

DIGITÁLIS TECHNIKA I

Dr. Lovassy Rita
Dr. Pődör Bálint

Óbudai Egyetem KVK
Mikroelektronikai és Technológia Intézet

2. ELŐADÁS: LOGIKAI (BOOLE) ALGEBRA ÉS ALKALMAZÁSAI



1

IRODALOM AZ 1. ÉS 2. ELŐADÁSHOZ

Arató könyve 12-18, 24-28 oldalak

Rómer könyve 7, 10-17, 123-126 oldalak

Zsom könyve (I) 7-8, 50-70 oldalak

Az előadások ezen könyvek megfelelő fejezetein alapulnak.

2

LOGIKAI (BOOLE-)ALGEBRA

A logikai algebra tárgya a logikai műveletek rövid, tömör matematikai formában való leírása. Megalkotója **George Boole** (1815-1864) angol matematikus, nevét viseli a logikai algebra mint **Boole-algebra**. Jelentős még **Augustus De Morgan** (1806-1871) brit (skót) matematikus hozzájárulása is (**De Morgan tételek**).

Boole és **De Morgan** 1847-től kezdve dolgozták ki a formális logikát (**Boole-algebrát**). Ekkor már régóta használták a bináris kapcsolásokat órák, automaták vezérlésére. Boole két alapvető munkája

The Mathematical Analysis of Logic (1847)
illetve
An Investigation of Laws of Thought (1854)

3

BOOLE-ALGEBRA ÉS KAPCSOLÓ ÁRAMKÖRÖK

A **Boole-algebrát** az 1930-as évek végén kezdték alkalmazni a **kapcsolóáramkörök** tervezésére.

Claude Elwood Shannon (1916-2001) az információelmélet úttörője, a Bell Labs munkatársa ismerte fel 1938-ban a Boole algebra alkalmazhatóságát a **relékből felépített (telefon-) kapcsoló-rendszerek** vizsgálatára és tervezésére.

Ma a Boole-algebra a logikai hálózatok analízisének és szintézisének legalapvetőbb eszköze.

4

Connection Between Boolean Calculus and Physical Circuits Shannon 1938

- A1. Identities:
 $a+0=a$ and $a+1=1$
- A2. Complements:
 $a+\bar{a}=1$ and $a\bar{a}=0$
- A3. Commutativity:
 $a+b=b+a$ and $a\bar{b}=\bar{b}a$
- A4. Distributivity:
 $a+b\bar{c}=(a+b)\bar{c}$ and $a(\bar{b}+c)=\bar{b}a+ac$



???

Boolean functions



Relay circuits

Shannon doktori értekezése arról szólt, hogyan lehet a **Boole-algebra** segítségével optimalizálni az elektromechanikus relék rendszerének a tervezését

http://hu.wikipedia.org/wiki/George_Boole

BOOLE ALGEBRA: LOGIKAI VÁLTOZÓK

A logikai változók az egyes események absztrakt leírására alkalmasak. **Két értéket** vehetnek fel, **1** vagy **0**, attól függően, hogy az esemény bekövetkezik vagy sem.

Ha az esemény **bekövetkezik**,
akkor a **logikai változó** értéke **1**.
Ha az esemény **nem következik be**,
akkor a **logikai változó** értéke **0**.

6

LOGIKAI VÁLTOZÓK ÉRTÉKKÉSZLETE

IGAZ/HAMIS, TRUE/FALSE, illetve IGEN/NEM az esemény bekövetkezésére vonatkozik.

Az 1 és 0 itt nem számjegy, jelentésük szimbolikus:

IGAZ \leftrightarrow 1 és HAMIS \leftrightarrow 0.

A HIGH/LOW jelentése a logikai értékek szokásos elektromos reprezentációjához kapcsolódik, alacsony és magas feszültség szintnek felel meg, pl. (névlegesen) 0 V illetve +5 V.

7

BOOLE ALGEBRA: LOGIKAI VÁLTOZÓK FÜGGŐ ÉS FÜGGETLEN VÁLTOZÓK

A logikai változók két csoportba oszthatók, ún.

független,
és
függő változókra.

Jelölés: A, B, C, ..., X, Y, Z.

Az első betűket általában a független változókra tartjuk fent.

