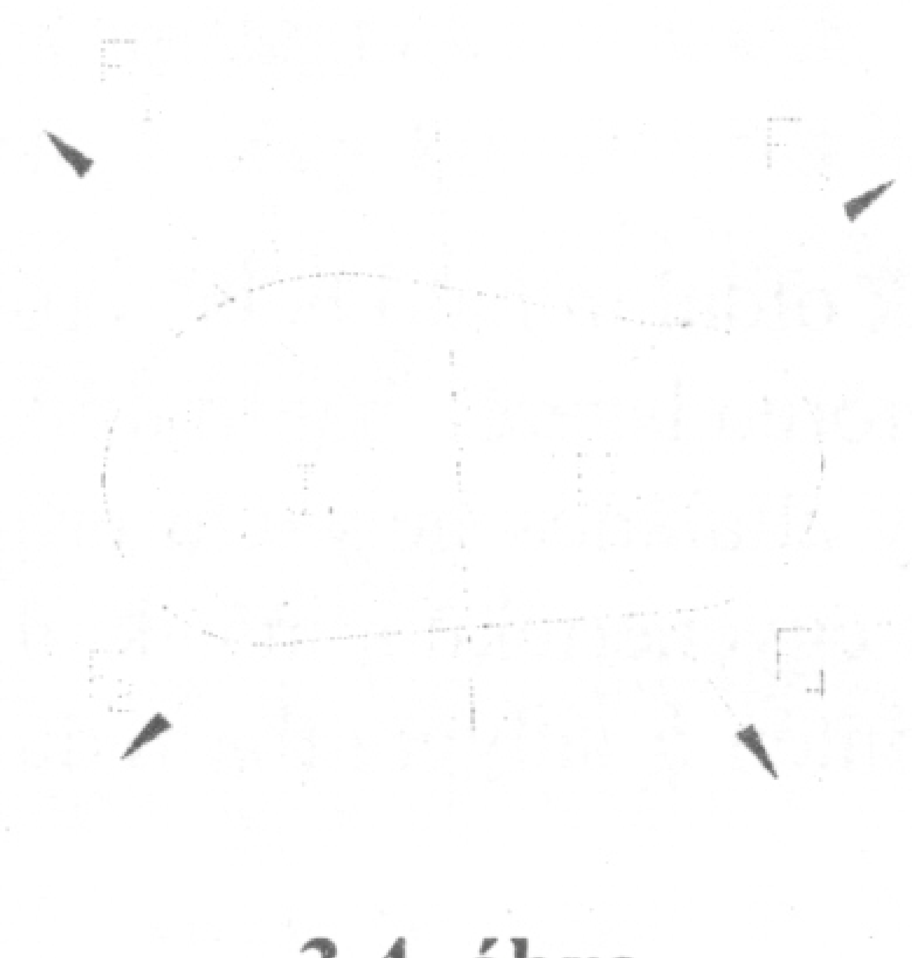
Ha a szilárd test igénybevételéről beszélünk, akkor ezen általában azt értjük, hogy a testet külső erők támadják meg, amelyek hatására a test részei között belső erők keletkeznek. Ezeknek a belső erőknek a tulajdonságai függnek:

- a külső erőktől
- a test anyagi tulajdonságaitól

A külső erők

- vagy nem alkotnak egyensúlyi erőrendszert ⇒ tehát a dinamika tárgykörébe sorolható
- vagy egyensúlyi erőrendszert alkot ⇒ szilárdságtan tárgyköre

A továbbiakban csak az egyensúlyi erőrendszerrel terhelt, nyugalomban lévő testek igénybevételeivel foglalkozunk. Az igénybevétel tárgyalásakor a belső erők olyan tulajdonságait vizsgáljuk, amelyeket a test alakja és a külső erők alapján meg tudunk határozni anélkül, hogy az anyagi tulajdonságokat figyelembe kellene venni. A vizsgálat céljából bontsuk fel a testet két részre egy metszőfelülettel.



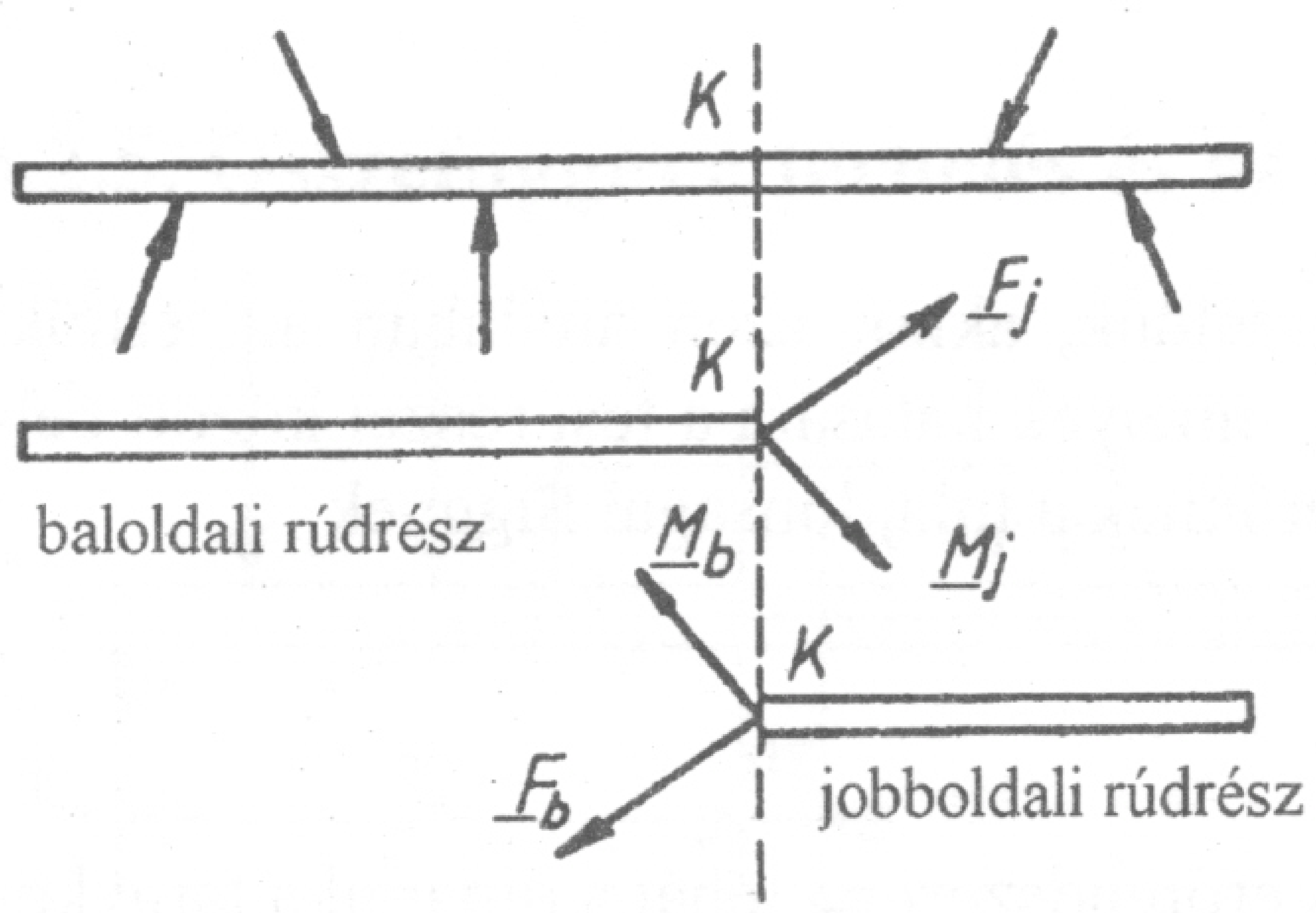
3.4. ábra

(3.4. ábra) Erről a metszőfelületről ill. a felület mentén elhelyezkedő anyagról akkor mondjuk, hogy szilárdsági igénybevétel terheli, ha a felület által elválasztott két rész között erőhatások, belső erők jönnek létre. Az egyik rész hatása a másikra nyilvánvalóan a felület mentén megoszló erőrendszer formájában adódik át. A hatás - ellenhatás törvény értelmében a másik rész hatása az előbbitől csak értelemben különbözik, ezért elegendő az egyik rész vizsgálata. Ez a belső erőrendszer jellemző a metszőfelület igénybevételére.

3.2.2. A belső erők tétele

A test bármely része által kifejtett belső erőrendszer egyenértékű az illető részre ható külső erők erőrendszerével. A metszőfelület baloldalán ható külső erőket a felületen támadó belső erők is és az egész test egyensúlya alapján a jobboldali külső erők is egyensúlyi erőrendszerré egészítik ki. Szükségképpen a jobb oldali részre ható külső erőrendszer egyenértékű a jobboldali rész által a baloldalira kifejtett belső erőrendszerrel.

A belső erők meghatározása céljából vágjuk ketté képzeletben a rudat. (3.5. ábra)



3.5. ábra

Az elvágással nyert mindkét rúdrésznek önmagában is egyensúlyban kell maradnia. A bal oldali oldalrész csak akkor maradhat egyensúlyban, ha a jobb oldali rúdrészen található erőhatásokkal egyensúlyt alkot. Helyezzük át, REDUKÁLJUK, a "K" keresztmetszetbe a jobb oldali rúdrészen található erőket. A redukció eredményeként a "K" keresztmetszetben működni fog egy $\underline{F}_j$ erő és egy $\underline{M}_j$ nyomaték. Ez az erő és nyomaték egyenértékű a "K"-ban ébredő belső erőkkel.

A jobb oldali rúdrész vizsgálatát az előbbihez hasonlóan elvégezve $\underline{F}_b$ erőt és egy $\underline{M}_b$ nyomatékot kapunk.

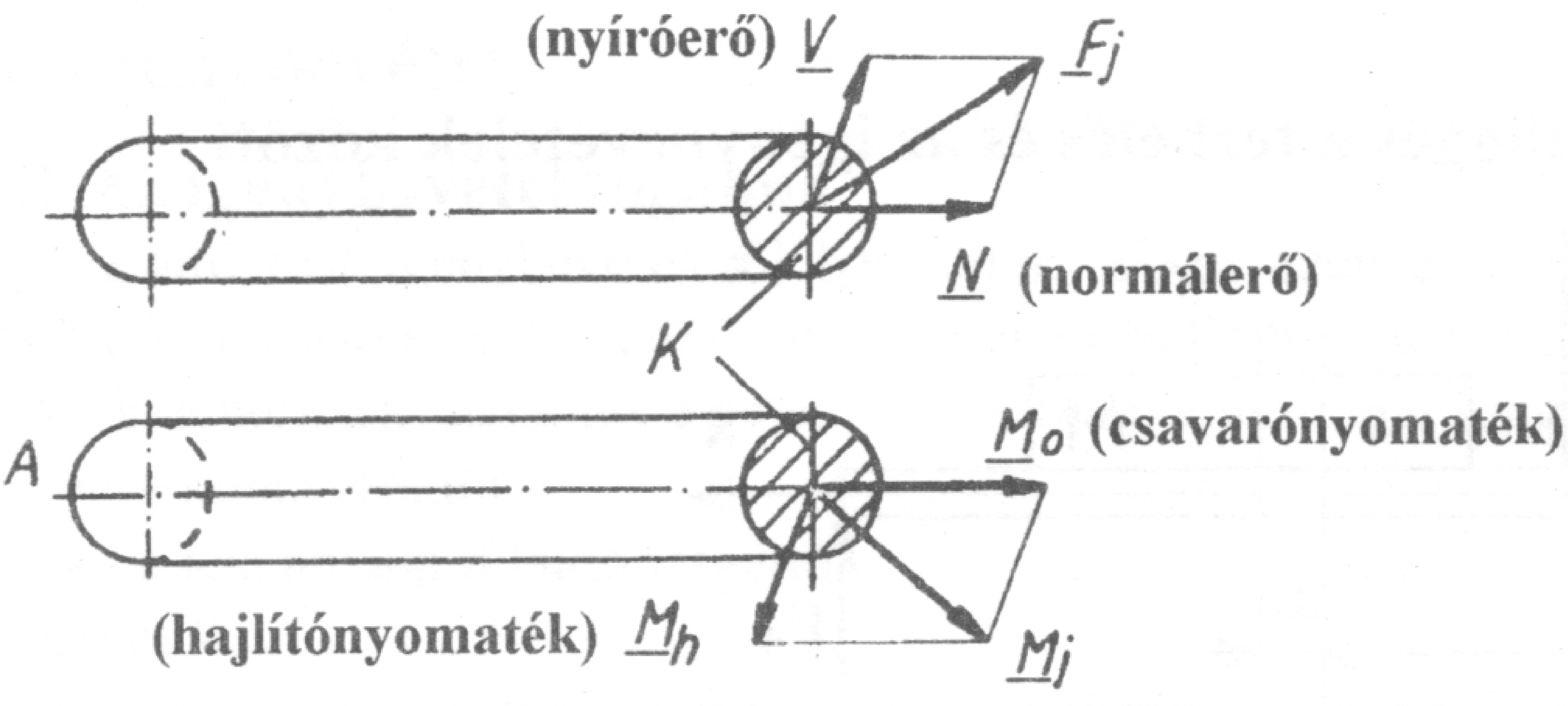
Newton I. törvénye a hatás - ellenhatás vagy akció - reakció elvén a $\underline{F}_j$ és $\underline{F}_b$ valamint a $\underline{M}_j$ és $\underline{M}_b$ megegyező nagyságú és irányú, de ellentétes értelmű vektorok.

3.2.3 Az igénybevétel fajtái:

A keresztmetszet igénybevételének jellemzésére az egyik oldalon ható belső erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába redukált erőrendszerét használjuk, amely általában egy a súlyponton átmenő erőből és egy általános helyzetű erőpárból áll. A belső erők tétele alapján ez az erőrendszer egyenértékű a másik oldalon ható külső erőrendszerrel, amely erőrendszert szintén a súlypontba redukálhatunk.

A keresztmetszet igénybevételén tehát a keresztmetszettől egy oldalon levő rúdrészre ható külső erők eredőjét értjük. A keresztmetszet igénybevételére jellemző redukált erőrendszert a keresztmetszet súlypontjába hatóerőből és nyomatékból áll. Bontsuk fel az erőt és a nyomatékot, vagy más szóval az erőpárt, a keresztmetszet síkjába eső és arra merőleges vektorú komponenseire.(2.6.ábra) Ezek a komponensek egy - egy igénybevétel fajtára jellemzőek.

A keresztmetszetre merőleges erőkomponenst normálerőnek, vagy rúderőnek



3.6. ábra

nevezzük és „N " - el jelöljük. A normálerő irányától függően húzóerő vagy nyomóerő, azaz a keresztmetszetet húzásra vagy nyomásra vettük igénybe.

A keresztmetszet síkjába eső erő komponens a nyíró erő, jele: „V ". A keresztmetszetet nyírásra veszi igénybe. A keresztmetszetre merőleges erőpárvektort M_{cs} csavaró-nyomatéknak, a keresztmetszet síkjába fekvőt M_h hajlító-nyomatéknak nevezzük.

Ha a négy komponens közül csak egy különbözik zérustól, akkor a keresztmetszet igénybevétele tiszta húzás vagy nyomás, tiszta nyírás, tiszta hajlítás vagy tiszta csavarás.

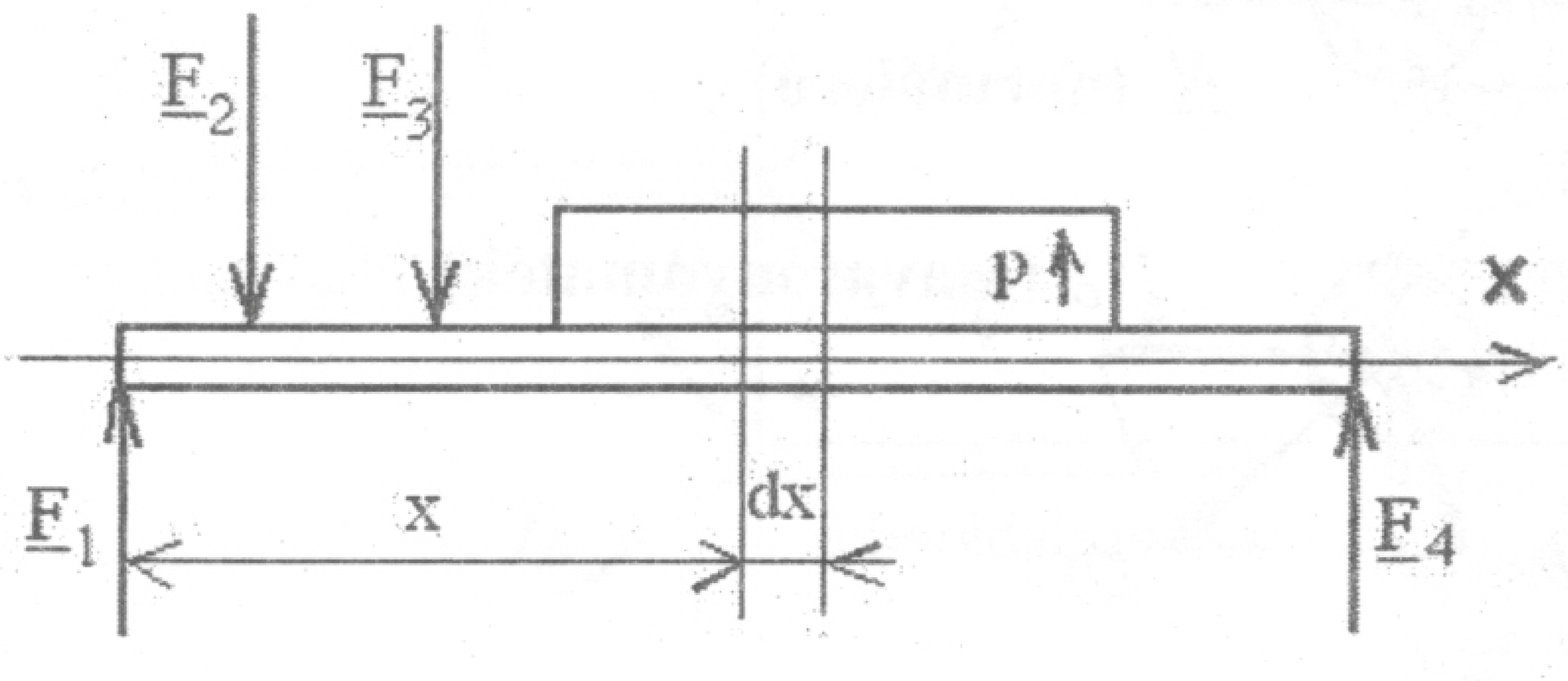
Előjel szabály

Az egyes igénybevételeket kifejező erőknek és nyomatékoknak előjelet is adunk azon egyszerű szabály szerint, melynek értelmében, ha az igénybevételt jellemző erő vagy nyomaték vektora a felvett koordináta rendszer pozitív tengelyirányaival egyértelmű, akkor az illető igénybevétel pozitív, ellenkező esetben negatív.

3.2.4 Igénybevételi függvények

Az egész rúd igénybevételének megítéléséhez valamennyi keresztmetszetének igénybevételét meg kell határozni. Az a függvény, amelyik a keresztmetszetek helyét leíró független változóhoz hozzárendel valamelyik igénybevételi fajta értékét, **igénybevételi függvénynek** nevezzük. Ilyen módón beszélhetünk normálerő, nyíróerő, csavaró-nyomatéki és hajlító-nyomatéki függvényről.
Az igénybevételi függvények független változója a rúd alakjától függően sokféleképpen választható. Például görbe rúd esetén célszerű polárkoordinátát használni.

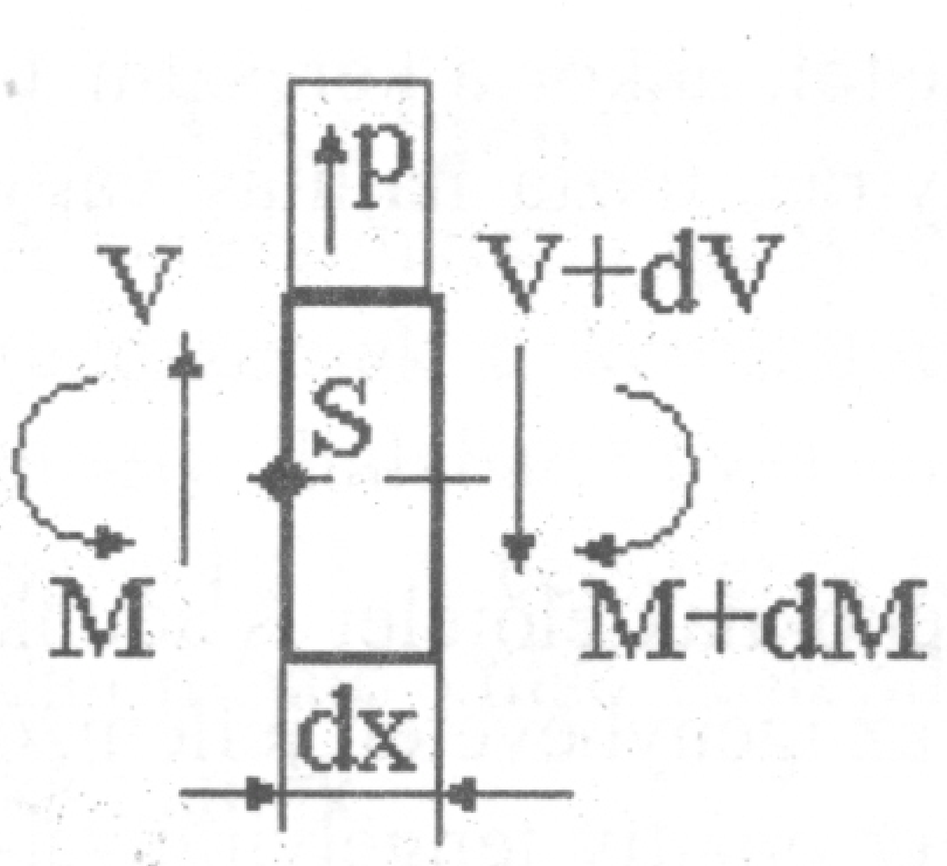
3.2.5. Összefüggés a terhelés és az igénybevételek között



3.7. ábra

Terhelje a rudat az xy síkban olyan egyensúlyi erőrendszer, mely a koncentrált és megoszló, a rúdra merőleges erőkből áll.

A hajlító-nyomaték és a nyíróerő közötti analitikus összefüggés megállapítása végett a rúdból vágjunk ki egy ’x’ keresztmetszet után következő dx darabot.



3.8. ábra

Az elemi rúdrész bal oldali végét az $\underline{M}$ és $\underline{V}$ nyíróerő terheli a balról elhagyott, jobb oldali végét $\underline{M}+d\underline{M}$ hajlító-nyomaték és a $\underline{V}+d\underline{V}$ nyíróerő terheli a jobb oldali elhagyott redukált rúdrész hatásaképpen. Ezen kívül az elemi rúddarabot még a megoszló terhelésre eső *pdx*. Az egyensúly feltétele szerint:

$$\sum_{S} \underline{M} = 0 \quad \text{és} \quad \sum F_Y = 0$$

A nyomatéki egyenletet az elemi rúdrész jobb oldali keresztmetszetének S pontján átmenő és a rajz síkjára merőleges tengelyére írjuk fel:

$$M-(M+dM)-Vdx-pdx\frac{dx}{2}=0 \quad (3.13)$$

Az utolsó tagot, mint másodrendű kicsi mennyiséget elhanyagolva:

$\frac{dM}{dx}=-V$ (3.14) összefüggést kapjuk,

azaz: a nyíróerő függvénye a hajlító-nyomaték függvényének x szerinti első differenciálhányadosának negatívja.

A másik egyensúlyi egyenlet: $V+pdx-(V+dV)=0$ (3.15)

ebből $\frac{dV}{dx}=p$ (3.16)

azaz a nyíróerő függvényének az x szerinti első deriváltja a terhelés függvényét adja.

A két fenti összefüggésből: $\frac{d^2M}{dx^2}=-p$ (3.17)

A fenti összefüggések az ún. Zsuravszkij tételek.

A *p(x), V(x)*és *M(x)* függvények közötti differenciális kapcsolat következményeit az 3.1. táblázat mutatja.

3.1. Táblázat

p(x)	V(x)	M(x)
0	0	állandó
	állandó	lineáris
állandó	lineáris	másodfokú parabola
lineáris	másodfokú parabola	harmadfokú parabola
stb		
A parabolák tengelye a rúdra merőleges irányú		

Ahol $\frac{dM}{dx}=-V(x)=0$, ott a hajlító-nyomatéknak helyi szélsőértéke van.

