DIGITÁLIS TECHNIKA I

Dr. Lovassy Rita
Dr. Pődör Bálint

Óbudai Egyetem KVK
Mikroelektronikai és Technológia Intézet

5. ELŐADÁS

1

IRODALOM

Arató Péter: Logikai rendszerek tervezése, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990, Műegyetemi Kiadó 2004, 55013 műegyetemi jegyzet

Zsom Gyula: Digitális technika I és II, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000, (KVK 49-273/I és II)

Rőmer Mária: Digitális rendszerek áramkörei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989, (KVK 49-223)

Rőmer Mária: Digitális technika példatár, KKMF 1105, Budapest 1999

Az előadások ezen könyvek megfelelő fejezetein alapulnak.

5. ELŐADÁS

1. Az előzőek összefoglalása: kanonikus alakok, mintermek, maxtermek, minimalizálás, stb.
2. Karnaugh táblázat
3. Nem teljesen határozott logikai függvények
4. Karnaugh táblázat, logikai tervezési példák

3

EDDIGIEK ÖSSZEFOGLALÁSA

- Kombinációs hálózatok ....
- Diszjunktív és konjunktív kanonikus alakok ...
- Mintermek és maxtermek ...
- Szomszédosság, egyszerűsítés, prímimplikánsok ...
- Minimalizálás grafikus módszerrel ...
- Karnaugh tábla ...

4

LOGIKAI FÜGGVÉNYEK KANONIKUS ALAKJA

A kombinációs hálózatok tervezésénél célszerű az algebrai alakból, mégpedig a kanonikus algebrai alakból kiindulni.

A diszjunktív kanonikus alak konjunktív tagok azaz mintermek összege.

A konjunktív kanonikus alak diszjunktív tényezők azaz maxtermek szorzata.

5

MINTERMEK ÉS MAXTERMEK KAPCSOLATA

Minden minterm egy maxterm inverze, és minden maxterm egy minterm inverze. A $k = 2^n-1$ jelöléssel

$$\overline{m_i^n} = M_{k-i}^n$$

és

$$M_i^n = \overline{m_{k-i}^n}$$

A mintermek és maxtermek indexei, i és 2^n-1-i egymás komplemensei. Bináris alakjukban az 1 és 0 számjegyek fel vannak cserélve. Összegük páronként 2^n-1, mely binárisan csupa 1-est tartalmaz.

6

SZOMSZÉDOS MINTERMEK, MINIMALIZÁLÁS

Szomszédos mintermek: egy logikai változó ponált illetve negált, a többi azonos.

A minimalizálás menete:

1. A szomszédos mintermeket összevonják, a megfelelő változó kiesik.
2. Az új alakban az esetleges szomszédos termeket megint összevonják.
3. Az eljárást addig folytatják míg olyan szorzatok összegét kapjuk, melyekből már egy változó sem hagyható el.

Az így kapott szorzatok, termek a prímimplikánsok.

7

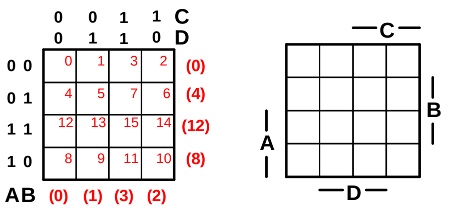
KÉTSZINTŰ KOMBINÁCIÓS HÁLÓZATOK (ÉS-VAGY, ILLETVE VAGY-ÉS)

A diszjunktív, illetve a kanonikus alak közvetlenül ilyen kétszintű megoldást ad (ÉS kapukkal realizált mintermek összegét azaz VAGY kapcsolatát, illetve VAGY kapukkal realizált maxtermek szorzatát azaz ÉS kapcsolatát).

A minimalizálás összevonásai egyszerűbb, de ugyancsak kétszintű ÉS–VAGY, illetve VAGY–ÉS hálózatra vezetnek.

