



Óbudai Egyetem

Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar

Dr. Neszveda József

Automatika

Klasszikus szabályozás elmélet

ÓE-KVK 2128

Budapest, 2015

Előszó

Az Óbudai Egyetem Kandó Kálmán Villamosmérnöki Karán, a bachelor képzésből kikerülő összes villamosmérnök hallgató, gyakorlat-orientált betekintést kap a klasszikus automatizálás elméletről.

Az Automatika jegyzet az automatizálás alapismeretének átadására törekszik. Ennek megfelelően az értékkészletében folytonos, időben folyamatos, adott hibával lineárisnak tekinthető, állandó paraméterű modellel jellemezhető eszközök és ezen eszközökből felépített rendszerek automatizálásához szükséges elméleti ismereteket, gyakorlati fogásokat tárgyalja a jegyzet. A jegyzetben az „s” operátoros tartomány, a „j ω ” körfrekvencia-, és a „t” időfüggvények ábrái a MATLAB program használatával készültek.

Az Automatika jegyzet vállalt céljának megfelelően a matematikai összefüggések fizikai értelmezésére és a gyakorlati fogásokra helyezi a hangsúlyt, és tudatosan nem tárgyalja azokat a közelítő és becsülő eljárásokat, képleteket, amelyek az irányítás-technikai számításokat könnyítő számítógépes programok széleskörű elterjedése előtt voltak hasznosan alkalmazhatók. Az elméleti ismeretek megértését segítő mintafeladatok mellékletként vannak az egyes fejezetekhez rendelve.

Az Automatizálás jegyzet folytatja az LTI (Linear Time Invariant) rendszerek tárgyalását. Bemutatja a több hurkos szabályozások és a diszkrét („z” operátoros tartomány) szabályozások klasszikus szabályozás elméleti leírását, méretezését, majd folytatja a nem linearitások hatásának elemzését ugyancsak a klasszikus szabályozás elmélet alapján. Ezután tárgyalja a modern szabályozás elmélet alapját képező állapot-teres leírást.

Manapság a berendezések nagyon gyakran tartalmaznak mikroprocesszort, vagyis ilyen eszközt alkalmazva hibrid rendszert kapunk. Az Automatika jegyzet 5. fejezete röviden áttekinti azokat a gyakorlati fogásokat, amelyek a mintavételi idő helyes megválasztásával biztosítja, hogy a hibrid rendszer továbbra is folytonos működésűnek legyen tekinthető.

A nemzetközi és a magyar szakirodalomban a jelek, jellemzők, és a különböző irányítástechnikában használt függvények jelölése nem egységes. Az Automatika jegyzet az 1.1 táblázatban felsorolt, az angolszász szakirodalomban elterjedt, jelöléseket használja.

A kis betű a jeltartományon belüli változások időbeli lefutását jelöli. A nagybetű a teljes jeltartomány egy konkrét pontját vagy a teljes jeltartományt jelöli.

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak	5
1.1. Az automatizálás	5
1.2. A vezérlés	11
1.3. Az irányítás blokkvázlata és jelfolyam ábrája	11
1.4. Az egységes, csak időfüggő, jeltartomány kialakítása	13
1.5. Az irányítási stratégiák osztályozása	15
2. Jelátvivő tagok	17
2.1. A körfrekvencia-, és az időtartomány kapcsolata	18
2.2. Vizsgáló jelek és válaszfüggvényeik	25
2.3. A jelátvivő alaptagok	27
2.4. Az összetett jelátvivő tag	29
2.5. A jelátvivő alaptagok jellemzése	32
3. Egyhurkos szabályozási kör	47
3.1. Az egyhurkos szabályozási kör statikus illesztése	50
3.2. A szabályozási kör átviteli függvényei	52
3.3. Az értékkövetési és az értéktartási képesség	54
3.4. Az egyhurkos, zárt szabályozási kör stabilitása	59
3.5. Az egyhurkos, zárt szabályozási kör minőségi jellemzői	64
4. Kompenzálás	71
4.1. A PIDT kompenzáló tag	71
4.2. A PIPDT kompenzáló tag	76
4.3. A kompenzáló tag helye a szabályozási körben	77
4.4. A kompenzáló tag méretezése	78
5. Hibrid és mintavételezett szabályozási kör	95
5.1. mintavételezés hatása	95
5.2. A mintavételi idő megválasztása hibrid szabályozásban	98
5.3. A Z transzformáció	100
5.4. Az „s” és a „z” tartomány közötti konverziók	103
Mellékletek	104
2A. A Mason szabály alkalmazása	104
2B. Szürke doboz modell	111
2C. Fekete doboz modell	119
3A. Stabilitás vizsgálatok	123
4A. Kompenzáló tag méretezése	129
4B. Esettanulmány	147
5A. A differencia egyenletek	161

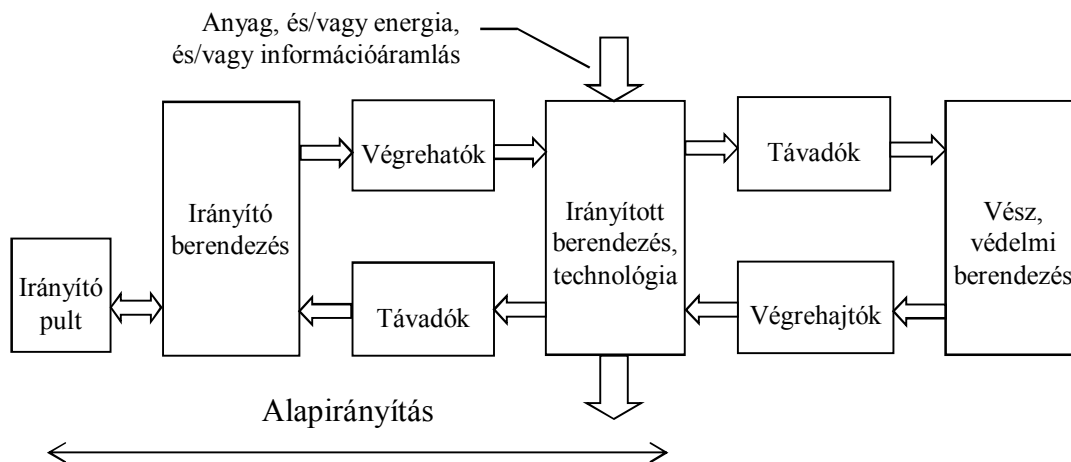
1. Alapfogalmak

1.1. Az automatizálás

Az automatizálás célja, hogy egy gépen vagy gépcsoporton az anyag (és/vagy energia, és/vagy információ) áramlás balesetmentesen, egyenletes minőségben, jól dokumentáltan, az előírt költséghatékonysági feltételeket teljesítve és minél kevesebb emberi beavatkozást igénylő módon menjen végbe.

Megjegyzés: A célok ebben a sorrendben fejlődtek. Kezdetben a balesetmentesség és a kezelőtől független egyenletes minőség volt a cél, majd a számítógépek térhódításával vált lehetővé a jól dokumentálhatóság biztosítása és a költséghatékonyság optimalizálhatósága. A kezelő személyzet kiváltása nem elsődleges cél, a nagy irányítási rendszerek tudatosan beépítik az emberi döntés választásának lehetőségét.

Az 1.1. ábrán látható egy összetett automatizált gyártás vagy folyamat általános felépítése. Az irányítási rendszer két egymástól független – az alapirányítási és a vész, védelmi - részből áll.



1.1. ábra Automatizált gyártás vagy folyamat általános felépítése

Az 1.1. ábrán a dupla nyilak azt jelképezik, hogy több irányítandó jellemzőnk van és ennek megfelelően, több fizikai jellemzőt kell mérni, illetve módosítani az irányítási célnak megfelelően.

Megjegyzés: Az alapirányítás is küld vész (alarm) jelzéseket a kezelő személyzet felé, de ezek nem mindegyike állítja le teljesen vagy részlegesen az irányított technológia vagy berendezés működését, mint a vész, védelem rendszere.

Az **irányítás** olyan művelet, amely valamilyen készüléket, berendezést, technológiai folyamatot, elindít, fenntart, megváltoztat vagy megállít.

Az **irányított** rendszerre használt szakkifejezések:

- ◆ **Technológia egység** (process unit): Folytonos anyag és/vagy energia átalakítást és/vagy szállítást végző gépcsoport. (Pl.: pasztörizáló, kristályosító technológia)
- ◆ **Gyártó cella** (process cell): Darabonként történő anyag átalakítást és/vagy szállítást végző gépcsoport. (Pl.: présgép, hegesztő robot)
- ◆ **Berendezés, készülék** (equipment): Egy-egy jól körülhatárolt műveletet végez. (Pl.: címkéző, adagoló, keverő berendezés)
- ◆ **Szakasz** (plant): Az irányított berendezés, technológiai egység matematikai modellje.
- ◆ **Szerv** (self-assembly): Irányítási részfeladatot önállóan ellátó szerkezeti egység (pl.: hőmérséklet távadó, szelepmozgató motor, stb.).
- ◆ A **jel** (signal) fő jellegzetessége, hogy információt hordoz, és az információt hordozó fizikai közeg (mA, V, Bar, stb.) másodrendű. Az ipari berendezésekben a jelek értelmezési tartományát szabványosították, ami nagyon megkönnyíti a különböző gyártók eszközeinek egymáshoz illesztését. Az ipari kommunikációs hálózatok rohamos fejlődésével és az intelligens távadók, végrehajtók megjelenésével a jelek információt hordozó szerepe még szembeötlőbb.
- ◆ A **jellemző** (variable) fizikai közege (m, °C, bar, stb.) az elsőrendű, és az irányítási rendszer szempontjából csak az dönthető el, hogy mely határok között értelmezzük a jellemző értékét.
- ◆ **Jelátvivő vezeték** (signal line): Az irányítási rendszer szerkezeti egységei közötti információátvitelre szolgáló eszközök. A villamos segédenergiával működő rendszerekben villamos vezetékek, csatlakozók. A pneumatikus segédenergiával működő rendszerekben a levegőt - mint jelhordozót - réz vagy műanyag csövek továbbítják.

Ha a berendezések egymással összehangoltan működnek, akkor technológiai egységet vagy gyártócellát alkotnak. Ha a technológiai egységek vagy gyártócellák egymással összehangoltan működnek, akkor egy irányító rendszert alkotnak.

Ennek megfelelően az irányító algoritmusnak több szintje van:

- ◆ A legfelső a technológiai egységek vagy gyártócellák működésének egymás állapotától függő és/vagy időbeli összeszinkronizálása.
- ◆ A második a technológiai egységek vagy gyártócellák berendezéseinek egymás állapotától függő és/vagy időbeli összeszinkronizálása.
- ◆ A harmadik egy konkrét berendezés irányítása.
- ◆ A legalsó szint egy konkrét irányítandó jellemző számára az irányítási stratégia megválasztása, és az irányítási algoritmus megadása.

Összefoglalva: Egy nagy **irányított rendszer** több együttműködő technológiai egység vagy gyártócella együttese, ahol a technológiai egység és a gyártócella több berendezést tartalmaz, és egy berendezésnek lehet több irányítandó jellemzője.

Az irányított szakasz az alábbiak szerint modellezhetjük:

- ◆ Egy bemenetű, egy kimenetű SISO (Single Input Single Output). Ilyenkor az irányított jellemzőre ható bemeneti jelek közül egy van kiemelve az irányított jellemző értékét befolyásoló **módosító jellemző**nek.
- ◆ Több bemenetű, egy kimenetű MISO (Multi Input Single Output). Ilyenkor az irányított jellemzőre ható bemeneti jelek közül egynél több befolyásolja az irányított jellemzőt.
- ◆ Több bemenetű, több kimenetű MIMO (Multi Input Multi Output). Ilyenkor több, egymásra kölcsönösen ható, irányított jellemző van, és legalább ennyi módosító jellemző szükséges az irányításhoz.

Megjegyzés: Az Automatika jegyzet csak a legalsó irányítási szintet, azon belül is csak az egy bemenetű, egy kimenetű SISO rendszereket tárgyalja. Ez a tudás minden villamosmérnöknek szükséges a munkájához, függetlenül attól, hogy milyen területre szakosodott. Az automatizálással foglalkozóknak ennyi nem elegendő. Például repülőgép robot pilóta, vagy a hegesztő robot irányítása tipikus MIMO feladat.