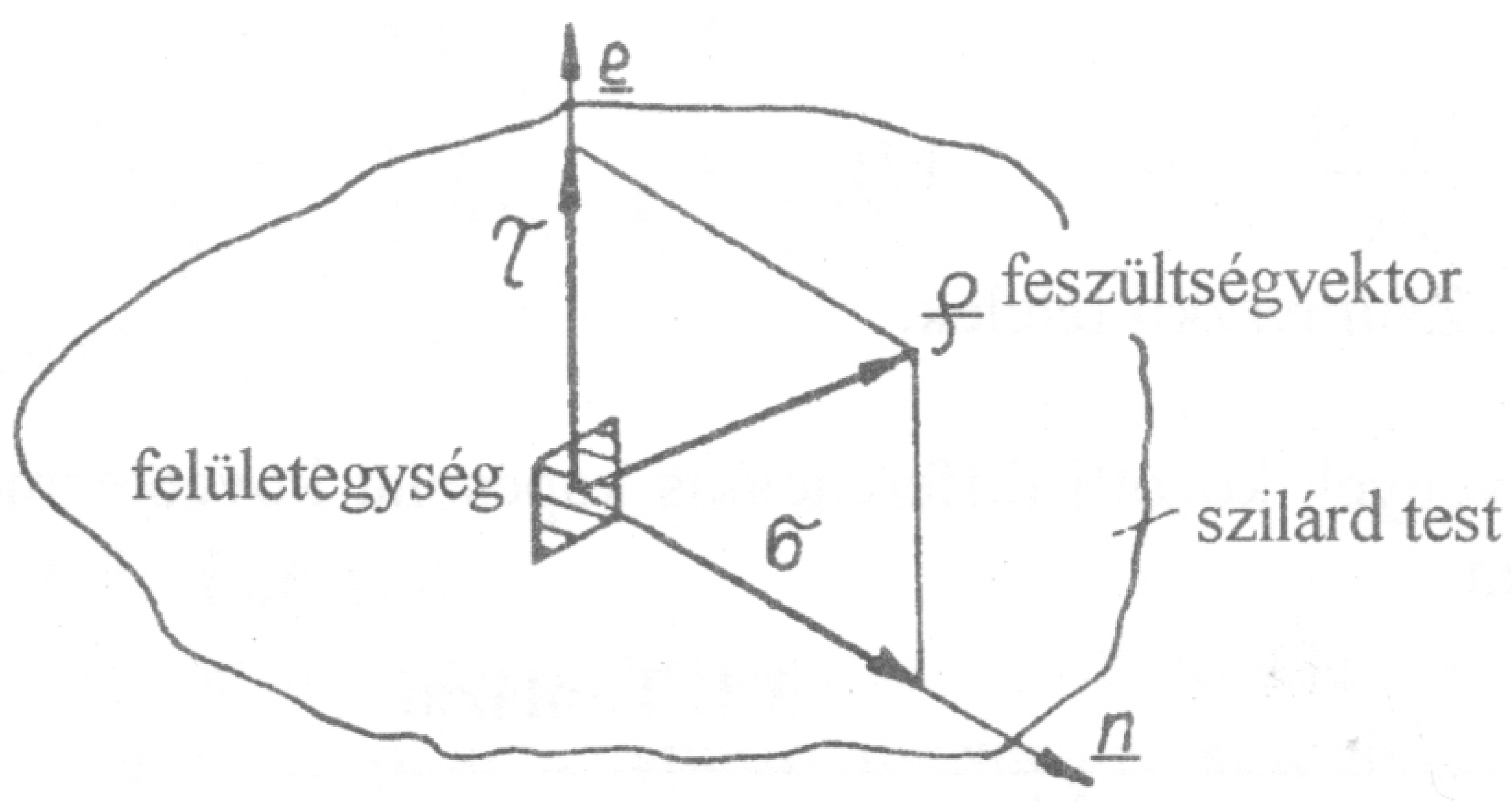
3.3. Elemi szilárdságtan

3.3.1. A feszültség fogalma

Ha a szilárd testet részekre bontjuk, akkor mindegyik rész önálló szilárd testnek tekinthető. Az egymáshoz kapcsolódó részek között erőhatások ébrednek, ezek a belső erők, amelyek a külső erők hatására jönnek létre.

A szilárd test belsejében elképzelt metszőfelületen működő belső erőrendszer intenzitását **feszültségnek** nevezzük. Más megfogalmazásban, a külső okozta belső erők a metsző felületen egyenletesen megoszló erőrendszer alkot. E belső erőrendszer intenzitása a felület egységre eső mennyiség. Ez vektor mennyiség és $\underline{\rho}$ -val jelöljük, mértékegysége: [N / mm^2]

$$\underline{\rho} = \frac{d\underline{F}}{dA}$$



3.9. ábra

A felületegységhez tartozó $\underline{\rho}$-t két derékszögű összetevőre bontjuk.

1. a felületegységre merőleges ’$\underline{n}$’ normális egységvektorral jellemzett és irányú ’σ’ -**val jelölt normál feszültségre,**
2. a felületegység síkjába eső ’$\underline{e}$’ egységvektor irányú **’τ’-val jelölt csúsztató feszültségre.**

Így a feszültségvektor $\underline{\rho} = \sigma\,\underline{n} + \tau\,\underline{e}$ alakban írható fel.

3.3.2 A feszültségi állapot

Ha a testet a "A" ponton átmenő felülettel két részre bontjuk, majd a metszősík irányát változtatjuk, akkor a feszültségvektor is változik, hiszen más az erők megoszlása is, ebből következően az intenzitása is. A test egy pontján keresztül számtalan $\underline{n}$ normális metsző sík fektethető le. Ez azt jelenti, hogy változatlan külső terhelés mellett az adott ponthoz végtelen sok feszültség tartozik, amelyek összességét az adott pont <u>feszültségi állapotának</u> nevezünk.

A felületek érintősíkjának helyzetét a normális vektor jellemzi. Így a feszültséget a felület irányítottságát megadó $\underline{n}$ normális egységvektor függvényeként foghatjuk fel $\qquad \underline{\rho}_n = f(\underline{n})$

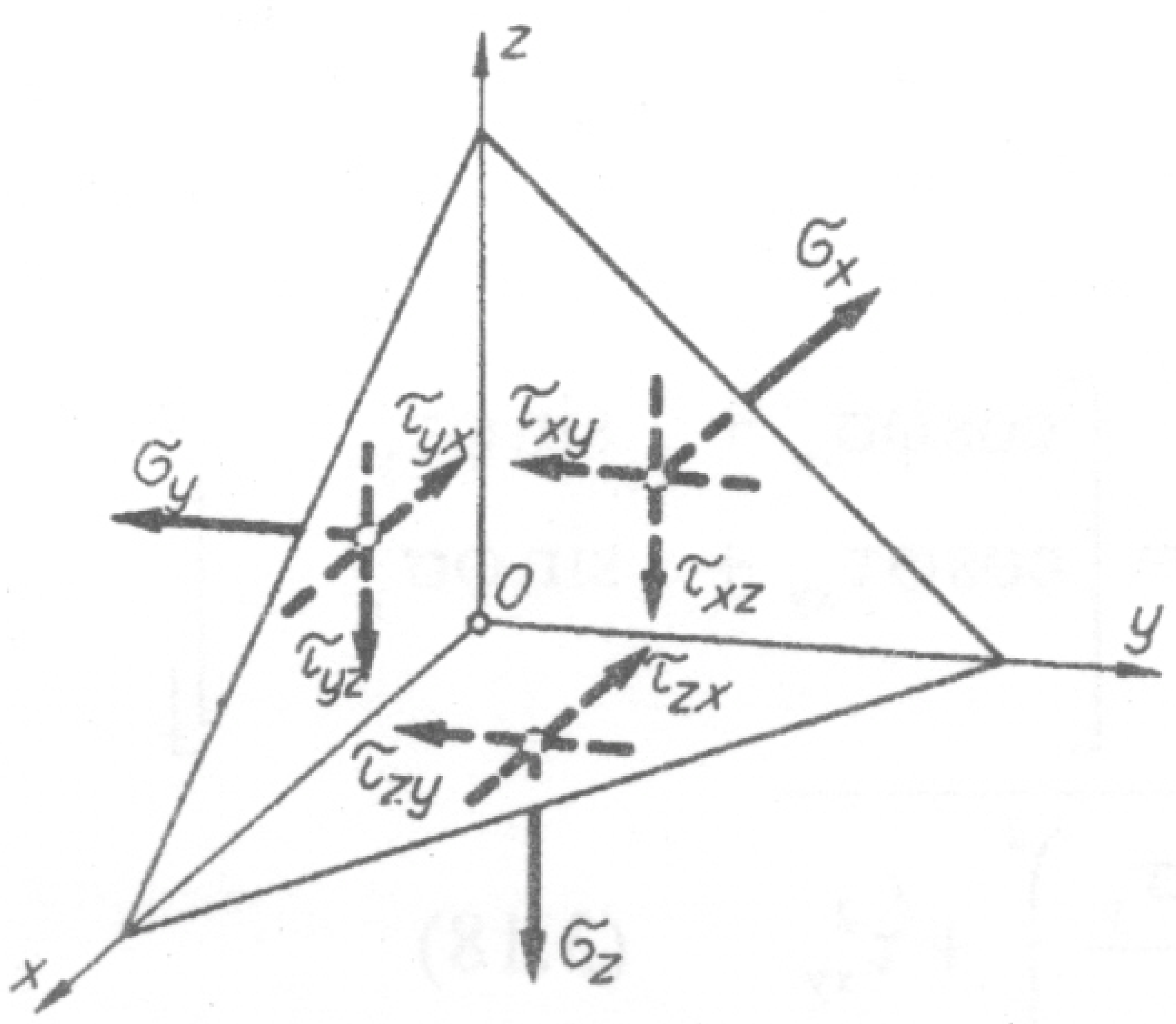
3.3.3 A tér egy pontjának feszültségi állapota

Az $\underline{n}$ és a $\underline{\rho}$ vektor közötti függvénykapcsolatot adott derékszögű koordinátarendszerben a feszültségi mátrix fejezi ki:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = [\underline{\rho}_x\ \underline{\rho}_y\ \underline{\rho}_z\,]$$

A mátrix három oszlopában a koordináta síkhoz tartozó $\underline{\rho}_x$ $\underline{\rho}_y$ $\underline{\rho}_z$ vektorok skalár rendezői állnak.

Ha ismerjük a $\underline{\underline{\Phi}}$ mátrixot, akkor a feszültségi állapotot ismertnek tekinthető.



3.10. ábra

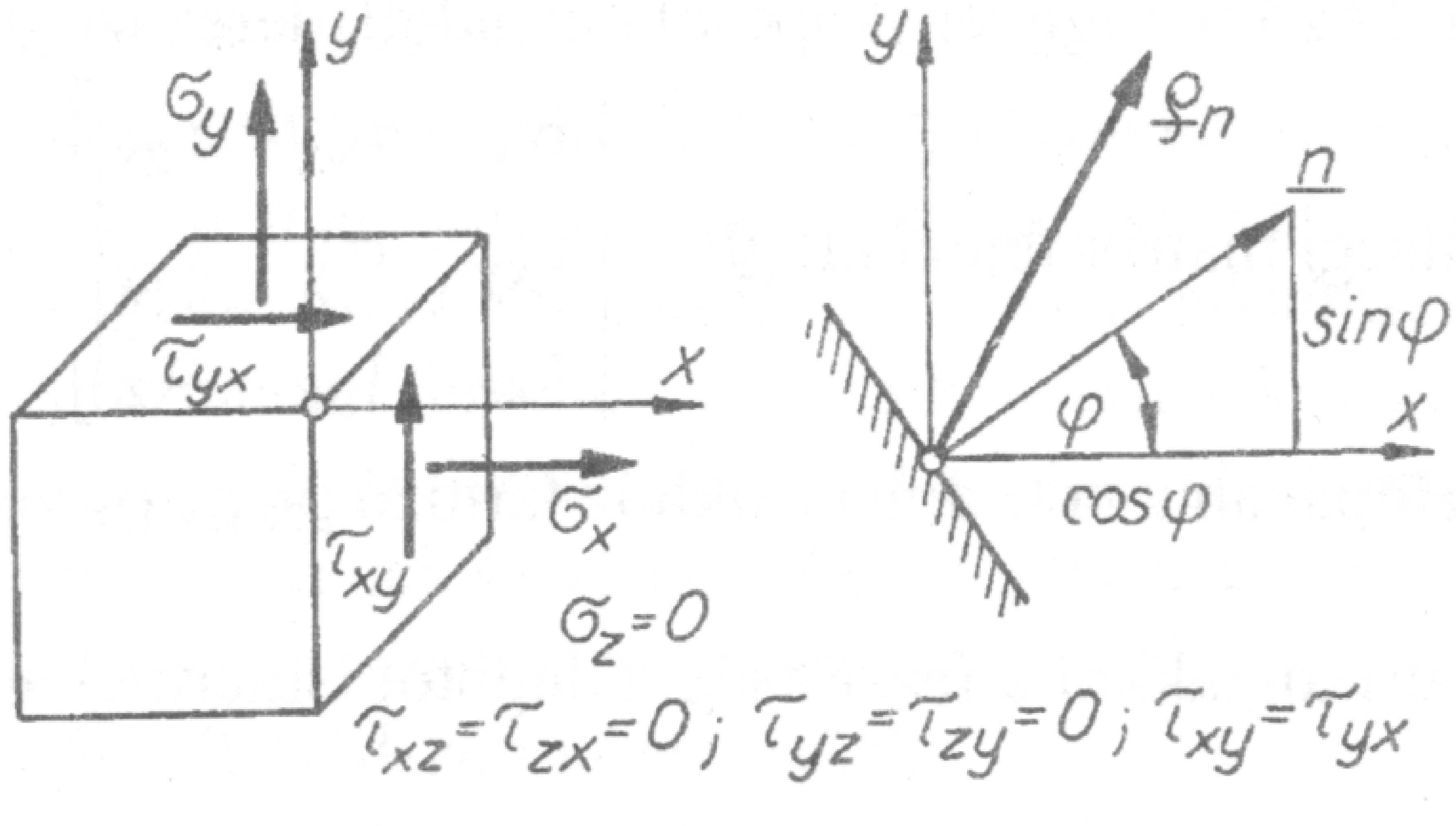
$$\underline{n} = p\,\underline{i} + r\,\underline{j} + s\,\underline{k} \qquad \underline{\rho}_n = \underline{\underline{\Phi}}\underline{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\sigma_x + & r\tau_{yx} + & s\tau_{zx} \\ p\tau_{xy} + & r\sigma_y + & s\tau_{zy} \\ p\tau_{xz} + & r\tau_{yz} + & s\sigma_z \end{bmatrix}$$

A feszültségi állapotot ismerjük, ha három egymásra merőleges síkban ismert a feszültségeket. A feszültségi mátrix szimmetrikus azaz $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

A feszültségvektor $\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\Phi}}\underline{n}$ függvényének elemzése alapján megállapíthatjuk, hogy van legalább három olyan egymásra merőleges olyan normális irány, amelyhez nem tartozik 'τ' feszültség komponens, csak 'σ' normálisfeszültségek ébrednek, vagy egyáltalán nem ébred feszültség. Ezeket az irányokat <u>főirányoknak</u>, a "P" ponton átmenő főirányokkal párhuzamos egyeneseket főtengelyeknek, a rájuk merőleges "P" ponton átmenő síkokat <u>fősíkoknak</u> és a hozzá tartozó 'σ' feszültségeket <u>főfeszültségeknek</u> nevezzük.

3.3.4. Síkbeli feszültségi állapot

Ha a főfeszültségek közül az egyik zérus, akkor síkbeli feszültségi állapotról beszélünk.



3.11. ábra

$$\underline{\rho_n} = \underline{\Phi n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sigma_x + \sin\varphi\tau_{yx} \\ \cos\varphi\tau_{xy} + \sin\varphi\sigma_y \\ \end{bmatrix}$$

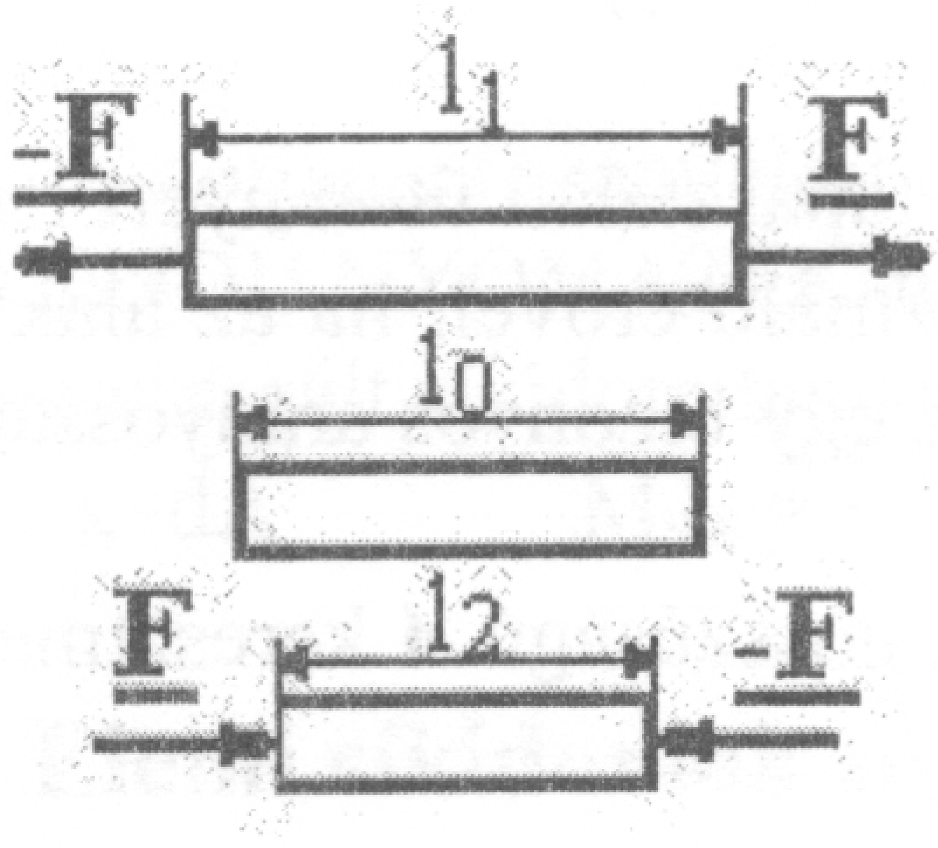
A főfeszültségek $\sigma_{12} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ (3.18)

A főirányok $\operatorname{tg} 2\varphi_{1,2} = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ (3.19)

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy különböző igénybevételek hatására, milyen feszültségek lépnek fel, milyen kapcsolat áll fenn a terhelés, az alakváltozás és az anyagi jellemzők között.

3.4. Húzás-nyomás

3.4.1. A feszültség és alakváltozás meghatározása



3.12. ábra

Terheletlen állapotban l_0 hosszúságú prizmatikus egyenes rudat tengelyvonalában $\underline{F}$ erővel terhelünk. Az előjel szabálynak megfelelően a felső ábrán (+), tehát húzás, az alsón (-) , nyomás

Kis alakváltozásnál feltételezzük és a tapasztalat is alátámasztja az alábbiakat:

$\Rightarrow$ A rúd keresztmetszetei az alakváltozás során is síkok és a tengelyvonalra merőlegesek maradnak.

$\Rightarrow$ A keresztmetszetek alakja az eredeti keresztmetszethez hasonló marad

$\Rightarrow$ Az egymástól egyenlő távolságban lévő, egymással párhuzamos keresztmetszetek az alakváltozás után is egymással párhuzamosak és egyenlő távolságban maradnak.

A rúd hosszváltozását ’λ’-val jelöljük.
Húzás esetén $\lambda = l_1 - l_0$ értéke (+), nyomás $\lambda = l_2 - l_o$ értéke (-)

<u>A fajlagos nyúlás fogalma</u>

A fajlagos nyúlásnak a hosszváltozás és a terheletlen rúdhossz hányadosát nevezzük, vagyis a terheletlen hosszegységre jutó hosszváltozást. Jele: ε

$\varepsilon = \frac{\lambda}{l_0}$ (3.20) előjele a terhelés irányától függ.

A fajlagos nyúlás a húzott - nyomott rúd minden pontjában azonos, így bármely keresztmetszet bármelyik pontjában egyenlő nagyságú tengelyirányú ’σ’ feszültség ébred. $\sigma = \frac{F}{A}$ (3.21)

A ’σ’ feszültségnek egy meghatározott értékéig az anyagok egy részénél ’σ’ a ’ε’ és között az alábbi összefüggés irható fel

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad (3.22)$$

E - a rugalmassági modulus, amely anyagjellemző és táblázatban megtalálható. Mértékegysége: $[Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right]$

HOOKE a róla elnevezett fenti törvényt 1676-ban tapasztalati úton nyert ismereteivel állította fel. Az alakváltozás arányos a deformáló erővel, ha az alakváltozás vagy a deformáló erő elegendően kicsiny, azaz egy bizonyos arányossági határ alatt marad.

Ha a rúd anyaga a Hooke törvényt követi, akkor l_0 hosszúságú A keresztmetszeti területű F_1 erővel húzott rúd λ megnyúlása

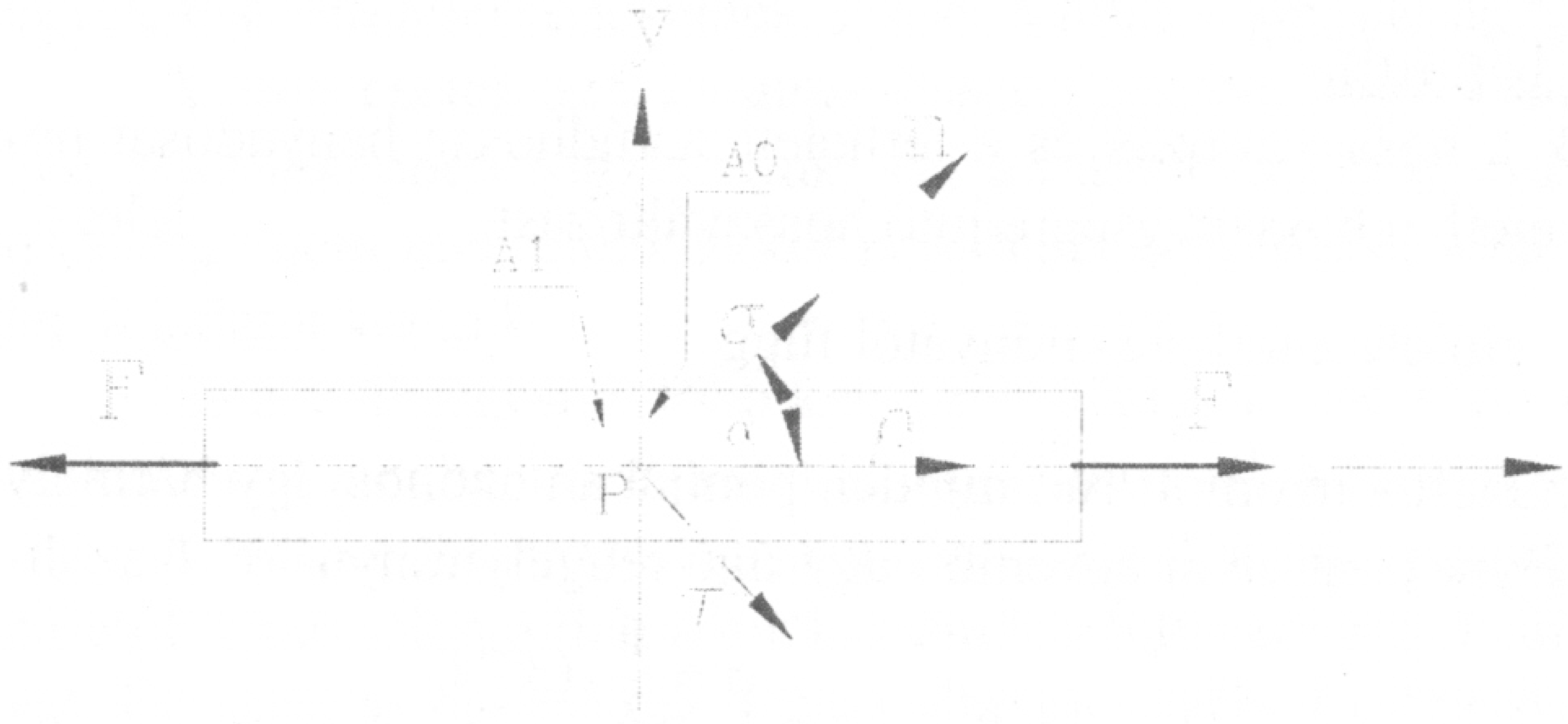
$$\boxed{\lambda = \frac{F_1 \cdot l_0}{A \cdot E} \qquad (3.23)} \qquad \sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\lambda}{l_0}$$

A húzás hatására nemcsak megnyúlik, hanem a keresztmetszete is megváltozik, csökken. A tengelyvonalára merőleges irányú fajlagos méretváltozást 'ε_k' -val jelöljük.

$$\varepsilon_k = -\frac{\varepsilon}{m} \qquad (3.24)$$

m - Poisson számnak, vagy haránt összehúzódási együtthatónak nevezzünk. Szintén táblázatokban megtalálható anyagjellemző.

Eddig tengelyre merőleges keresztmetszet esetét vizsgáltuk meg. A következőkben általános síkra is kiterjesztjük vizsgálódásainkat. Tekintsük az 3.13. ábrát.



3.13. ábra

Ha a rudat ’A_0 ’ felülettel metsszük, a feszültségvektor $\underline{\rho} = \sigma_x \underline{i}$ alakban Írható fel, azaz ’τ’ csúsztatófeszültség nem ébred, tehát ez fősík, ill. főfeszültség.