8

NÉGYVÁLTOZÓS KARNAUGH TÁBLA



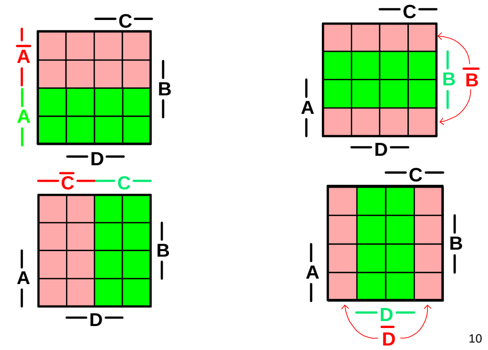
Akkor, és csak akkor ha A→8; B→4; C→2; D→1;

Akkor, és csak akkor ha A→8; B→4; C→2; D→1;

A K tábla peremezése a változók binárisérték-kombinációival vagy az oldalt elhelyezett vonalakkal adható meg.

9

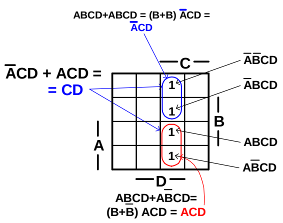
A Karnaugh tábla a Venn diagram általánosítása (kiterjesztése)



10

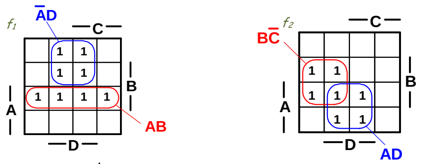
PÉLDA AZ ÖSSZEVONÁSOKRA

- Két-két szomszédos cella, vagy két-két szomszédos hurok mindig összevonható.
- Az összevont hurkok cellaszáma mindig 2-nek egész hatványa kell, hogy legyen.



11

Négyváltozós Karnaugh tábla és lefedések (példák)



$$f_1 = \sum^{4}(1,3,5,7,12-15,) = AB + \overline{A}D$$

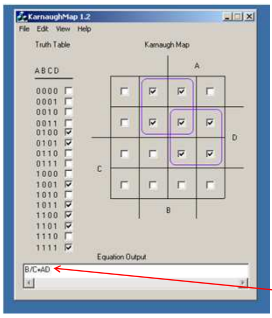
$$f_2 = \sum^{4}(4,5,9,11,12,13,15) = AD + B\overline{C}$$

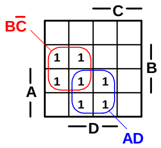
Kanonikus minimalizált

alakok

12

K-TÁBLA: SUM-OF-PRODUCTS





Realizálás:

kétszintű ÉS-VAGY, illetve kétszintű NAND-NAND hálózat

Minimális algebrai alak

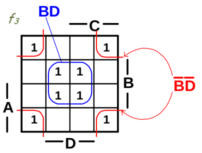
$$f_2 = \sum^{4}(4,5,9,11,12,13,15) = AD + B\overline{C}$$

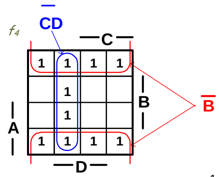
13

Négyváltozós Karnaugh tábla és lefedések (további példák)

$$f_3 = \sum^{4}(0,2,5,7,8,10,13,15) = BD + \overline{B}\,\overline{D}$$

$$f_4 = \sum^{4}(0-3,5,8-11,13) = \overline{B} + C\overline{D}$$





14

NEM TELJESEN HATÁROZOTT LOGIKAI FÜGGVÉNY

Az összevonás során a nem rögzített (közömbös) függvényértéket tetszőlegesen választhatjuk 1-nek vagy 0-nak, attól függően, hogy melyik adja a legkedvezőbb megoldást.

Bejegyzések a Karnaugh táblán (háromféle!)

- 1 a minterm szerepel a függvényben,
- 0 a minterm nem szerepel a függvényben,
- X a minterm értéke közömbös.

(A 0 bejegyzés helyett sokszor üresen marad a cella.)

Alternatív jelölések: d (don't care)

15

NEM TELJESEN HATÁROZOTT FÜGGVÉNYEK

Nem teljesen határozott logikai függvényeknél előfordulhat, hogy a közömbös értékeket máskép célszerű rögzíteni a legegyszerűbb konjunktív alak képzésekor, mint ahogy azt a legegyszerűbb diszjunktív alaknál tennénk.

