DIGITÁLIS TECHNIKA I

Dr. Lovassy Rita
Dr. Pődör Bálint

Óbudai Egyetem KVK
Mikroelektronikai és Technológia Intézet

8. ELŐADÁS

1

2

SZÁMRENDSZEREK

3

A 8. előadás témája a digitális rendszerekben központi szerepet játszó számrendszerek és aritmetikák.

1. Számrendszerek, számábrázolás
2. Bináris, oktális, hexadecimális számok
3. Aritmetikai műveletek

A jelen és a következő előadáshoz kapcsolódó jegyzetrészek:

Sándor T., Takács G. Segédlet az Informatika alapjai I. című tárgy számrendszerek fejezetéhez
Rőmer jegyzet 146-160 old., 179-181 old.
Zsom jegyzet I, 19-49 old., 297-299 old.
Gál könyv 132-145 old., 167-201 old.
http://users.atw.hu/tfginfo/ht/hardver/szamabr.pdf
Sándor T.; Takács G.:Segédlet az Informatika alapjai I. című tárgy számrendszerek fejezetéhez

4

HELYÉRTÉK

$318 = 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 8 \cdot 1$

Szám helyértéke

$318 = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

Szám alaki értéke

Számjegyek: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$318 = 300 + 10 + 8$

Számrendszer alapja: 10

Szám valódi értéke

Decimális számrendszer

5

SZÁMRENDSZEREK

Két fő típus:
- addíciós számrendszer (pl. a római számok);
- helyértékes számrendszer.

A helyértékes rendszerben a számokat polinom alakban írjuk fel

$$N = a_o + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_m r^m = \sum_{i=0}^{m} a_i r^i$$

r (>1) egész szám a számrendszer alapszáma (radix),
a_i ($0 \le a_i \le r-1$) egész számok a számjegyek.

Az a_i helyi értéke r^i, az alapszám megfelelő hatványa.

6

RÓMAI SZÁMOK ÉS RENDSZERÜK

I	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

A római számok rendszere különleges volt, és egyáltalán nem alkalmazkodott még a legelemibb számításokhoz sem.

Tízes számrendszer, amelynek fő szimbólumai az I, X, C és M (1, 10, 100, 1000), másodlagos szimbólumai a V, L, D (az 5 többszörösei).

7

SZÁMRENDSZEREK ÉS SZÁMJEGYEIK

Megnevezés	Alap	Számjegyek
Bináris (duális)	2	0,1
Ternális	3	0,1,2
Tetrális	4	0,1,2,3
Kvintális	5	0,1,2,3,4
Oktális	8	0,1,2,3,4,5,6,7
Decimális	10	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Duodecimális	12	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b
Hexadecimális	16	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

8

SZÁMOK KIFEJEZÉSE KÜLÖNBÖZŐ SZÁMRENDSZEREKBEN

Pl. 13_{10}

bináris	1101	(1x8 + 1x4 + 0x2 + 1x1)
ternális	111	(1x9 + 1x3 + 1x1)
tetrális	31	(3x4 + 1x1)
oktális	15	(1x8 + 5x1)
decimális	13	(1x10 + 3x1)
duodecimális	11	(1x12 + 1x1)
hexadecimális	D	(1x13)

9

BINÁRIS SZÁMRENDSZER

$$11010110_{(2)} =$$
$$1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$$

Számjegyek: 0,1

A számítástechnika és a digitális technika a bináris számrendszerre épül

10

ÁTSZÁMÍTÁS KÉT SZÁMRENDSZER KÖZÖTT

Egy természetes szám átírása egyik számrendszerből a másikba: a számot elosztjuk az új rendszer alap-számával, és a maradékokat jobbról balra haladva leírjuk.

Pl.

2009 = 2x1004 + 1,
1004 = 2x502 + 0,
502 = 2x251 + 0,
251 = 2x125 + 1,
125 = 2x62 + 1,
62 = 2x31 + 0 ,
31 = 2x15 + 1,
15 = 2x7 + 1,
7 = 2x3 + 1,
3 = 2x1 + 1,
1 = 2x0 + 1.