Egy nagy irányított rendszer, és ezen belül a technológiai egységek vagy gyártócellák irányításához - az irányító algoritmus kialakításán túl - az alábbi mérnöki feladatokat is meg kell oldani:

- ◆ **Műszerezés.** Az eszközök (távadók, végrehajtók) kiválasztása. Ehhez szükséges az irányítandó fizikai jellemzők értelmezési tartományainak (legkisebb és a legnagyobb értékének) definiálása. Ezeket a határokat az irányító algoritmusba is be kell építeni!
- ◆ **Az ember-gép kapcsolat, valamint a vállalat irányítás számára az adat-szolgáltatás megtervezése.** Az irányító pult számítógép bázisú, amelyen az aktuális technológiai változókat megjelenítő, a mért adatokat, a kezelői tevékenységeket, a riasztásokat naplózó (SCADA: Supervisory Control And Data Acquisition) szoftver fut.
- ◆ **A vész, védelmi rendszer megtervezése, felprogramozása.** A vész, védelmi rendszerben zömében a legalsó irányítási szintnek megfelelő feladatok vannak, azonban a megbízhatósági elemzések és a speciális programozási technika önálló, külön vizsga köteles szakterületté tette.
- ◆ **Karbantartás tervezés, végrehajtás.** A távadók, végrehajtók adott időközönként, mechanikai karbantartást, illetve hitelesítést igényelnek.

Az irányított jellemző egyensúlyi állapotának nevezik, amikor az irányított jellemző és a rá ható bemenetek értékei nem változnak. Ha bármely bemenet megváltozása után az irányított jellemzőre ható bemenetek újra állandó értékűek és az irányított jellemző elegendő idő elteltével (a tranziensek lezajlása után) új egyensúlyi állapotba kerül, akkor a rendszer **önbeálló**. Önbeálló rendszerek esetén – az értelmezési tarto-

mányon belül – értelmezni lehet a statikus karakterisztikát. A **statikus karakterisztika** egy bemenet és az irányítani kívánt jellemző **állandósult állapotai** között teremt kapcsolatot.

Vannak nem önbeálló rendszerek. Ilyenek esetén állandósult állapot lehet az is, ha egy jel vagy jellemző – az értelmezési tartományon belül – egyenletesen növekszik. A nem önbeálló rendszereknek nincs statikus karakterisztikájuk, de van jellegük. A nem önbeálló rendszer **direkt** (direct) jellegű, ha a bemenő jel növekedés az irányított jellemző növekedését okozza, és **indirekt** (reverse) jellegű, ha csökkenését okozza.

A dinamikus viselkedés az irányított jellemző fizikai értékének időbeli lefolyását írja le, amíg az irányított jellemző az egyik állandósult állapotából a másik állandósult állapotába kerül. Az átmenetet a munkapontok (állandósult állapotok) között **transziens viselkedésnek** is nevezik.

Az irányítás célja, hogy a lehető legjobb dinamikával, az előírt állandósult állapotokat kövesse (vegye fel) az irányított jellemző. Ehhez fel kell térképezni azokat a fizikai jellemzőket, amelyek hatnak az irányítani kívánt jellemzőre. Majd ezek közül kiválasztani azt, amelynek megfelelő eszközzel előírt módon változtatható az értéke, és költséghatékonyan befolyásolja az irányított jellemzőt. A kiválasztott jellemző lesz a **módosított jellemző**.

Egy konkrét irányítandó jellemző számára az irányítási stratégia két főcsoportja: a nyílt hurkú irányítás (open loop control) és a zárt hurkú irányítás (closed loop control). A magyar szakirodalom a nyílt hurkú irányítást **vezérlésnek**, a zárt hurkú irányítás pedig **szabályozásnak** nevezi.

Az irányítási struktúra kiválasztása a szakasz matematikai modelljétől függ. Ha a modellre ható jellemzők értékeinek ismeretében a modell kielégítő pontossággal megadja a valóságos berendezés irányítandó jellemzőjének értékét, akkor alkalmazható a nyílt hurkú (visszacsatolás nélküli) irányítás, vagyis a vezérlés. Fontos feltétel, hogy az irányítandó rendszerre ható nem mérhető, és/vagy nem determinisztikus fizikai jellemzők hatása elhanyagolható legyen.

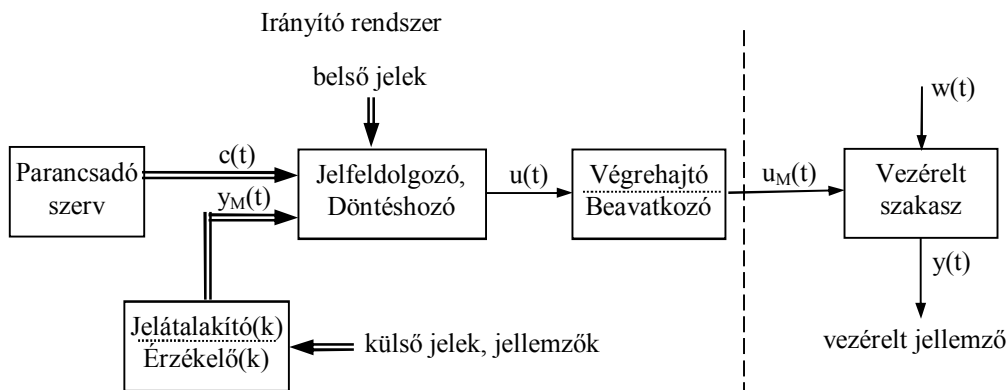
A **vezérlés** előnye, hogy strukturálisan stabil és pontos, vagyis nem lép fel irányíthatatlan jelváltozás a szakasz kimenetén, és átmenetileg sincs az előírttól eltérő értéke a kimenetnek.

A SISO vezérlés hatásvázlatát a 1.2 ábra mutatja. A SISO vezérlésben a vezérelt jellemzőt egyetlen módosító jellemző befolyásolja, és a döntéshozó algoritmus határozza meg a módosító jellemző aktuális értékét. Az összes többi mért jel a döntéshozatalhoz szükséges.

Ha a kielégítő pontosságú modell műszerezési igénye gazdaságtalanná teszi az automatizálást, vagy vannak véletlenszerű változások, akkor alkalmaznak zárt hurkú (visszacsatolt) irányítást, vagyis szabályozást.

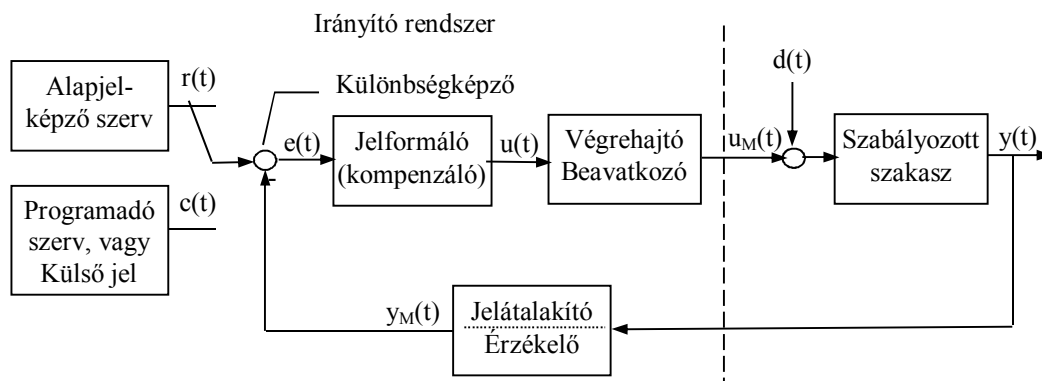
A **szabályozás** elve, hogy az irányítandó jellemzőt folyamatosan mérve, és összehasonlítva az előírt értékkel az eltérés mértéke és iránya úgy módosítja a folyamatokat, és ezáltal az irányított jellemző állapotát, hogy az eltérés mértéke csökkenjen. A

zavar jellemző, annak a hatásnak a megnevezése, amely eltéríti az irányított jellemzőt az előírt értéktől.



1.2. ábra Az egy kimenetű vezérlés szerkezeti vázlata, szervei, jelei

A szabályozás előnye, hogy nem kell az irányított jellemzőre ható összes jellemzőt mérni, és a hatásukat modellezni, és ennek megfelelően kisebb a műszerezési igény, és folytonos, folyamatos jellemzők esetén egyszerűbb az algoritmuskészítés. A szabályozás hatásvázlatát a 1.3 ábra mutatja.



1.3. ábra Az egyhurkos szabályozási kör szerkezeti vázlata, szervei, jelei

Hátránya, hogy átmenetileg eltérhet az irányítandó jellemző az előírt értéktől. Először fellép a hiba, és annak hatására korrigál a szabályozási hurok. Ugyancsak hátránya, hogy rossz méretezés vagy nagy paraméterváltozás esetén instabillá válhat. Ezért stabilitás és robusztusság vizsgálatot kell végezni.

A zavaró jellemzők támadáspontja természetesen absztrakció, hogy egy bemenetű, egy kimenetű blokkokkal lehessen leírni az irányítási rendszert. A zavaró jellemzők nem csak az 1.3. ábrán jelzett ponton támadhatják a rendszert, és hatásuk függ a támadási pont helyétől.

1. Alapfogalmak

1.1. Táblázat.: Az Automatika jegyzetben használt jelölés konvenció

Név	Jel	Angol	Kiegészítés
vezetőjel	$C - c$	command signal	
alapjel	$R - r$	reference signal	
rendelkező jel	$E - e$	error signal	
végrehajtó jel	$U - u$	control signal	
zavar jel	$D - d$	disturbance signal	
zavar jellemző	$W - w$	disturbance variable	
módosító jellemző	$U_M - u_M$	manipulated variable	
beavatkozó jel	$U_A - u_A$	action signal	
szabályozott jellemző	$Y - y$	controlled variable	
ellenőrző jel	$Y_M - y_M$	measured signal	
alapérték	$Y_D - y_D$	desired value	
érzékelő jele	$Y_S - y_S$	sensed value	
alapjel képző	G_R	reference input element	
szabályozó, kompenzáló	G_C	control task, compensator	K_C, K_I, K_D, T_I, T_D
végrehajtó	G_A	actuator	K_A
szakasz, folyamat	G_P	plant, process	$K_P,$
zavar átvitel	G_W		K_W
távadó	G_T	transmitter	K_T
hurok átviteli függvény	G_0	open loop transfer function	K, K_0
alapjel átviteli függvény	G_{yr}	closed loop transfer function	
zavarjellelemző átviteli függvény	G_{yd}		
alap-hibajel átviteli függvény	G_{er}		
zavar-hibajel átviteli függvény	G_{ed}		

Az 1.2. és az 1.3. ábrák jelölései a 1.1. Táblázat szerintiek.

1.2. A vezérlés

A vezérlés alkalmazásának feltétele a kielégítő pontosságú modell. Modellt fekete doboz (black box) és szürke doboz (grey box) elven is készíthetünk.

A **fekete doboz elv** a bemenő jel változásainak vagy jelek hatására történő kimenő jel változások alapján készít közelítő modellt. Az összetartozó bemenő, és kimenő jelváltozásokat mérésekkel határozzák meg. Ez az elv sokszor elegendő a szabályozástechnikában, de a vezérlésekhez nem alkalmazzák.

A szürke doboz elv anyag és/vagy energia áramlások fizikai törvényeinek alkalmazásával készít modellt. Minél kisebb hatásúak a fizikai egyenletekben alkalmazott elhanyagolások (például nem tekintjük pontszerűnek egy tárgy tömegét, hanem figyelembe vesszük a kiterjedését), annál pontosabb a modell. Az Automatika I. jegyzet 2.B. Mellékletében egy elektromechanikus és egy áramkör-technikai példa szemlélteti a modellalkotás menetét.

Ha az irányított jellemző és a rá ható összes jel kétállapotú, akkor az irányítási feladat megfogalmazható zárt szekvenciákban és ezek a szekvenciák felírhatók logikai állításokkal. A szekvenciák az ismert „Ha ..., akkor ..., különben ...” (If ..., then ..., else ...), „Tedd ..., amíg ...” (Do ..., until ...), stb. szintaktikájúak. A logikai állítások definiálhatók Bool algebrai függvényként, kontaktus logikával, funkció blokk diagrammal, állapot térképpel.

Mikor egy irányítási feladat konkrét vezérlő algoritmusát kell elkészíteni, akkor azt hasznos az alábbi sorrendben elvégezni:

- ◆ Pontosan definiálni kell a vezérlő berendezés be-, és kimeneteire érkező jeleket.
- ◆ Ezután szöveges leírás készül a technológiai lépések sorrendjéről és az állapotváltozások feltételeiről, valamint a vész, védelmi elvárásokról.
- ◆ Ezen információk ismeretében kell megbecsülni, hogy milyen belső változókra lehet szükség. A be-, kimeneti, és belső változók, valamint a szöveges leírás alapján készül a vezérlő program funkcióábrája.
- ◆ A funkcióábra alapján történik a programozás és célszerűen az egyes programrészek folyamatos tesztelése.
- ◆ Ezt követően tölthető le a vezérlő program és végezhető el a hardveres teszt.