A rúd keresztmetszetében ébredő húzófeszültség $\sigma_x = \dfrac{F}{A_0}$ (3.25)

’A_1 ’ ferdesíkkal metszve $\dfrac{F}{A} = \dfrac{F}{A_0} \cos\alpha = \sigma_x \cos\alpha$ (3.26)

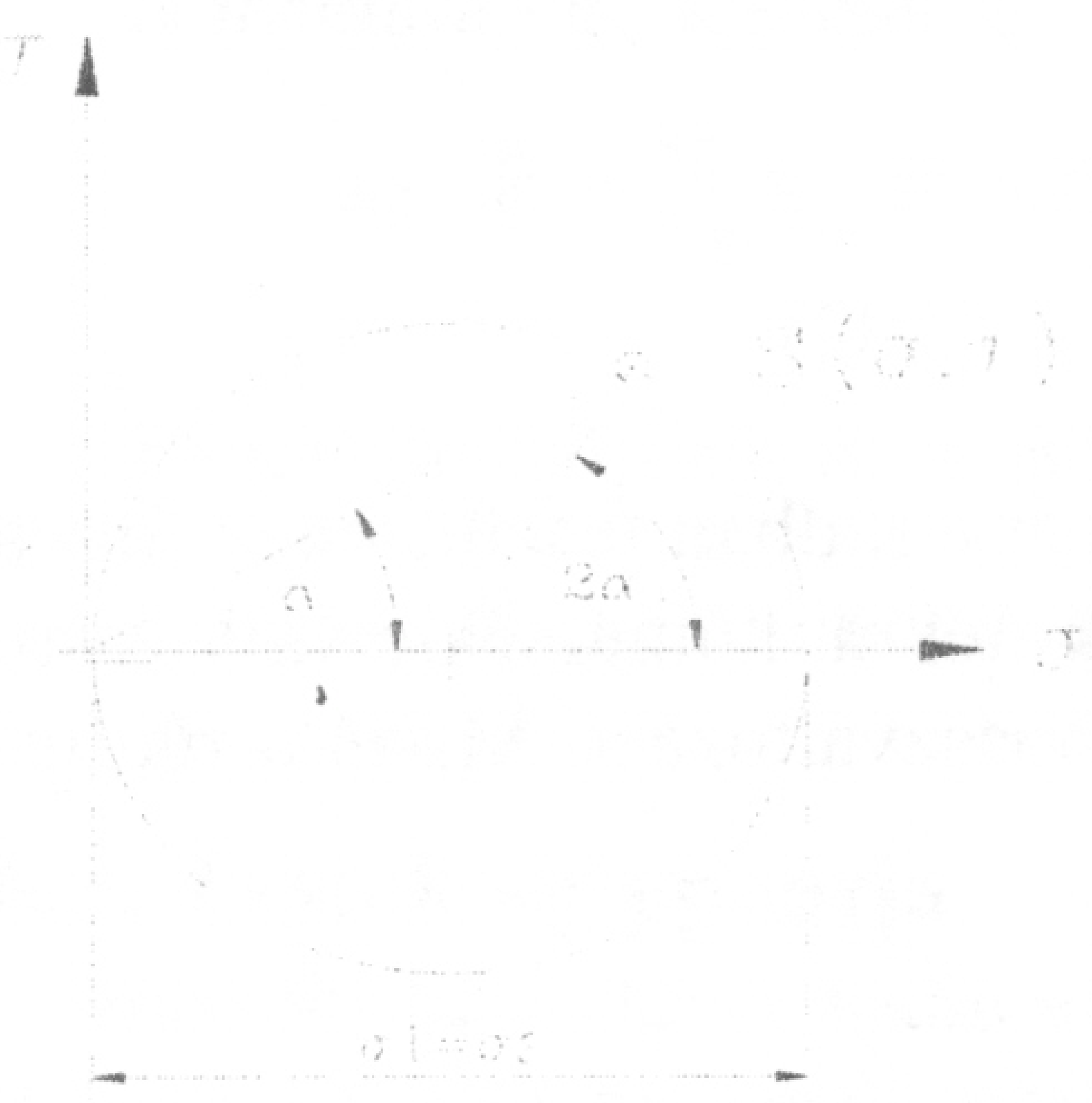
’$\underline{\rho}$ ’ az általános sík komponenseire bontva:

$\sigma = \rho \cos\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha$ (3.27)

$\tau = \rho \sin\alpha = \sigma_x \cos\alpha \sin\alpha$ (3.28)

Ezekkel a képletekkel a ’P’ ponton átmenő, bármilyen helyzetű síkban ébredő feszültségeket meg tudunk határozni.

A fenti esett az egyik legegyszerűbb eset, mert bárhogyan is vesszük fel a sík helyzetét a $\underline{\rho}$ vektor mindig a rúd hossztengely irányával párhuzamos és a rúd bármely pontjában azonos a feszültségi állapot. A feszültségi állapot szemléletesen ábrázolható a MOHR féle feszültségi körrel.(3.14. ábra)



3.14. ábra

Az ismert $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ trigonometria összefüggést felhasználva a (3.27) egyenlet:$\sigma = \dfrac{\sigma_x}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha)$ (3.29),

a $\sin 2\alpha = 2 \cos\alpha \sin\alpha$ összefüggést felhasználva a (3.28) egyenlet $\tau = \dfrac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\alpha$ (3.30) alakban fejezhető ki.

a (3.29) és (3.30) egyenleteket négyzetre emelve, összeadva és rendezve

$(\sigma - \sigma x / 2)2 + \tau 2 = (\sigma x / 2)2$ (3.31) alakú egyenletet kapunk.

A kapott kifejezés egy a síkban fekvő kör, a Mohr kör egyenlete. Minden egyes a ’P’ ponton átmenő síknak a Mohr - kör kerületén egy „σ, τ „ koordinátájú ’S’ pont felel meg, amely koordináták a síkban ébredő σ és τ feszültséget adják. A sík szöggel való elfordítása a Mohr - kör kerületén 2 középponti szöggel való elfordulás felel meg. Ha az egyenletekbe α = 0 helyettesítünk τ = 0 kapunk. E szögeknek megfelelő irányok a húzó - nyomó igénybevétel **főfeszültségi síkjainak** helyzetét jellemzi. A főfeszültségi síkok azon síkok a vizsgált test belsejében, amelyekben feszültség nem ébred. A főfeszültségi síkokban ébredő feszültségek a P pontbeli **főfeszültségek**, ezek csak feszültségek lehetnek, tehát mindig merőlegesek a főfeszültségi síkokra.

Általános, térbeli feszültségi állapot esetén három egymásra merőleges főfeszültségi sík van, amelyekben ébredő feszültségek nagyság szerint $\sigma_3 \le \sigma_2 \le \sigma_1$ Főfeszültség értéke lehet 0 is. Így a vizsgált esetünkben $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (σ_x a keresztmetszet síkjában ébredő húzófeszültség)

3.4.2. Hőmérséklet okozta feszültségek

Hőmérsékletváltozás esetén a testek méretei változnak, felmelegedéskor kiterjednek, lehűléskor összezsugorodnak.

Alaphelyzetben tekintsünk: "t_0" hőmérsékleten "l_0"hosszúságú rudat. A hőmérséklet "t_1"-re változik. A hőmérsékletváltozásból származó hosszváltozás:

$\lambda = \alpha \cdot l_0 \cdot (t_1 - t_0) = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t$ (3.24)

α - anyagjellemző, lineáris hőtágulási együttható

A fajlagos hosszváltozás: $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{l_0} = \alpha \cdot \Delta t$ (3.32)

Ha a rúd terjeszkedését teljesen meggátoljuk, akkor a rúdban feszültségek fognak keletkezni. A feszültség meghatározására írjuk fel a hőmérsékletváltozásból származó és a feszültségből származót fajlagos hosszváltozást. Mivel a rúd mérete nem változhat a kettő összege 0.

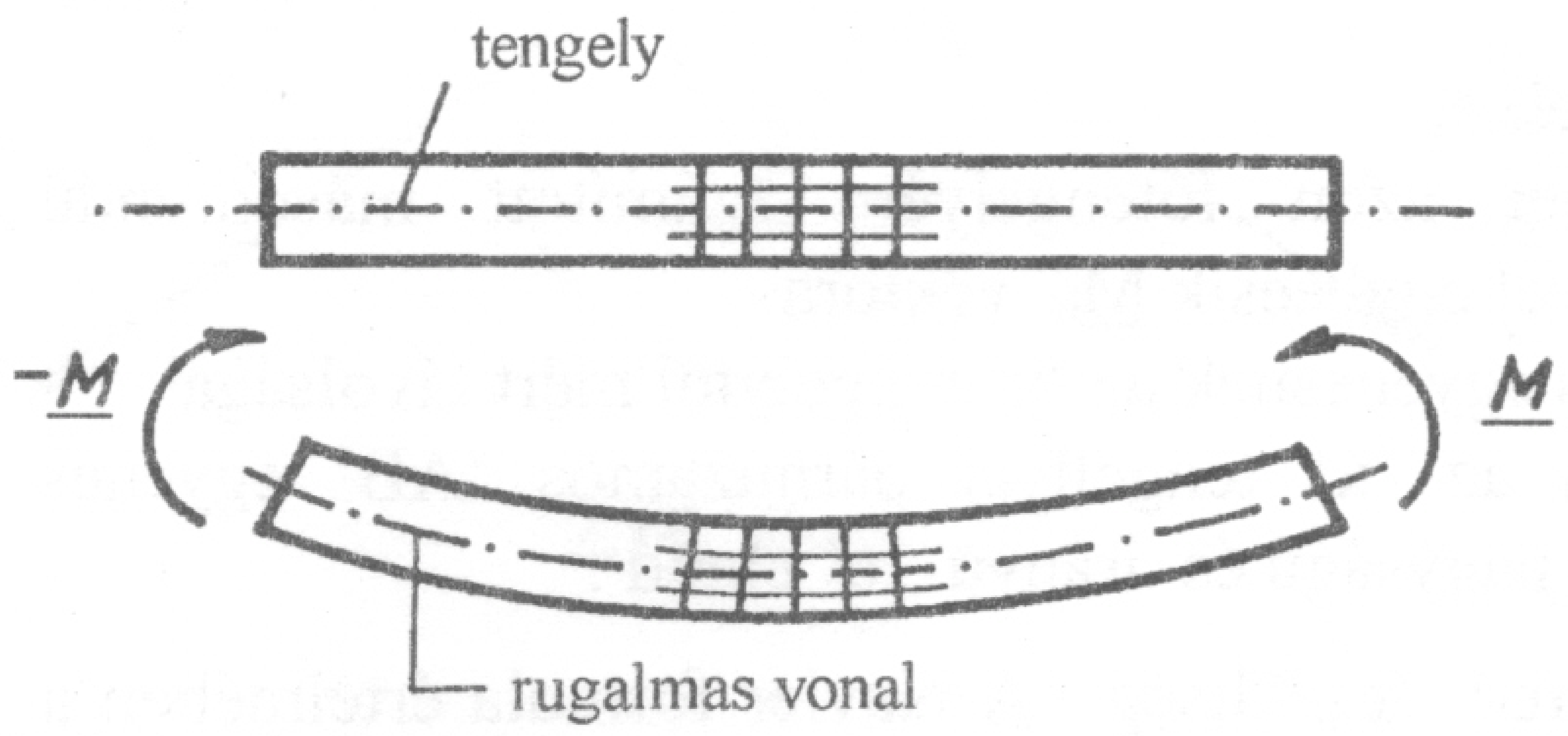
$\alpha \cdot \Delta t + \dfrac{\sigma}{E} = 0$ (3.33)

$\sigma = -E \cdot \alpha \cdot \Delta t$ (3.34)

3.5. Hajlítás

3.5.1. Egyenes hajlítás

Ha az egyenes tartót tengelyére merőleges hatás éri, bekövetkezik a hajlító-igénybevétel.



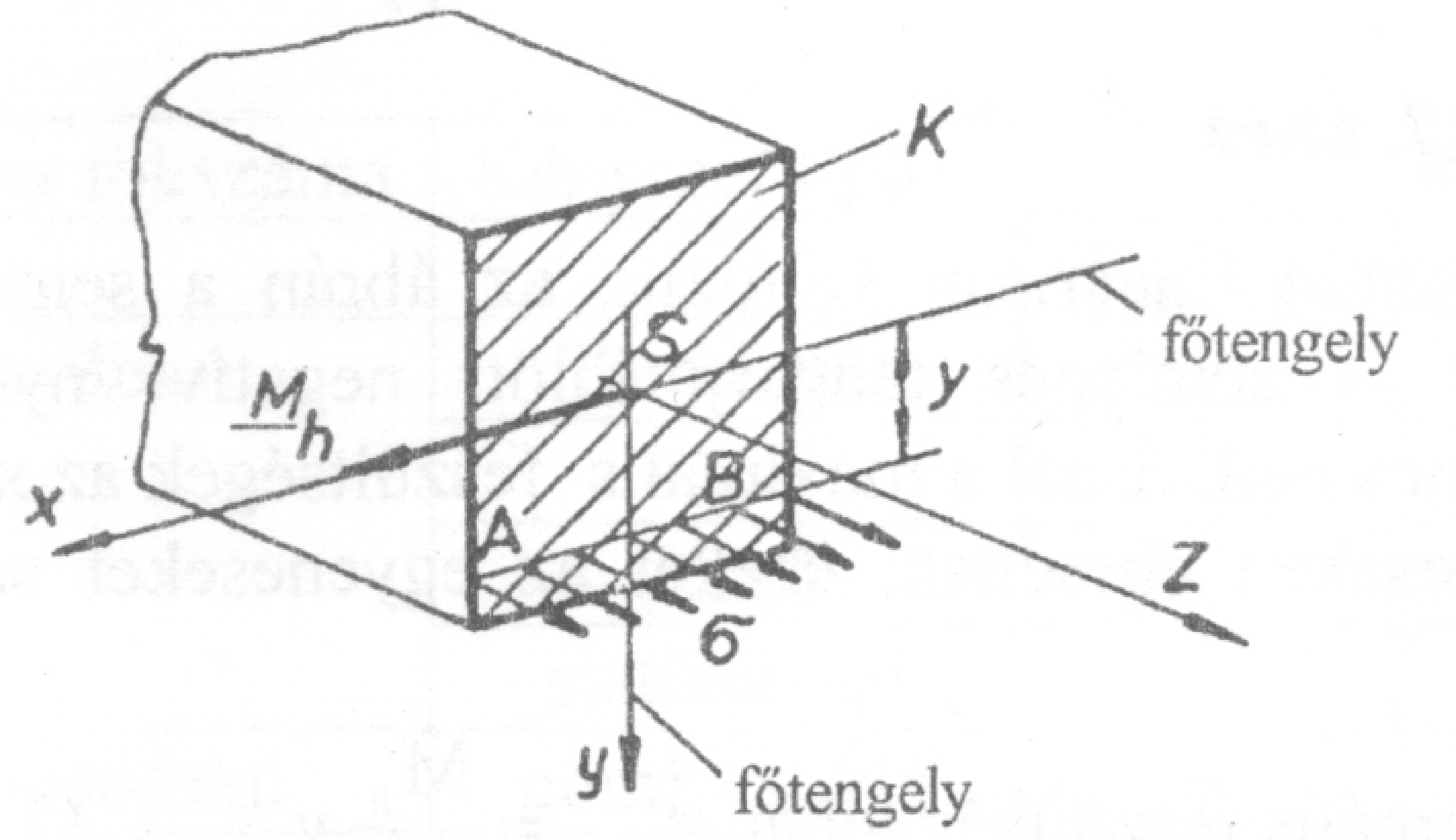
3.15. ábra

Tételezzük fel, hogy a vizsgált rudat minden keresztmetszetében ugyanaz a M hajlító-nyomaték terheli. Nyíróerő nem ébred, a rúd igénybevétele csak hajlítás. A rúdnak a terhelés hatására alsó szálai megnyúlnak, felső szálai megrövidülnek. Kell lenni egy olyan szálrétegnek, amelyik nem változtatja a hosszát. Ezt a réteget semleges rétegnek nevezzük.

Kis alakváltozások esetén feltételezhetjük az alábbiakat:

- A rúd keresztmetszetei az alakváltozás során is a rugalmas vonalra merőleges síkok maradnak.
- A rugalmas vonal hossza az alakváltozás során változatlan marad.

Vizsgáljuk a hajlított prizmatikus rúd tetszés szerinti „K" keresztmetszetét.



3.16. ábra

Helyeznünk egy /x, y, z,/ koordináta rendszert a "K" keresztmetszetre úgy, hogy a koordináta rendszer origója a keresztmetszet 'S' súlypontja legyen, az x és y tengelyek a keresztmetszet főtengelyei legyenek.

Ha a vizsgált keresztmetszetre működő $\underline{M}_h$ hajlítónyomaték vektora a keresztmetszet valamelyik főtengelyébe esik EGYENES HAJLITÁS-ról beszélünk. A 3.16. ábrán az $\underline{M}_h$ vektor az 'x' főtengely egyenesében fekszik.

Ezen feltéteielek mellett levezethető az u.n. NAVIER formula, mellyel az egyenes hajlításnál a keresztmetszetben ébredő ‘σ’ feszültségek számíthatók:

$$\sigma = \frac{M_h}{I_x} y \qquad (3.35)$$

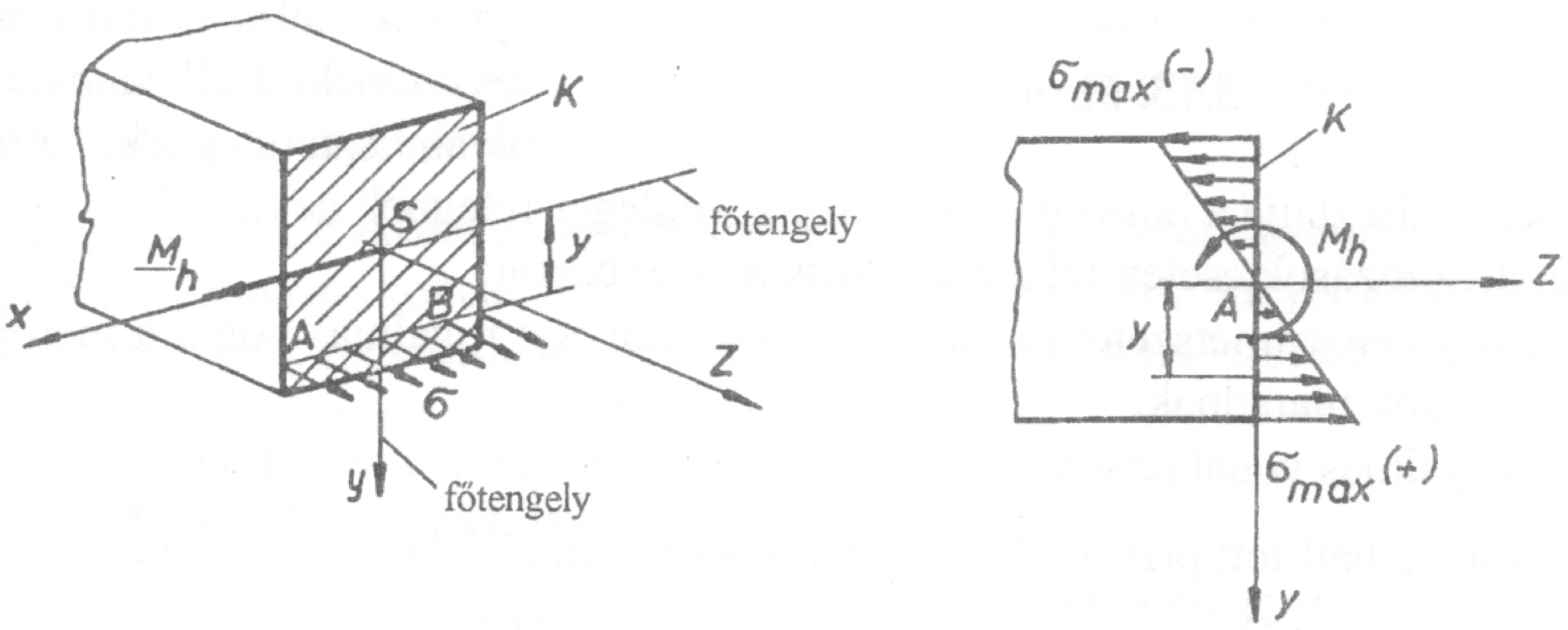
M_h a hajlitónyomaték számértéke,

I_x a vizsgált keresztmetszet azon főtengelyére számított másodrendű nyomaték, mely főtengellyel egybeesik M_h vektora

y x főtengellyel párhuzamos egyenesnek az ‘x’ tengelytől mért távolsága

A Navier formula értelmében az ‘x’ tengellyel párhuzamos ‘AB’ egyenes minden egyes pontjában azonos nagyságú és irányú ‘σ’ ébred .

A semleges tengelyben nem ébred feszültség. A Navier formula értelmében a



3.17. ábra

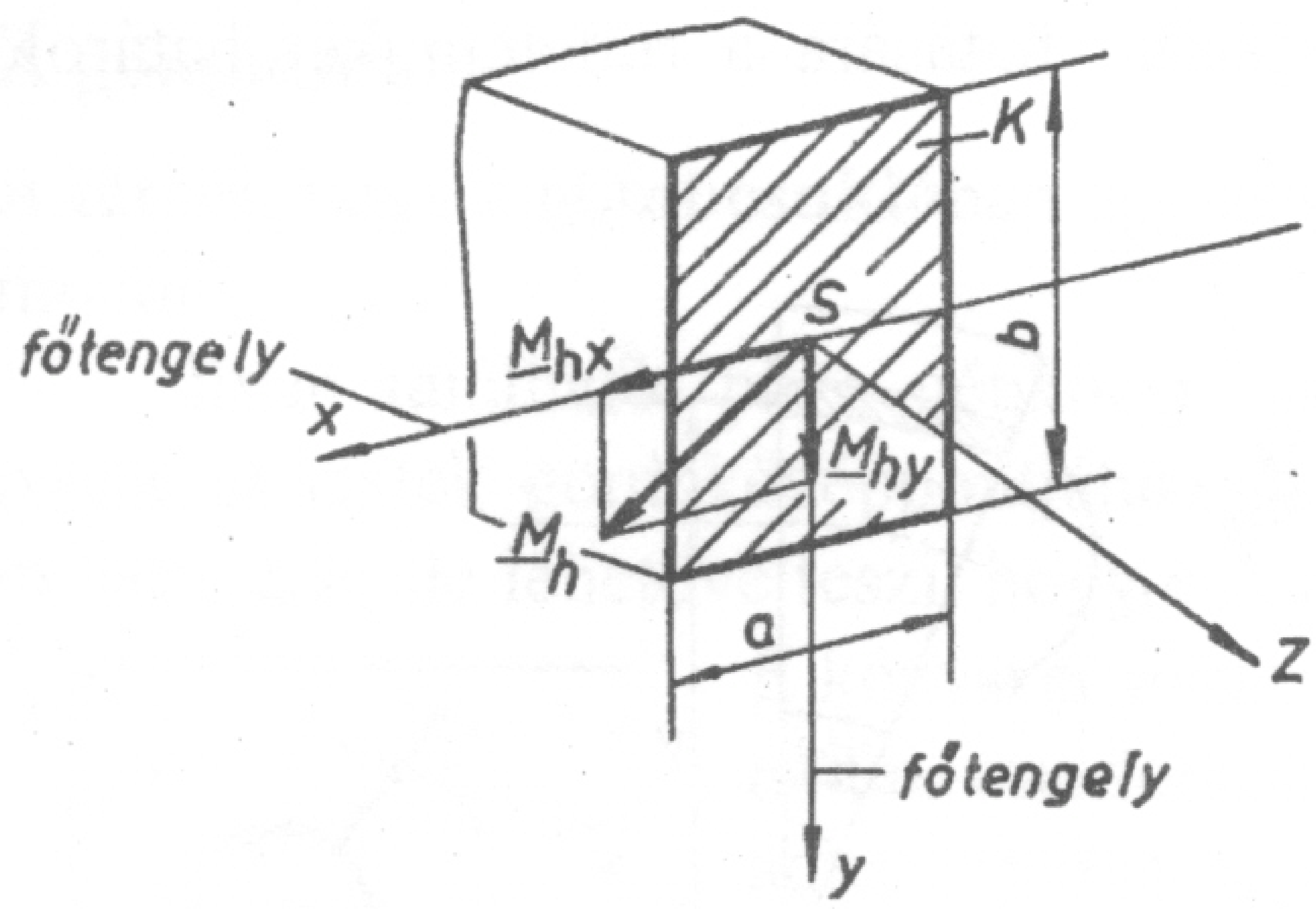
‘σ’ nagysága az y tengely mentén lineárisan változik, az ábrán a semleges tengely alatt pozitív /húzó/, a semleges tengely fölött negatív /nyomó/ feszültségek keletkeznek. Egyenes hajlításnál a maximális feszültségek az x tengelytől legtávolabb eső egyeneseken ébrednek, ezeket az egyeneseket szélső szálaknak nevezik.

A szélső szálakban ébredő maximális feszültség tehát $\sigma_{max} = \frac{M_h}{I_x} y_{max}$ (3.36)

Az $\frac{I_x}{y_{max}} = K_x$ (3.37) hányadost **keresztmetszeti tényezőnek** nevezik.

Ennek bevezetésével $\sigma_{max} = \frac{M_h}{K_x}$ (3.38) formában is felírható.

3.5.2. Ferde hajlítás

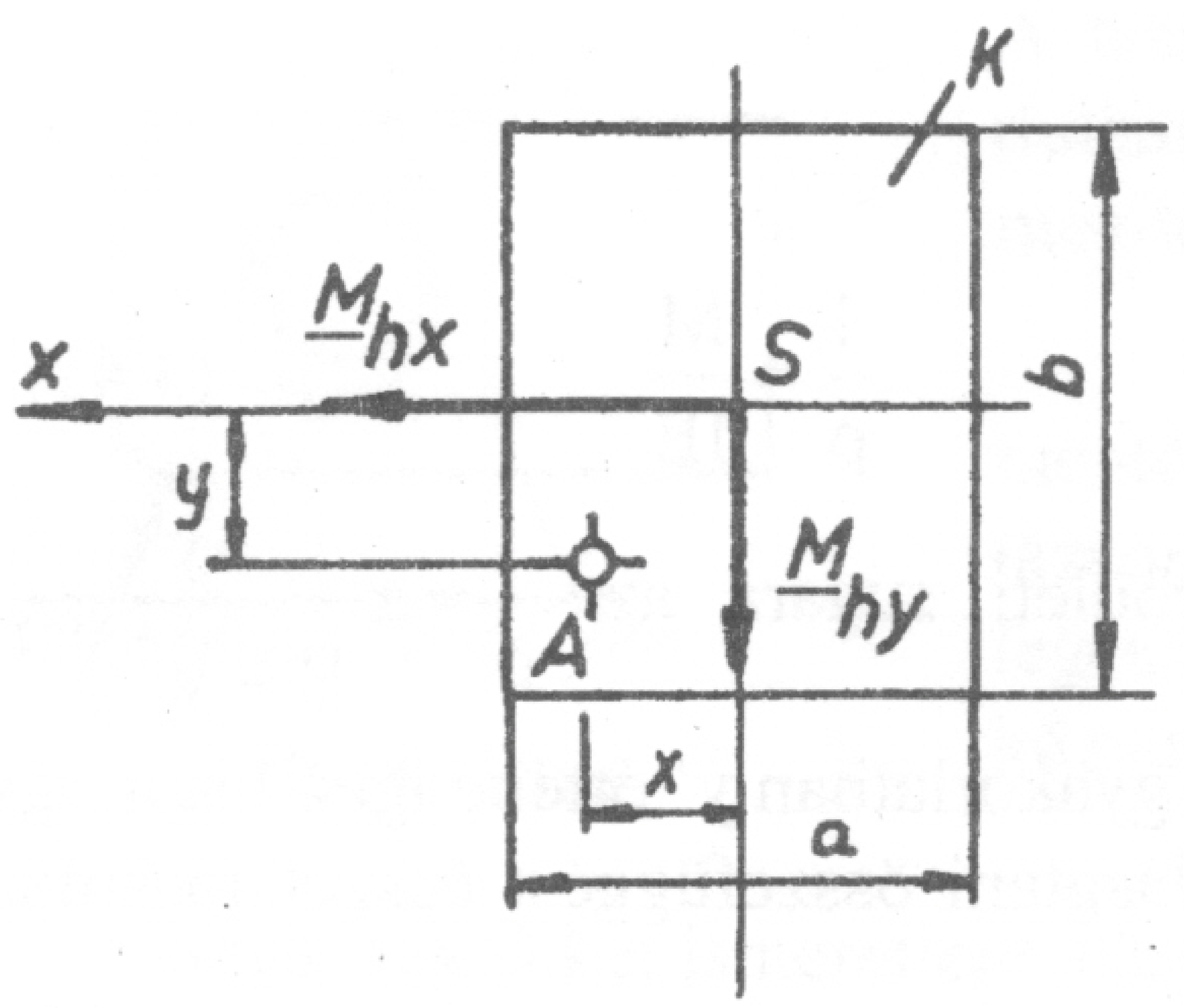


3.18. ábra

Ha vizsgált prizmatikus rúd "K" keresztmetszetében ható $\underline{M}_h$ hajlítónyomatéki vektor hatásvonala NEM ESIK EGYBE a keresztmetszet egyik FŐTENGELYÉ-vel sem, akkor FERDE HAJLITÁSról beszélünk.