Tehát 111 1101 1001

11

10-ESBŐL 2-ESBE VALÓ ÁTALAKÍTÁS ALGORITMUSA

A 10-esből 2-esbe való átalakítás algoritmusa így is megfogalmazható (a kapott számjegyeket jobbról balra kell leírni):

Ismételd
    Ha a szám páratlan, írj le 1-et, és vonj ki a
        számból 1-et, különben írj le 0-t
    oszd el a számot 2-vel
amíg a szám nem 0

12

A DECIMÁLIS TÖRTRÉSZ KONVERTÁLÁSA BINÁRISRA

$0{,}3125_{(10)} = ?_{(2)}$

Kiolvasás iránya ↓

2	0,3125
0	,625
1	,25
0	,5
1	,0

Tehát: $0{,}3125_{(10)} = 0{,}0101_{(2)}$

13

2-ES SZÁMRENDSZER ELŐNYEI

Az áramköri megvalósítás szempontjából előnyös, hogy a leképezéséhez csak két stabil állapot szükséges, így kétállapotú elemekkel: relékkel, tranzisztorokkal, mágnesezhető elemekkel könnyen leképezhető.

A két egymástól távol eső stabil állapot következtében viszonylag érzéketlen a fellépő zavarokkal szemben, illetve azok könnyen elháríthatók.

A digitális technika természetes számrendszere – a kétértékű megvalósításból adódóan is – a kettes számrendszer. Ehhez jól illeszkedik a hexadecimális számrendszer. Ebben a technikában a tízes számrendszer használata, néhány kivételtől (pl. decimális számlálók) eltekintve nehézkes, és sok helyen indokolatlan.

14

2-ES SZÁMRENDSZER ELŐNYEI: MATEMATIKAI SZEMPONTOK

A bináris számrendszer matematikai szempontból is előnyös.

Az aritmetikai műveletek igen egyszerűen hajthatók végre, és igen egyszerű a logikai ítéletalkotás is.

Ugyanazok a számjegyek használhatók fel mind az aritmetikai, mind a logikai műveletekhez.

15

8-AS ÉS 16-OS SZÁMRENDSZER

A hexadecimális számrendszert kényelmi szempontból használják, pl. mert a kettes számrendszerrel nagy számokat hosszú leírni. A hexadecimálisból könnyű a binárisra átváltani és viszont. A hexadecimális rendszert a $ jellel is jelölik.

Bin-hex átváltás: négy bináris számjegy egy hexa számjegyet ad ki, pl. 1111 = $F. Egy byte két hexa számjeggyel adható meg.

16

HEXADECIMÁLIS SZÁMRENDSZER

$$14FB = 1\cdot16^3 + 4\cdot16^2 + F\cdot16^1 + B\cdot16^0$$
$$= 1\cdot4096 + 4\cdot256 + 15\cdot16 + 11\cdot1$$
$$= 5371_{(10)}$$

Számjegyek: 0, 1,..., 9, A, B, C, D, E, F

Megkülönböztető jelölés $, pl. $14FB

17

SZÁMRENDSZEREK KÖZÖTTI ÁTVÁLTÁS

három bináris számjegy megfeleltethető egyetlen oktális számjegynek
négy bináris számjegy egy hexadecimálisnak
Oktális és hexadecimális átváltás során, kézenfekvő közbenső műveletként bináris számrendszerbe átváltani.

bin	okt	bin	hex	bin	hex
000	0	0000	0	1000	8
001	1	0001	1	1001	9
010	2	0010	2	1010	A
011	3	0011	3	1011	B
100	4	0100	4	1100	C
101	5	0101	5	1101	D
110	6	0110	6	1110	E
111	7	0111	7	1111	F

18

A bináris számok számjegyeit biteknek nevezzük, ez a bináris számábrázolás legkisebb egysége. Ennek nagyobb egysége a byte, amely 8 bitet foglal magába.
Ezt követő nagyobb egységek a Kilo, Mega, Giga, Terra.
Tízes számrendszerben ezek 10^3, 10^6, 10^9... jelentettek.
Itt viszont 2^{10}, 2^{20}, 2^{30} -nak felelnek meg

8 bit	=	1 byte
1024 byte	=	1 kByte
1024 kbyte	=	1 MByte
1024 Mbyte	=	1 GByte
1024 Gbyte	=	1 TByte

19

FIXPONTOS SZÁMÁBRÁZOLÁS

Fixpontos számábrázolás során az ábrázolás előre rögzített kettedes jegy pontos, azaz a kettedes és egész jegyek száma adott.

Ezt általában egész számok ábrázolását jelenti, mikor a kettedes jegyek száma nulla.

Valójában egészszámábrázolás,bináris pont helye általában a szám után van (külön nem jelöljük)

20

ARITMETIKAI MŰVELETEK BINÁRIS SZÁMOKKAL

A digitális rendszerek, digitális számítógépek aritmetikai egységei közvetlenül általában csak a négy alapművelet elvégzésére alkalmas. Ezek és néhány logikai művelet segítségével viszont tetszőleges művelet elvégezhető.