Ekkor a két elvi logikai rajzon a kapubementek száma különböző lehet!

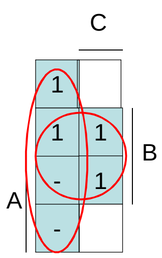
A megvalósításkor, ha szabadon választhatunk a két alak között, azaz nincs megkötés az ÉS és VAGY szintek sorrendjére, akkor a legkevesebb kapubemenetet igénylő megoldást a két függvényalak további, heurisztikus elemzésével kaphatjuk csak meg.

16

NEM TELJESEN HATÁROZOTT LOGIKAI FÜGGVÉNY

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	-
1	0	1	0
1	1	0	-
1	1	1	1

$$F = \sum^{3}((0,2,3,7) + (4,6))$$



Optimális lefedés két 4-es hurok:

$$F = B + \overline{C}$$

Itt a közömbös függvényértékeket 1-nek tekintjük.

17

NEM TELJESEN HATÁROZOTT LOGIKAI FÜGGVÉNY

Az összevonás során a nem rögzített (közömbös) függvényértéket tetszőlegesen választhatjuk 1-nek vagy 0-nak, attól függően, hogy melyik választás adja a legkedvezőbb megoldást.

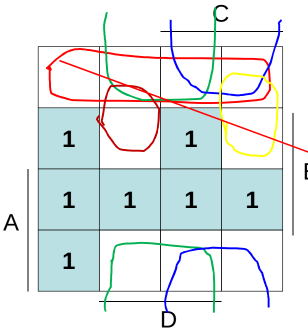
18

LEGEGYSZERŰBB KONJUNKTÍV FÜGGVÉNYALAK

- Eddig mindig a legegyszerűbb diszjunktív alakot írtuk fel a Karnaugh tábla alapján.
- A legegyszerűbb konjunktív algebrai alak is könnyen kiolvasható a K-táblából, ekkor a tagadott függvény mintermjeit kell hurkokkal lefedni, ez megadja a függvény negáltjának legegyszerűbb diszjunktív algebrai alakját.
- Ebből a DeMorgan azonosság alapján rögtön adódik a ponált függvény legegyszerűbb konjunktív alakja.

19

PÉLDA A LEGEGYSZERŰBB KONJUNKTÍV ALAK KÉPZÉSÉRE



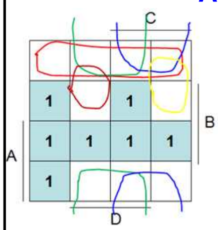
Három négyes és két kettes hurok jelölhető ki.
Pl. a felső sorbeli négyes hurok (a peremeken ellentétesnek kell venni a változókat!)

(A + B)

Maxtermek: a mintermeket tartalmazó K táblából a 0-t tartalmazó cellákat tekintjük, és a peremen a változókat komplementáljuk!

20

LEGEGYSZERŰBB KONJUNKTÍV ALGEBRAI ALAK



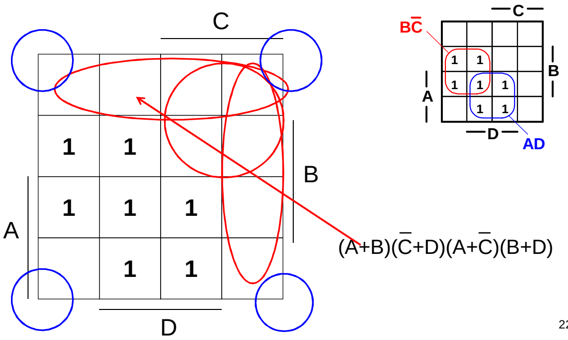
$$\overline{F} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,D + \overline{A}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,C\,\overline{D} + \overline{B}\,C$$

$$F = (A+B)(B+\overline{D})(A+C+\overline{D})(A+\overline{C}+D)(B+\overline{C})$$

Természetesen ugyanez olvasható ki a Karnaugh táblázatból is.