8

A BOOLE ALGEBRA AXIÓMÁI

Az **axiómák** olyan előre rögzített kikötések, **alap állítások**, amelyek az algebrai rendszerben mindig érvényesek, viszont nem igazolhatók. Ezen állítások a halmaz elemeit, a műveleteket, azok tulajdonságait, stb. határozzák meg. A **tételek** viszont az axiómák segítségével bizonyíthatók.

A Boole algebra az alábbi öt axiómára épül:

9

BOOLE-ALGEBRA AXIÓMÁI

1. Az Boole-algebra **kétértékű** elemek halmazára értelmezett.
2. A halmaz minden elemének létezik a **komplement**-e is, amely ugyancsak eleme a halmaznak.
3. Az elemek között végezhető műveletek a **konjunkció** (logikai **ÉS**), illetve a **diszjunkció** (logikai **VAGY**).
4. A logikai műveletek: **kommutatív** (a tényezők felcserélhetők), **asszociatív** (a tényezők csoportosíthatók), **disztributív** (a két művelet elvégzésének sorrendje felcserélhető).
5. A halmaz kitüntetett elemei az **egység** elem (értéke a halmazon belül mindig **IGAZ**, azaz **1**), és a **nulla** elem (értéke a halmazon belül mindig **HAMIS**, azaz **0**).

10

LOGIKAI MŰVELETEK

A változókkal végezhető logikai műveletek:

- **ÉS** (konjunkció) - logikai szorzás;
- **VAGY** (diszjunkció) - logikai összeadás;
- **NEM** (negáció, invertálás, komplementálás) - logikai tagadás.

Az **ÉS**, illetve a **VAGY** logikai művelet két-, vagy többváltozós, a változók legalább két eleme, vagy csoportja között értelmezett logikai kapcsolatot határoz meg.

A tagadás egyváltozós művelet, amely a változók, vagy változócsoporthoz bármelyikére vonatkozhat.

11

AZ ÉS (AND) MŰVELET, LOGIKAI SZORZÁS (KONJUNKCIÓ)

A logikai változókkal végzett **ÉS** művelet **eredménye akkor és csak akkor IGAZ**, ha **mindegyik** változó értéke egyidejűleg **IGAZ**.
ÉS művelet igazságtáblázata:

B	A	K = A • B
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

A logikai algebraiban az **ÉS** kapcsolatot szorzással jelölik (**logikai szorzás**), de a logikai szorzás jelét általában nem szokás kitenni. A

$$K = A \cdot B$$

algebrai egyenlőségben **A** és **B** a független változók, és **K** a függő változó, vagy eredmény. Jelentése pedig az, hogy a **K** akkor **IGAZ**, ha egyidejűleg az **A** és a **B** is **IGAZ**.

12

ÉRTÉKTÁBLÁZAT, IGAZSÁGTÁBLÁZAT

A logikai függvénykapcsolatok többféleképpen is megadhatók, az egyik általánosan használt a táblázatos megadási mód.

Mivel minden változó csak két értéket vehet fel ezért n változó esetén összesen 2^n különböző eset lehetséges (két elemből álló n -ed osztályú ismétléses variáció!).

Így **két** változó esetén az összes lehetséges kombinációk száma **négy**.

Az igazságtáblázat bal oldalán adjuk meg a bemeneti vagy független változók értékét, míg jobb oldalán a kimeneti vagy függő változó értékei szerepelnek.

13

LOGIKAI SZORZÁS (KONJUNKCIÓ), (LOGIKAI ÉS KAPCSOLAT)

Definíció:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 \\ 1 \cdot 0 &= 0 \\ 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

A művelet eredménye tehát csak akkor a logikai 1 érték, ha mindkét tényező logikai értéke 1.

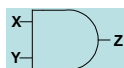
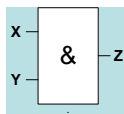
A művelet a definíció szerint **kommutatív**.

Formailag megegyezik az aritmetikai szorzással, de az 1 és 0 értékek jelentése csak logikai.