21

BINÁRIS ÖSSZEADÁS

Két bináris számjegy A + B = C, S alakú bináris összeadása:
S - eredeti helyértéken mutatkozó összeg (sum vagy magyarul summa),
C - következő helyértékre való átvitel (carry).
Igazságtábla és logikai függvények:

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$S = \bar{A}B + A\bar{B} = A \oplus B$

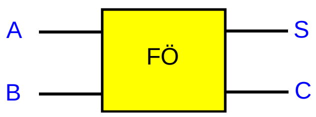
$C = A\,B$

Megvalósító elem:
félösszeadó

22

FÉLÖSSZEADÓ (HALF-ADDER)

Feladata két bit összeadása



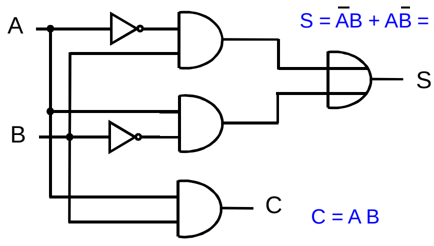
S: összeg, sum

C: maradék, átvitel, carry

23

FÉLÖSSZEADÓ REALIZÁLÁSA

Realizálás kapukkal (kétszintű ÉS-VAGY)



$S = \bar{A}B + A\bar{B} = A \oplus B$

$C = A\,B$

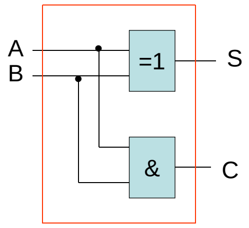
24

BINÁRIS ÖSSZEADÁS: FÉLÖSSZEADÓ

$S = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$

$C = A\,B$

Félösszeadó: két bemenet és két kimenet. Két bináris számjegyet tud összeadni, előállítja az összeget és átvitelt. Nem veszi figyelembe a kisebb helyértékről jövő átvitelt.



félösszeadó

25

BINÁRIS SZÁMOK ÖSSZEADÁSA

Bináris számok összeadásának algoritmusa hasonló a decimális számokéhoz:

$A = A_n A_{n-1} \ldots A_1 A_0$
$+B = B_n B_{n-1} \ldots B_1 B_0$
$C = C_n C_{n-1} \ldots C_1 C_0$ (átvitel)

$S = S_n S_{n-1} \ldots S_1 S_0$ (összeg)

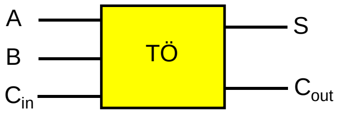
az összeg i-edik bitje $S_i = S_i(A_i, B_i, C_{i-1})$

az i-edik összeadásnál keletkező átvitel
$C_i = (A_i, B_i, C_{i-1})$ és $C_{-1} = 0$

26

TELJES ÖSSZEADÓ

Funkciója két bit és az előző helyi értékből származó maradék (átvitel) összeadása



27

A TELJES ÖSSZEADÓ LOGIKAI EGYENLETEI

$S_i = \overline{A_i}\,\overline{B_i}C_{i-1} + \overline{A_i}B_i\overline{C_{i-1}} + A_i\overline{B_i}\,\overline{C_{i-1}} + A_iB_iC_{i-1}$

az összeg bit 1-es, ha a három változó közül egy vagy három 1-es (kizáró VAGY logikai kapcsolat),

$C_i = \overline{A_i}B_iC_{i-1} + A_i\overline{B_i}C_{i-1} + A_iB_i\overline{C_{i-1}} + A_iB_iC_{i-1}$

$= A_iB_i + A_iC_{i-1} + B_iC_{i-1}$

az átvitel bit 1-es, ha két változó egyidejűleg 1-es (majoritás logikai kapcsolat).

28

TELJES ÖSSZEADÓ (FULL ADDER)

i	A_i	B_i	C_{i-1}	S_i	C_i
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1

A teljes összeadónak három bemenete, a két operandus, és az alacsonyabb helyértékről érkező átvitel (A_i, B_i és C_{i-1}) és két kimenete, az összeg és az átvitel (S_i és C_i) van.