21

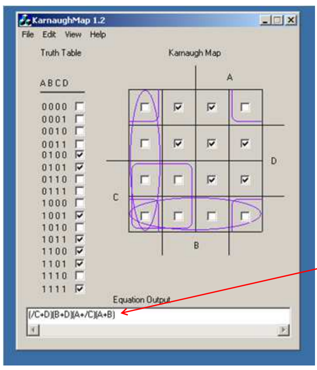
MINIMALIZÁLÁS KONJUNKTÍV ALAKBAN



$(A+B)(\overline{C}+D)(A+\overline{C})(B+D)$

22

K-TÁBLA: PRODUCT-OF-SUMS



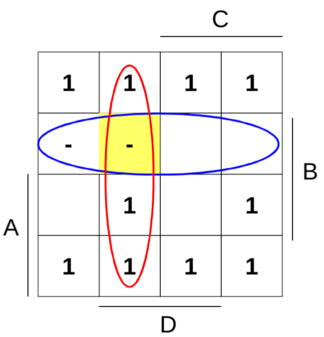
Realizálás:

kétszintű VAGY-ÉS, illetve kétszintű NOR-NOR hálózat

Minimális algebrai alak

23

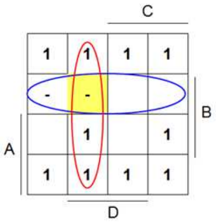
PÉLDA A KÖZÖMBÖS FÜGGVÉNY-ÉRTÉK ELTÉRŐ RÖGZÍTÉSÉRE



A színkóddal jelölt cella értékét a diszjunktív alak keresésénél célszerű 1-nek rögzíteni, a konjunktív alak keresésénél pedig 0-nak!

24

LEGEGYSZERŰBB ALGEBRAI ALAKOK



$F_d = \bar{B} + \bar{C} D + A C \bar{D}$

$F_k = (A+\bar{B})(\bar{B}+C+D)(\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})$

A változók negáltjait előállító invertereket is figyelembe véve a diszjkunktív alak realizálásnál 11, a konjunktív alakénál pedig 14 kapubementre van szükség!

25

GRAFIKUS MINIMALIZÁLÁS 5 VAGY ANNÁL TÖBB VÁLTOZÓVAL

Öt változó esetén a minimalizálás két négyváltozós Karnaugh táblával, hat változónál pedig négy négyváltozós táblával végezhető el.

A négy tábla páronkénti áttekintése már elég bonyolult. Ezért hat vagy ennél több változó esetén a Karnaugh táblás minimalizálási eljárás nem előnyös.

Öt- és hatváltozós Karnaugh táblák: Rőmer 27 old., Zsom I 129 old., Arató megfelelő fejezet.

26

ÖTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY EGYSZE-RŰSÍTÉSE KARNAUGH TÁBLÁN

A módszert az alábbi, kanonikus alakjával adott függvénnyel illusztráljuk:

F(ABCDE) =

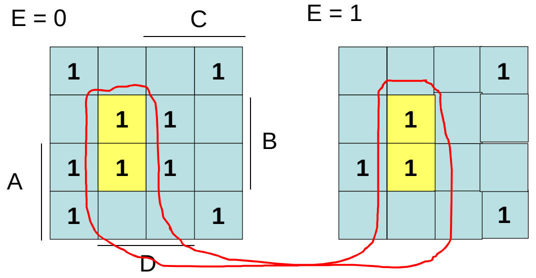
Σ^{5} (0,4,5,10,11,14,16,20,21,24,25,26,27,30)

Megjegyzés: látható pl. hogy a 24(=16+8),25, majd a 26,27 mintermek összevonhatók, utána a párok is, és D és E itt kiesik, stb.

(A példa Arató könyve 59. oldalán található. A függvény algebrai alakja sajtóhibákat tartalmaz.)