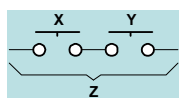
14

ÉS (AND) ÁRAMKÖRI SZIMBÓLUMOK

Kapuarámkörök
esetében



Kapcsoló
áramkörök esetében



Sorbakötött és nyugalmi
állapotban nyitott (=MAKE)
kapcsolók

15

A VAGY (OR) MŰVELET

A logikai **változókkal** végzett **VAGY** művelet **eredménye** akkor **IGAZ**, ha a **független változók** közül **legalább az egyik IGAZ**.
Igazságtáblázat:

B	A	K = A + B
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Algebrai formában ezt a független változók összegeként írjuk le (**logikai összeadás**).

$$K = A + B$$

alakú algebrai egyenlőségben a **K** eredmény akkor **IGAZ**, ha vagy az **A**, vagy a **B**, vagy mindkettő **IGAZ**.
A **VAGY** műveletet leíró táblázat tehát az alábbi:

16

LOGIKAI ÖSSZEDÁS (DISZJUNKCIÓ), (LOGIKAI VAGY KAPCSOLAT)

Definíció:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= 1 \end{aligned}$$

A művelet eredménye tehát csak akkor a logikai 1 érték, ha **vagy** az első, **vagy** a második tag (**vagy** mindkettő) logikai értéke 1.

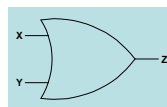
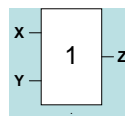
A művelet a definíció szerint **kommutatív**.

Az utolsó definíció összefüggés kivételével formailag az aritmetikai összeadás szabályai is alkalmazhatók a logikai értékekre.

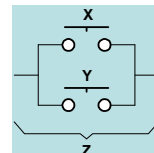
17

VAGY (OR) ÁRAMKÖRI RAJZJELEK

Kapuarámkörök
esetében



Kapcsoló
áramkörök esetében



Párhuzamosan kötött, nyugalmi
állapotban nyitott
(= MAKE) kapcsolók

18

LOGIKAI SZORZÁS ÉS ÖSSZEADÁS KETTŐNÉL TÖBB VÁLTOZÓRA

Mindkét definiált logikai művelet értelemszerűen kiterjeszthető kettőnél több tényezőre, illetve tagra is. Ekkor természetesen a műveletek elvégzésének sorrendjét megfelelő zárójelek alkalmazásával kell jelölni, akárcsak aritmetikai műveletek esetén.

19

A TAGADÁS (INVERZ, KOMPLEMENTÁLÁS) MŰVELET

A logikai tagadást egyetlen változón, vagy csoporton végrehajtott műveletként értelmezzük. Jelentése az, hogy **ha** a **változó IGAZ**, **akkor** a **tagadottja HAMIS** és fordítva.

Igazságtáblázat:

K	$K = \bar{A}$
0	1
1	0

Algebrai leírásban a tagadást a változó jele fölé húzott vonallal jelöljük.

Ezek szerint

$$K = \bar{A}$$

egyenlőség azt jelenti, hogy a **K** akkor **IGAZ**, ha az **A** **HAMIS**. Szóban **A nem** - nek, **A felülvonás**-nak vagy **A tagadott**-nak mondjuk.

20

LOGIKAI NEGÁCIÓ (INVERTÁLÁS, KOMPLEMENTÁLÁS), LOGIKAI TAGADÁS MŰVELET

Definíció: $\bar{0} = 1$ $\bar{1} = 0$

A művelet tehát logikai értékekhez ellentettjüket rendeli hozzá. A műveletet **páros** számú esetben alkalmazva, eredményül a kiindulási logikai érték adódik:

$$\bar{\bar{0}} = 0 \text{ és } \bar{\bar{1}} = 1$$

Páratlan számú alkalmazás az ellentett, negált értéket eredményezi.

21

EGYSÉG ÉS NULLA ELEM

A halmaz kitüntetett elemei, melyek mindig léteznek

az **egység** elem

(értéke a halmazon belül mindig **IGAZ**, azaz **1**),

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$$

és

a **nulla/zérus** elem

(értéke a halmazon belül mindig **HAMIS**, azaz **0**)

$$A + 0 = 0 + A = A$$

22

KOMPLEMENTÁCIÓ: TAGADÁS

A **logikai algebra** illetve a **Boole-algebra** a felsorolt axiómákra épül. A logikai feladatok technikai megvalósításához a halmaz egy elemének **komplement**-ét képező művelet is szükséges. Ezért a műveletek között a logikai **TAGADÁS** is szerepel.

$$A \cdot \bar{A} = 0 \quad \text{és} \quad \bar{\bar{A}} + A = 1$$

23

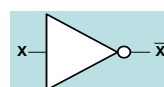
A NEGÁCIÓ

A negáció nem két- hanem csak egyargumentumos művelet.