A folyamat iteratív jellegű, vagyis a tesztek eredménye visszahat a funkcióábrára, rosszabb esetben az eszköz megválasztására.

1.3. Az irányítás blokkvázlata és jelfolyam ábrája

A legalsó irányítási szinten, egy konkrét irányítandó jellemző irányításához szükség van egy vagy több érzékelőre, legalább egy beavatkozóra, és egy döntéshozó egységre. Ezek kapcsolatát a hatáslánc írja le. A **hatáslánc** az egymást követő szerkezeti egységek és az őket összekötő jelek sorozata.

A hatáslánc szokásos leírási módjai:

- ♦ **szerkezeti vázlat** az irányítási rendszer vázlatos vagy jelképes szerkezeti ábrázolása, az irányítási szempontból lényeges részekkel (a szervek, készülékek feltüntetésével), általában az adott szakterület (pl. vegyipar, erőművek) szabványos jelöléseivel.
- ♦ **működési vázlat** a hatásláncban a szerkezeti részek irányítástechnikai funkcióját emeli ki. A szerveket, készülékeket téglalapok (a funkció beírt nevével) jelképezik. A jelek, jellemzők útját hatásvonalak (a jel ráírt szimbólumával) mutatják. Az ok-okozati összefüggést, azaz az információáramlás irányát (hatásirány) a vonalra rajzolt nyíllal ábrázolják.
- ♦ **hatásvázlat** a működési vázlat elvonatkoztatott megjelenítési módja. A hatásvázlat a jelek, jellemzők közötti matematikai összefüggést írja le. A hatásvázlat lehet blokkvázlat vagy jelfolyam ábra formátumú.

A blokkvázlat

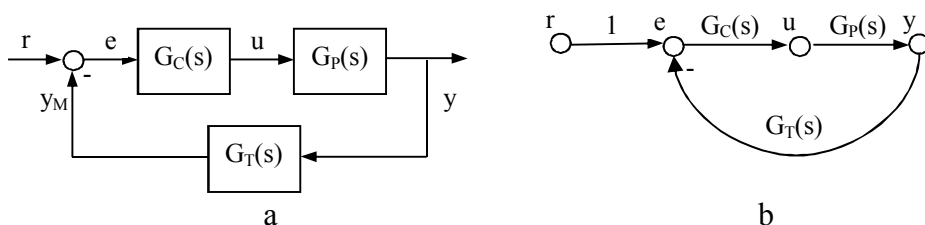
Az automatizálási feladatok leírásának egyik módja, hogy a jelek közötti matematikai egyenlettel definiált kapcsolatot téglalap alakú **blokk** reprezentálja. Minden blokknak egy bemenete és egy kimenete van. A blokkok között levő kapcsolatot a hatásvonal írja le. A hatásvonalra írt szimbólumok az irányítási rendszer jelei, jellemzői. A hatásirányt a hatásvonalra tett nyílhegy mutatja.

Ha több jel hat egy blokkra, akkor kör alakú összegző (esetleg szorzó) taggal egyesítik a jeleket. Az összegző tagba befutó nyílakra helyezett előjel mutatja, hogy az adott jelet hozzáadni vagy kivonni kell. Ha egy jel több blokkra hat, akkor hatásvonal elágazást alkalmaznak.

A hatásvázlat blokkjaiba a dinamikus viselkedést leíró függvényt, vagy a statikus (állandósult állapotbeli) karakterisztikát szokás beírni. A blokkvázlat valamely blokkja szintén lehet egy komplett irányítási rendszer. Más szavakkal az irányítási rendszer blokkokkal történő leírása egymásba ágyazott.

A jelfolyam ábra

A jelfolyam ábra egy gráf, amelyben a rendszer jelei, jellemzői a gráf egy-egy csomópontja. A jelek, jellemzők közötti kapcsolatot reprezentáló függvények a gráf egy-egy éle. Az 1.4.a ábrán egy szabályozási kör blokkvázlata látható. Az 1.4.b. ábra, az 1.4.a. ábrán látható blokkvázlatnak megfelelő jelfolyam ábrát mutatja.



1.4. ábra. A blokkvázlat és a jelfolyam ábra jelképi jelölései.

A klasszikus szabályozás elmélet és a modern szabályozás elmélet matematikai háttere egyaránt több száz évesek.

A klasszikus szabályozáselmélet legelterjedtebb módszerei a körfrekvencia függvényeken, és így a komplex algebrán alapszanak. A klasszikus szabályozáselmélet a blokkvázlatot alkalmazza, ami szemléletes leírási mód, mivel az egyes blokkok fizikailag megfogható eszközökhöz és a hatásvonalakra írt szimbólumok közvetlenül mérhető jelekhez, jellemzőkhöz köthetők. Az egyik előnye, hogy a módszerei alkalmassak a méréssel meghatározható fekete modell alkalmazására. Másik előnye, hogy a SISO egy bemenetű egy kimenetű egyszerűbb esetek - kis fáradsággal - papír-ceruza módszerrel is megoldhatók, és hogy számos gyakorlati fogás, ajánlás halmozódott fel. A számítógép megjelenése még könnyebbé, pontosabbá tette a módszereket, valamint lehetővé vált addig csak nagy fáradsággal alkalmazható módszer (pl.: gyökhely görbe) könnyű alkalmazása.

A modern szabályozás elmélet az állapotterez leírási módot alkalmazza, és így matematikai háttere a mátrix algebra. A modern szabályozáselmélet matematikai tárgyalásmódjához sokkal jobban illeszkedik a jelfolyam ábra, mint a hatásvázlat. Hátránya, hogy kevésbé szemléletes, mert az állapotváltozók lehetnek virtuálisak (pl.: több fizikai jellemző súlyozott kombinációja) vagy számított (pl.: második derivált), és hogy a papír-ceruza módszer egyszerűbb esetekben is nagy fáradsággal alkalmazható. E hátrányok miatt a számítógép megjelenése tette lehetővé az elterjedt alkalmazását. Előnye, hogy a MIMO több bemenetű, több kimenetű csatolt szabályozások jóval könnyebben, az adaptív (Öntanuló) és számos költség-optimalizált szabályozás csak így oldható meg.

1.4. Az egységes, csak időfüggő jeltartomány kialakítása

A valóságos fizikai rendszerekben a jellemzőknek van dimenziójuk. Az ipari mérés technikában a villamos mennyiségeken (áram [A], feszültség [V], frekvencia [Hz]) túl, a nagy ötöst (hőmérséklet [$^{\circ}\text{C}$], nyomás [bar], szint [m], áramlás [$\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$] vagy [$\frac{\text{m}^3}{\text{sec}}$], és a forgó mozgáshoz tartozó szögsebesség [$\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$] vagy szögelfordulás [rad]) a leggyakrabban mért fizikai jellemző. De egyéb fizikai jellemző (pl.: pH érték) is előfordulhat.

A jeltartományok is jelentősen különbözhetnek. Például teremhőmérséklet szabályozásakor $5^{\circ}\text{C} - 35^{\circ}\text{C}$, hőkezelő kemence hőmérséklet szabályozásakor $200^{\circ}\text{C} - 650^{\circ}\text{C}$ között lehet az irányított jellemző értelmezési tartománya, vagy egy sávszűrő működhet a [MHz] vagy a [GHz] tartományban.

Nagyban segíti az irányítási rendszerek egységes tárgyalását, ha a hatásvázlatban (blokkdiagramban vagy jelfolyam ábrában) a jelek, jellemzők dimenzió nélküliek, és azonos jelkészletűek.

Bármelyik jel, csak az időtől függő, $\{0 - 1\}$ számtartománybeli számmá konvertálható az 1.1. kifejezéssel:

$$x(t) = \frac{x(t)[\text{dim}] - x_{\min}[\text{dim}]}{x_{\max}[\text{dim}] - x_{\min}[\text{dim}]} \quad <1.1.>$$

Az 1.1. kifejezéssel dimenzió nélkülivé tett jellemző értékekkel végzett számítások eredményét – ami egy számérték – értelmezni kell, vagyis az 1.2. kifejezéssel ismét dimenziót kell rendelni hozzá.

$$x(t)[\text{dim}] = (x_{\max}[\text{dim}] - x_{\min}[\text{dim}]) \cdot x(t) + x_{\min}[\text{dim}] \quad <1.2.>$$

A $\{0 - 1\}$ számtartománybeli szám használata nem komfortos, ezért szokás az M (10, 100, esetleg egyéb) értékével beszorozni (1.1. kifejezés).

$$x(t) = \frac{x(t)[\text{dim}] - x_{\min}[\text{dim}]}{x_{\max}[\text{dim}] - x_{\min}[\text{dim}]} \cdot M \quad <1.3.>$$

Megjegyzés: Az ipari irányítástechnikában az $M=100$ gyakran alkalmazott, mert sokszor jobban értelmezhető, hogy a tartály 60%-ra van feltöltve, a szelep 45%-osan nyitott, mint egy konkrét számérték. De természetesen az adott feladatnak megfelelően célszerű „ M ” értékét megválasztani.

Példa feladat: Egy szoba termosztát forgatógombja $\{0 - 10\}$ V_{DC} jelet szolgáltat, amivel $\{5 - 35\}$ °C közötti szobahőmérsékletet akarunk előírni.

A hőmérséklet távadónak 5 [°C] és ennél alacsonyabb hőmérsékletnél 0 [V_{DC}] értéket, illetve 35 [°C] és ennél magasabb hőmérsékletnél 10 [V_{DC}] értéket kell szolgáltatnia. Bár nem kötelező, ebben az esetben célszerű az M értékét 10-re választani.

Behelyettesítve az 1.3. kifejezésbe a hőmérséklet határokat és $M=10$ alkalmazva dimenzió nélküli $\{0 - 10\}$ számtartományú jeleket kapunk. A dinamikus és az állandósult állapot vizsgálatát elvégezhetjük, mintha a vizsgált jellemző 0 és 10 közötti dimenzió nélküli szám lenne.

Ha ezután valamely számítás eredményeként a hőmérséklet értéke a t_1 időpontban például 6, és az 1.2. kifejezésbe visszahelyettesítéskor figyelembe vesszük, hogy $M=10$, akkor megkapjuk az aktuális hőmérséklet értéket.

$$x(t)[^{\circ}\text{C}] = \{x_{\max}[^{\circ}\text{C}] - x_{\min}[^{\circ}\text{C}]\} \frac{x(t_1)}{M} + x_{\min}[^{\circ}\text{C}] = 30[^{\circ}\text{C}] \cdot \frac{6}{10} + 5[^{\circ}\text{C}] = 23[^{\circ}\text{C}]$$

A mintafeladatban az aktuális hőmérséklet 23 °C értékűre adódik.

1.5. Az irányítási stratégiák osztályozása

Vezérlés:

A jelfeldolgozó egység segédenergiája szerint, a vezérlés lehet mechanikus, pneumatikus, hidraulikus, elektronikus, és programozható elektronikus. Napjainkban a vezérlések döntő hányadában a programozható elektronikus, más szavakkal mikroprocesszor alapú a jelfeldolgozó egység.

A vezérlések csoportosítása a rendelkező jel előállításától függően.

- I. **Követő** vezérlés esetében a rendelkező jelet érzékelő szervek állítják elő. Az érzékelt jelek származhatnak a vezérelt folyamatból, berendezésből és külső egységekből.
- II. **Menetrendi** vezérlés esetében a vezető jel meghatározott terv vagy feltételek szerint jön létre. (Miután a korszerű mikroprocesszor alapú irányító berendezésekben a parancsadó szerv, és a jelfeldolgozó egyaránt egy-egy program, az alábbi csoportosítás a vezérlő program szerkezetének kialakítása szempontjából fontos.)
 1. **Időterv** vezérlés esetén a rendelkező jel előre meghatározott időterv szerint változik.
 2. **Lefutó** vezérlés esetén a rendelkező jelet a vezérelt berendezés belső állapotai, változásai és külső események határozzák meg.
 - a. **Sorrendi** vezérlésnél a vezérlő készülék kimeneti jeleit egyrészt a vezérlési lánc előírt állapotsorrendje, másrészt a bemeneti jelek kombinációi együtt határozzák meg.
 - b. **Feltétel**-vezérlésnél a vezérlő készülék valamennyi bemeneti jel-kombinációjához meg kell határozni a kimenőjelek kombinációját.