27

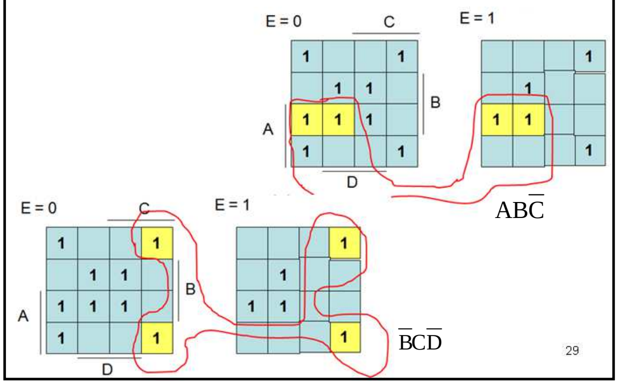
ÖTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY EGYSZERŰSÍTÉSE (1)



Prímiplikáns: $B \bar{C} D$

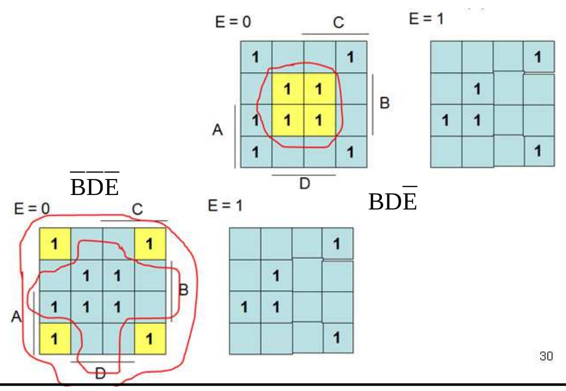
28

ÖTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY EGYSZERŰSÍTÉSE



29

ÖTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY EGYSZERŰSÍTÉSE



30

ÖTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY MINIMALIZÁLT ALAKJA

A minimalizált függvény öt prímimplikánst tartalmaz:

$F(ABCDE) = AB\overline{C} + B\overline{C}D + \overline{B}\,\overline{C}D + BD\overline{E} + \overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E}$

Az eredeti alakban az elvi logikai rajzon a szükséges kapubemenetek száma 14 x 5 + 14 = 84, míg a minimalizált függvénynél 5 x 3 + 5 = 20.

Kapuk: 5 db 3 bemenetű ÉS, 1 db 5 bemenetű VAGY, 4 db INVERTER.

Tokok (TTL 74-es sorozat): 1db HEX INV, 2 db 3x4 bemenetű NAND, 1 db 1x8 bemenetű NAND.

31

ÖTVÁLTOZÓS EGYBEFÜGGŐ KARNAUGH TÁBLA

C	0	0	0	0	1	1	1	1
D	0	1	1	1	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0	1	1	0
AB 00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

A két négyváltozós táblát a peremezés megváltoztatásával egybefüggővé tehetjük a szomszédossági viszonyok még könnyebb felismerése céljából.
A szomszédosságnál a függőleges tengelyre vett tükrözési szimmetria is figyelembe veendő.

32

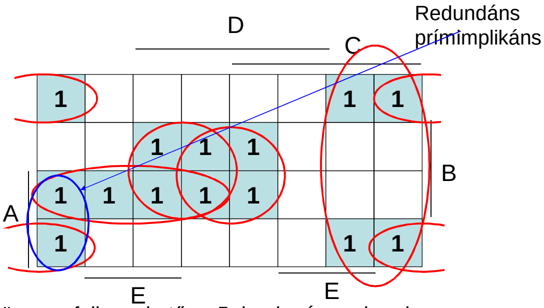
ÖTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY SÍKBA TERÍTETT KARNAUGH TÁBLÁN

A minimalizálás menetét a már ismert és előzőleg két négyváltozós Karnaugh tábla segítségével minimalizált, kanonikus alakjával adott függvénnyel illusztráljuk:

$F(ABCDE) = \sum^{5} (0,4,5,10,11,14,16,20,21,24,25,26,27,30)$

33

MINIMALIZÁLÁS SÍKBELI K-TÁBLÁN



Könnyen felismerhető az 5 darab négyes hurok

$F(ABCDE) = AB\overline{C} + B\overline{C}D + \overline{B}\,\overline{C}D + BD\overline{E} + \overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E}$