A keresztmetszetben ébredő feszültség meghatározásához bontsuk fel az $\underline{M}_h$ vektort és az 'x' és 'y' főtengelyek irányába eső $\underline{M}_{hx}$ és $\underline{M}_{hy}$ összetevőkre. Külön-külön $\underline{M}_{hx}$ és $\underline{M}_{hy}$ az egyenes hajlításra veszi igénybe a "K" keresztmetszetet. A ferde hajlításnál ébredő 'σ' így az $\underline{M}_{hx}$ és $\underline{M}_{hy}$ hatására létrejövő és külön-külön a NAVIER formula alapján számítható feszültségek összege lesz.

Az "A" pontban 'σ' feszültség lesz: $\sigma_A = \dfrac{M_{hx}}{I_x} y - \dfrac{M_{hy}}{I_y} x$ (3.39)



3.19. ábra

A képlet alapján az ábrán látható 'A' pontban az M_{hx} -ből pozitív /húzó/, az M_{hy}-ból negatív /nyomó/ feszültség keletkezik.

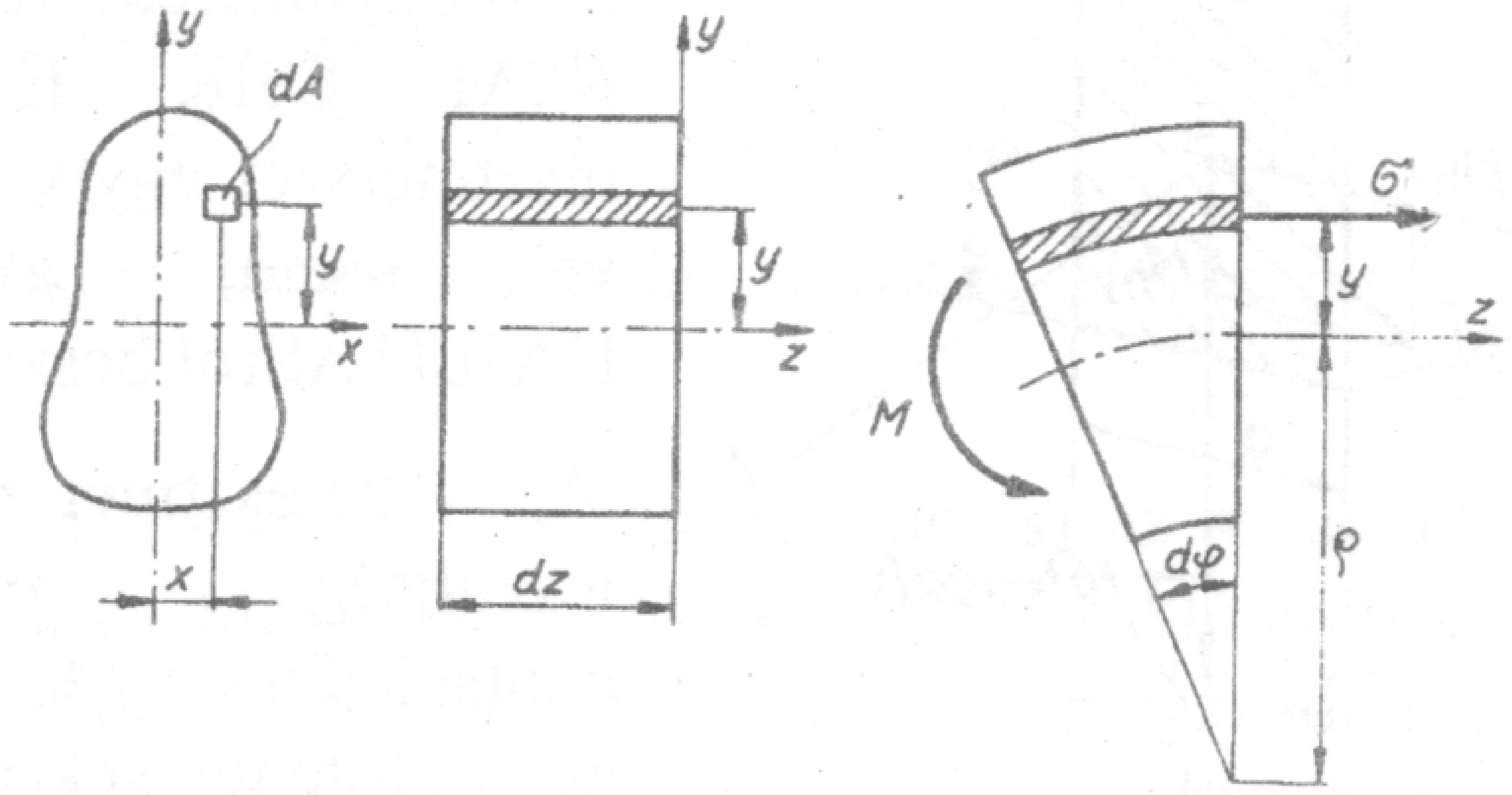
A ferde hajlításnál is található a vizsgált "K" keresztmetszet síkjában egy olyan egyenes, melynek minden pontjában zérus értékű 'σ' feszültség keletkezik. Ezt az egyenest <u>semleges tengelynek</u> nevezzük,

A semleges tengely tehát azon pontok mértani helye, mely pontokban σ= 0

$$0 = \frac{M_{hx}}{I_x} y - \frac{M_{hy}}{I_y} x \qquad (3.40)$$

3.5.3. A hajlított rúd alakváltozásai

Vágjuk ki gondolatban a hajlításra igénybe vett rúdból egy ‘dz’ elemi hosszúságú elemet. A ‘M’ hajlítónyomaték hatására a rúdelem két határoló



3.20. ábra

felülete ‘dφ’ szöggel hajlik egymáshoz. A keresztmetszet dA felületeleméhez tartozó /az 3.20. ábrán vonalkázással kiemelt/ elemi szál fajlagos hosszváltozása:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - dz}{dz} = \frac{\sigma}{E} \qquad (3.41)$$

Bevezetve $\rho d\varphi = dz$ (3.42) összefüggést $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$

$$\rightarrow \sigma = E\frac{y}{\rho}$$

A Navier képlet szerint $\sigma = \frac{M}{I}y$

Igy $\frac{M}{I}y = E\frac{y}{\rho}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{IE}$ (3.42)

Az analitika szerint a síkgörbe ‘ρ’ görbületi sugara az: $\frac{1}{\rho} = \pm\frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$

összefüggés alapján számítható. A műszaki gyakorlatban y’ értéke igen kicsi, így y'^2 elhanyagolható. Az analitikai és szilárdságtani összefüggést összekapcsolva az alábbi összefüggést kapjuk

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{IE} = \pm\frac{d^2y}{dz^2} \qquad (3.43)$$

Az előjel úgy állapítható meg, hogy a vízszintes rúd lehajlását tekintjük pozitívnak. E szerint $$IE\frac{d^2y}{dz^2} = -M(z) \qquad (3.44)$$

Ez a rugalmas szál differenciál egyenlete.

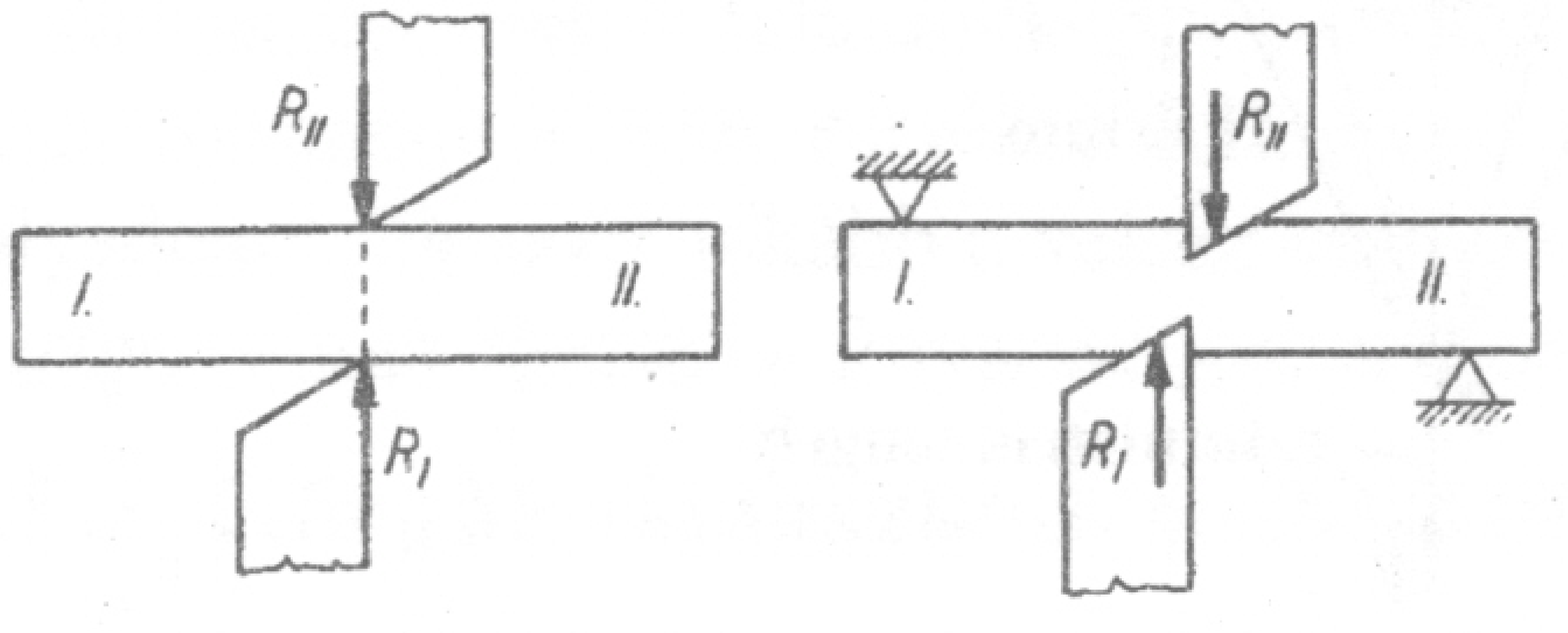
Az egyenlet kétszeri integrálással és az integrálási állandóknak a határfeltételek segítségével való meghatározása révén adódik $$y = \frac{1}{IE}\iint -M(z) \qquad (3.45)$$

A leggyakrabban előforduló esetek a II. mellékletben találhatók.

3.6. Nyírás

3.6.1. Tiszta nyírás

Tiszta nyírás a gyakorlatban ritkán fordul elő, általában hajlítással párosul. A tiszta nyírás feltétele egy keresztmetszetben: a keresztmetszet egyik oldalán ható erők rúdra merőleges irányú összetevőinek eredője essen bele a keresztmetszet síkjába.

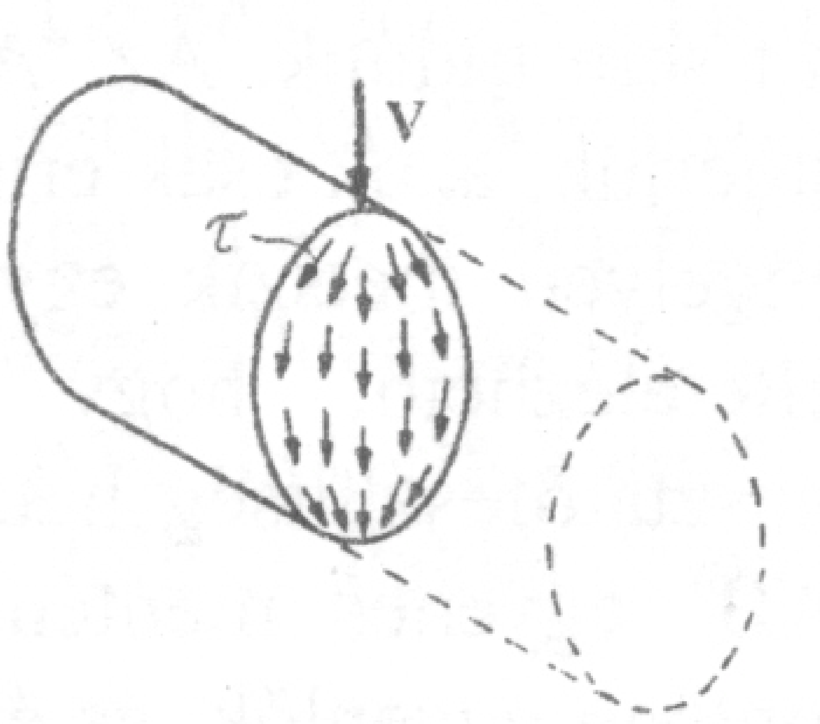


3.21. ábra

Megközelítőleg ilyen viszonyok jönnek létre, ha egy lemezt ollóval élnyírunk. Az igénybevétel kezdetén a nyíróerő a keresztmetszet síkjába esik, de a jobb oldali ábrán látható, hogy az ollóélek lemezbe való behatolása után már az ollóéleken átadódó megoszló erőrendszer eredői erőpárként viselkednek, hajlításra is igénybeveszik a nyírt felületet.

$R_I = R_{II}$ = V nyíróerő hatására a felületelemeken csúsztató feszültségek keletkeznek. Ezek megoszlását általában nem ismerjük, számításainkat bizonyos feltételezések alapján végezzük el. Ha a terhelések egy síkban lépnek fel, és ez a sík a rúdnak szimmetriasíkja, akkor az ábrán látható feszültségek értékét jó közelítéssel a

$$\tau = \frac{V}{A} \qquad (3.45)$$



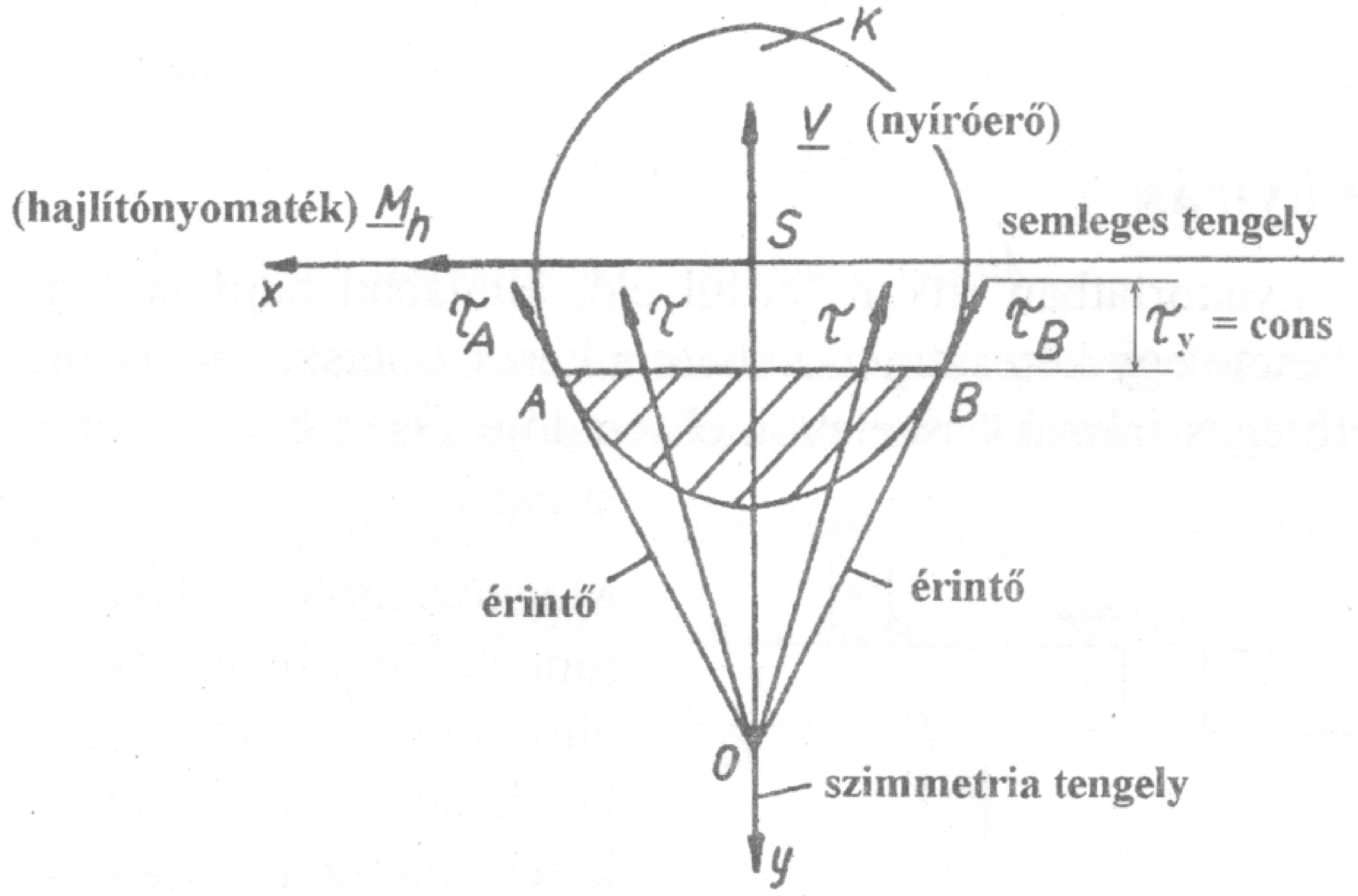
3.22. ábra

'V' a nyíróerő, 'A' a keresztmetszet nagysága.

3.6.2 Hajlítással párosult nyírás

A gyakorlatban ritkán fordul elő egyenes rudak tiszta hajlítása. Legtöbbször a nyírás igénybevételével párosul. Ebben az esetben a tiszta nyírásnál ismeretett képlet a 'τ' feszültség meghatározására **nem alkalmas**.

Abban az esetben, ha a a vizsgált prizmatikus rúd keresztmetszete szimmetrikus, 'y' a szimmetria tengely és a $\underline{M}_h$ hajlítónyomaték síkja az 'xy" szimmetria sík, a 'V' nyíróerő okozta 'τ' feszültség elemi úton számítható. A semleges tengely

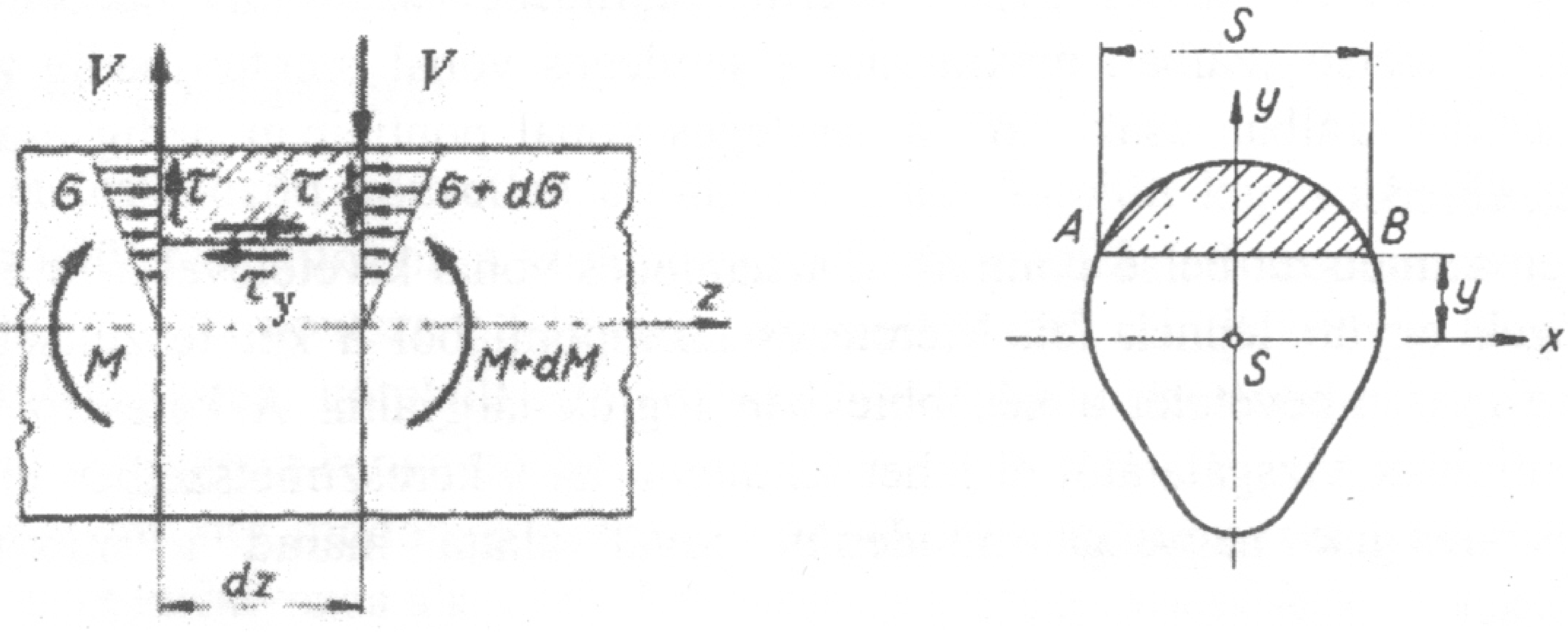


3.23. ábra

egybeesik az 'x' tengellyel.

Az x tengellyel párhuzamos 'AB' egyenes mentén ébredő feszültségekről semmit sem tudunk. Az 'A' és 'B' pontokban ébredő csúsztatófeszültségek irányát ismerjük, azok csak érintőirányúak lehetnek. Az 'A' és 'B' pontbeli érintők az y tengelyen metszik egymást /szimmetriából következik/. A tapasztalat szerint feltételezhető, hogy az 'AB' egyenes valamennyi pontjában ébredő csúsztatófeszültség hatásvonala keresztülmegy az '0' ponton, továbbá, hogy az 'AB' egyenes mentén ébredő feszültségek 'y' irányú komponensei minden pontban egyenlők, és értékük az 'AB' szakasz és a semleges vonal távolságától függ. A szimmetriából következik, hogy az 'x' tengellyel párhuzamos feszültségkomponensek páronként egyensúlyban vannak.

Válasszuk ki a rúd egy tetszőleges ‘dz’ hosszúságú elemét. A semleges száltól ‘y’ távolságra lévő rétegben ébredő ‘τ’ feszültség kiszámításához írjuk fel a



3.24. ábra

fölötte lévő rúdelem egyensúlyát.

$$\int_A (\sigma + d\sigma) dA - \int_A \sigma dA - \tau_{yz} s dz = 0 \qquad (3.46)$$

A Navier képletből $\sigma = \frac{M_h}{I_x} y \quad \Rightarrow \quad d\sigma = \frac{dM_h}{I_x} y$

Behelyettesítve a (3.46) egyensúlyi egyenletbe kapjuk $\int_A \frac{dM_h}{I_x} y dA - \tau_{yz} s dz = 0$

$\frac{dM_h}{I_x} \int_A y dA - \tau_{yz} s dz = 0 \qquad \int_A y dA = S_x$, a hasáb végpontjának statikai nyomatéka

A feszültséget kifejezve: $\tau_{yz} = \tau = \frac{V \cdot S_x}{I_x \cdot s}$ (3.47)

ahol ‘V’ – a nyíróerő,

I_x – a keresztmetszet másodrendű nyomatéka a hajlítás tengelyére

S_x – a vizsgált réteg feletti keresztmetszetidomrész statikai nyomatéka a hajlítás tengelyére

s – a vizsgált réteg ‘x’ irányú szélessége

A IV. mellékletben ismertetünk néhány egyszerű keresztmetszetének a nyírás következtében fellépő feszültségét (a levezetés mellőzésével) és eloszlását.

3.6.3. Hajlításra és nyírásra igénybevett rúd méretezése

A 3.47 képletből kitűnik, hogy a csúsztató feszültség a szélső szálakban zérus /$S_x = 0$/. A Navier képlet szerint hajlításból származó húzó-nyomó feszültség a szélső szálban maximális, a semleges vonal mentén pedig zérus. Ezért a szélső szálban csak 'σ', a semleges vonal pontjaiban pedig csak 'τ' feszültség ébred.