Szabályozás:

A jelformáló egység segédenergiája szerint, a szabályozás lehet mechanikus, pneumatikus, hidraulikus, és villamos. Napjainkban a szabályozások döntő hányada villamos szabályozás, és ezen belül is a mikroprocesszor alapú az irányító berendezés a legelterjedtebb. Ezekben a parancsadó, különbségképző, jelformáló (kompenzáló) funkciókat programok valósítják meg.

A szabályozások feladatuk szerint csoportosítva lehetnek:

- I. **Értéktartó** szabályozások, amikor a szabályozott jellemző értékét kell állandó értéken tartani
- II. **Követő** szabályozások, amikor a szabályozott jellemző az időben változó értékű vezető jel változásait követi.

A szabályozások a jelek, jellemzők időbeli lefolyása szerint lehet:

- I. **Folyamatos** szabályozások, amikor a jelek, jellemzők az időben folytonos függvénnyel írhatók le.
- II. **Mintavételezett** szabályozások, amikor a jelek csak a mintavételezési időpontokban változnak, és az értékkészletük kvantált. A fizikai jellemzők természetesen továbbra is folytonos függvénnyel írhatók le.

A szabályozások a jelek, jellemzők értékkészlete szerint lehet:

- I. **Folytonos** szabályozások, amikor az összes jel, jellemző értékkészlete folytonos számtartomány.
- II. **Állásos** szabályozások, amikor van olyan jel, jellemző, amelynek értékkészlete véges.

A kompenzáló tag algoritmusai szerint:

- I. **Klasszikus** (PID) szabályozások, amelyben párhuzamos arányos integráló, és differenciáló hatások végzik a kompenzálást.
- II. **Analitikus** szabályozások, amelyben előírt válaszfüggvényhez keresik az azt megvalósító kompenzálást.
- III. **Optimáló** (valamely célfüggvény szerint) szabályozások, amikor definiált költségfüggvényre van méretezve a kompenzáló tag.
- IV. **Állapot** szabályozások, amelyben a szabályozandó rendszer állapot változóit méri, vagy identifikálja a kompenzáló tag, és a szabályozási algoritmus a szabályozandó rendszer állapot változói módosítja. Többváltozós rendszerek esetén különösen előnyös az alkalmazása.
- V. **Adaptív** (öntanuló) szabályozások, amikor a kompenzáló tag folyamatosan illeszti magát az irányítandó szakasz paramétereire. Változó paraméterű irányított szakasz esetén célszerű.

2. Jelátvivő tagok

A **jelátviteli tag** (block, element) két jel vagy jellemző közötti függvénykapcsolat. A függvénykapcsolatot egy téglalap alakú szimbólumba írják.

Ha a bemeneti jel állandó értékéhez – elegendő idő eltelte után – a kimeneti jel egy állandósult értéke rendelhető, akkor a jelátviteli tag önbeálló (self-adjustment). Ha a jelátvivő tag önbeálló, akkor a téglalap alakú szimbólumban megadható a statikus – az állandósult bemeneti és kimeneti állapotokat összerendelő – karakterisztika (Steady-state characteristics).

A bemeneti jel időtartománybeli változásának hatására történő kimeneti jelváltozás a dinamikus viselkedést. A dinamikus viselkedést az időtartományban differenciál egyenlettel (differential equation), a körfrekvencia tartományban átviteli függvénnyel (transfer function) szokás jellemezni.

Ha jelátviteli tag értelmezési tartományán belül tetszőleges bemeneti jelre igaz, hogy tetszőlegesen részösszetevőkre bontva, a részösszetevőkre adott kimeneti jelválaszok összege megegyezik az eredeti bemeneti jelre adott jelválasszal, akkor a jelátviteli tagra érvényes a **szuperpozíció**. A szuperpozíció elve matematikailag:

Legyen

$$x_{ki0}(t) = f_0\{x_{be0}(t)\}, \quad x_{be0}(t) = x_{be1}(t) + x_{be2}(t), \text{ és} \\ x_{ki1}(t) = f_1\{x_{be1}(t)\}, \text{ valamint } x_{ki2}(t) = f_2\{x_{be2}(t)\}.$$

Ha igaz, hogy

$$x_{ki0}(t) = x_{ki1}(t) + x_{ki2}(t),$$

akkor érvényes a szuperpozíció.

Ha a jelátviteli tagra érvényes a szuperpozíció, akkor a jelátvivő tag dinamikus viselkedését **lineáris, állandó együtthatós** differenciálegyenlet írja le. A **klasszikus és a modern szabályozás elmélet** legtöbb tétele lineáris, idő invariáns szakasz modellre vonatkozik. Általános megoldási szabályokat, csak a lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldására dolgoztak ki, ezért a gyakorlatban minden problémát így kezelnek erre visszavezetni.

A klasszikus szabályozás elméletben kidolgoztak eljárásokat a nem lineáris összetevő lineáris taggá alakítására (pl.: legnagyobb felharmonikussal történő helyettesítés), de ezek pontossága, és így használhatósága erősen korlátozott. A modern szabályozás elmélet módszerei jól illeszkednek a számítógépes szimulációkhoz. A szimulációs modellekbe viszonylag egyszerű figyelembe venni a nem linearitásokat.

Nagy teljesítményű számítógépekkel, számos szimulációt végrehajtva, kielégítő pontosságú modell készíthető a valóságos rendszerről és vizsgálható a paraméterváltozások hatása. Az analitikus modellekre azért van szükség, hogy előre megjósolható legyen a paramétermódosítások hatása. A szimuláció a precíz méretezésben segít.

2.1. A körfrekvencia-, és az időtartomány kapcsolata

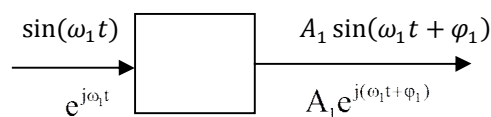
Az Euler szabály alapján – a szinuszos jelekkel történő számolásakor a 2.1. kifejezés szerint – át lehet térni komplex körfrekvenciára.

$$A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow A \{ \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi) \} = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad <2.1.>$$

A komplex körfrekvencia matematikai absztrakció. Amennyiben csak lineáris matematikai műveleteket hajtanak végre a komplex körfrekvencia tartománybeli jeleken, akkor torzulásmentesen kinyerhető a valóságos fizikai jel.

Megjegyzés: Lineáris matematikai műveletek: az integrálás, a differenciálás, a konstanssal szorzás, osztás, valamint az azonos argumentumú függvények összeadása, kivonása.

A lineáris jelátviteli tagra igaz, hogy ha a bemenetét $x_{be}(t) = \sin \omega_1 t$ egységnyi amplitúdójú, ω_1 körfrekvenciájú, nulla fázistolású szinuszos vizsgáló jellel gerjesztjük, akkor $x_{ki}(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ válasz mérhető a kimenetén.



2.1. ábra Frekvencia átvitel

A ki-, és a bemeneti jel komplex körfrekvenciájának hányadosa egy komplex-szám, ami az ω_1 körfrekvenciához tartozó A_1 amplitúdó átvitelt és φ_1 fázistolást egyaránt tartalmazza (2.1. ábra).

$$\frac{A_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)}}{e^{j\omega_1 t}} = A_1 e^{j\varphi_1} = G(j\omega_1) \quad <2.2.>$$

A mérés tetszőleges ω értékkel elvégezhető, és így minden ω értékhez meghatározható az amplitúdó átvitel, és a fázistolás, vagyis két számmal jellemezhető, hogy egy jelátvivő tag az adott körfrekvencián hogyan viselkedik.

Lineáris jelátviteli tag esetén a bemeneti jel – adott körfrekvencián – ugyanolyan körfrekvenciájú kimeneti jelet gerjeszt. Az állítás tetszőleges körfrekvenciára igaz, és így a $G(j\omega)$ átviteli függvény a bemeneti jeltől függetlenül jellemzi a jelátviteli tagot. Felírhatók a $G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ és a $x_{ki}(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \cdot x_{be}(\omega) e^{j\omega t}$ összefüggések, és ebből a $x_{ki}(j\omega) = A(\omega) \cdot x_{be}(\omega) \cdot e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}$ kifejezés.

Az LTI jelátviteli tag körfrekvencia átviteli függvénye a bemenő és a kimenő jelek komplex körfrekvencia függvényeinek hányadosa (2.3. kifejezés).

$$G(j\omega) = \frac{x_{ki}(j\omega)}{x_{be}(j\omega)} \quad <2.3.>$$

A $G(j\omega)$ **körfrekvencia átviteli függvény** (frequency response) azt mutatja, hogy adott körfrekvenciájú és adott amplitúdójú, nulla fázistolású szinuszos bemeneti jel ha-

tására a kimeneten ugyanazon a körfrekvencián mekkora amplitúdójú és fázistolású szinuszos jel jelenik meg. Az ω körfrekvencia függvényében külön-külön is vizsgálható az amplitúdó átvitel, és a fázistolás (2.4. kifejezések).

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \text{ ahol } A(\omega) = |G(j\omega)| \text{ és } \varphi(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)} \quad <2.4.>$$

A jelátvivő tag vizsgálatokor a gerjesztő körfrekvenciát alap harmonikus körfrekvenciának, az egészszámú többszöröseit felharmonikusnak nevezik. Ha a jelátvivő tag nem lineáris, akkor adott körfrekvenciájú bemeneti gerjesztés esetén a kimeneti jelben felharmonikus összetevők jelennek meg. Ha a felharmonikus összetevők amplitúdója – a megengedett hibahatáron belül – elhanyagolható az alap harmonikus amplitúdójához képest, akkor a mérnöki gyakorlatban a jelátvivő tag lineárisnak tekinthető.

Megjegyzés: Ha egy jelátviteli tag az időtartományban lineáris, állandó együttműködés differenciál egyenlettel modellezhető, akkor a körfrekvencia tartománybeli átviteli függvénye is lineáris, állandó együttműködésű.

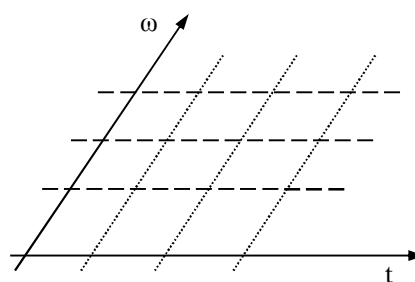
A $G(j\omega)$ komplex körfrekvencia átviteli függvény meghatározása történhet a berendezés, készülék, vagy szerv egyes részegységeinek működését leíró fizikai, kémiai stb. egyenletek felhasználásával (szürke doboz modell) vagy méréssel (fekete doboz modell). A 2B Mellékletben a szürke doboz modell, a 2C Mellékletben a fekete doboz modell készítésére vannak példák.

Ha adva van egy komplex körfrekvencia tartománybeli jel, akkor egy adott ω_1 körfrekvencián ez egy $a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ szinuszos jelösszetevőt ad az időtartományban. Több jelösszetevő összege egy periodikus időfüggvény az időtartományban. Logikailag kézenfekvő, hogy végtelen sok jelösszetevő összege is valamilyen időfüggvényt ad az időtartományban, vagyis minden jelnek van körfrekvencia, és időtartománybeli megjelenési formája. Ha az $f(\omega, t)$ függvény két változó függvényében is vizsgálható, akkor ez egy felületet fog meghatározni az $\{\omega, t\}$ sík felett. A 2.2. ábrán csak az $\{\omega, t\}$ sík látható, a sík feletti felületet nem ábrázoltuk.

A 2.2. ábrán az $\{\omega, t\}$ síkra merőleges, a t tengellyel párhuzamos síkok (szaggatott vonalak) az ω_k körfrekvenciákon metszik az $x(\omega, t)$ függvény felületét. Minden ω_k körfrekvenciához ($k=1, 2, \dots$) tartozik az idő „ t ” függvényében egy $a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ szinuszos jelösszetevő.

Ha ezeket a szinuszos jelösszetevőket összeadjuk (folytonos függvény esetén az ω tengely mentén integráljuk), akkor kapunk egy eredő időfüggvényt.

Az $\{\omega, t\}$ síkra merőleges, és az ω tengellyel párhuzamos síkok (pontosított vonal) a t_k időpontokban metszik a $f(\omega, t)$ függvény felületét. Adott ω_i értékekhez, az ω



2.2. ábra Az ω, t sík

tengely ω_i pontjából húzott vektor hossza a t_k időponthoz tartozó amplitúdó, és a vektor szöge a síkkal a t_k időponthoz tartozó fázistolás.