$S_i = \sum^{3} (1,2,4,7)$

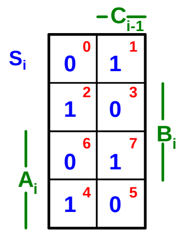
$C_i = \sum^{3} (3,5,6,7)$

29

AZ ÖSSZEGFÜGGVÉNY (S_i)

i	A_i (4)	B_i (2)	C_{i-1} (1)	S_i
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

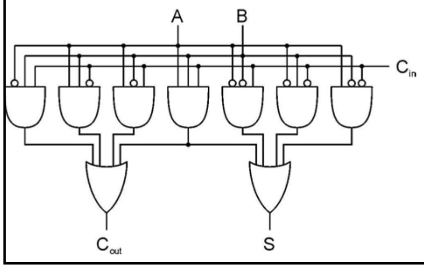
„sakktábla"
Szimmetrikus függvény



30

TELJES ÖSSZEADÓ (FULL ADDER)

- Add two bits and carry-in, produce one-bit sum and carry-out.



A	B	C_{in}	S	C_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

31

A SZIMMETRIKUS FÜGGVÉNY

- Ha egy függvény változói felcserélhetők, akkor a függvényt szimmetrikusnak mondjuk.
- Ha pl. n=3 (A,B,C) és A és B felcserélhetők egymással, de C-vel egyikük sem, akkor a függvény részlegesen, nevezetesen az A,B változópárra szimmetrikus.
- A szimmetria lehet teljes vagy részleges.
- A szimmetrikus függvényeknek speciális tulajdonságai vannak.
- Jellemző pl. a legalább részleges „sakktábla" elrendezés a K tábláján.

32

AZ S_i (ÖSSZEG) FÜGGVÉNY ALGEBRAI ALAKJA

i	A_i (4)	B_i (2)	C_{i-1} (1)	l
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

S_i (C_{i-1}, B_i, A_i)

0 [0]	1 [1]
1 [2]	0 [3]
0 [6]	1 [7]
1 [4]	0 [5]

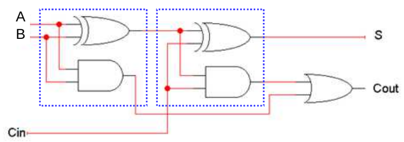
$$
\begin{aligned}
S_i &= m_1^3 + m_2^3 + m_4^3 + m_7^3 = \\
&= \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C = \\
&= \overline{A}\cdot\left(\overline{B}\cdot C + B\cdot\overline{C}\right) + A\cdot\left(\overline{B}\cdot\overline{C} + B\cdot C\right) = \\
&= \overline{A}\cdot(B\oplus C) + A\cdot(B\otimes C) = \\
&= \overline{A}.(B\oplus C) + A.\left(\overline{B\oplus C}\right) = \\
&= A\oplus B\oplus C
\end{aligned}
$$

33

TELJES ÖSSZEADÓ

$S = A \oplus B \oplus C_{in}$

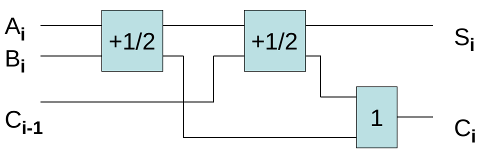
$C_{out} = (A \oplus B)\, C_{in} + AB$



34

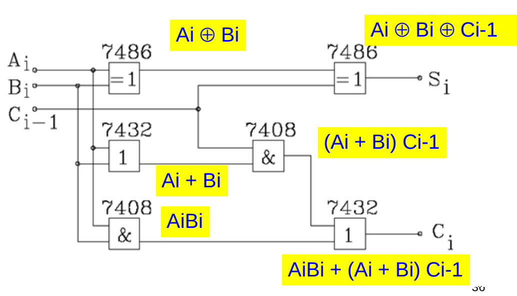
TELJES ÖSSZEADÓ

A teljes összeadó két félösszeadóból állítható össze. Az első képezi a két összeadandó bit összegét, a második ehhez adja hozzá az előző helyértéken keletkezett átvitelt.



35

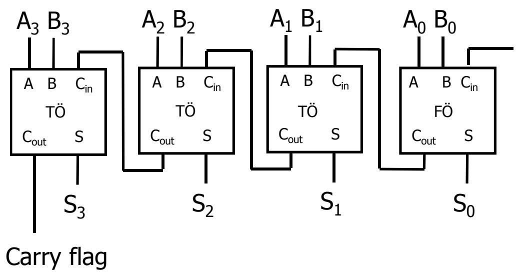
TELJES ÖSSZEADÓ EGY LEHETSÉGES MEGVALÓSÍTÁSA



36

KÉT 4-BITES SZÁM ÖSSZEADÁSA

Soros átvitel terjedés (ripple carry adder)



37

BINÁRIS ÖSSZEADÁS

1 0 0 0 1 1 1 1
1 1 0 0 1 0 1 1
+1 0 1 0 1 1 0 1

1 0 1 1 1 1 0 0 0

Az összeadás hasonló a 10-e számrendszerbelihez:
két számjegyet és az előző helyértékről származó maradékot kell összeadni.
Az összeg egyes helyértékén lévő számot le kell írni, a kettes helyértéken lévőt tovább kell vinni.