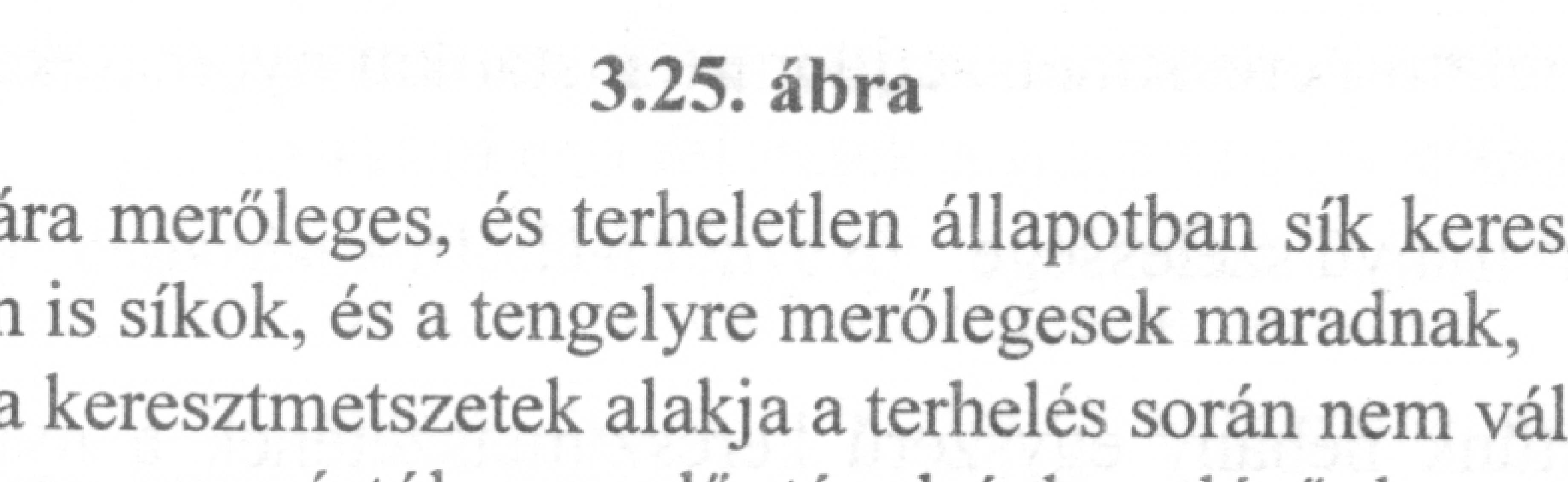
A keresztmetszet belső pontjaiban a semleges vonal kivételével a 'σ és 'τ' feszültségek együtt lépnek fel. Méretezés szempontjából a két feszültségfajta együttes figyelembevételét a későbbiekben fogjuk tárgyalni. A keresztmetszet belső pontjainak vizsgálatától el lehet tekinteni, ha a keresztmetszetben ébredő 'τ' feszültségek nagysága mindenütt jóval alatta marad a maximális feszültségnek.

Erről olyan módon győződünk meg, hogy kiszámítjuk a hajlításra méretezett rúd keresztmetszetében ébredő maximális 'τ' feszültséget, és ezt összehasonlítjuk a megengedett feszültséggel. Ezt az eljárást röviden úgy foglalhatjuk össze, hogy a rudat a szélső szálban ébredő feszültségre 'σ' méretezzük, a maximális 'τ_{max}' feszültségre pedig ellenőrizzük.

3.7. Csavarás

3.7.1. Kör és körgyürü keresztmetszetű rúd csavarása

A 3.25. ábrán látható "d" átmérőjű körkerésztmétszetű rudat a 'z' hatásvonalú M_o és $-M_o$ nyomatékok terhelik. A rúd minden egyes "K" keresztmetszetének az igénybevétele csavarás. Kis alakváltozások esetében az alábbiak feltételezhetők:



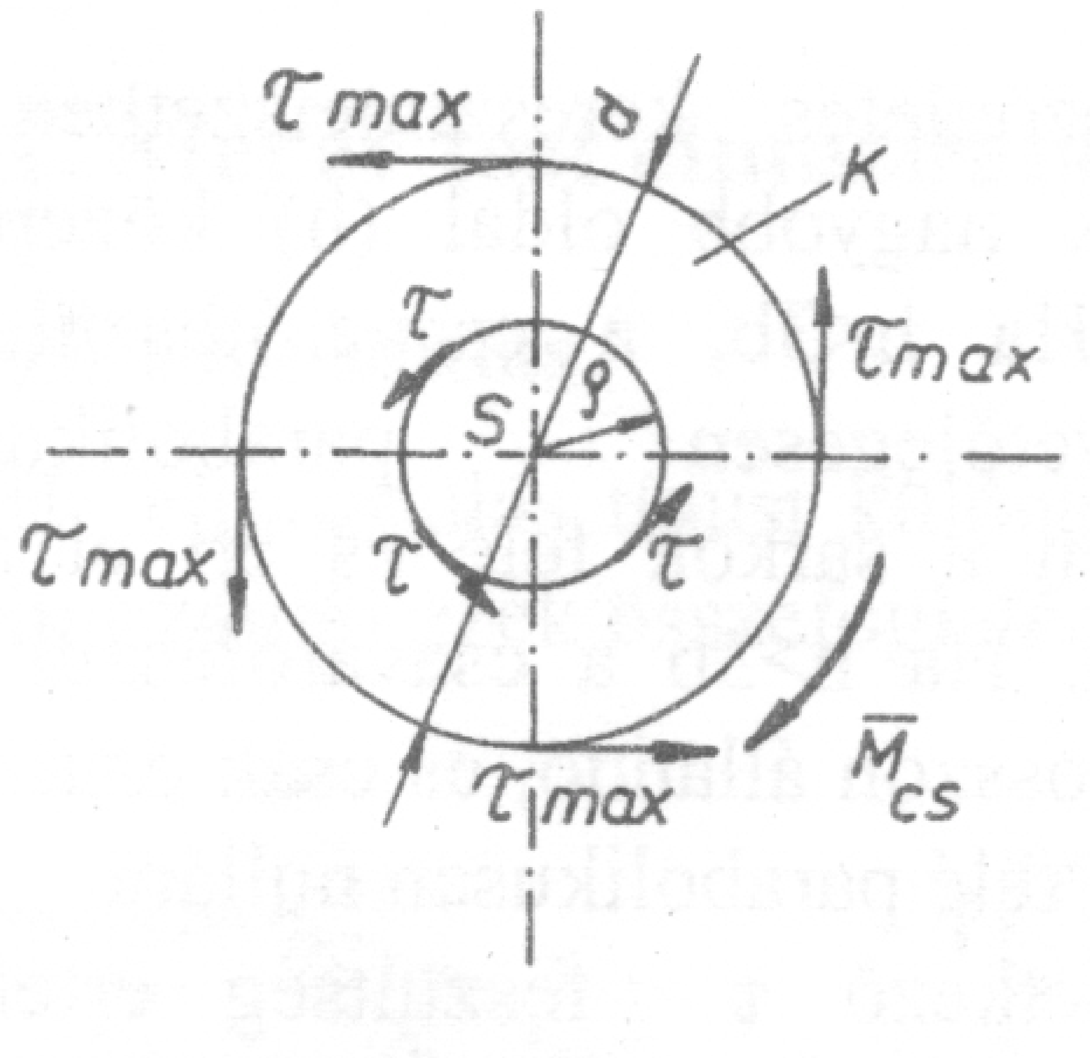
3.25. ábra

1./ a rúd tengelyvonalára merőleges, és terheletlen állapotban sík keresztmetszetek az alakváltozás után is síkok, és a tengelyre merőlegesek maradnak,

2./ a keresztmetszetek alakja a terhelés során nem változik meg,

3./ az egymástól egyenlő távolságban lévő kersztmetszetek egyenlő szöggel fordulnak el.

A rúd egy tetszés szerinti "K" keresztmetszetében egy 'ρ' sugarú kör pontjaiban egyenlő nagyságu 'τ' feszültségek keletkeznek



3.26. ábra

A 'ρ' sugarú körön fekvő 'τ'-ok a 'ρ' sugarú kört érintik, és a 'τ'-ok 'S' pontra számított forgatási értelme megegyezik a keresztmetszetet terhelő $\underline{M}_{cs}$ csavarónyomaték forgatási értelmével.
A feszültségek az alábbi formulával számíthatók:

$$\tau = \frac{M_{cs}}{I_p}\rho \qquad (3.48)$$

M_{cs} - -a vizsgált keresztmetszetet terhelő csavarónyomaték,
Ip - a teljes keresztmetszet 'S' pontjára számított poláris másodrendű nyomatéka,
ρ - a vizsgált keresztmetszet síkjában felvett kör sugara.

Ha ρ = 0, a körkeresztmetszet 'S' középpontjában nem ébred e csavarásból csúsztató feszültség (τ = 0)
Ha ρ_{max} = d/2 , a maximális csúsztató feszültségek keletkeznek

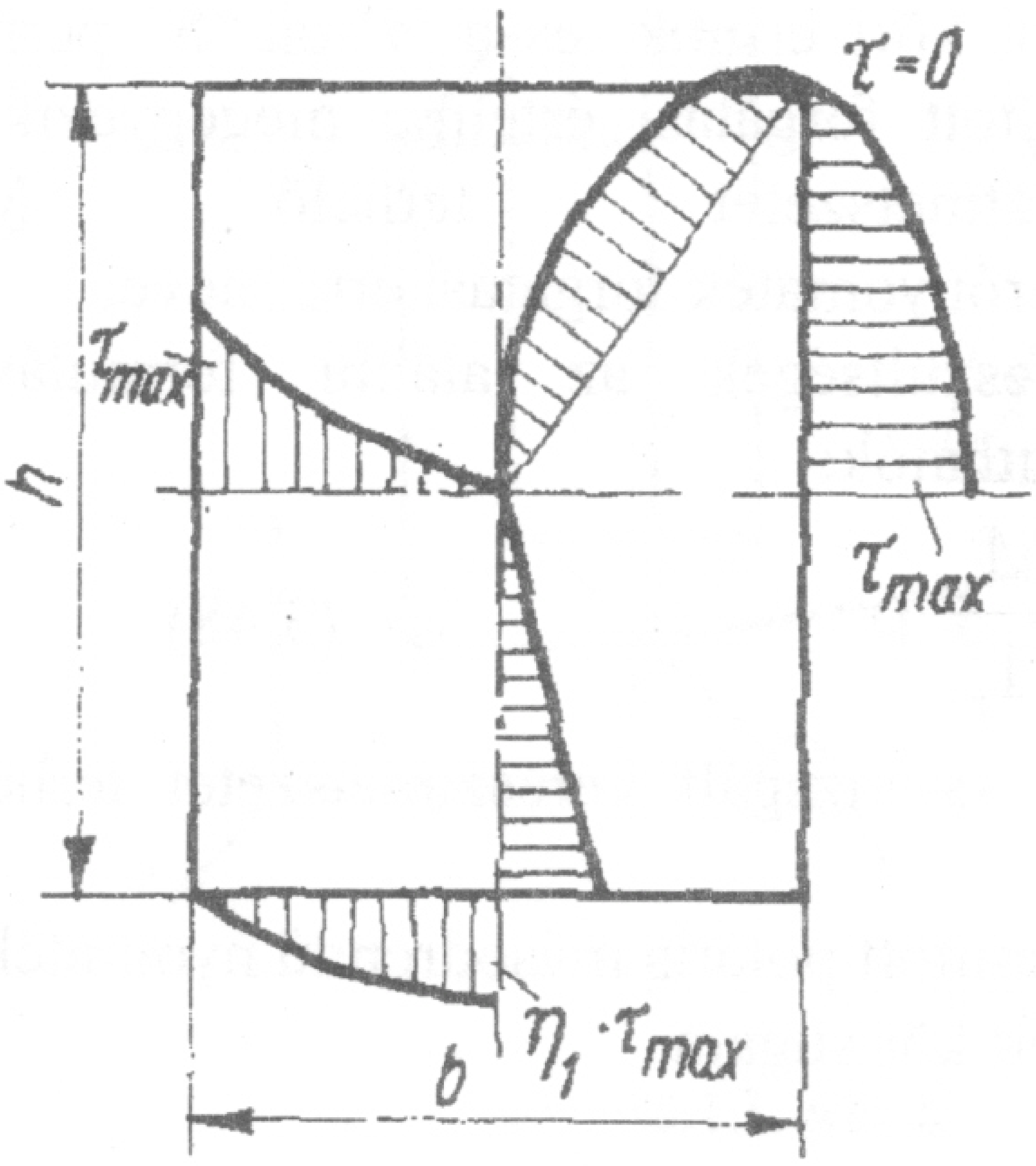
$$\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{I_p}\frac{d}{2} \qquad (3.49)$$

Csavaró igénybevétel esetén a rúd keresztmetszetei a tengely körül elfordulnak. Kis alakváltozások esetén feltételezhető, hogy az egymástól egyenlő távolságban lévő keresztmetszetek egyenlő szöggel fordulnak el.
Kör és körgyürü keresztmetszetű rúd 'l' távolságra lévő két keresztmetszetének elfordulása

$$\varphi = \frac{M_{cs} \cdot l}{I_p \cdot G} \qquad (3.50.)$$ összefüggésből számítható

M_{cs} - a rudat terhelő csavarónyomaték,
l - a vizsgált keresztmetszetek egymástól való távolsága,
Ip - a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka,
G - csúsztató rugalmassági modulus.

3.7.2. Téglalap keresztmetszetű rúd csavarás



Négyszögletes keresztmetszetben a τcsmax nagyobb oldal (h) közepére esik. Ha h<3b, a csavarófeszültség hozzávetőlegesen parabolikusan csökken a sarkok felé és éri el a 0 értéket. Ha h>3b a csavarófeszültség h-3b hosszon állandó, és csak ezután a sarkok felé parabolikusan nullára.

A keletkező τ feszültség értelme olyan, hogy a keresztmetszet középpontjára számított forgatási értelmük megegyezik a csavarónyomaték forgatási értelmével.

3.27. ábra

$$\tau\max = \alpha\frac{M_{cs}}{b^2h}, \qquad (3.51)$$

α és η értéke h/b viszonyaitól függ.

3.2. Táblázat

h/b	1	1.5	2	3	4	6	8	10
α	4.81	4.33	.4.07	3.74	3.55	3.35	3.26	3.2
η	1.0	0.858	0.796	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743

3.8. Kihajlás

Karcsú, (keresztmetszeti méreteihez képest hosszú) prizmatikus egyenes rudat két végsõ keresztmetszetének súlypontjában "F" koncentrált erõvel terhelünk. A tapasztalat azt mutatatja, hogy egy bizonyos erőhatásig a rúd megrövidül és egyenes marad. Ezt a határt túllépve a rúd kihajlik és tönkremegy. A rúd nem a nagy nyomófeszültség miatt meggytönkre, hanem a rúd egyenes alakja nem stabil. A rúdban a külső és belső erők egyensúlya nem stabil. Az egyes keresztmetszetek kihajlási tengelye a legkisebb másodrendû nyomatékot adó súlyponti tengely.

F_k -val jelöljük a kritikus terhelő erőt és törő erőnek is nevezzük. Ez

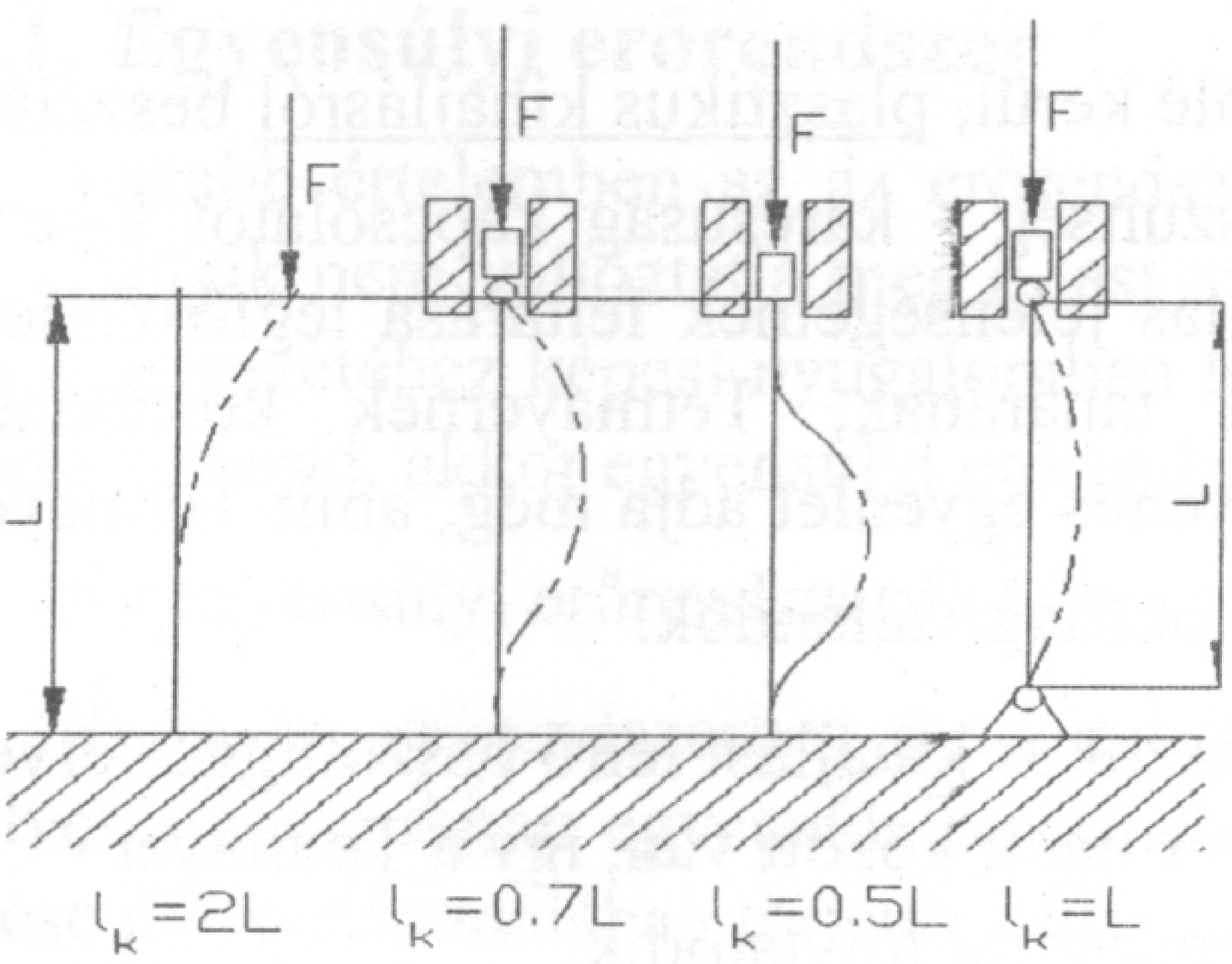
$\sigma_K = \frac{F_k}{A}$ feszültséget ébreszt

ha $\sigma_k \leq \sigma_P$ az arányossági feszültséget nél rugalmas kihajlásról beszélünk.

F_k értékét először EULER számította ki és megállapította, hogy érték függ:

- a rugalmassági modulustól (E)
- geometriai méretektõl
- megfogás módjától (l_k)

A matematikai számítások mellõzésével a töröerõ: $F_k = \Pi^2 \frac{I_2 \cdot E}{l_k^2}$ (3.52)



3.28. ábra

I_2 - A rúdkeresztmetszet legkisebb másodrendû nyomatéka a súlyponton átmenõ tengelyre számítva.

l_k - a szabad kihajlási hossz. ld.3.28.ábra

A törőfeszültség:

$$\sigma_t = \Pi^2 \frac{I_2 \cdot E}{A \cdot l_k^2} \qquad (3.53)$$

Vezessük be az inerciasugár fogalmát.

A másodrendû nyomaték kifejezhetõ a területtel, a következõ képlettel

$I_2 = i^2 A$ (3.54) ahol i - az ú.n. inercia sugár

Jellemezze a rúd geometriai viszonyait a "λ" -val jelölt karcsúsági tényezõ.

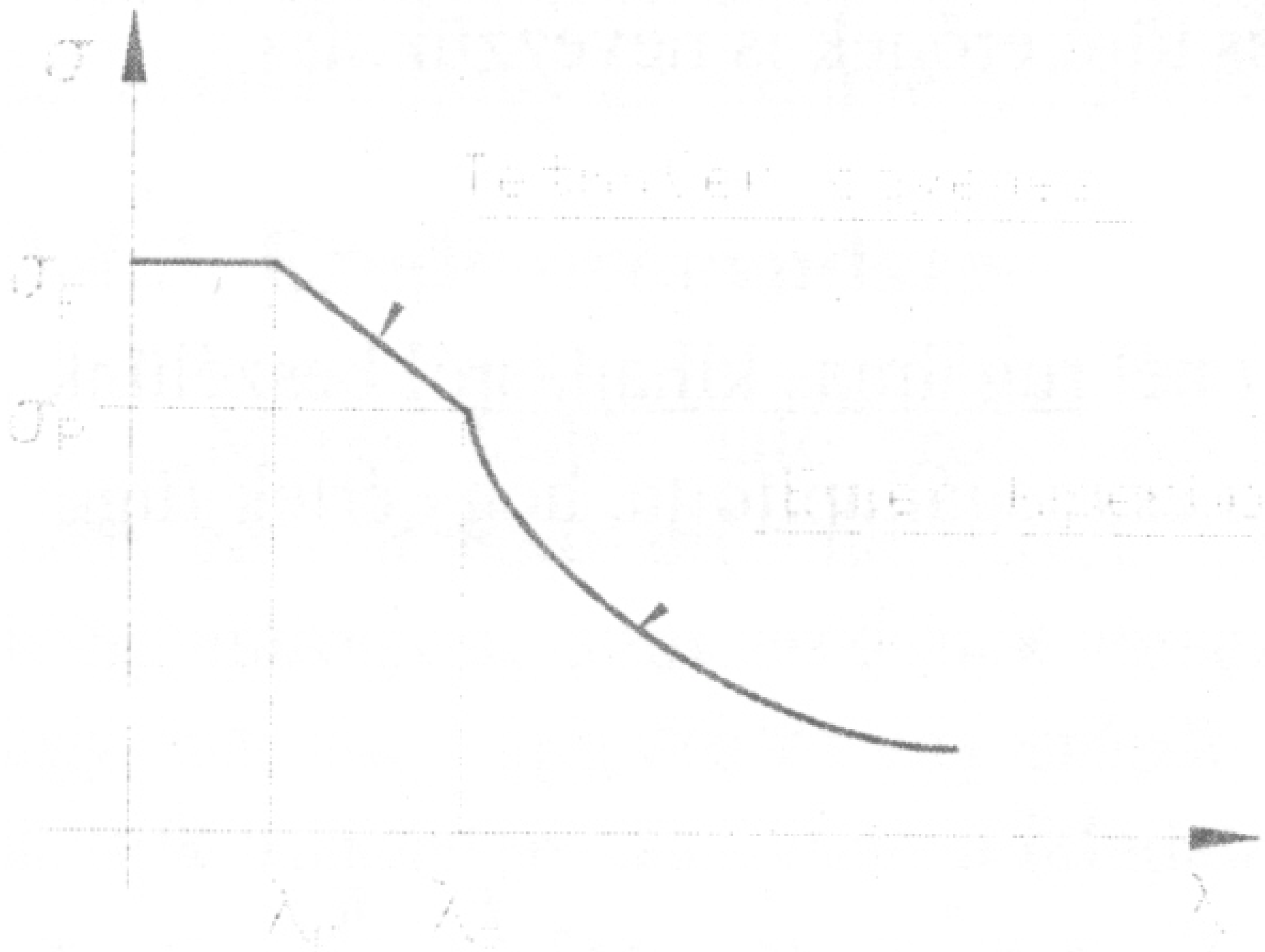
$\lambda = \frac{l_k}{i}$ (3.55) (Vigyázat ez nem azonos a hosszváltozás "λ" -jával)

A fenti jelölések bevezetésével

$$F_k = \Pi^2 \frac{A \cdot E}{\lambda^2} \qquad (3.56)$$

$$\sigma_k = \Pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \qquad (3.57)$$

A törőfeszültséget a λ függvényében ábrázolva egy hiperbolát kapunk, az ú.n. EULER hiperbolát.



3.29. ábra

A feszültség nagysága csak az anyagtól és a karcsúsági tényezővel jellemzett geometriai mértéktõl függ.

Az Euler hiperbola érvényességi határa csak a $\sigma_k \le \sigma_P$ értékekre vonatkozik, azaz a keresztmetszetre számított $\lambda > \lambda_P$.

Amikor σ_t az arányossági határ fölé kerül, plasztikus kihajlásról beszélünk. A plasztikus kihajlás esetén a törõfeszültség - karcsúság kapcsolatot kísérleti összefüggés írja le. A plasztikus kihajlás jelenségeinek feltárása legfõképpen a Selmecbányai Bányászati Akadémia tanárának, Tetmayernek köszönhetõ. Kísérletei alapján $\sigma_t = a - b\lambda$ alakú egyenes egyenlet adja meg, amit Tetmayer - egyenesnek nevezünk. "a" és "b" anyagtól függő állandók.

A legújabb kutatások szerint a plasztikus kihajlást leíró összefüggés érvényességi határa az arányossági- és a folyáshatár között van, így a Tetmayer - egyenes σ_F -en túl vízszintes egyenes szakasszal folytatódik.

Ha fennáll a kihajlás veszélye a számítás menete a következõ:

1. Felvesszük :
   - "F" terhelést,
   - l_k szabadkihajlási hosszt,
   - az anyag "E" rugalmassági modulusát,
   - Z_k - biztossági tényezõt

2. Meghatározzuk a "I_2" másodrendû nyomatékot. Feltételezzük, hogy a karcsúsági tényző $\lambda > \lambda_P$, vagyis a kihajlás rugalmas:

$$F_m = \frac{F_k}{Z_k} = \frac{\sigma_k \cdot A}{Z_k}, \qquad F_k = \Pi^2 \frac{I_2 \cdot E}{l_k^2} \qquad I_2 = \frac{F_m \cdot l_k^2 \cdot Z_k}{\Pi^2 \cdot E}$$

3. Meghatározzuk a keresztmetszet alakját és "A" felületi méreteit (táblázatokból)

4. Meghatározzuk a karcsúságot $\lambda = \dfrac{l_k}{\sqrt{\dfrac{I_2}{A}}}$

5. Összevetjük λp –vel, amely értékeét táblázatból olvashatjuk ki vagy a következõ képlettel $\lambda_p = \sqrt{\dfrac{\Pi^2 \cdot E}{\sigma_p}}$ számíthatk ki.