Ha ezeket az amplitúdó összetevőket összeadjuk (folytonos függvény esetén az t tengely mentén integráljuk), akkor az adott ω_i értékhez tartozó amplitúdó átvitelt és fázistolást kapjuk. A szóbeli okfejtésből következik, hogy egy adott jel komplex körfrekvencia függvénye és az időfüggvénye közötti kapcsolat fizikailag biztosan létezik.

A szavakkal elmondott kapcsolatot matematikailag zárt alakban a **Fourier** transzformációk írják le.

Megjegyzés: A Fourier transzformáció elvégezhetőségéhez be kellett vezetni a negatív körfrekvencia értelmezését. Bár ez matematikai fikció, az átviteli függvénybe írt negatív körfrekvencia értékekhez tartozik amplitúdó átvitel és fázistolás.

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = x(j\omega) \quad <2.5.a.>$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{x(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = x(t) \quad <2.5.b.>$$

Gondot jelent, hogy ismerni kell a vizsgálat kezdete előtti időbeli változást, és hogy a 2.5.a. kifejezés biztosan csak akkor oldható meg, ha kikötjük, hogy az $x(t)$ abszolút integrálható (2.6. kifejezés).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \leq M, \text{ ahol } M \text{ véges szám} \quad <2.6.>$$

Ezek nagyon kemény elvárások. Például az abszolút integrálhatóság feltételének csak az impulzus jel (Ennek matematikai absztrakciója a $\delta(t)$ Dirac delta) és a fehérzaj felel meg. Ezért az automatizálásban a Laplace transzformációt használata az elterjedtebb.

A Laplace transzformáció abban tér el a Fourier transzformációtól, hogy az időfüggvényeket – a 2.7. kifejezés szerint átalakítva – abszolút integrálhatóvá teszi.

$$\rho(t) = 1(t) \cdot f(t) \cdot e^{-\alpha t} \quad <2.7.>$$

A 2.3. ábrán látszik, hogy az átalakított $\rho(t)$ függvény $t < 0$ értékeinél 0 értékű, vagyis elvesztette az eredeti jelkészletét a negatív időtartományban. Ez nem gond, ha a jelátvivő tag vizsgálatát nyugalmi (állandósult állapotbeli) helyzetből indítjuk, és csak a kiindulási értékekhez képesti változások dinamikáját vizsgáljuk. Ezen feltételek mellett a jelátvivő tag bemenete és kimenete úgynevezett belépő függvény.

Az is látszik a 2.3. ábrán, hogy az átalakított $\rho(t)$ függvény amplitúdója tart a 0 értékhez $t \geq 0$ értékeinél, vagyis teljesülni fog az abszolút integrálhatóság feltétele.

Megjegyzés: Két azonos argumentumú függvény szorzata nem lineáris matematikai művelet. A 2.8. kifejezés azért maradhat a lineáris műveletek között, mert az e^t olyan speciális függvény, amelynek az integrálja és a differenciálja önmaga, és az $1(t)$ nem valódi szorzat, hanem értékkészlet csonkítás.

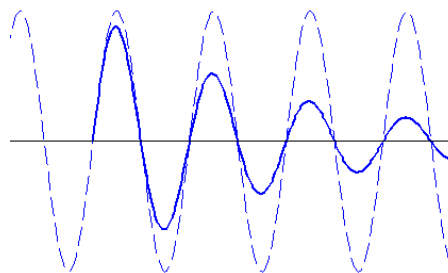
Behelyettesítve a 2.5.a kifejezésbe a $p(t)$ függvényt, az e-adós tagokat össze lehet vonni, be lehet vezetni az **s operátort** $s = \alpha + j\omega$ (2.8.a. kifejezés).

Az s operátor ugyanúgy matematikai absztrakció, mint a komplex körfrekvencia.

Az s **operátor** fogalmának bevezetésével és behelyettesítésével a Fourier transzformáció egyenleteibe, a kapott oda-vissza transzformációs szabályokat (2.8. kifejezések) nevezik **Laplace transzformációnak**.

A Laplace transzformáció egy konkrét jel operátoros tartomány és az időtartománybeli alakjai között teremt kapcsolatot és bármely $x(t)$ függvényre elvégezhető.

A Laplace transzformáció, de az időfüggvényeket belépő függvényé alakítja át, vagyis a negatív t tartomány jelkészlete elvész.



2.3. ábra Az $f(t)$ és a $p(t)$ függvény

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t)x(t)e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t)x(t)e^{-st} dt = x(s) \quad <2.8.a>$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\omega}^{\alpha+j\omega} x(s)e^{t-s} ds = x(t) \quad <2.8.b>$$

Megjegyzés: A Laplace transzformáció elvégzésének nem feltétele, hogy a függvény kezdeti értéke $x(0)$ nulla legyen. Ilyenkor az $x(t)$ jelet $x(+0)+w(t)$ alakra bontva végezhető el.

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t)w(t)e^{-st} dt = x(+0)+w(s) \quad <2.9.>$$

Miután az $x(+0)$ csak a $t=0$ pontban vesz fel értéket az integrálja önmaga. A konstans tag figyelembe vétele papír-ceruza módszer esetén többlet fáradtságot okoz, de más hatása nincs.

A mérnöki gyakorlatban az átlépést az operátoros tartományból az időtartományba, illetve az időtartományból az operátoros tartományba nagyon megkönnyíti néhány szabály ismerete. A 2.1 táblázat nem tartalmazza az összes szabályt, de a jegyzet a továbbiakban csak ezeket alkalmazza.

2.1. táblázat. A Laplace transzformáció néhány szabálya

	Idő függvény	Laplace transzformált
konstanssal való szorzás	$c \cdot x(t)$	$c \cdot x(s)$
összeadás,	$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$	$c_1 \cdot x_1(s) + c_2 \cdot x_2(s)$
integrálás	$\int x(t)dt$	$\frac{1}{s} x(s)$
első fokú differenciálás	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sx(s) - x(t)_{t=0}$
n-ed fokú differenciálás	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n x(s) - (s^{n-1} - \dots - s - 1)x(t)_{t=0}$
jelkésleltetés	$l(t - \tau) \cdot x(t - \tau)$	$e^{-s\tau} x(s)$
léptékváltás	$x(c \cdot t), c > 0$	$\frac{1}{c} x\left(\frac{s}{c}\right)$

A 2.1. táblázat alkalmazásával minden LTI differenciálegyenlet egyszerűen transzformálható. Legyen például:

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n x_{ki}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{ki}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_{ki}(t)}{dt} + a_0 x_{ki}(t) = \\
 = b_m \frac{d^m x_{be}(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_{be}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_{be}(t)}{dt} + b_0 x_{be}(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.10.}$$

Ha az $x_{be}(t)$, és az $x_{ki}(t)$ jel belépő függvény ($x_{be}(t)_{t=0} = x_{ki}(t)_{t=0} = 0$), akkor a 2.1. táblázat alkalmazásával tagonként elvégezve az operátoros tartományra váltást:

$$\begin{aligned}
 a_n s^n x_{ki}(s) + a_{n-1} s^{n-1} x_{ki}(s) + \dots + a_1 s x_{ki}(s) + a_0 x_{ki}(s) = \\
 = b_m s^m x_{be}(s) + b_{m-1} s^{m-1} x_{be}(s) + \dots + b_1 s x_{be}(s) + b_0 x_{be}(s)
 \end{aligned}
 \tag{2.11.}$$

A 2.11. kifejezésből kiemelhető $x_{be}(s)$ és $x_{ki}(s)$. Ezután a 2.12. kifejezésre rendezve látható, hogy az operátoros tartományban az LTI jelátviteli tagot a bemenőjeltől függetlenül jellemzi a $G(s)$ **átviteli függvény**:

$$\frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}
 \tag{2.12.}$$

A 2.12. kifejezés az operátoros átviteli függvény polinom-tört alakja. Ha meghatározzuk a számláló gyökeket (zérusok) és a nevező gyökeket (pólusok), akkor úgyne-

vezett pólus-zérus alakra hozható a $G(s)$ átviteli függvény. A 2.13. kifejezésben a zérusok és a pólusok között lehetnek konjugált komplex gyökpárok is.

$$G(s) = \frac{b_m (s + z_m)(s + z_{m-1}) \cdots (s + z_1)}{a_n (s + p_n)(s + p_{n-1}) \cdots (s + p_{1m})} \quad <2.13.>$$

Megjegyzés: Látható, hogy a gyöktényezős alak K_{zp} és a Bode alak K_p erősítése nem azonos. A mért idő-, illetve frekvenciatartománybeli függvényekről mindig a K_p erősítés olvasható le.

A klasszikus szabályozás elméletben a papír-ceruza módszerek alkalmazását segítette a Bode alak.

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{z_m z_{m-1} \cdots z_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_1} \frac{(\frac{1}{z_m} s + 1)(\frac{1}{z_{m-1}} s + 1) \cdots (\frac{1}{z_1} s + 1)}{(\frac{1}{p_n} s + p_n)(\frac{1}{p_{n-1}} s + p_{n-1}) \cdots (\frac{1}{p_1} s + p_{1m})} \quad <2.14.>$$

Az átviteli függvények gyökeinek (pólusainak és zérusainak) abszolút értékének reciprok értéke az átviteli függvény időállandói.

Megjegyzés: Ha az átviteli függvénynek vannak konjugált komplex gyökei is, akkor azokra nem lehet a 2.14. kifejezést alkalmazni.

Ilyenkor a konjugált komplex gyökpárt először össze kell szorozni, majd úgy kiemelni a konstans tagot. Például legyen p_k és p_{k+1} konjugált komplex gyökpár. A szorzat $s^2 + (p_k + p_{k+1})s + p_k p_{k+1}$. Kiemelve a konstans $p_k p_{k+1}$ szorzatot, együttható összehasonlítással kapjuk az ismert $T^2 s^2 + 2DTs + 1$ alakot.

Kifejtési tételek

Az inverz Laplace transzformáció a 2.8.b kifejezéssel meglehetősen nehézkes, ezért az $x_{ki}(s)$ válaszjel időtartománybeli alakját a 2.8.b kifejezés helyett a kifejtési tételek alkalmazásával határozzák meg.

Ha $x_{ki}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{d_m s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \cdots + d_1 s + d_0}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0}$ átviteli függvény $N(s)$ számláló polinomjának gyökei z_j és a $D(s)$ nevező polinomjának gyökei p_i , ahol $j = 0, 1, \dots, m$, valamint $i = 0, 1, \dots, n$, akkor a $t \geq 0$ időtartományban és $p_i \neq 0$ feltétel esetén az $x_{ki}(t)$ időfüggvény a 2.15 kifejezés szerint határozható meg:

$$\text{Ha } x_{ki}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \text{ és } p_i \neq 0, \text{ akkor } x_{ki}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)}{\frac{d}{ds} D(p_i)} e^{p_i t} \quad <2.15.a.>$$

Ha az átviteli függvénynek csak első rendű pólusai vannak, és gyöktényezős formában adott, akkor kényelmesebb az alábbi kifejezés használata:

$$\text{Ha } x_{ki}(s) = K_{zp} \frac{(s - z_m) \dots (s - z_1)}{(s - p_n) \dots (s - p_1)}, \text{ akkor } x_{ki}(t) = \sum_{i=1}^n \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \frac{N(p_i)}{D(p_i)} e^{p_i t} \quad <2.15.b.>$$

Abban az esetben, ha egy, de csak egy pólus nulla, akkor az $x_{ki}(t)$ időfüggvény kiszámításának módja a 2.16 kifejezés alapján történhet:

$$\text{Ha } x_{ki}(s) = \frac{N(s)}{sD_0(s)}, \text{ akkor } x_{ki}(t) = \frac{N(0)}{D_0(0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{N(p_i)}{p_i \frac{d}{ds} D_0(p_i)} e^{p_i t} \quad <2.16.>$$

A 2.15 és a 2.16 kifejezéseket hívják kifejtési tételeknek. A kifejezések kiszámítása mindig elvégezhető, és rutinszerű. Problémát a p_i pólusok meghatározása okoz. Negyed és magasabb rendű polinom gyökeinek meghatározására csak numerikus eljárások vannak.

Részlettrétekre bontás

Az inverz Laplace transzformáció végrehajtásának másik elterjedt módja, hogy az átviteli függvényt gyöktényezős alakra hozzák, majd a nevező p_i gyökei alapján, részlettrétekre (alaptagok összegére) bontják. Ezután a jelátviteli alaptag inverz transzformáltját táblázatból ismerve a részlettrétek külön-külön megoldhatók. (A p_i pólusok meghatározása úgyszintén problémát okoz.)