34

KARNAUGH TÁBLA HAT VÁLTOZÓRA

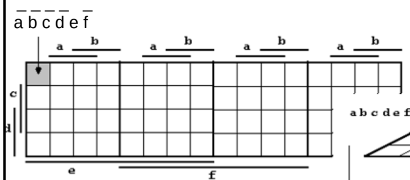
Hat változó esetében a függvény ábrázolásához négy négyváltozós Karnaugh tábla szükséges. A hat változóból kettőnek az értékét kell rögzítettnek venni egy-egy táblán.

Másik lehetőség a megfelelő kódolás révén egyesített síkbeli tábla használata.

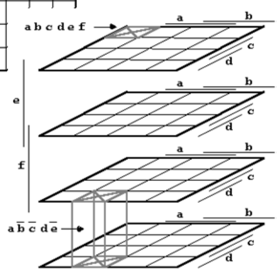
D	0	0	0	0	1	1	1	1
E	0	0	1	1	1	1	0	0
F	0	1	1	0	0	1	1	0
ABC 000	0	1	3	2	6	7	5	4
001	8	9	11	10	14	15	13	12
011	24	25	27	26	30	31	29	28
010	16	17	19	18	22	23	21	20
110	48	49	51	50	54	55	53	52
111	56	57	59	58	62	63	61	60
101	40	41	43	42	46	47	45	44
100	32	33	35	34	38	39	37	36

35

KARNAUGH MAP FOR 6-VARIABLES



Two dimensional (in-plane) arrangement of 6-variable Karnaugh map



Three dimensional arrangement of 6 variable K map

MINIMALIZÁLÁS HATVÁLTOZÓS KARNAUGH TÁBLÁN

Minimalizálandó függvény (19 minterm):

F(A,B,C,D,E,F) =

Σ^6 (0,2,6,9,14,18,21,23,25,27,32,34,41,49,53,55,57,61,62)

37

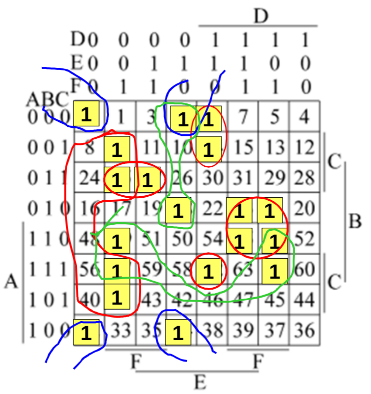
HAT VÁLTOZÓS MINIMALIZÁLÁS

ABC \ DEF	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1	1	3	1	1	7	5	4
001	8	1	11	10	14	1	13	12
011	24	1	1	26	30	31	29	28
010	16	17	19	1	22	1	1	20
110	48	1	51	50	54	1	1	52
111	56	1	59	58	1	63	1	60
101	40	1	43	42	46	47	45	44
100	1	33	35	1	38	39	37	36

F(A,B,C,D,E) = Σ6 (0,2,6,9,14,18,21,23,25,27,32,34,41,49,53,55,57,61,62)

38

MINIMALIZÁLÁS HAT VÁLTOZÓRA



39

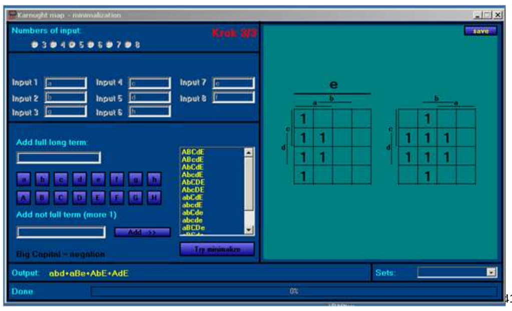
KARNAUGH TÁBLA PROGRAMOK

A Karnaugh map programok általában mindkét kanonikus alakot kezelik.
SOP: sum-of-products, diszjunktív algebrai alak.
POS: product-of-sums, konjunktív algebrai alak.