A gyakorlatban sokszor szükség van egy **X** változó negáltjának az előállítására.

Az erre való eszköz az **inverter**.

(**A negációt a köröcske jelenti**):

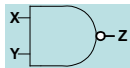
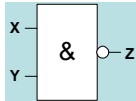


Talán éppen azért tekintik sokszor a negációt „műveletnek” mert a kapuáramkörök között van eszköz a végrehajtására.

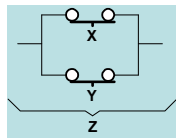
24

NEM-ÉS (NAND) ÁRAMKÖRI RAJZJELEK

Kapúáramkörök esetében



Kapcsoló áramkörök esetében

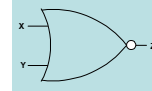
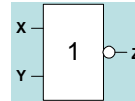


Párhuzamosan kötött, nyugalmi állapotban zárt (=BREAK) kapcsolók

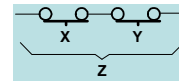
25

NEM-VAGY (NOR) ÁRAMKÖRI RAJZJELEK

Kapúáramkörök esetében



Kapcsoló áramkörök esetében



Sorosan kötött, nyugalmi állapotban zárt (=BREAK) kapcsolók

26

POZITÍV ÉS NEGATÍV LOGIKA

IGAZ/HAMIS, TRUE/FALSE, illetve IGEN/NEM az esemény bekövetkezésére vonatkozik.

Az 1 és 0 itt nem számjegy, jelentésük szimbolikus:

IGAZ \leftrightarrow 1 és HAMIS \leftrightarrow 0.

A HIGH/LOW jelentése a logikai értékek szokásos elektromos reprezentációjához kapcsolódik, alacsony és magas feszültség szintnek felel meg, pl. (névlegesen) 0 V illetve + 5 V.

27

LOGIKAI ÁLLAPOTOK, LOGIKAI SZINTEK

Félvezetős logikai áramkörök feszültségvezéreltek. Logikai állapotok: feszültség (szint illetve impulzus). Pozitív és negatív szintű logikai rendszerek.

- **Pozitív logika:** 1-es szint pozitívabb mint a 0-ás szint.
- **Negatív logika:** 1-es szint negatívabb mint a 0-ás szint.
- **Szabad szintű rendszer:**
Logikai szintek tűrése viszonylag nagy, a névleges értékek 30 - 50 %-a is lehet.
- **Kötött (megfagott) szintű rendszer:**
Logikai szintek tűrése viszonylag kicsi.

28

POZITÍV ÉS NEGATÍV LOGIKA

Egy és ugyanazon áramkör a logika megválasztása szerint egyszer NEM-VAGY, másszor NEM-ÉS kapcsolásként működik. Ha a megvalósítandó függvény adott, és eldöntöttük, hogy melyik áramkörrel valósítjuk meg, akkor azt a logikát alkalmazzuk, amelyikkel egyszerűbb a kapcsolás.

U_1	U_2	U_{k1}	x_1	x_2	y	x_1	x_2	y
L	L	H	0	0	1	1	1	0
L	H	H	0	1	1	1	0	0
H	L	H	1	0	1	0	1	0
H	H	L	1	1	0	0	0	1

Példa a szinttáblázatra

Pozitív logikájú igazságtábl.
NEM-ÉS függvény

Negatív logikájú igazságtábl.
NEM-VAGY függvény

Positive vs. Negative Logic

- Positive logic: truth, or assertion is represented by logic 1, higher voltage; falsity, de- or unassertion, logic 0, is represented by lower voltage.
- Negative logic: truth, or assertion is represented by logic 0, lower voltage; falsity, de- or unassertion, logic 1, is represented by lower voltage

[Gate Logic: Positive vs. Negative Logic](#)

Normal Convention: Positive Logic/Active High
Low Voltage = 0; High Voltage = 1

Alternative Convention sometimes used: Negative Logic/Active Low

Voltage Truth Table			Positive Logic			Negative Logic		
A	B	F	A	B	F	A	B	F
low	low	low	0	0	0	1	1	1
low	high	low	0	1	0	1	0	1
high	low	low	1	0	0	0	1	1
high	high	high	1	1	1	0	0	0

Behavior in terms of Electrical Levels

Two Alternative Interpretations
Positive Logic AND
Negative Logic OR

Dual Operations

30

Positive and Negative Logic (Cont'd.)