Ha ismertek a p_i gyökök és egyszeresek, akkor alkalmazható a következő

$$\text{egyenletek: } x_{ki}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}, \text{ ahol } k_i = \left. \frac{N(s)}{\frac{dD(s)}{ds}} \right|_{s=p_i} \quad <2.17.>$$

A MATLAB, és a többi hasonló matematikai program a polinom gyökök vagy az átviteli függvény pólusok meghatározását, illetve az inverz transzformálást kész parancsokkal segítik. A számítógépek, és a matematikai programok széleskörű elterjedésével a pólusok meghatározásának problémája megoldódott.

Határérték tételek

Ha csak a kezdeti és a végérték meghatározására van szükség, akkor alkalmazhatók az alábbi határérték tételek:

$$\text{a kezdeti érték meghatározása} \quad \lim_{t \rightarrow +0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s x(s) \quad <2.18.a.>$$

2. Jelátvivő tag

a végérték meghatározása

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

<2.18.b.>

A mérnöki gyakorlatban nagy segítség az $x_{ki}(s) = G(s)x_{be}(s)$ válaszjel időtartománybeli alakjának a meghatározásához, hogy számos $x_{be}(s)$ gerjesztő jel Laplace transzformáltja táblázatosan rendelkezésre áll. A leggyakoribb gerjesztő jelek időfüggvényét, és operátoros alakját tartalmazza a 2.2. táblázat

2.2. táblázat. Néhány gerjesztő jel Laplace transzformáltja

egységimpulzus határértéke (Dirac delta)	$\delta(t)$	1
egységugrás	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
egység sebességugrás	$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
egység gyorsulásugrás	$\frac{t^2}{2} 1(t)$	$\frac{1}{s^3}$
késleltetett egységimpulzus	$\delta(t - T_d)$	e^{-sT_d}
késleltetett egységugrás	$1(t - T_d)$	$\frac{1}{s} e^{-sT_d}$
szinusz jel	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
koszinusz jel	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

2.2. Vizsgáló jelek és válaszfüggvényeik

A lineáris, állandó együtthatós jelátviteli tagokra érvényes a szuperpozíció, és így elegendő néhány könnyen előállítható, jól definiálható jelet alkalmazni az LTI jelátviteli tagok vizsgálatára.

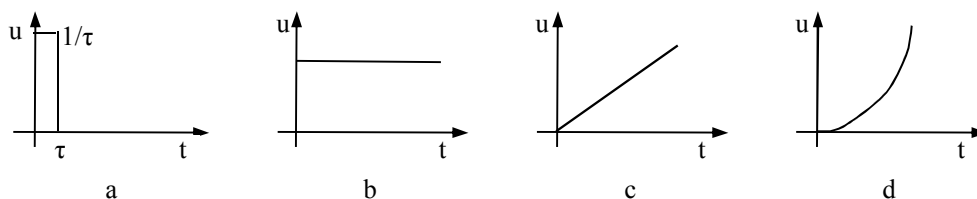
A legfontosabb vizsgáló jel az állandó amplitúdójú, nulla fázistolású szinuszos jel. Ha képesek vagyunk a gerjesztő vizsgáló jel körfrekvenciáját - közel nullától elegendően nagy értékig - kis lépésekben változtatni, és közben mérni a gerjesztett jel amplitúdóját és fázistolását, akkor méréssel meghatároztuk a vizsgált eszköz körfrekvencia átvitelét. A körfrekvencia átviteltől identifikálható egy közelítő átviteli függvény, és abból meghatározható az eszköz differenciál egyenlete.

A folyamatirányításban és a gyártásautomatizálásban sok olyan berendezés van, amelyek nem gerjeszthető periodikus (szinuszos) vizsgáló jellel, vagy nagyon költséges lenne a mérés megvalósítása. Ezekhez aperiodikus jellegű vizsgáló jeleket alkalmaznak.

Determinisztikus, **aperiodikus vizsgáló jelek** az időtartományban:

- ♦ **Egységimpulzus** (impulse function), amely keskeny impulzus formájú jel. Jele a $\delta(t)$. Az impulzus amplitúdó és az impulzus szélesség szorzata 1 (2.4.a. ábra). A jelátvivő tag válasza az egységimpulzus gerjesztésre a **súlyfüggvény** (impulse response), a jele $g(t)$.
- ♦ **Egységugrás** (unit step), amely értékugrás formájú jel. Jele az $1(t)$. Az értékugrás amplitúdó 1 (2.4.b. ábra). A jelátvivő tag válasza az egységugrás gerjesztésre az **átmeneti függvény** (unit step response), a jele $h(t)$.
- ♦ **Egység sebességugrás** (unit ramp), amely állandó, egységnyi meredekséggel emelkedő formájú jel (2.4.c. ábra). Jele a $t \cdot 1(t)$. A jelátvivő tag válasza az egység sebességugrás gerjesztésre a **sebességugrás válaszfüggvény** (unit ramp response).
- ♦ **Egység gyorsulásugrás** (acceleration step), amely parabola formájú jel (2.4.d. ábra). Jele a $\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$. A jelátvivő tag válasz függvényének a neve **gyorsulásugrás válaszfüggvény** (acceleration step response).

Megjegyzés: Vizsgáló jelekkel fekete doboz modell készíthető. A vizsgált idő-, és körfrekvencia tartomány az eszköz időállandóitól, illetve sáv szélességétől függ. Erre mutat egy példát a 2C Melléklet. Az átviteli függvény szürke doboz modell alapján történő meghatározásra a 2B Melléklet tartalmaz példát.



2.4. ábra Determinisztikus, aperiodikus vizsgáló jelek az időtartományban

A 2.4.a. ábrán az egységimpulzus látható. A mérnöki gyakorlatban, ha τ jóval kisebb, mint a vizsgált jelátviteli tag legkisebb időállandója, és $\frac{1}{\tau}$ nem nagyobb, mint a bemenő jel értelmezési tartománya, akkor a 2.4.a. ábra fizikailag megvalósítható. Az egységimpulzus határértékét ($\tau \rightarrow 0$) szokás Dirac impulzusnak is nevezni, aminek a jele a $\delta(t)$. Nagy időállandójú jelátviteli tagok vizsgálatakor egy keskeny impulzus te-

kinthető Dirac deltának. Kis időállandó esetén az egységimpulzus amplitúdója általában nagyobb, mint a bemeneti gerjesztő jel értelmezési tartománya. Ha a jelátviteli tag kis energiával is gerjeszthető, akkor nem szükséges az egységnyi impulzus terület, vagyis kisebb amplitúdójú $k \cdot \frac{1}{\tau}$ impulzusjel is használható.

A 2.4.b. ábrán az egységugrás látható. Minden olyan esetben, amikor az állandósult érték eléréséhez szükséges τ idő értéke elhanyagolható a vizsgált jelátviteli tag időállandóihoz képest, ideális egységugrásnak tekinthető.

Megjegyzés: Az egységugrás, könnyű kivitelezhetősége okán, a közepes és a nagy időállandójú rendszerek leggyakrabban alkalmazott időtartománybeli vizsgáló jele. Az ugrás amplitúdójának nem kell egységnyinek lennie, lehet $k \cdot 1(t)$, a lényeg az ugrás jelleg.

A 2.4.c. ábrán az egység sebességugrás látható. Minthogy nincs ugrás a jel értékkészletében, a fizikai és a matematikai jel megegyezik. A differenciáló hatás eleve csak ezzel a jellel vizsgálható az időtartományban, de hasznosan alkalmazható a jelkövetés vizsgálatára is.

A 2.4.d. ábrán az egység gyorsulásugrás látható. Csak nagyon szűk területen (például speciális szervó rendszerek vizsgálata) alkalmazzák

Az egységimpulzus integrálja az egységugrás, az egységugrás integrálja az egység sebességugrás, és a sor így folytatható.

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1(t), \quad \int_0^{\infty} 1(t) dt = t \cdot 1(t) \quad <2.19.>$$

Ebből adódóan, az LTI jelátvivő tagok esetén, az egységimpulzus, az egységugrás, és így tovább gerjesztésre adott válaszfüggvények is egymás integráljai. A súlyfüggvény integrálja az átmeneti függvény, az átmeneti függvény integrálja a sebességugrásra adott válasz függvény, és így tovább.

2.3. A jelátvivő alap tagok

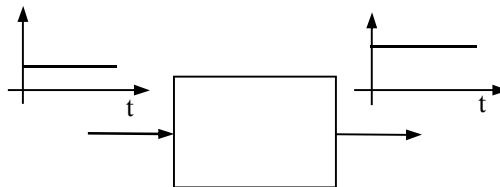
Az olyan jelátvivő tagokat, amelyek $x_{be}(t)$ bemenete és $x_{ki}(t)$ kimenete között megadható függvénykapcsolat csak lineáris matematikai műveleteket tartalmaz és az együtthatók az időtől függetlenek, a szakirodalom LTI (Linear Time Invariant) betűszóval jelöli.

Számos esetben az LTI jelátvivő tagok felbonthatók LTI jelátvivő tagok szorzatára, összegére, stb. Az LTI jelátvivő tagok azon csoportját, ami nem bontható fel, jelátviteli alaptagoknak nevezik. Az **jelátviteli alaptagok** jellegük, jelkésleltetésük, és energiáróló képességük alapján osztályozhatók.

A jelátviteli tag jellege alapján lehet **arányos**, **integráló**, és **differenciáló**.

A **P** (proportional) **arányos** jelleg azt jelenti, hogy a jelátviteli tag a kimenetén egy konstans értékkel megszorozva megismétli a bemeneti jelet (2.5.a ábra).

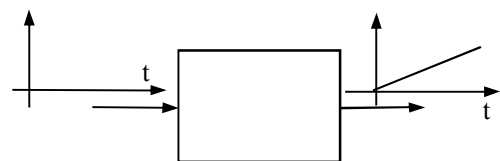
$$x_{ki}(t) = K \cdot x_{be}(t) \quad <2.20.a>$$



2.5.a ábra Arányos jelátviteli tag

Az **I** (integral) **integráló** jelleg azt jelenti, hogy a jelátviteli tagnak egyenletes meredekséggel változik a kimenete konstans bemeneti jel esetén (2.5.b ábra). Ha $x_{be} = 0$, akkor a kimenet tartja az utolsó értékét $x_{ki} = \text{állandó}$.

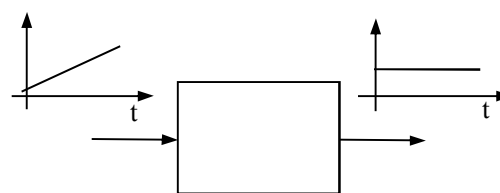
$$x_{ki}(t) = K_I \cdot \int x_{be}(t) dt \quad <2.20.b>$$



2.5.b ábra Integráló jelátviteli tag

A **D** (derivative) **differenciáló** jelleg azt jelenti, hogy a jelátviteli tagnak egyenletes meredekséggel változó bemeneti jel esetén a kimenete konstans (2.5.c ábra). Ha $x_{be} = \text{állandó}$, akkor az $x_{ki} = 0$, vagyis megszakad a jelátvitel.

$$x_{ki}(t) = K_D \cdot \frac{dx_{be}(t)}{dt} \quad <2.20.c.>$$

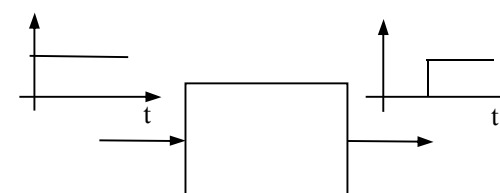


2.5.c ábra Differenciáló jelátviteli tag

A jelátviteli tagok jelkésleltetésük alapján jelkésleltetés nélküli, és holtidős jelátviteli tagok közé sorolhatók.

A **H holtidős** (dead time, transport time, delay time) alap jelátviteli tag. Hatásának elemzését az arányos P jelleggel együtt célszerű megtenni. A bemeneti jel „ τ ” időtartam elteltével jelenik meg a kimeneten (2.5.d. ábra).

$$x_{ki}(t) = x_{be}(t - \tau) \cdot 1(t - \tau) \quad <2.20.d.>$$



2.5.d ábra Holtidős arányos jelátviteli tag

Számos fizikai rendszer a mechanikai tehetetlenség, az anyagok összenyomhatósága, vagy egyéb okok miatt nem képes a bemeneti jel ugrásszerű változását azonnal követni. Ezt a jelenséget nevezik a rendszer energiatároló képességének. A jelátviteli tag energiatároló képessége alapján lehet egy energiatárolós, vagy két energiatárolós, illetve több energiatárolós.