40

PÉLDA: ÖT-VÁLTOZÓS MINIMALIZÁLÁS

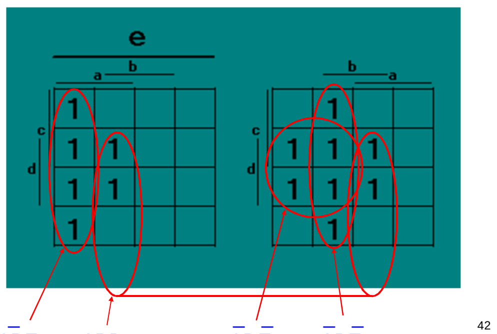
F(A,B,C,D,E) = Σ^5 (2,6,8,10,12,14,17,19, 21,23,26,27,30,31)



41

PÉLDA: ÖT-VÁLTOZÓS MINIMALIZÁLÁS

F(A,B,C,D,E) = Σ^5 (2,6,8,10,12,14,17,19, 21,23,26,27,30,31)



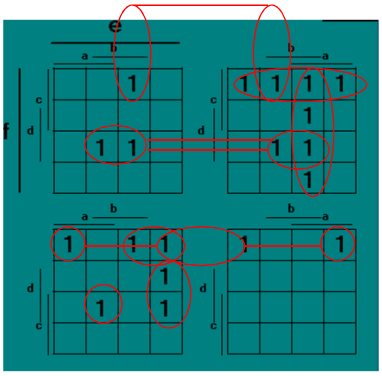
$\bar{A}BE$ ABD $\bar{A}\bar{D}E$ $\bar{A}\bar{B}E$

42

PÉLDA: HATVÁLTOZÓS MINIMALIZÁLÁS

$F(A,B,C,D,E,F) = \Sigma^6(0,2,6,9,14,18,21,23,25,27,32,34,41,49,53,55,57,61,62)$

PÉLDA: HATVÁLTOZÓS MINIMALIZÁLÁS



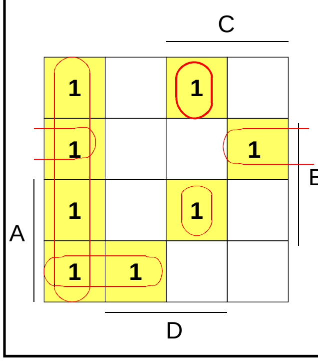
44

TERVEZÉSI GYAKORLAT

1. Tervezzen 4 bemenetű (ABCD), 1 kimenetű (F) kombinációs hálózatot, amelynek F kimenete 1, ha a bemenetre adott *bináris számok* (legmagasabb helyérték A) maradék nélkül oszthatók 3-mal vagy 4-el. Rajzolja fel a Karnaugh tábláját, és az elvi logikai rajzot.

45

TERVEZÉS (1): MEGOLDÁS (ÉS-VAGY)



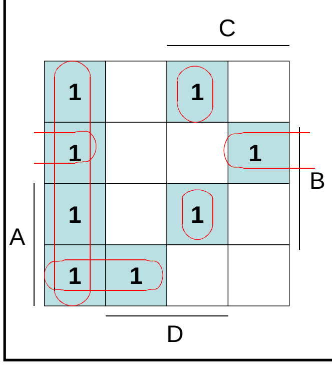
3-al osztható:
0,3,6,9,12,15
4-el osztható: 0,4,8,12

A megvalósítandó logikai függvény

$F = \Sigma^4(0,3,4,6,8,9,12,15)$

46

TERVEZÉS (1): MEGOLDÁS (ÉS-VAGY)



Az egyszerűsített alak

$F = \bar{C}\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,\bar{D} + A\,\bar{B}\,\bar{C}$

$+ A\,B\,C\,D + \bar{A}\,\bar{B}\,C\,D$

(Esetleg XOR logika ?)

47

TERVEZÉSI PÉLDA (1): MEGOLDÁS

Az elvi logikai rajz: 1 db két-bemenetű ÉS
2 db három-bemenetű ÉS
2 db négy-bemenetű ÉS
1 db 5 bemenetű VAGY kapu.