Voltage levels			Positive logic levels			Negative logic levels		
A	B	F	A	B	F	A	B	F
low	low	low	0	0	0	1	1	1
low	high	low	0	1	0	1	0	1
high	low	low	1	0	0	0	1	1
high	high	high	1	1	1	0	0	0

Physical AND gate			Physical OR gate		
A	B	F	A	B	F
low	low	low	low	low	low
low	high	low	low	high	low
high	low	low	high	low	low
high	high	high	high	high	high

Voltage levels			Positive logic levels			Negative logic levels		
A	B	F	A	B	F	A	B	F
low	low	high	0	0	1	1	1	0
low	high	high	0	1	1	1	0	0
high	low	high	1	0	1	0	1	0
high	high	low	1	1	0	0	0	1

Physical NAND gate			Physical NOR gate		
A	B	F	A	B	F
low	low	high	low	low	high
low	high	high	low	high	high
high	low	high	high	low	high
high	high	low	high	high	low

31

- Invertáló kimenetű (NAND, NOR, NOT) kapuáramkörök technikailag egyszerűbben valósíthatók meg mint a neminvertálók.

32

A LOGIKAI ALGEBRA TÉTELEI

Fontosabb **tételek**, azok részletes bizonyítása nélkül. Helyességükről a logikai értékek összes lehetséges kombinációinak behelyettesítésével lehet meggyőződni. A kitüntetett (1 illetve 0) elemekkel végzett műveletek:

$$\begin{array}{ll}
 1 \cdot 1 = 1 & 0 \cdot 0 = 0 \\
 1 \cdot A = A & 0 \cdot A = 0 \\
 1 + 1 = 1 & 0 + 0 = 0 \\
 1 + A = 1 & 0 + A = A
 \end{array}$$

33

A LOGIKAI ALGEBRA TÉTELEI: AZONOS VÁLTOZÓK

Az azonos változókkal végzett műveletek:

Tautológia (idempotencia):

$$A \cdot A = A \quad A + A = A$$

Negáció szabályai:

$$A \cdot \bar{A} = 0 \quad A + \bar{A} = 1$$

Az A-val jelzett logikai változó nem csak egy változó, hanem egy logikai műveletsor eredménye is lehet.

34

LOGIKAI ALGEBRA TÉTELEI: TAGADÁS

A logikai tagadásra vonatkozó tétel (kettős negáció):

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Általánosan: a páros számú tagadás nem változtatja meg az értéket, míg a páratlan számú tagadás azt az ellenkezőjére változtatja.

35

TOVÁBBI ÖSSZEFÜGGÉSEK

Abszorpció szabály

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + A \cdot B = A$$

A fenti, a logikai algebrában érvényes össze-függések természetesen nem érvényesek a szokásos algebrában.

36

LOGIKAI MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

Kommutativitás

az operandusok sorrendjének felcserélhetősége

Asszociativitás

az operandusok csoportosíthatósága

Disztributivitás

az operandusok átrendezhetősége

37

LOGIKAI MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI: KOMMUTATIVITÁS

Az **ÉS** (logikai vagy) és **VAGY** (logikai összeadás) műveletek alapvető tulajdonsága a **kommutativitás**, azaz az operandusok sorrendjének felcserélhetősége:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

38

LOGIKAI MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI: ASSZOCIATIVITÁS

Az **ÉS** (logikai vagy) és **VAGY** (logikai összeadás) műveletek másik alapvető tulajdonsága az **asszociativitás**, azaz az operandusok csoportosíthatósága:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

A zárójelek a műveletek sorrendjét adják meg.
Igazolás: logikai értékek behelyettesítésével.

39

LOGIKAI MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI: DISZTRIBUTIVITÁS

Az **ÉS** (logikai vagy) és **VAGY** (logikai összeadás) műveletek harmadik alapvető tulajdonsága a **disztributivitás**, azaz az operandusok átrendezhetősége:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

Igazolás: logikai értékek behelyettesítésével.