2. Jelátvivő tag

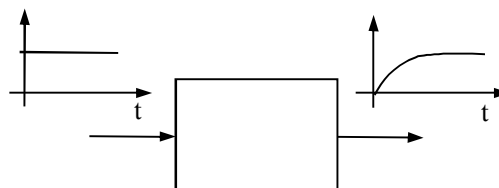
A szakirodalom egy tárolós vagy egy időállandós, két tárolós vagy két időállandós, stb. elnevezéseket alkalmazza.

Energiatároló képesség P, I, vagy D jellegű tagokhoz egyaránt tartozhat, de hatásának elemzését az arányos P jelleggel együtt célszerű megtenni.

Megjegyzés: A PT1 egy időállandós jelátviteli tag más jelátviteli tagokból nem állítható elő, ezért jelátviteli alaptag. Van olyan PT2 két időállandós jelátviteli tag, ami felbontható két PT1-es tagra, de PT2 jelátviteli alaptagnak csak azt nevezzük, amely nem bontható fel két egy időállandós jelátviteli tagra.

PT1 egy időállandós (first order), (2.5.e. ábra) alap jelátviteli tag. Az új állandósult állapot elérése a T időállandótól, és az elvárt hibahatártól függ

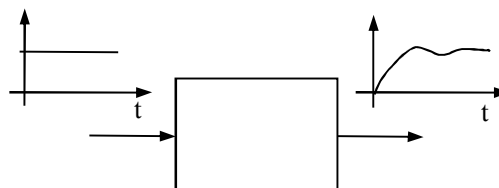
$$T \frac{dx_{ki}(t)}{dt} + x_{ki}(t) = x_{be}(t) \quad <2.20.e.>$$



2.5.e ábra Egy tárolós jelátviteli tag

PT2 két időállandós (second order), (2.5.f. ábra) alap jelátviteli tag.

A túllendülés amplitúdója, a lengések száma a **D csillapítási tényezőtől** függ. Az új állandósult állapot elérése a D csillapítási tényezőtől, a T időállandótól, és az elvárt hibahatártól egyaránt függ



2.5.f ábra Egy tárolós jelátviteli tag

$$T^2 \frac{d^2 x_{ki}(t)}{dt^2} + 2 \cdot D \cdot T \frac{dx_{ki}(t)}{dt} + x_{ki}(t) = x_{be}(t) \quad <2.20.f.>$$

Megjegyzés: A kimeneten megjelenő lengések PT2 alaptagra utal egy összetett jelátviteli tagban, $D < 0.707$ csillapítási tényezővel.

2.4. Az összetett jelátvivő tag

Összesen hat (P, I, D, H, PT1, PT2) jelátvivő alaptag van. A hat jelátvivő alaptag soros, párhuzamos, és visszacsatolt kombinációival **összetett jelátviteli tagok** állíthatók elő.

Ha a jelátviteli tagok körfrekvencia vagy operátoros átviteli függvénye ismert, akkor ismerni kell a soros, a párhuzamos, és a visszacsatolt alkapcsolások eredőjét, az eredő körfrekvencia vagy operátoros átviteli függvény meghatározásához. Az eredő meghatározásához a blokkvázlat készítés szabályainak megfelelően a körfrekvencia

vagy operátoros átviteli függvényt téglalap alakú blokkal, a blokkok közötti kapcsolatot nyílazott hatásvonalakkal jelöljük, és ha szükséges alkalmazunk jelösszegzőt. Mindegyiket azt használjuk fel, hogy az LTI jelátviteli tag kimenete - az körfrekvencia vagy operátoros tartományban - megadható, mint a jelátviteli tag átviteli függvényének és a bemenetének szorzata (2.3. kifejezés).

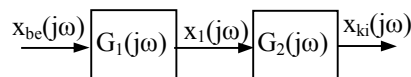
A 2.6.a. ábrán a sorba kapcsolt jelátviteli tagokra felírva a 2.3. kifejezést:

$$x_1(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot x_{be}(j\omega), \text{ valamint } x_{ki}(j\omega) = G_2(j\omega) \cdot x_1(j\omega).$$

Behelyettesítéssel megkapható a **soros eredő**:

$$G_{12}(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

<2.21.a.>



2.6.a. Soros kapcsolás

A párhuzamos kapcsolt jelátviteli tagok eredőjének meghatározásához szükség van egy összegző tagra is. Felírhatók az

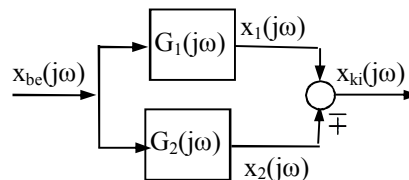
$$x_1(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot x_{be}(j\omega), \text{ valamint a}$$

$$x_2(j\omega) = G_2(j\omega) \cdot x_{be}(j\omega).$$

Összegzéssel a **párhuzamos eredő**:

$$G_{12}(j\omega) = G_1(j\omega) \mp G_2(j\omega)$$

<2.21.b.>



2.6.b. Párhuzamos kapcsolás

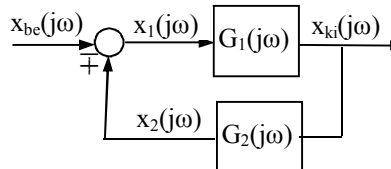
Kettőnél több soros, illetve párhuzamos jelátviteli tag esetén, rekurzív módon, bővíthető a 2.21.a. újabb tényezővel és a 2.21.b. újabb taggal.

A 2.6.c. ábrán látható visszacsatolt elrendezésre felírhatók az alábbi kifejezések:

$$x_1(j\omega) = x_{be}(j\omega) \mp x_2(j\omega)$$

$$x_{ki}(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot x_1(j\omega)$$

$$x_2(j\omega) = G_2(j\omega) \cdot x_{ki}(j\omega)$$



2.6.c. Visszacsatolt kapcsolás

Az $x_1(j\omega)$ és az $x_2(j\omega)$ segédváltozókat

kiejtve kapjuk a $x_{ki}(j\omega) = G_1(j\omega)\{x_{be}(j\omega) \mp G_2(j\omega) \cdot x_{ki}(j\omega)\}$ kifejezést, majd ezt a kifejezést rendezve, a **visszacsatolt eredő**:

$$G_{12}(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)}{1 \pm G_1(j\omega)G_2(j\omega)}$$

<2.21.c.>

Ha a 2.6.c. ábra szerinti egyhurkos kapcsolásban, ha kettőnél több jelátvivő tag van a hurokban, akkor a visszacsatolt eredő felírásának szabálya a következő: A számlálóban a gerjesztő jeltől a gerjesztett jelig található tagok körfrekvencia átviteli függvényeinek szorzata van. A nevezőben $1 \pm$ a hurokban található tagok körfrekvencia átviteli függvényeinek szorzata van (Az összegző tag átvitele 1). Negatív visszacsatolás esetén $+$, pozitív visszacsatolás esetén $-$ műveletet kell használni.

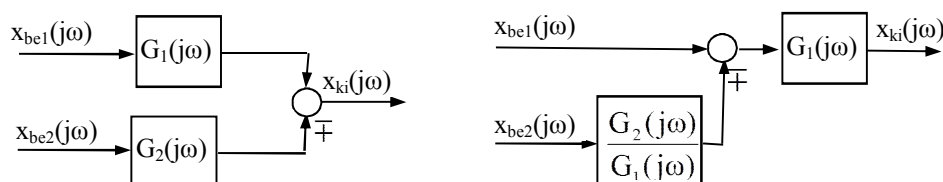
2. Jelátvivő tag

Fontos: A differenciál egyenletével jellemzett jelátviteli tagok soros, párhuzamos, vagy visszacsatolt eredőjének differenciál egyenletét nem lehet zárt, analitikus formában meghatározni.

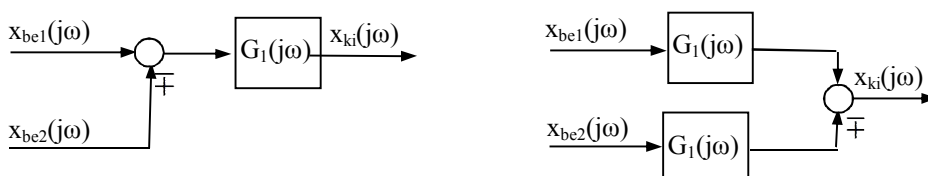
Megjegyzés: Ha a differenciál egyenletet T_s mintavételi idővel (sample time) differencia egyenletté alakítjuk (5A. Melléklet), majd T_s lépésekben újra és újra kiszámítjuk ez egyes jelátviteli tagok be-, és kimeneti jelértékeit, akkor az eredő kimeneti jelalak meghatározható, de az eredő differencia egyenlet ekkor sem.

Blokkvázlat átalakítási szabályai

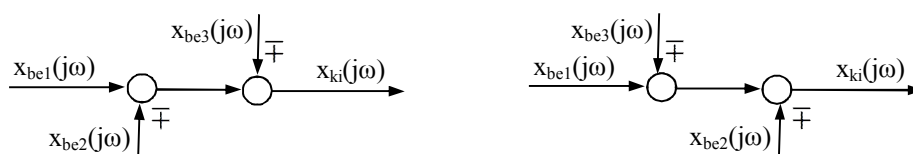
A **blokkvázlat átalakítási szabályok** felhasználásával (2.7. ábrák) átalakítható a blokkvázlat, és így a soros, párhuzamos, visszacsatolt eredők számításának szabályai már alkalmazhatók. Így egyszerűbb, könnyebben kezelhető formára hozható egy összetett blokkvázlat.



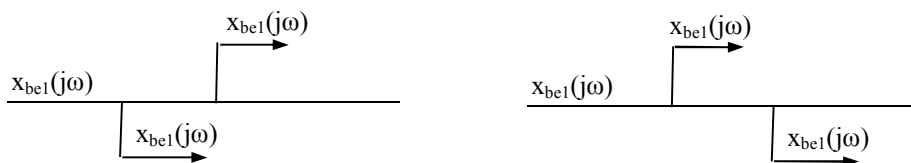
2.7.a. Összegző pont áthelyezése blokk elé



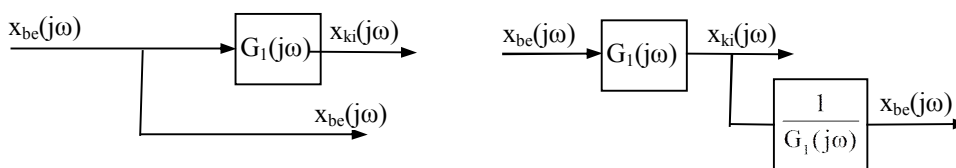
2.7.b. Összegző pont áthelyezése blokk mögé



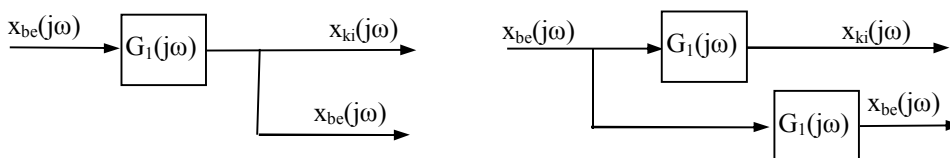
2.7.c. Összegző pont megcserélése



2.7.d. Elágazási pont megcserélése



2.7.e. Elágazási pont áthelyezése blokk mögé



2.7.f. Elágazási pont áthelyezése blokk elé

Több hurok esetében a Mason szabály alkalmazásával is megadható az eredő frekvencia átviteli függvény. A 2.A. Melléklet mutatja be Mason szabály alkalmazását és a 2A és 2B Mellékletben vannak példák a blokkvázlat átalakítás alkalmazására.

2.5. A jelátviteli alaptagok jellemzése

Az alaptagokat az időtartományban a differenciálegyenletükkel, és ennek egységimpulzus és egységugrás gerjesztésre kapott megoldásának ábrázolásával, vagyis a súly $g(t)$ és az átmeneti $h(t)$ megadásával jellemezzük. A körfrekvencia tartományban az átviteli függvényükkel, és az átviteli függvény Bode és Nyquist féle grafikus ábrázolásával jellemezzük az alaptagokat. Megadjuk továbbá az operátoros tartománybeli átviteli függvényt.

Megjegyzés: A függvények, valamint a tengelyek és a paraméter leolvasási pontok megrajzolása MATLAB programmal történt, de hogy a konkrét számértékek ne legyenek félrevezetőek csak az ábrát vágtuk ki.