6. Megvizsgáljuk hogy feltevésünk helyes volt e, azaz rugalmas kihajlással van dolgunk. Ha $\lambda < \lambda_P$ a kihajlás plasztikus tartományban fekszik és a Tetmayer egyenes képlete szerint kell eljárni.

3.9. Összetett igénybevételek

Eddigi tárgyalásaink során az igénybevételek hatását külön - külön vizsgáltuk. A felsorolt esetekben, összefoglaló nevükön az ún. egyszerű igénybevételeknél a rúd terhelése különleges helyzetű erő vagy nyomaték volt. A statikában az igénybevételek fogalmának bevezetésénél már láttuk, hogy a terhelések általános helyzete egyszerre több igénybevétel hatását eredményezi. Több egyszerű igénybevétel együttes hatását összetett igénybevételnek nevezzük. Ha az igénybevételek okozta feszültségek azonosak - pl. vagy csak 'σ' , vagy csak 'τ' , akkor egyirányú összetett igénybe vételről beszélünk. Ha az egyszerű igénybevétel által előidézett feszültségek különbözők, tehát egyidőben mind 'σ' , mind 'τ' feszültség fellép, akkor többirányú összetett igénybevételt kapunk.

3.9.1. Méretezés egyirányú összetett igérnybevételre

A méretezés a szuperpozíció elvei alapján történik. Meghatározzuk az egyes igénybevételekből származó feszültségeket a keresztmetszet veszélyesnek ítélt pontjában, összegezzük azokat, és összevetjük az anyagra megengedett / σ_m vagy τ_m/ feszültaéggel. A keresztmetszet megfelel, ha

$\sigma_{max} \leq \sigma_m$ vagy $\tau_{max} \leq \tau_m$

3.9.2. Méretezés többirányú összetett igénybevétel.

Ha a keresztmetszetben 'σ' és 'τ' feszültségek együttesen lépnek fel, a feszültségi állapot általánossá válik. A rúd méretezését, vagy ellenőrzését nem tudjuk az eddigiekhez hasonlóan elvégezni. Több elmélet is foglalkozik a kérdéssel, ezeket feszültségelméleteknek nevezzük. A feszültségelméletek közös vonása, hogy a feszültségi állapottól valamilyen redukált feszültséget számítanak ki, és ezt hasonlítják össze a tiszta húzásra megengedhető feszültséggel.

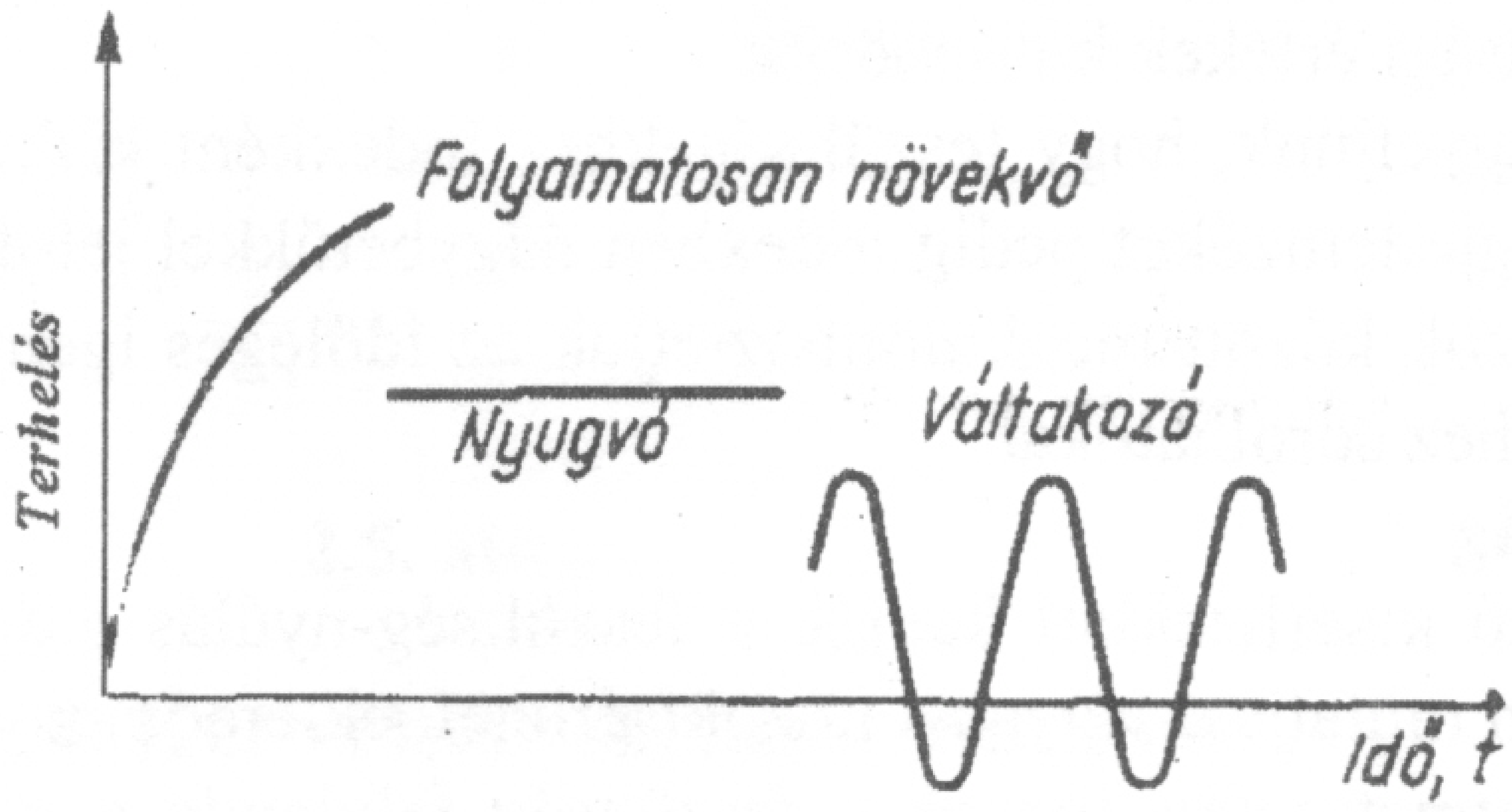
$\sigma_{red} \leq \sigma_m$

A sokféle feszültség elmélet közül, a viszonylagos pontossága és egyszerűsége miatt a gyakorlatban leginkább elterjedt Mohr elmélet szerinti feszültség

$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ (3.58) képletét adjuk meg.

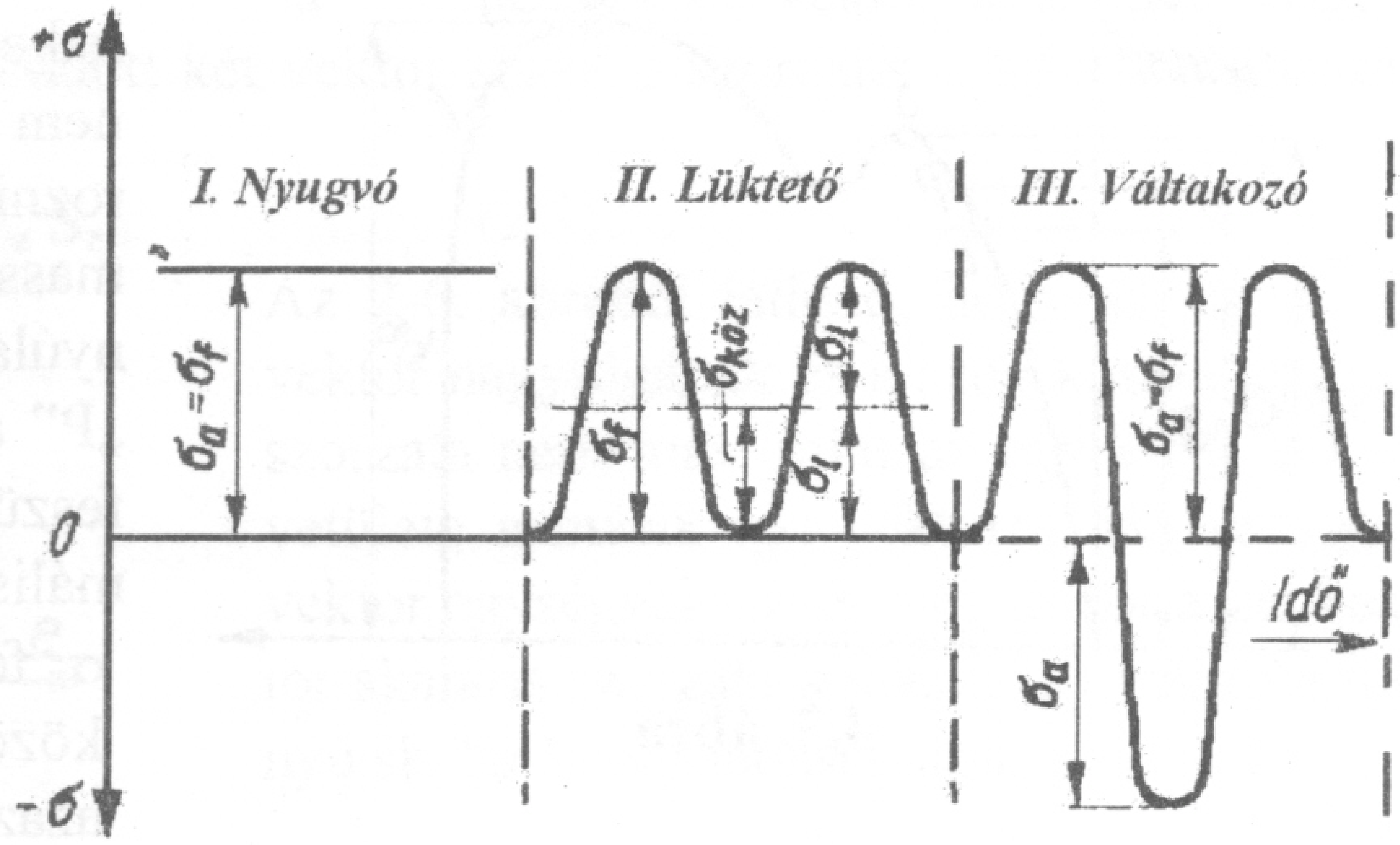
4. Az anyagok terhelhetősége

4.1. Terhelési esetek



4.1. ábra

A névleges feszültségek számításában az F külső erőt állandónak tekintjük. Ez azonban legtöbbször nem áll fenn, mivel időbeli változásokkal kell számolni. Megkülönböztetünk növekvő, nyugvó és változó terhelést (4.1.ábra). Mivel az anyagok szilárdsági értékei és a megengedett feszültségek az időbeli változástól jelentősen függenek, célszerű ezt a tényt már a számítások során figyelembe venni. Ezért az anyagtáblázatokban három terhelési esetet vesznek figyelembe és ezekhez különféle megengedett feszültségeket adnak meg.



4.2. ábra

Megkülönböztetünk felső és alsó feszültségeket (σ_f, ill. σ_a), ebből számítjuk átlagfeszültséget $\sigma_k = \dfrac{\sigma_a + \sigma_f}{2}$ és felvesszük a feszültség változásának mértékét (a feszültségamplitúót is) (σ_l). Az 4.2.. ábra alapján tehát:

I. terhelési eset (nyugvó) $\sigma_l = 0$; $\sigma_k = \sigma_a = \sigma_f$,

II. terhelési eset (lüktető) $\sigma_a = 0$; $\sigma_l = \sigma_k = \sigma_f/2$,

III. terhelési eset (váltakozó, lengő) $\sigma_k = 0$; $\sigma_a = \sigma_f$

4.2. Az anyagok szilárdsága

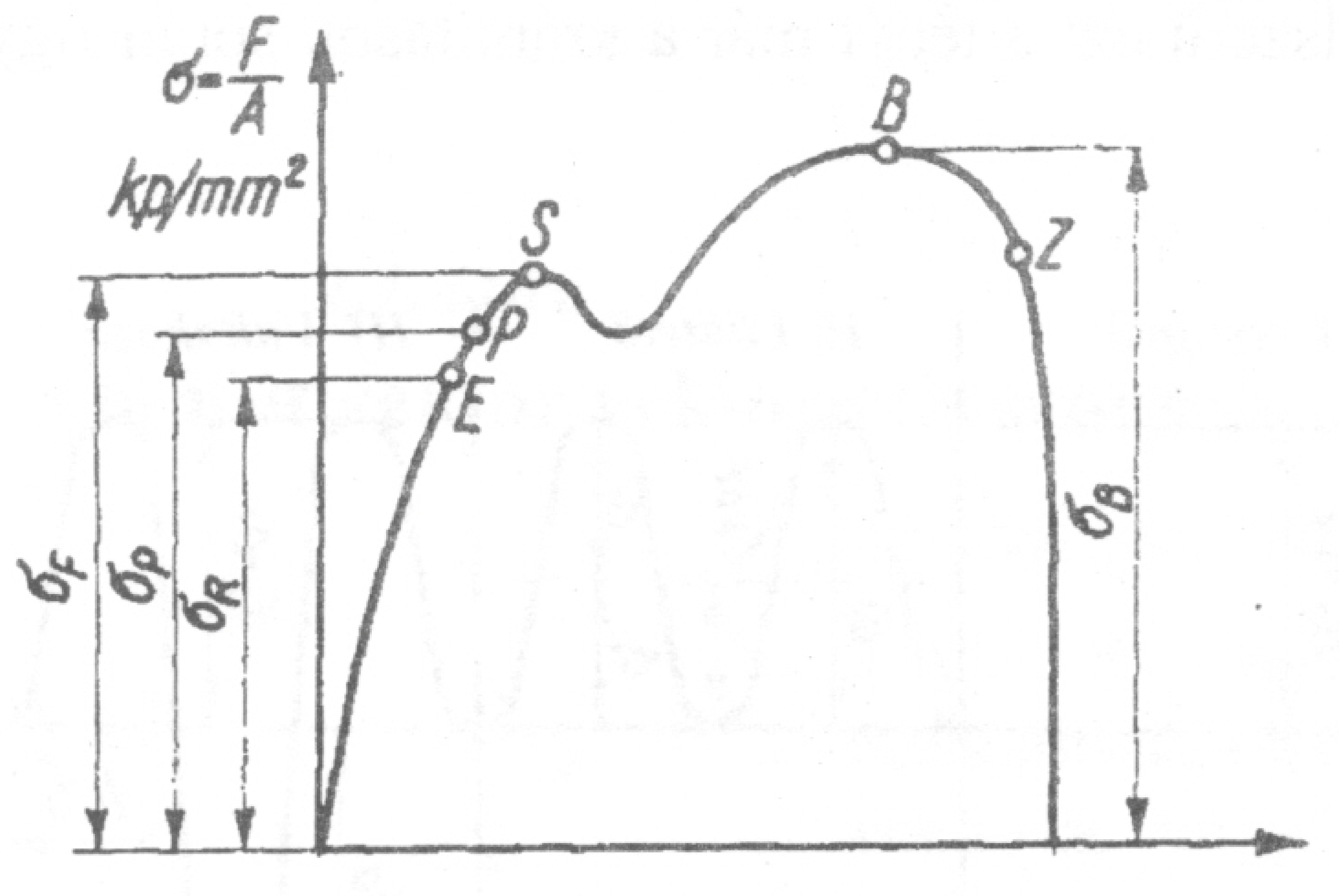
Megengedett feszültségek (σ_{meg}, τ_{meg}) számításához anyagvizsgáló gépeken határozzuk meg a szükséges anyag-jellemzőket. Figyelembe kell venni, hogy időleges monoton növekvő vagy pedig váltakozó tartós igénybevételről van-e szó, mindkét esetben a szilárdsági értékek különbözők.

A továbbiakban arra is ügyeljünk, hogy feszültségekhez indexként kisbetűket használjunk (σ_h), az anyagjellemzőket pedig indexben nagybetűkkel jelöljük (pl.. σ_B, σ_P). Az anyagjellemzők között megkülönböztetjük az időleges igénybe vételhez és a tartós terhelésekhez sorolhatókat.

4.2.1. Statikus szilárdság

A húzó, nyomó és hajlító kísérletekből kapjuk a feszültség-nyúlás diagramokat. Az 4.3 ábra vázlatosan mutatja a lágyacél húzókísérleteinek eredményeit. A próbapálca kezdeti keresztmetszetén ébredő σ feszültség felviendő a rúd ε nyúlására. A jelentkező határok:

„E" a rugalmassági határ jele, σ_R feszültséggel, az a maximális feszültség amelylyel a tehermentesítés után maradó nyúlás még nem keletkezik. Ezt a határt gyakran nem lehet pontosan meghatározni, ezért a technikai rugalmassági határt 0,01% maradó nyúlásnál rögzítik.



4.3. ábra

„P" az arányossági határ jele, feszültséggel σ_P, az a maximális feszültség amelyiken a σ feszültség és az ε nyúlás között az arányosság fennáll, azaz a Hooke-féle törvény érvényes.

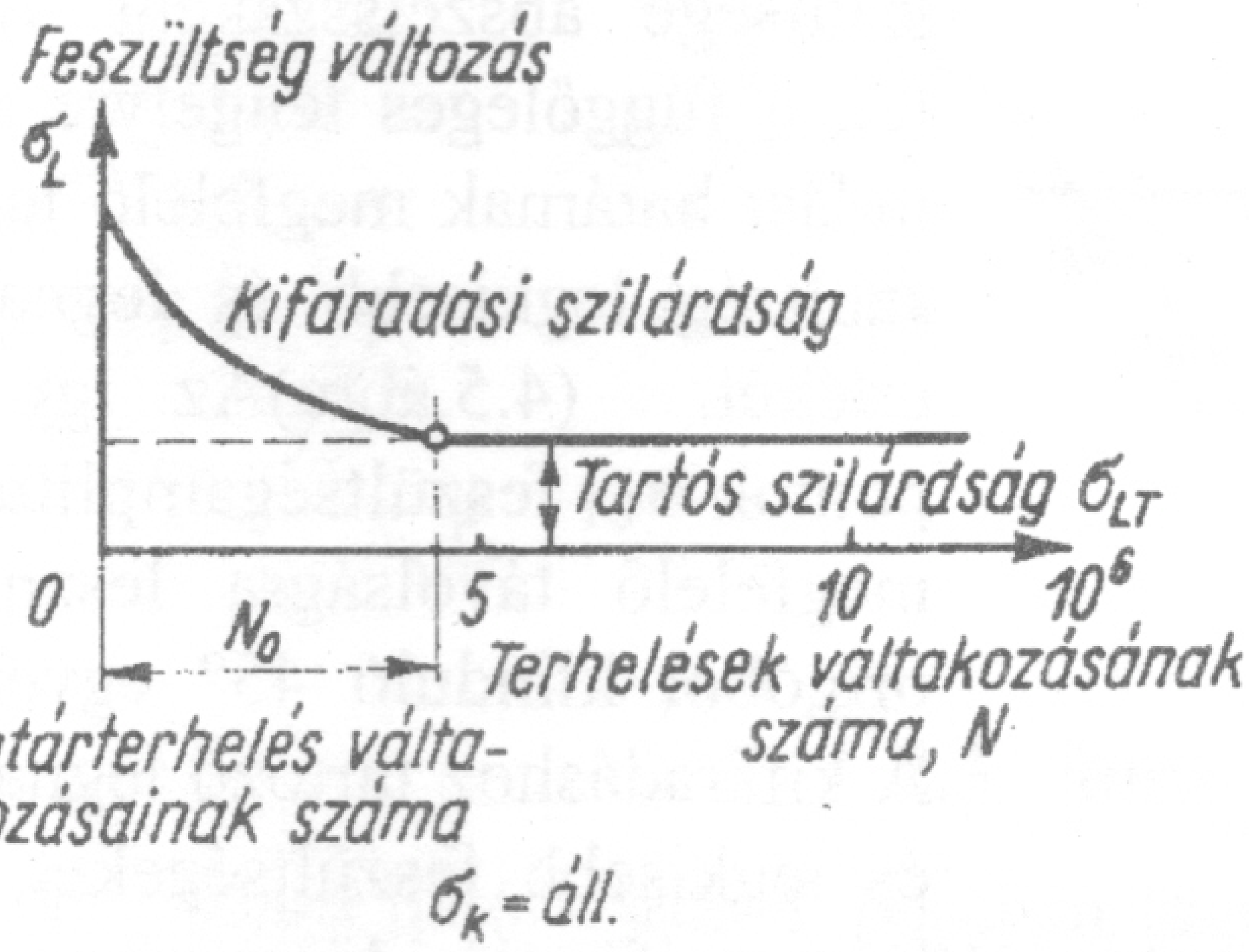
„S" a folyási határ jele, σ_F feszültséggel, az a feszültség, amelyen az anyag folyása (feszültség növekedésnél nélküli nyúlása) megindul. Ekkor a feszültség egy felső folyási határértéktől egy alsó határértékre csökkenhet. Ha az anyagnak nincsen kifejezett folyási határa, pl. nagyszilárdságú acéloknál, azt a feszültséget tekintjük „folyási határnak", amelyen a maradó nyúlás 0,2% (0,2 nyúláshatár jelölése, $\sigma_{0.2}$).

„B" a maximális feszültség pontja σ_B feszültséggel.a kísérletek során elérhető maximális feszültség.

„Z" a törés helye. A δ szakadási nyúlás az anyag megnyúlási képességének jellemzője, δ_5 –el azt a nyúlást jelöljük, amelyet $l_o = 10d$ hosszúságú próbapálcánál mértünk.

4.2.2.Tartós szilárdság

Tartós igénybevételek esetén a statikusan meghatározott szilárdsági értékeket nem használhatjuk. Váltakozó terheléssel támadott alkatrész szilárdságának számításához a σ_L feszültségi érték mérvadó (4.2.ábra).



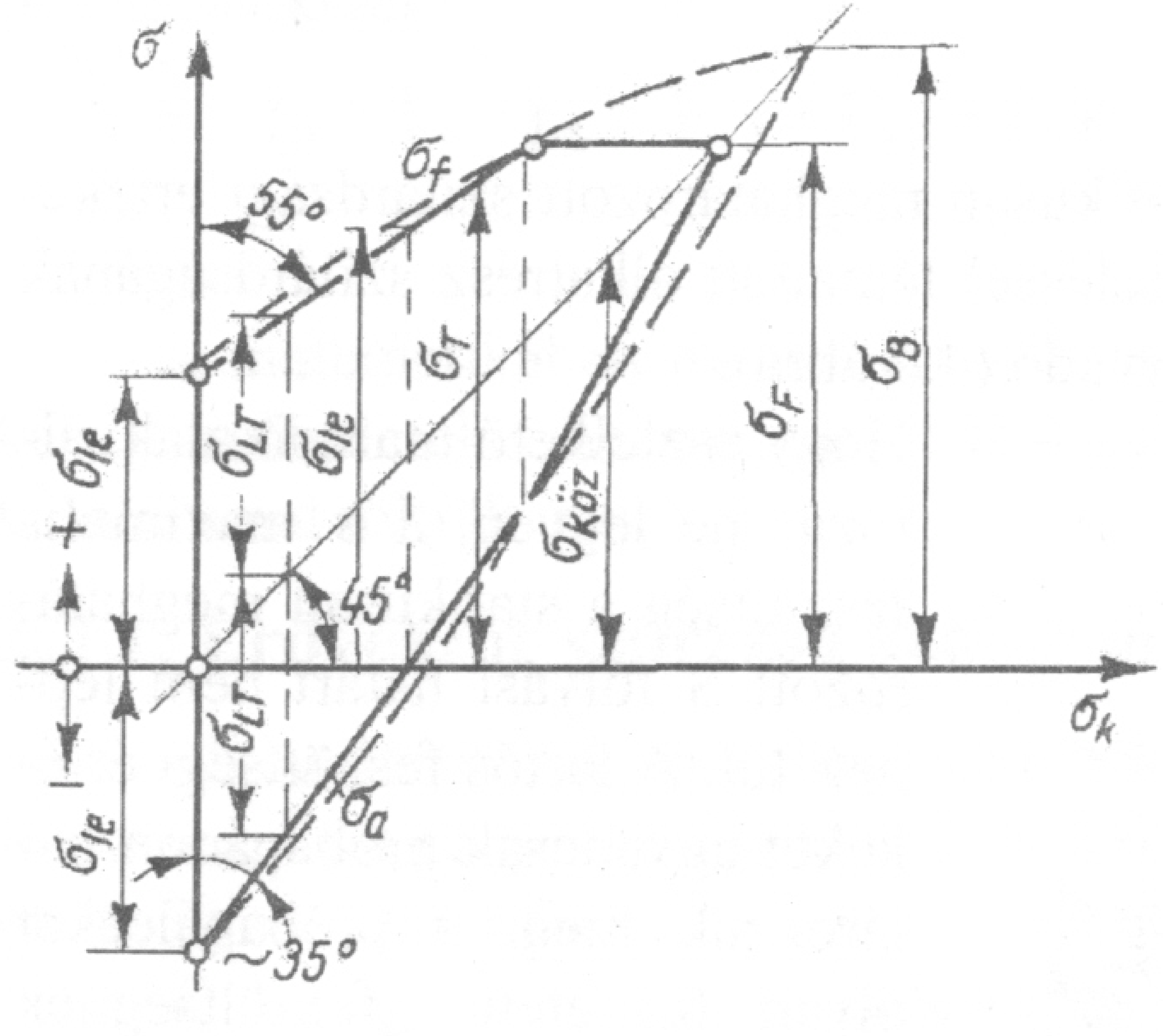
4.4. ábra

Hogy észlelhető maradó alakváltozás ne legyen, a σ maximális feszültség a statikusan meghatározott S folyási határt nem lépheti túl. A tartós feszültségi értékeket ugyancsak próbapadon határozzuk meg, a próbapálcákat olyan összetett feszültségnek tesszük ki (egészen törésig), amelyik a σ_k átlagfeszültségből és egy szuperponált σ_l feszültséglengésből áll ($\sigma_ö = \sigma_k + \sigma_l$)

Az 4.4. ábrában a feszültség változásának értékét (σ_v) a terhelésváltozások N száma függvényében egészen a fáradt törésig vittuk fel. A kísérleteket különböző feszültség-változási értékekre megismételve kapjuk a σ_l feszültség görbéjét, az N „törőterhelési-szám" függvényében, egy meghatározott σ_k átlagfeszültségre vonatkozóan. Ezeket a görbéket élettartam-, ill. **Wöhler-görbéknek** nevezzük.