40

A MŰVELETEK DISZTRIBUTIVITÁSA

AZ **ÉS** és a **VAGY** műveletek azonos értékűek. Mindkettő disztributív a másikkal nézve. Az első azonosság alakilag megegyezik a közönséges matematikai műveletvégzési szabályokkal.

A második azonosság csak a logikai algebrában érvényes.
Kifejezi azt, hogy egy logikai szorzat (**ÉS**) és egy logikai érték (állítás) logikai összege (**VAGY**) úgy is képezhető, hogy először képezzük a **VAGY** műveletet a szorzat tényezőivel és az így kapott eredményekkel hajtjuk végre az **ÉS** műveletet.

41

LOGIKAI KIFEJEZÉSEK ÁTALAKÍTÁSA

A logikai műveletek tulajdonságai segítségével a logikai kifejezések algebrai átalakítása hajtható végre, és így lehetőség van a legegyszerűbb alakú kifejezés megkeresésére. Ezt a későbbiekben még részletesebben fogjuk tárgyalni.

42

DE MORGAN TÉTELEK

A logikai algebrában kitüntetett szereppel bírnak a *De Morgan-azonosságok*

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Logikai összeg negáltja azonos a tagok negáltjainak logikai szorzatával.
Logikai szorzat negáltja pedig azonos a tényezők negáltjainak összegével.

43

DE MORGAN TÉTELEK

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Break the line, change the operation!

Vágd el a vonalat, cseréld fel a műveletet!

44

A DE MORGAN AZONOSSÁGOK

A logikai (Boole) algebrában centrális helyet foglalnak el az ún. *De Morgan tételek* vagy *azonosságok*.

A De Morgan-azonosságokat a középkori skolasztika logikusai már ismerték, de az idő folyamán jelentőségük elhomályosult. A két matematikai logikai azonosságot egzakt formában *Augustus De Morgan* fogalmazta meg 1847-ben, *William Ockham* korábbi megállapításai (1325) alapján.

A De Morgan tételek vagy azonosságok általánosan azt fogalmazzák meg, hogy egy logikai kifejezés tagadása úgy is elvégezhető, hogy az egyes változókat tagadjuk, és a logikai műveleteket felcseréljük (*VAGY* helyett *ÉS*, illetve *ÉS* helyett *VAGY* műveletet végzünk).

45

DE MORGAN SZABÁLYOK ALKALMAZÁSA

A *De Morgan szabályok* alapján az **ÉS** és a **VAGY** műveletek csak egyikét a **NEM** művelettel együtt használva a harmadik művelet előállítható.

$$A \cdot B = \overline{(\overline{A} + \overline{B})}$$

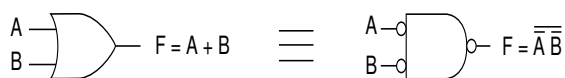
$$A + B = \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B})}$$

46

De Morgan's Theorem

A	B	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

DeMorgan's theorem: $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$



47

DE MORGAN TÉTELEK ÁLTALÁNOSÍTÁSA

A digitális rendszerek analízisében és szintézisében fontos szerepet játszanak a De Morgan-féle tételek. Több változóra érvényes alakjuk az alábbi

$$\overline{A \cdot B \cdot C \dots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots$$

$$\overline{A + B + C + \dots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \dots$$

48

ÁLTALÁNOSÍTOTT DE MORGAN-(SHANNON) FÉLE TÉTEL

Az általánosított De Morgan (Shannon) tétel a logikai összeadás és szorzás segítségével felépített logikai függvényekre vonatkozik

$$\overline{f(A, B, C, \dots, +, \cdot)} = f(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots, \cdot, +)$$

Az egész függvény tagadása helyettesíthető az egyes változók tagadásával, ha a függvényben valamennyi logikai összeadást szorzásra, és valamennyi szorzást összeadásra cserélünk fel.

49

LOGIKAI KAPUK

- A logikai áramkörök építőkövei.
- A logikai alpműveleteket valósítják meg.
- Ezek egyszerű kombinációjával további áramköröket tudunk felépíteni pl. az aritmetikai műveletek megvalósítására.

50

LOGIKAI ÁRAMKÖRÖK KIALAKÍTÁSA

Tetszőleges logikai összefüggés, vagy logikai függvény is előállítható a **NEM-ÉS** vagy **NEM-VAGY** alpművelet párokkal. Vagyis tetszőleges logikai áramkör kialakítható csupán **NEM-ÉS**, vagy csupán **NEM-VAGY** kapuk alkalmazásával.