A minimalizált hálózatban 21 kapubement van.

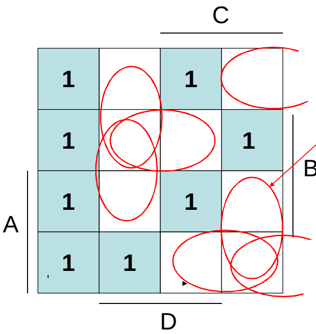
Realizálás:

1/4 7400 (4x2 bemenetű NAND)
2 7420 (2x4 bemenetű NAND)
1 7430 (1x8 bemenetű NAND)

A teljes diszjunktív kanonikus alak realizálása 8x4 + 1x8 = 40 kapubementet igényelne.

48

TERVEZÉS (1): MEGOLDÁS (VAGY-ÉS)



$\overline{A} + \overline{B} + D$

stb., hat hasonló szerkezetű tényező

TERVEZÉS (1): MEGOLDÁS (VAGY-ÉS)

Az elvi logikai rajz (VAGY-ÉS):

6 db három-bemenetű VAGY kaput és
1 db 6 bemenetű ÉS kaput tartalmaz.

A minimalizált hálózatban 24 kapubemenet van.

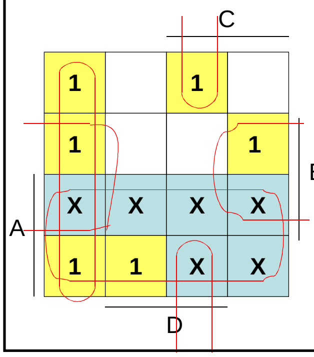
A teljes konjunktív kanonikus alak realizálása
8x4 + 1x8 = 40 kapubemenetet igényelne.

TERVEZÉSI GYAKORLAT (2)

Rajzolja fel az F Karnaugh tábláját és az elvi logikai rajzot, ha a bemenetre csak *binárisan kódolt decimális számok* (BCD 8-4-2-1 súlyozás) érkezhetnek, melyek maradék nélkül oszthatók 3-mal vagy 4-el.

Egy gyakori eset a nem teljesen határozott logikai függvények alkalmazására, amikor binárisan kódolt decimális (BCD) számokkal kell valamilyen műveletet, kódolást, dekódolást, stb. elvégezni.
A BCD kód, és a vele rokon kódok (pl. a 3 többletes kód) a lehetséges 16 négy-bites kódszóból csak tízet használ.

TERVEZÉS (2): MEGOLDÁS

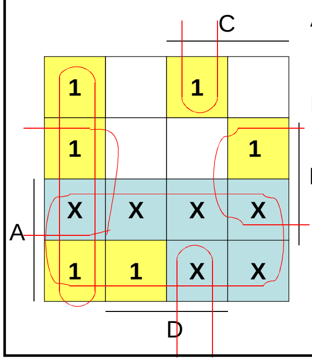


3-al osztható: 0,3,6,9
(12,15 kizárva!)
4-el osztható: 0,4,8
(12 kizárva!)

A megvalósítandó logikai függvény

$F = \Sigma^{4}((0,3,4,6,8,9) + (10\text{-}15))$

TERVEZÉSI PÉLDA (2): MEGOLDÁS



A minimalizált függvény

$F = A + \overline{C}\,\overline{D} + B\overline{D} + \overline{B}CD$

TERVEZÉSI GYAKORLAT (3)

Egy kombinációs hálózat bemenetei A, B, C, D, kimenetei X, Y, Z.
A bemenetet mint 2 db 2 bites számot értelmezve (AB, A a magasabb helyérték), illetve (CD, C a magasabb helyérték), a kimenet legyen a két bemenet összege, (XYZ, X a legmagasabb helyérték), XYZ = AB + CD. Pl. 101 = 11 + 10 (bináris összeadás).

Adja meg a hálózat igazságtábláját.
Adja meg a hálózat kimenetenként legegyszerűbb logikai függvényeit algebrai alakban.