Az N_0 határterhelési számnál a Wöhler-görbe az abszcisszával párhuzamosan halad. Ha $N < N_0$, kifáradási szilárdságról van szó, $N > N_0$-nál pedig a σ_{LT} a tartós szilárdságot jelenti. A σ_{LT} egyúttal egy meghatározott átlagfeszültség körül változó maximális feszültséglengés, amelyet az adott anyagból készített próbadarab tartósan kibír. A maximális kifáradási szilárdság azt a szélső feszültségértéket jellemzi, amelyet a próbapálca csekély terhelésváltozási szám mellett még törés nélkül elvisel. Az N_0 határ értéke acélra 3 . . .10• 10^6, könnyűfémre kb. 100•10^6.

A számításokhoz a maximális tartós szilárdság mértékadó, csak olyan alkatrészeknél számolunk a kifáradási szilárdsággal, amelyek élettartama kisebb, vagy üzemelés folyamán a terhelésváltozások száma kisebb.



4.5. ábra

Ha ismerjük a σ_k átlag feszültségek Wöhler görbéit és ezáltal a σ_{LT} tartós maximális feszültség amplitúdót, megszerkeszthetjük a vizsgált anyagra jellemző tartós feszültségi diagramot. A σ_k átlagfeszültsége abszcisszaként vesszük fel, a függőleges tengelyre a kifáradási határnak megfelelő lengőfeszültség legkisebb és legnagyobb értékét. (4.5.ábra)Az így nyert pontok σ_{LT} feszültségamplitúdónak megfelelő távolságra lesznek az origóból kiinduló 45° egyenestől. A kifáradáshoz tartozó legnagyobb és legkisebb feszültségeket összekötő ún. felső és alsó határgörbék között található a kifáradási biztonság területe. Mivel a maradó alakváltozás nem kívánatos, ezért a biztonság területét felül lezárjuk a folyáshatár σ_f vízszintesével. A σ_T tartós szilárdság a meghatározott σ_k átlagfeszültség körüli σ_{LT} feszültséglengést jelöli, amelyet a próbadarab elméletileg végtelen sokszor kibír. A σ_T–re felírhatjuk: $\sigma_T = \sigma_k + \sigma_{LT}$

A 4.5. ábrából az alábbiakat állapíthatjuk meg:

1. A I terhelési esetre (nyugvóterhelés): $\sigma_{LT} = 0$; $\sigma_T = \sigma_k$ (Ez a koordináta tengelyek szögfelezője)
2. A II. terhelési esetre (lüktető): $\sigma_T = 2\sigma_{LT} = \sigma_{lü}$
3. A III. terhelési esetre (váltakozó): $\sigma_T = \sigma_{LT} = \sigma_{le}$

A 4.4. ábrában mind a felső (σ_f), mind az alsó (σ_a) határfeszültségeket a σ_k függvényében vittük fel. A felső határt a folyás határ (σ_F) adja, ezáltal a képlékeny alakváltozást elkerülhetjük.

4.3. Megengedett feszültségek

Méretezési feladatainknál első lépésként mindig a felvett „F” erők okozta terhelésekkel keletkező névleges feszültségeket határozzuk meg. Az anyagvizsgálattal meghatározott feszültségi értékeket - amelyeket **itt határ** határfeszültségeknek nevezünk, a meghatározott maximális, névleges feszültségekkel sohasem szabad elérni, hanem a felvétel bizonytalansága miatt „Z” biztonsági tényezővel kell dolgozni,

$$\sigma_{meg} = \frac{\sigma_{határ}}{Z}$$

Finommechanikai műszergyártásban általában Z = 2...4 biztonsági tényezőt használunk. Ezen kívül esetenként figyelembe kell venni egyéb tényezőket is, mint az alaktényezőt (α_K), a feszültségkoncentráció tényezőt (β_K) stb.

Ezután a σ_{meg} megengedett feszültséget vagy a számított maximális, névleges feszültséggel kell összehasonlítani, vagy megfordítva: az alkatrész méretezését a σ_{meg}, τ_{meg} értékek alapján kell elvégezni, Mindig ügyelni kell arra, hogy

$\sigma_{max} \leq \sigma_{meg}$ legyen.

A határfeszültség abból a műszaki követelményből adódik, hogy az alkatrész üzem közben maradó alakváltozást vagy törést ne szenvedjen. A követelményeknek vagy az anyag jellegének megfelelően határfeszültségként a σ_B szakító feszültséget, σ_F folyási határt, vagy a σ_R rugalmassági határt kell behelyettesíteni.

Ezek a határfeszültségek) vagy a megengedett feszültségek könnyen kivehetők táblázatokból, kézikönyvekből stb.

5. Az alakváltozási munka

Ha rugalmas testet egy erő deformál, a külső erő munkát végez. A külső erő munkája átalakul a test alakváltozási belső energiájává, de ez az energia a test terhelésének megszűnése után felszabadul és felhasználható. Tehermentesítés után a rugalmas test igyekszik eredeti alakját felvenni, ekkor munkavégzésre használható fel. Így például az órarugó felhúzásakor meghatározott munkát végzünk, aminek következtében a rugó alakváltozási energiája megnő. Felszabadításkor a rugó fokozatosan visszanyeri alakját, munkát végez, mozgatja az óraszerkezetet.

A külső erő munkáját W-vel, a belső alakváltozási energiát U-val jelöljük. Így

$$W = U$$

Az alakváltozási munka kiszámításakor feltételezzük, hogy a terhelés fokozatosan növekedve okozza az erő irányába eső rugalmas „f" alakváltozást, és hogy a deformáció az „F" erőnek lineáris függvénye.

$$W = \int_0^l F d\lambda = \frac{1}{2} F f = U \quad (5.1)$$

Térfogategységre vetítve: $$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{Ff}{Al} = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon \qquad (5.2)$$

A deformációs munka több erő esetén összegződik: $W = \Sigma F_i f_i$

Húzás – nyomás

$u = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ (5.3),mert a Hooke törvényből $\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

$U = u \cdot V = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} A \cdot l = \frac{1}{2}\frac{F^2 \cdot l}{A \cdot l}$ (5.4) ,mert $\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{F^2}{A^2}$

Nyírás

A hajlítás okozta deformáció mellett a nyírás hatása elhanyagolható. Szükség esetén az alábbi képlettel számolhatunk.

$u = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$ $\qquad$ $U = \int_V \frac{\tau^2}{2 \cdot G} dV$ $\qquad$ (5.5)

Hajlítás

$$u=\frac{1}{2}\sigma\cdot\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{M}{I}y\cdot\frac{y}{\rho}=\frac{1}{2}\frac{M^2y^2}{I^2E}$$ (5.6) A (3.35) és a (3.42) képlet behelyettesítésével

$$U=\int_V udV=\int_l\int_A\frac{1}{2}\frac{M^2y^2}{I^2E}dxdA=\frac{1}{2\cdot E\cdot I^2}\int_l M^2dx\cdot\underbrace{\int_A y^2dA}_{I}=\frac{1}{2\cdot E\cdot I}\int_l M^2dx \quad (5.7)$$

Csavarás

A levezetés mellőzésével $$U=\frac{1}{2\cdot G\cdot I_p}\int_l M_{cs}^2dz \quad (5.8)$$

5.1. A Castigliano – tétel

Ha egy statikailag határozottan rögzített, rugalmas testre külső terhelésként $F_1, F_2,\ldots F_n$ erőket és $M_1, M_2,\ldots M_k$ nyomatékokat alkalmazunk, felírhatjuk a belső energiát, ami a külső aktív erők által végzett alakváltozási munkával egyenlő.

Feltételezzük, hogy a reakció erők a kényszerek merevsége következtében nem okoznak elmozdulást ill. elfordulást, ezért munkájuk zérus.

$$W=U=\frac{1}{2}\sum F_i\cdot f_i+\frac{1}{2}\sum M_j\cdot\varphi_j \quad (5.9)$$

Ha az i-edik erő nagyságát dFi –vel megváltoztatjuk, akkor a dFi erő munkája az fi elmozdulás közben az energia ΔU –val megváltozik. A belső energia változás a matematikában tanult többváltozós függvények differenciálási szabályai szerint a következő alakban írható fel:

$$\Delta U=\frac{\partial U}{\partial F_i}dF_i \quad (5.10)$$

Az energiaváltozás más módón is meghatározható. Vigyük fel a terheletlen testre először a dFi erőt statikusan. A támadáspont elmozdulása dbi . Így a dFi munkája: $\frac{1}{2}dF_i\cdot db_i$, ami másodrendűen kicsiny mennyiség, ezért elhanyagolható. Ezután vigyük fel az eredeti erőrendszert statikusan a testre. A szuperpozició elve alapján az erőrendszer energiája akkora lesz, mintha előzőleg a testet nem terheltük volna dFi erővel. Az eredeti erőrendszer fellépésekor bekövetkezett alakváltozás során a testet már teljes nagyságával terhelő dF_i erő is elmozdul b_i értékkel, és eközben $b_i dF_i$ energiát halmoz fel a testben. Az alakváltozási energia megváltozésa tehát

$$\Delta U = b_i \cdot dF_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i \qquad \text{egyszerűsítve} \quad b_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \qquad (5.11)$$

Az egyensúlyban lévő rugalmas testben felhalmozott energiának egy tetszőleges erő szerint vett parciális differenciál hányadosa megadja az erő támadáspontjának erőirányú elmozdulását.

A levezetés megismételhető nyomatékra is, akkor

$$\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \qquad (5.12)$$ összefüggést kapunk.

Az egyensúlyban lévő rugalmas testben felhalmozott energiának egy tetszőleges nyomaték szerint vett parciális differenciál hányadosa megadja az nyomaték síkjának szögelfordulását.

A Castigliano-tétel segítségével meghatározható egy szilárd test tetszőleges pontjának elmozdulása, vagy egy síkjának elfordulása.

Jól használható statikailag határozatlan feladatok megoldásánál is. Mivel ilyenkor ismeretlenek száma több a felírható statikai egyenletek számánál, a hiányzó egyenleteket a Castigliano-tétel alapján állítjuk fel. Az ismeretlen reakció erők közül az aktív erők közé sorolunk annyit, ahányszorosan határozatlan a feladat, így az alakváltozási munka ezeknek is függvénye. A környezethez kapcsolódó kényszereket merevnek tekintjük, így sem a reakció erők támadáspontjai, sem a befogási keresztmetszetek síkjai nem mozdulhatnak el. Így az aktív erők közé sorolt reakciókra felírhatjuk a Castigliano-tételt a következőképpen:

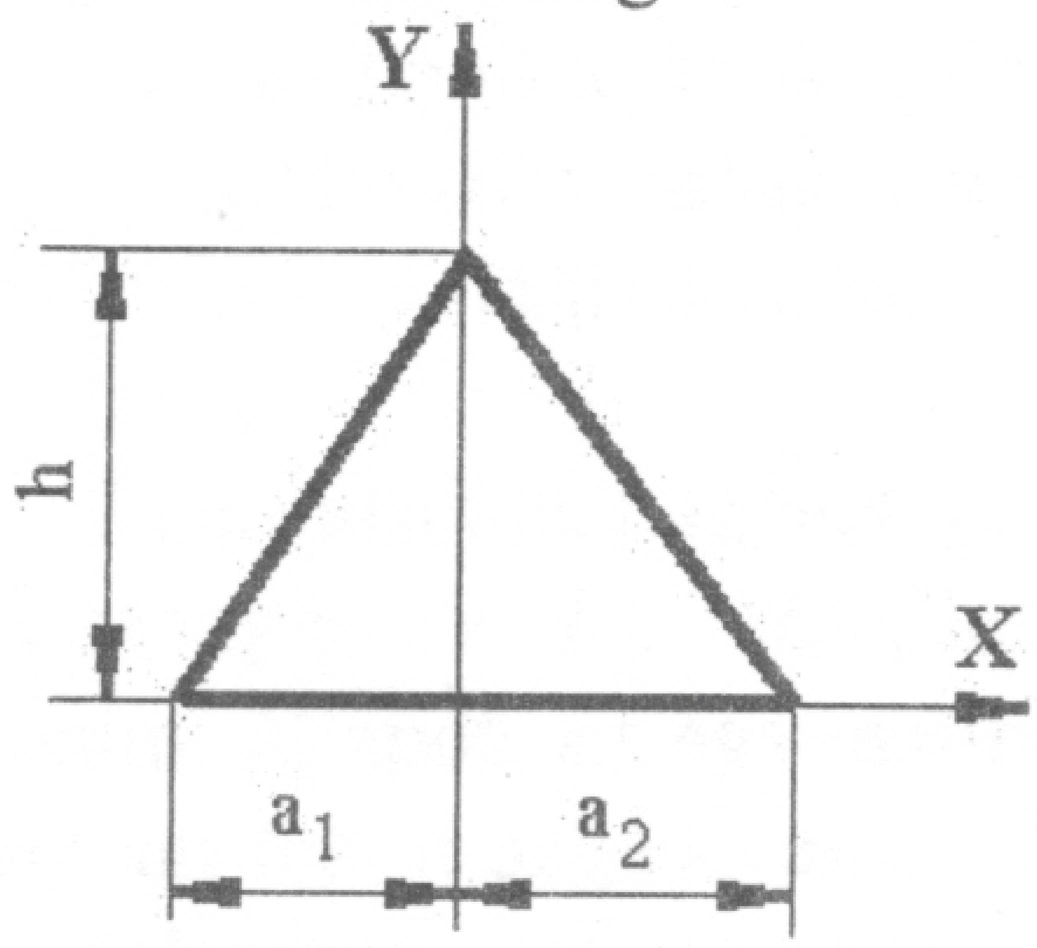
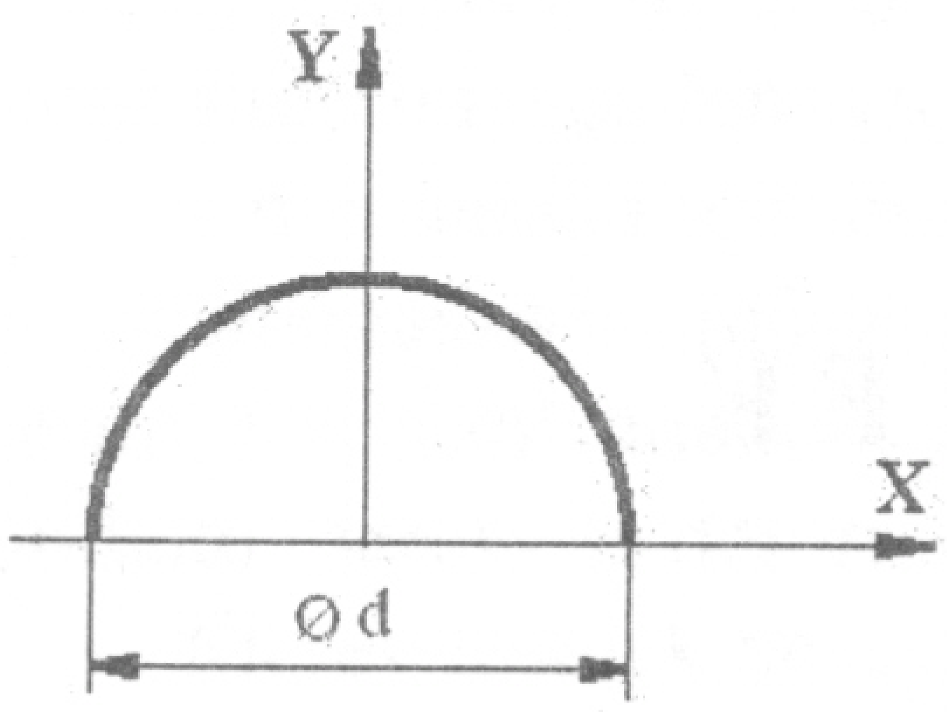
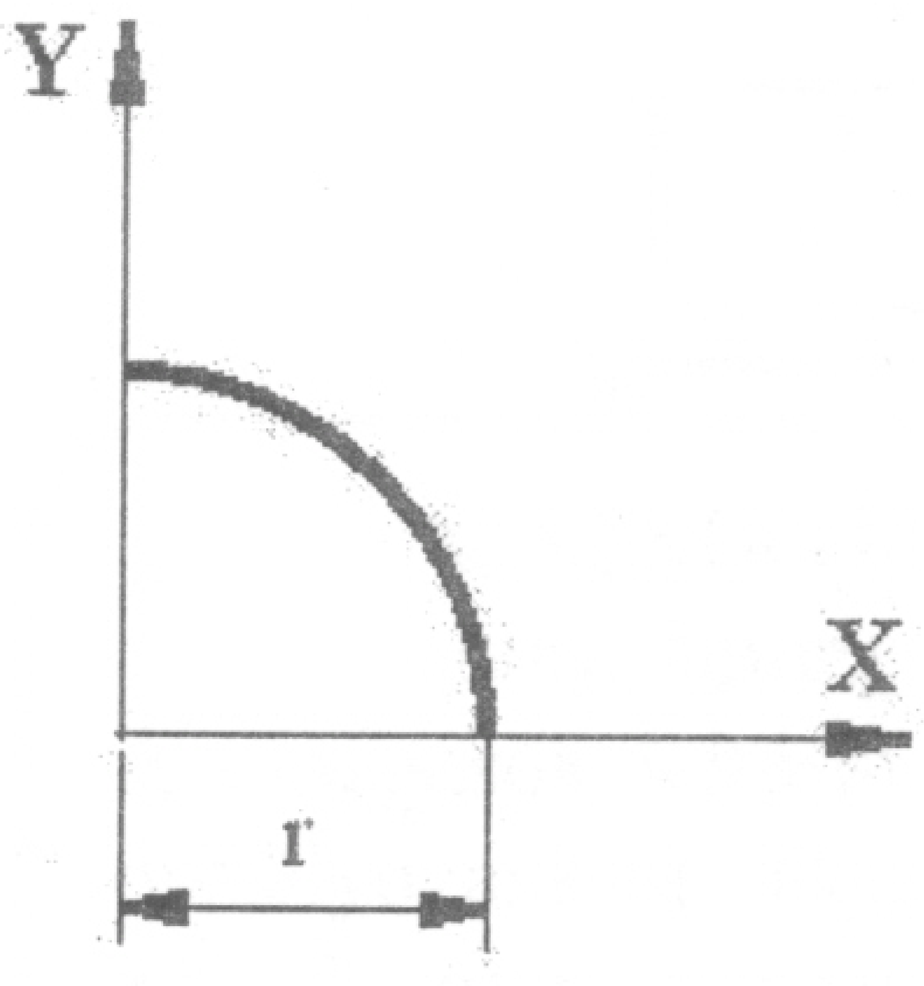
$$\frac{\partial U}{\partial A} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial M_A} = 0$$

ahol A, B, M_A a megfelelő kényszererőket jelentik.

A, B, M_A az U függvény szélső értékét határozzák meg, ez jelen esetben a minimumot jelent. Kimondhatjuk a legkisebb energia elvét, amely szerint a statikailag határozatlan szerkezet megfogásain akkora reakciók ébrednek, amekkora reakciók esetén a külső erőrendszer hatására a legkisebb alakváltozási energia halmozódik fel.

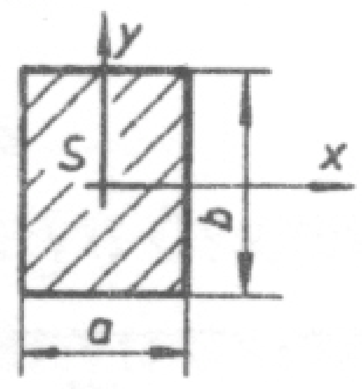
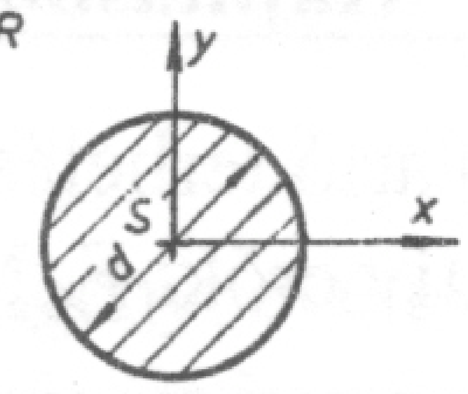
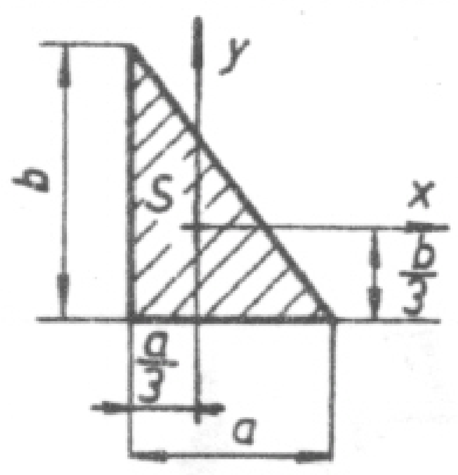
MELLÉKLETEK

I. melléklet
Síkidomok súlypontjai

Síkidom	S_x	S_y
Általános háromszög 	$\frac{a_2 - a_1}{3}$	$\frac{h}{3}$
Félkör 	$\frac{2d}{3\Pi}$	0
Negyedkör 	$\frac{4r}{3\Pi}$	$\frac{4r}{3\Pi}$