38

OKTÁLIS ÖSSZEADÁS

67 o

+36 o

125 o

részletesen:

7+6 = 15 o (13 d) átvitel 1

6+3+1 = 12 o (10 d) átvitel 1

1 = 1 o (1 d) átvitel 1

39

HEXADECIMÁLIS ÖSSZEADÁS

37 h

+1E h

55 h

részletesen:

7+E = 15 h (21 d) átvitel 1

3+1+1 = 5 h (5 d) átvitel 0

40

POZITÍV ÉS NEGATÍV BINÁRIS SZÁMOK

- A bináris szám éppen úgy mint egy decimális szám, lehet pozitív vagy negatív.
- A számítógépekben az előjel ábrázolása 0 és 1 szimbólumokkal valósul meg.
- A plusznak 0, a mínusznak 1 felel meg.
- Ez az ún, előjelbit, mely után következik a szám abszolút értéke.

1-ES KOMPLEMENS
(1-es kiegészítős számábrázolás)

•Ha egy n-bites pozitív szám (egész szám) szimbolikus jelölése

$$N_P = 0\ a_{n-2}a_{n-3}...a_1a_0$$

az azonos abszolút értékű negatív számé

$$N_Q = 1\ \bar{a}_{n-2}\bar{a}_{n-3}...\bar{a}_1\bar{a}_0$$

2-ES KOMPLEMENS
(2-es kiegészítős számábrázolás)

•A pozitív számok ábrázolása azonos a két előbbi számábrázolással. Egy n-bites pozitív szám (egész szám) szimbolikus jelölése

$$M_P = 0\; a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1 a_0$$

az azonos abszolút értékű negatív számé pedig a következő összeg eredménye

$$M_Q = 1\; \overline{a}_{n-2}\overline{a}_{n-3}\ldots\overline{a}_1\overline{a}_0 + 1$$

POZITÍV ÉS NEGATÍV NÉGYBITES BINÁRIS SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA

Decimális szám	Bináris számábrázolások		
	Előjel és abszolút érték	Egyes komplemens	Kettes komplemens
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000 1000	0000 1111	0000
−1	1001	1110	1111
−2	1010	1101	1110
−3	1011	1100	1101
−4	1100	1011	1100
−5	1101	1010	1011
−6	1110	1001	1010
−7	1111	1000	1001
−8	–	–	1000

8 BITES KETTES KOMPLEMENS SZÁMÁBRÁZOLÁS 2-es, 8-as, 10-es és 16-os SZÁMRENDSZEREKBEN

Decimális érték	Bináris érték	Hexadecimális érték	Oktális érték
-128	1000 000	80	200
…	…	…	…
-2	1111 1110	FE	376
-1	1111 1111	FF	777
0	0000 0000	00	000
+1	0000 0001	01	001
+2	0000 0010	02	002
…	…	…	…
+127	0111 1111	7F	177

BINÁRIS KIVONÁS

Két bináris számjegy A - B = D, (K) alakú bináris kivonása:

K - magasabb helyértékről vett kölcsön (borrow);
D - eredeti helyértéken mutatkozó különbség (difference)

K	A	B	D
0	0	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1

$D = A \oplus B$ $K = \overline{A}\,B$

46

BINÁRIS SZÁMOK KIVONÁSA

Bináris számok kivonásának algoritmusa hasonló a decimális számokéhoz (A > B):

$A = A_nA_{n-1} \ldots A_1A_0$
$- B = B_nB_{n-1} \ldots B_1B_0$
$K = K_nK_{n-1} \ldots K_1K_0$ (kölcsön)

$D = D_nD_{n-1} \ldots$ (különbség)

a különbség i-edik bitje $D_i = D_i(A_i,B_i,K_{i+1})$
az i-edik különbségnél szükséges kölcsön
$K_i = K_i(A_i,B_i,K_{i+1})$ és $K_0 = 0$

47

BINÁRIS KIVONÁS ELŐJEL NÉLKÜLI SZÁMÁBRÁZOLÁSBAN

K	A	B	D
0	0	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1

0011 0111 b	55 d
- 0001 1110 b	30 d
0001 1001 b	25 d

48