Gyakorlati jelentőség: az elektronikus erősítők általában invertáló jellegűek (180 fokos fázistolás). Ezért a gyakorlatban a **NEM-ÉS (NAND)** és a **NEM-VAGY (NOR)** a szokásos alapelem.

Végső soron mindez a De Morgan tételeken alapul!

51

LOGIKAI ÁRAMKÖRÖK KIALAKÍTÁSA A GYAKORLATBAN

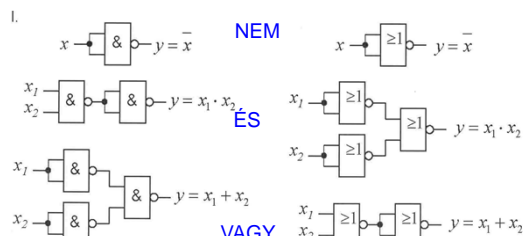
A gyakorlatban kétféle áramköri technológia terjedt el.

A szilícium **CMOS** (complementary metal oxide semiconductor) technológián alapuló áramköri rendszerben többnyire a **NEM-VAGY (NOR)** kapu az áramköri alapelem.

A szilícium bipoláris technológián alapuló transistor-transistor logic (**TTL**) áramköri rendszerben a **NEM-ÉS (NAND)** kapu az alapelem.

52

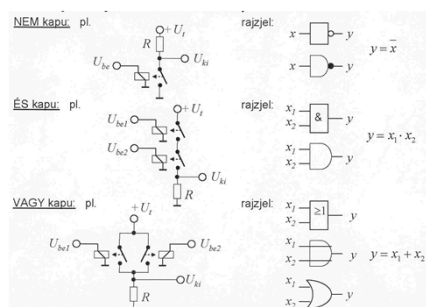
NEM-ÉS ÉS NEM-VAGY KAPUS MEGVALÓSÍTÁSOK



Az ábra bemutatja, hogyan realizálható a **NEM**, **ÉS** és a **VAGY** művelet kizárólag **NEM-ÉS**, illetve **NEM-VAGY** műveleti elemekkel (kapukkal).

53

LOGIKAI ALAPKAPUK

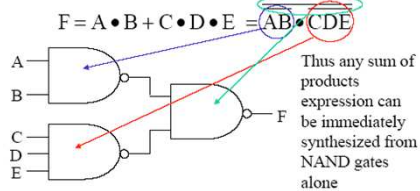


Áramköri magvalósítás elvei. Pozitív logika: magas feszültségszint \Rightarrow 1, alacsony szint \Rightarrow 0

54

DE MORGAN TÉTELEK ALKALMAZÁSA LOGIKAI HÁLÓZATOK KIALAKÍTÁSÁBAN

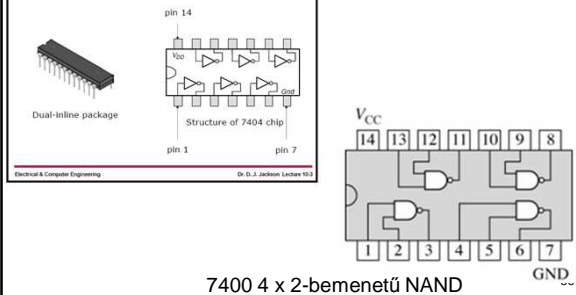
Logical Synthesis
Guided by DeMorgan's Theorem
DeMorgan's Theorem :
 $A + B + C = \overline{\overline{A} \overline{B} \overline{C}}$ or $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \overline{[A B C]}$
Example of Using DeMorgan's Theorem:



55

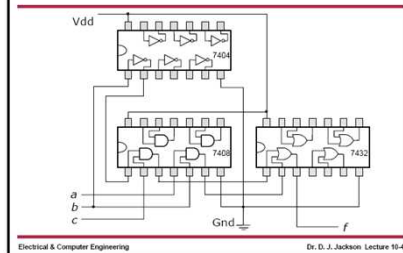
FIZIKAI REALIZÁLÁS (SSI)

A 7400-series chip



FIZIKAI REALIZÁLÁS (SSI)

Implementation of $f = ab + b'c$



57

VÉGE

A 2. ELŐADÁSNAK

58