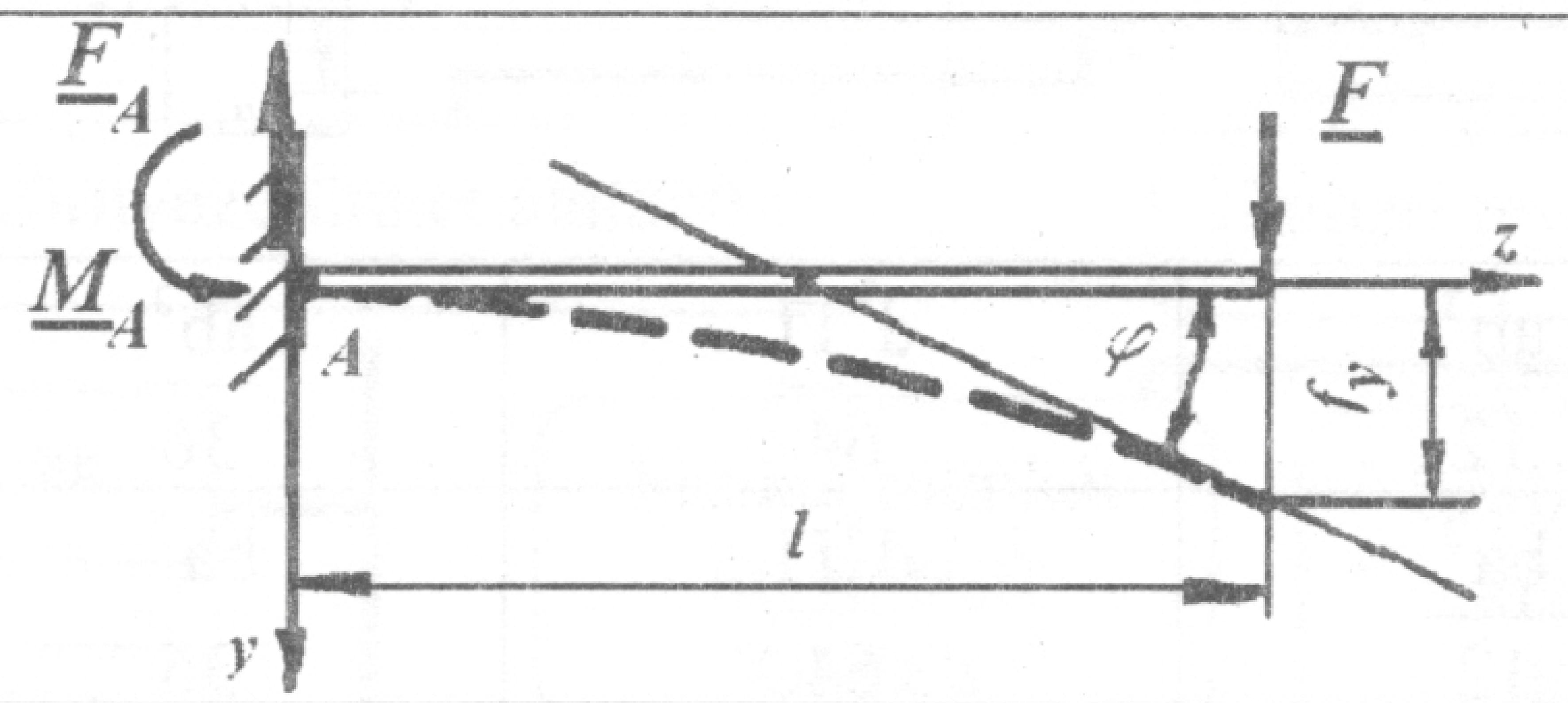
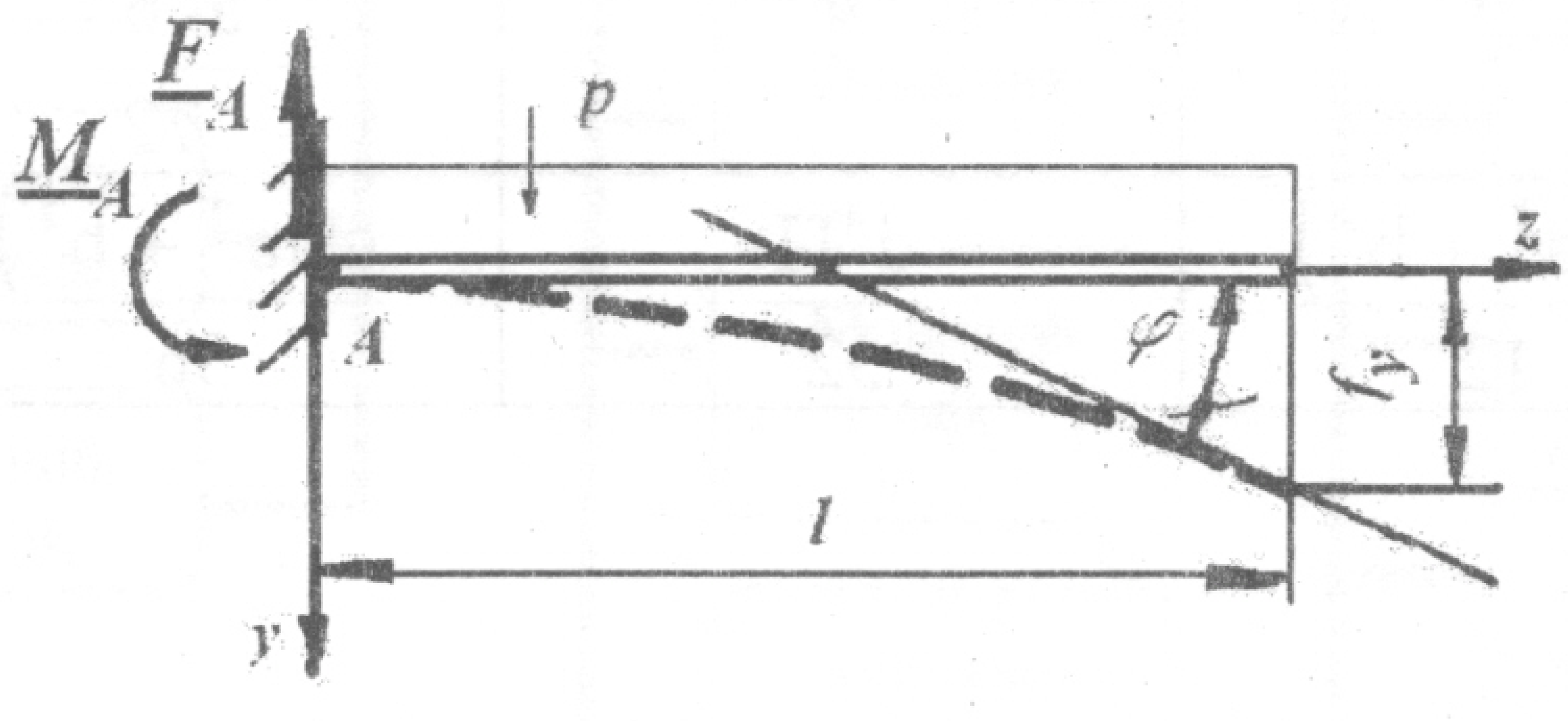
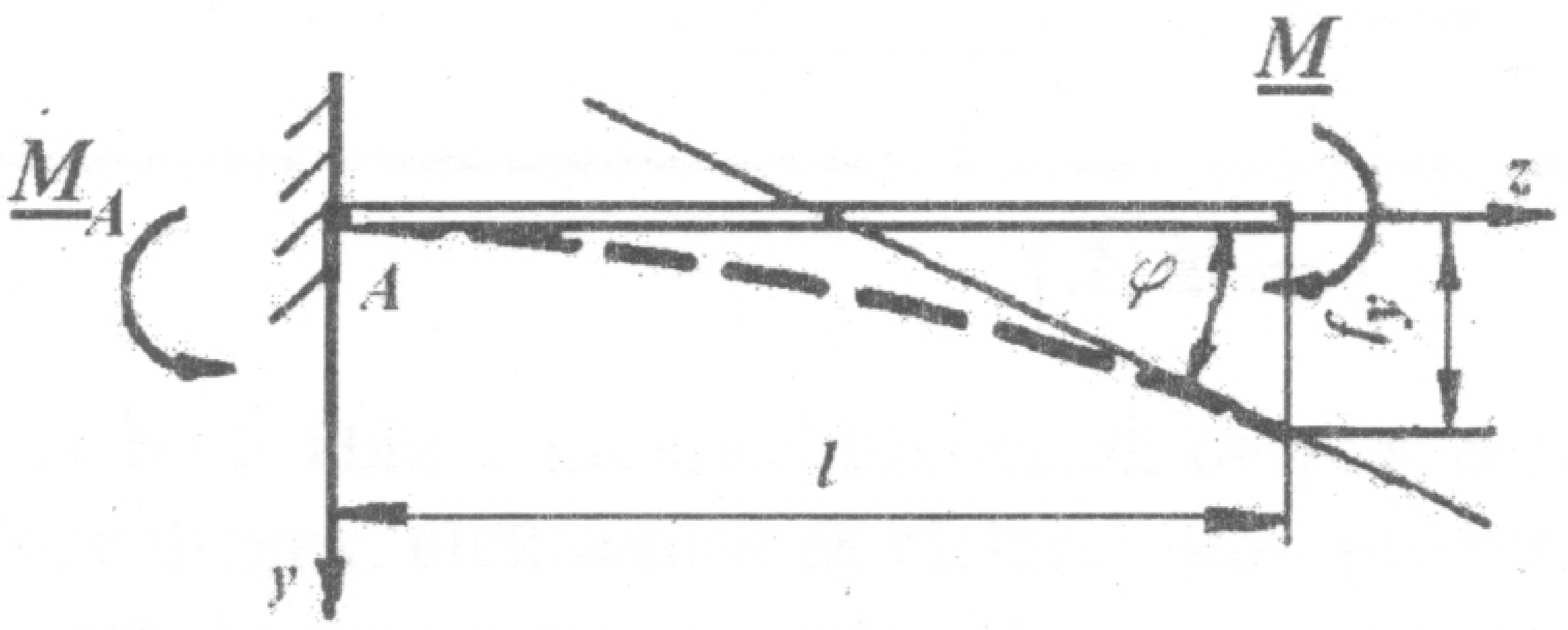
II. melléklet

Egyszerű síkidomok másodrendű nyomatékai

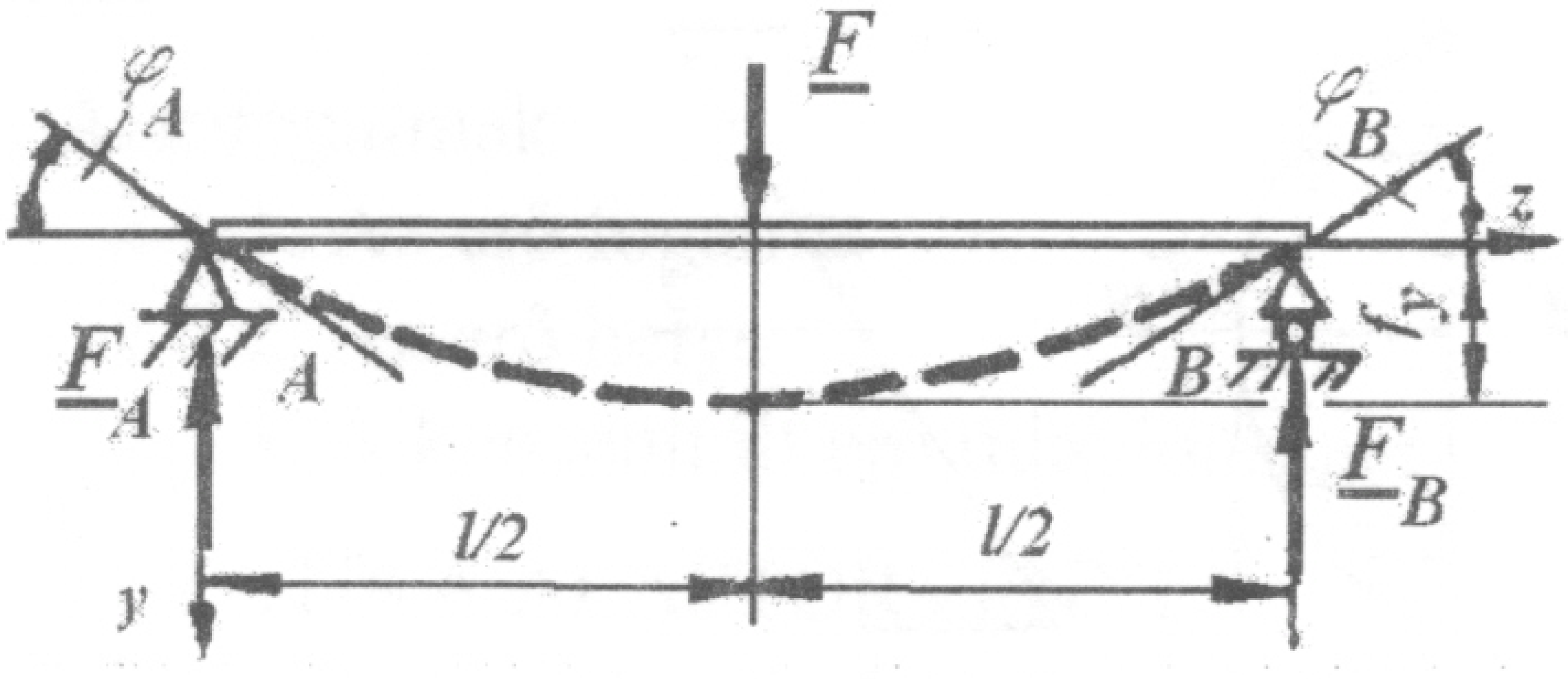
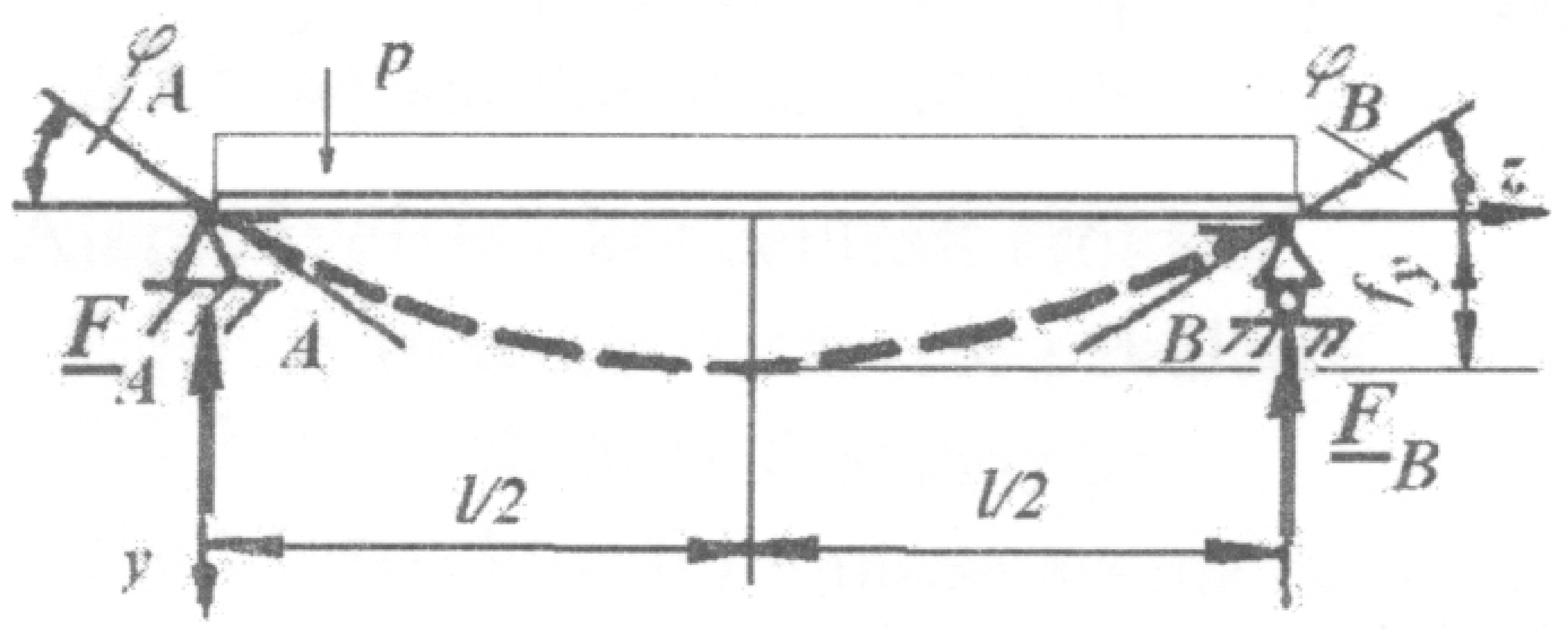
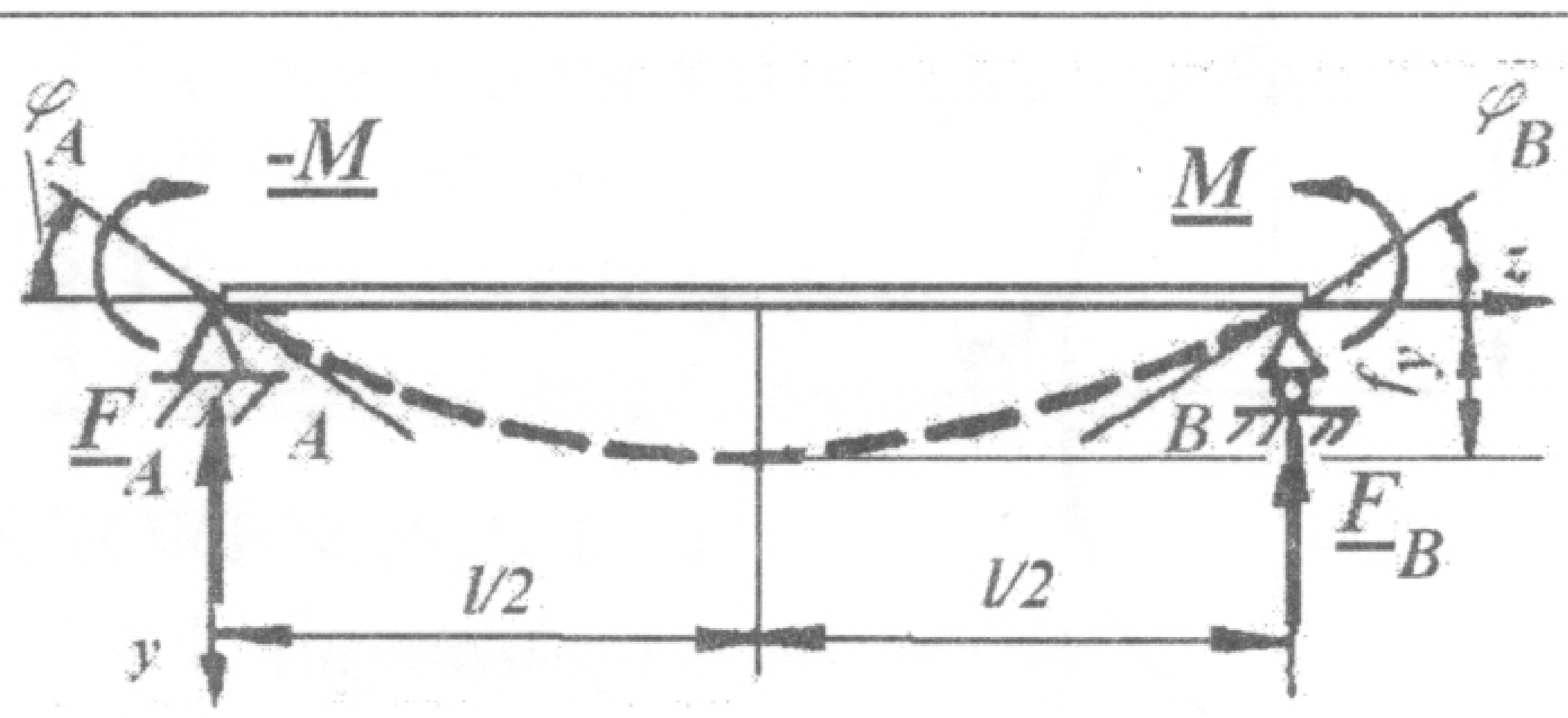
	TÉGLALAP 	KÖR 	DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG 
I_x	$\frac{ab^3}{12}$	$\frac{d^4\Pi}{64}$	$\frac{ab^3}{36}$
I_y	$\frac{ba^3}{12}$	$\frac{d^4\Pi}{64}$	$\frac{ba^3}{36}$
I_{xy}	0	0	$-\frac{a^2b^2}{72}$
I_S	$\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$	$\frac{d^4\Pi}{32}$	$\frac{ab(a^2+b^2)}{36}$

III. melléklet

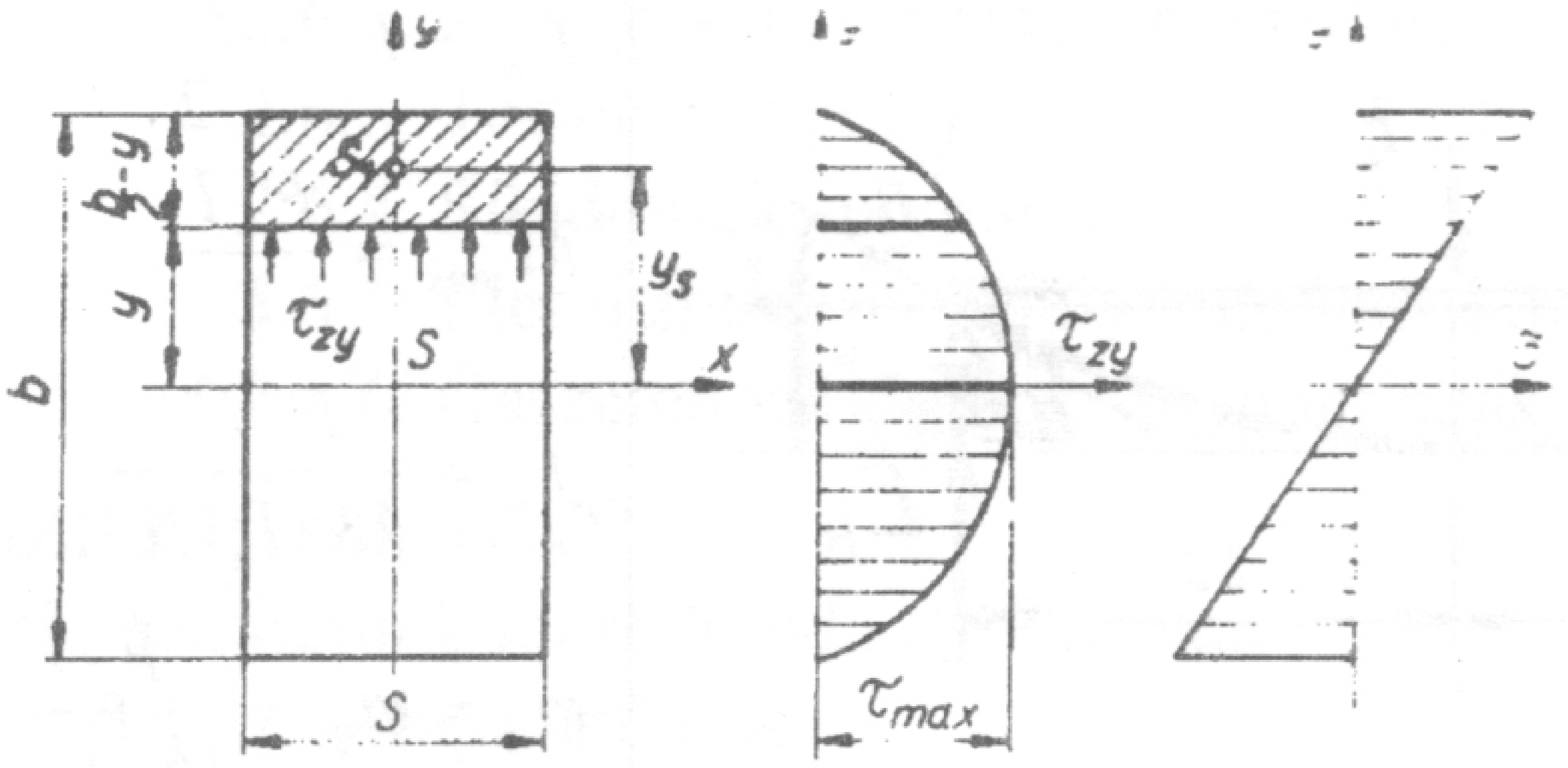
Hajlításból származó reakció erők és alakváltozások

	Tartó terhelése Aktív erők: F, M, p	Reakciók: F_A, F_B, M_A Lehajlás: f_y Elfordulás: $\varphi, \varphi_A, \varphi_B$
1.		$F_A = F$ $M_A = M_{max} = F \cdot l$ $f_y = \dfrac{F \cdot l^3}{3 \cdot I_x \cdot E}$ $\varphi = \dfrac{F \cdot l^2}{2 \cdot I_x \cdot E}$
2.		$F_A = p \cdot l$ $M_A = M_{\max} = \dfrac{p \cdot l^2}{2}$ $f_y = \dfrac{p \cdot l^4}{8 \cdot I_x \cdot E}$ $\varphi = \dfrac{p \cdot l^3}{6 \cdot I_x \cdot E}$
3.		$F_A = 0$ $M_A = M$ $f_y = \dfrac{M \cdot l^2}{2 \cdot I_x \cdot E}$ $\varphi = \dfrac{M \cdot l^2}{I_x \cdot E}$

III. melléklet folytatás

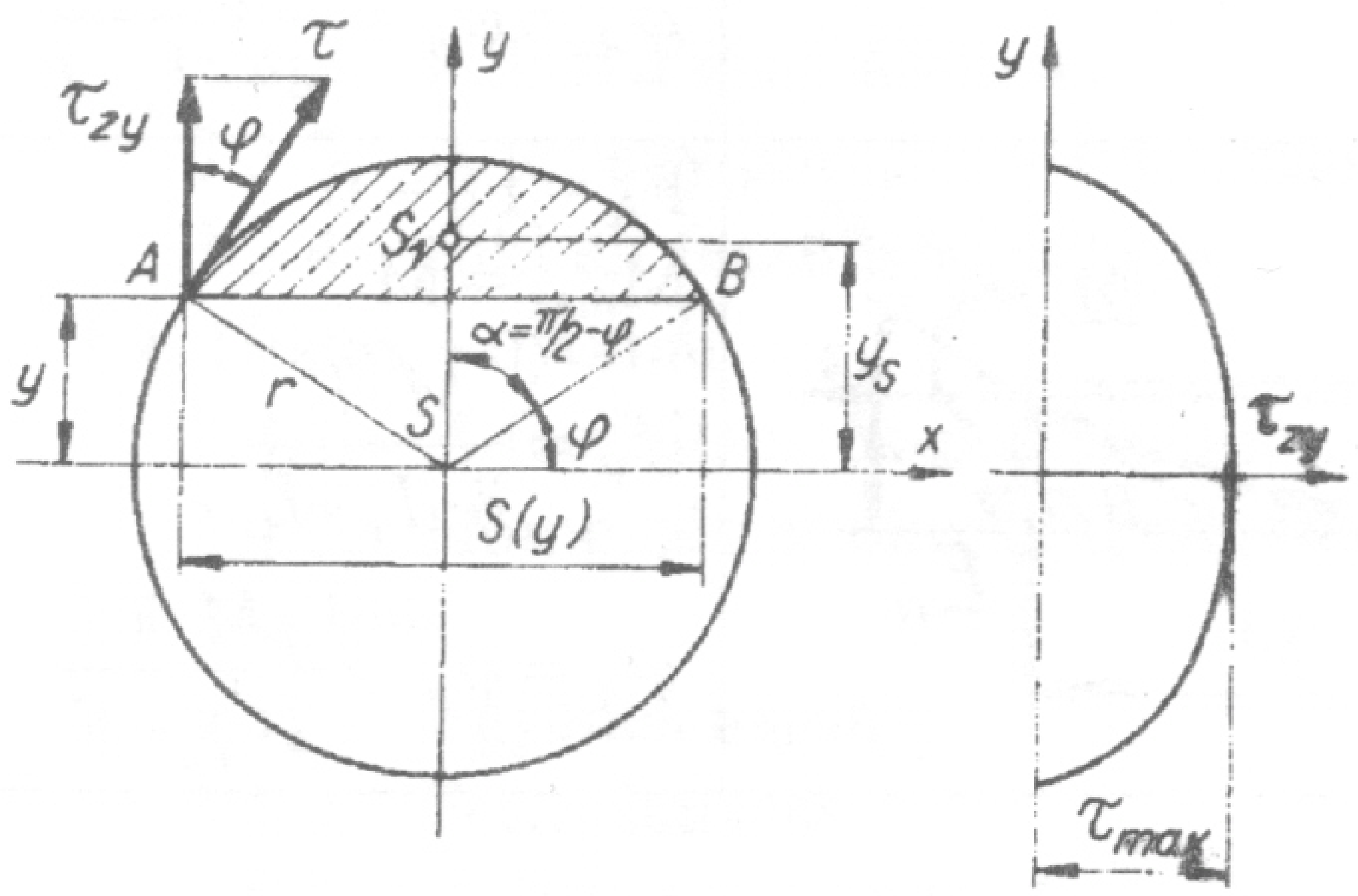
	Tartó terhelése Aktív erők: F, M, p	Reakciók: F_A, F_B, M_A Lehajlás: f_y Elfordulás: $\varphi, \varphi_A, \varphi_B$
4.		$F_A = F_B = \frac{F}{2}$ $M_{max} = \frac{F \cdot l}{4}$ $f_y = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot I_x \cdot E}$ $\varphi_A = \varphi_B = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot I_x \cdot E}$
5.		$F_A = F_B = \frac{p \cdot l}{2}$ $M_{max} = \frac{p \cdot l^2}{8}$ $f_y = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{38 \cdot I_x \cdot E}$ $\varphi_A = \varphi_B = \frac{p \cdot l^3}{24 \cdot I_x \cdot E}$
6.		$F_A = F_B = 0$ $M_{max} = M$ $f_y = \frac{M \cdot l^2}{8 \cdot I_x \cdot E}$ $\varphi_A = \varphi_B = \frac{M \cdot l}{2 \cdot I_x \cdot E}$

egyszerű keresztmetszetnél a nyírás következtében fellépő feszültség eloszlása



Téglalap keresztmetszet

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A}$$



Kőr keresztmetszet

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{A}$$