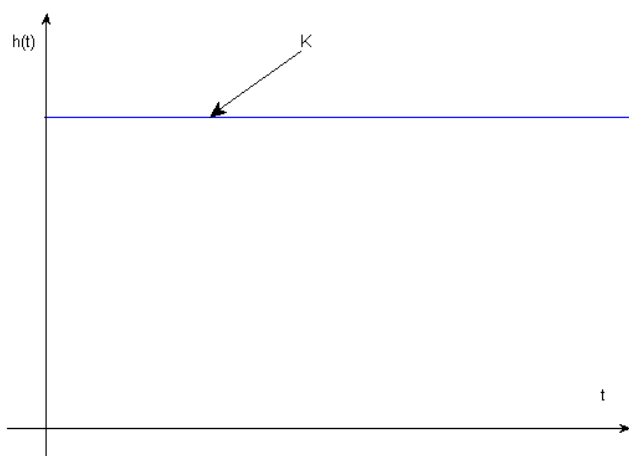
P arányos tag

$$\text{Differenciálegyenlet: } x_{ki}(t) = K \cdot x_{be}(t) \quad <2.23.a.>$$

$$\text{A súlyfüggvény: } x_{ki}(t) = g(t) = K \cdot \delta(t). \quad <2.23.b.>$$

Megjegyzés: Az ideális Dirac delta $\delta(t)$ nulla jelszélességű, ezért a Matlab program nem tudja ábrázolni. Ilyenkor a Matlab program vagy nulla jelértéket mutat, vagy hibaüzenetet küld.

$$\text{Az átmeneti függvény: } x_{ki}(t) = h(t) = K \cdot 1(t). \quad <2.23.c.>$$



2.8.a. Az arányos alaptag $h(t)$ átmeneti függvénye

Az arányos tag **K átviteli tényező** értéke, ismerve a bemeneti jel amplitúdóját az átmeneti függvény bármely t időpillanatban vett értékéből meghatározható.

$$K_p = \frac{x_{ki}(t)}{x_{be}(t)} \Big|_{t \rightarrow \infty} \quad <2.24.>$$

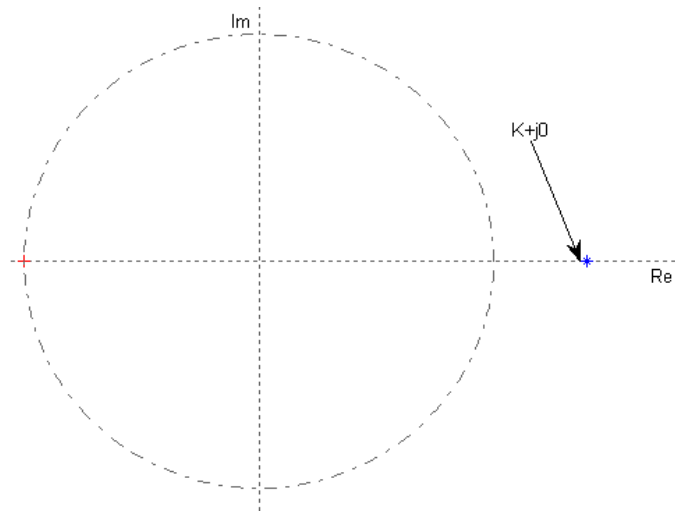
$$\text{Körfrekvencia átviteli függvény: } G(j\omega) = K \quad <2.25.>$$

Miután az arányos tag átviteli függvénye nem függ a körfrekvenciától a Nyquist diagram ugyanaz a pont minden körfrekvencián (2.8.b. ábra). A K erősítés értéke a pont origótól mért távolsága.

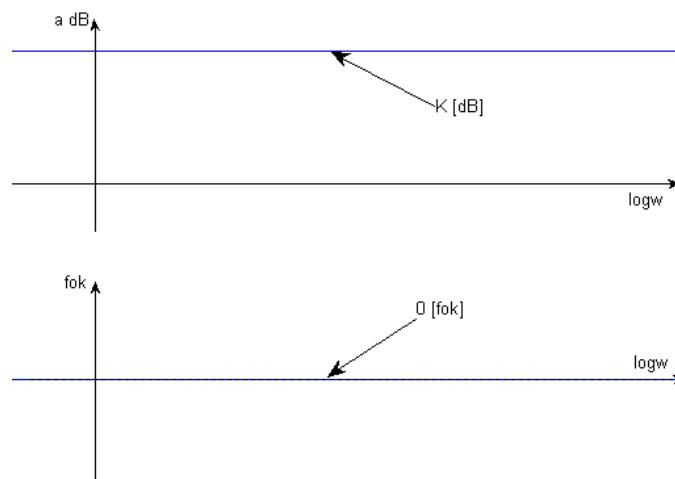
A Bode diagram (2.8.c. ábra) amplitúdó átviteli függvényén, bármely körfrekvencia értéknél leolvasható a K erősítés érték decibelben.

$$\text{A decibel érték átszámítása: } K = 10^{\frac{K[dB]}{20}} \quad <2.26.>$$

2. Jelátvivő tag



2.8.b. Az arányos alaptag Nyquist diagramja



2.8.c. Az arányos alaptag Bode diagramja

Operátoros átviteli függvény: $G(s) = K$

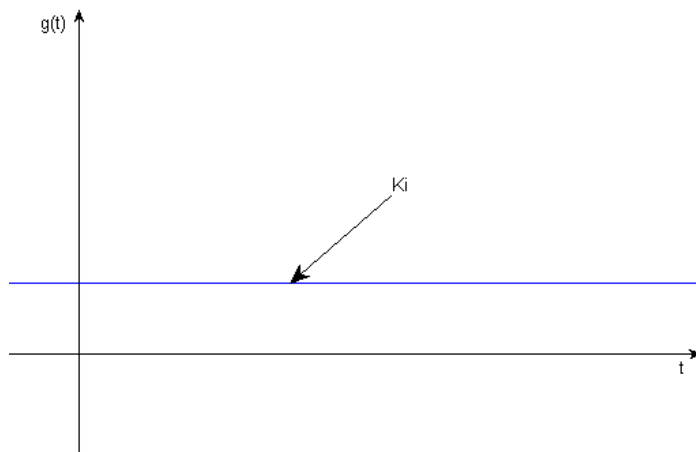
<2.27.>

I Integráló tag

Differenciálegyenlet: $x_{ki}(t) = K_I \int_0^{\infty} x_{be}(t) dt$ vagy $T_I \frac{dx_{ki}(t)}{dt} = x_{be}(t)$

<2.28.a.>

A súlyfüggvény: $x_{ki}(t) = g(t) = K_I$ <2.28.b.>

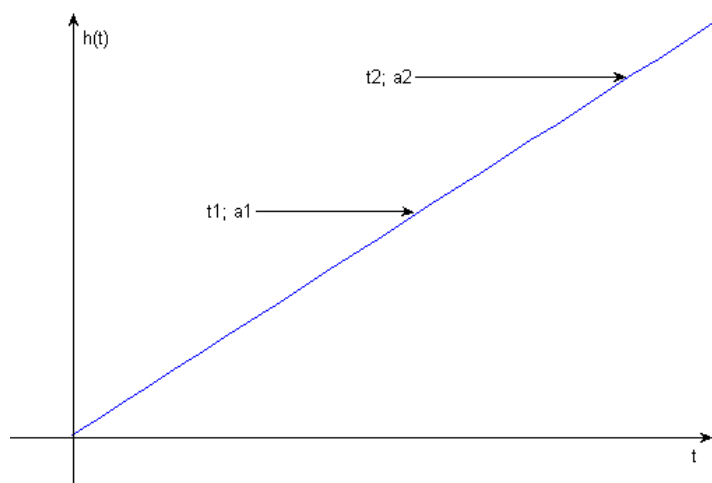


2.9.a. Az integráló alaptag $g(t)$ súlyfüggvénye és $h(t)$ átmeneti függvénye

A K_I integrálási tényező a $g(t)$ súlyfüggvény (2.9.a. ábra) bármely $t > 0$ pontjában leolvasható.

Az átmeneti függvény: $x_{ki}(t) = h(t) = K_I \cdot t \cdot 1(t)$ <2.28.c.>

A **K_I integrálási tényező** a kimeneti jel meredeksége. A K_I reciproké értéke a **T_I integrálási idő**. A $h(t)$ átmeneti függvény meredeksége a bemeneti jel amplitúdójától is függ.



2.9.b. Az integráló alaptag $h(t)$ átmeneti függvénye

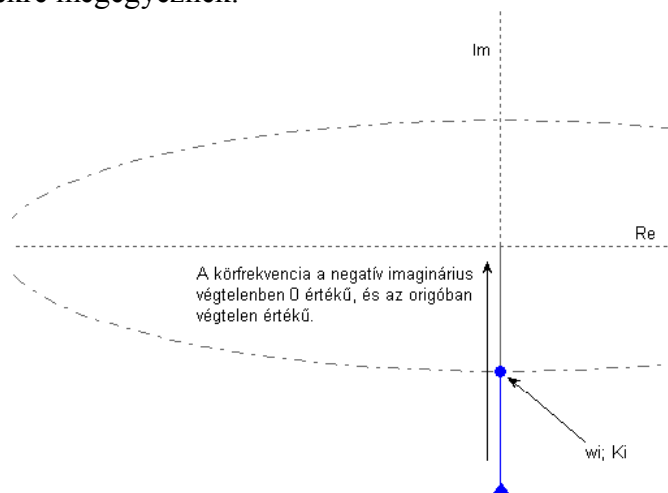
Megjegyzés: A 2.28.a. kifejezésből látható, hogy ha a bemenő jel amplitúdó 1 helyett A, akkor ez kiemelhető az integrál jel elé és a $K_I \cdot A$ érték az új integrálási tényező, ami azonos az így kapott válaszjel meredekségével. A T_I integrálási időt szokás úgy is definiálni, mint az ahhoz szükséges idő, hogy a válaszjel annyit emelkedjen, mint a gerjesztő bemenő jel amplitúdója.

A $h(t)$ átmeneti függvény (2.9.b. ábra) bármely két pontjának koordinátái ismeretében a K_I integrálási tényező meghatározható a 2.28. kifejezéssel

$$K_I = \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} \left[\frac{1}{\text{sec}} \right], \text{ illetve } T_I = \frac{t_2 - t_1}{h(t_2) - h(t_1)} [\text{sec}] \quad <2.29.>$$

$$\text{Körfrekvencia átviteli függvény: } G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega} = \frac{1}{j\omega T_I} = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_I}} \quad <2.30.>$$

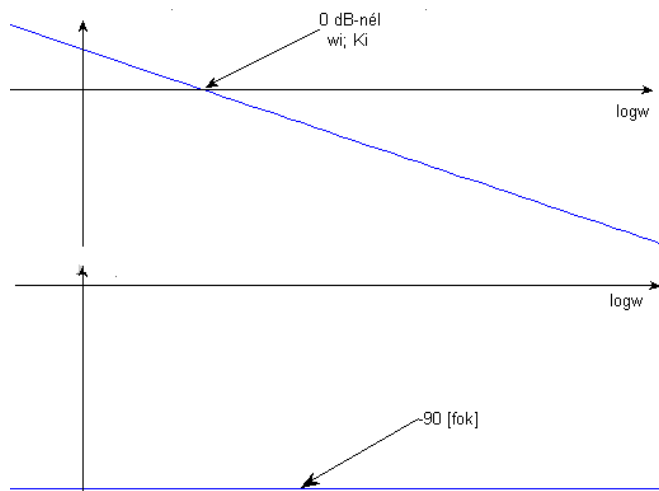
A Nyquist diagram (2.9.c. ábra) egy $-j\infty$ -ből induló és az origóban végződő egyenes. Az ω körfrekvencia léptékezése az egyenesen a K_I integrálási tényezőtől függ. A 2.9.c. ábrán a szaggatott pont vonal az egységsugarú kör része. Az egységsugarú kör az ω_I körfrekvencia értéknél metszi az integráló tag egyenesét a Nyquist diagramon. Az $\omega_I [\text{rad/sec}]$ körfrekvencia és a $K_I [1/\text{sec}]$ integrálási tényező dimenzióra nem, de számértékre megegyeznek.



2.9.c. Az integráló alaptag Nyquist diagramja

A Bode diagram (2.9.d. ábra) amplitúdó menetének 0 decibeles értékénél – más szóval, ahol egységnyi az amplitúdó átvitel – van az $\omega_I [\text{rad/sec}]$ körfrekvencia, ami számértékre megegyezik a $K_I [1/\text{sec}]$ integrálási tényezővel

2. Jelátvivő tag



2.9.d. Az integráló alaptag Bode diagramja

Operátoros átviteli függvény: $G(s) = \frac{K_I}{s} = \frac{1}{sT_I}$ <2.31.>

D Differenciáló tag

Megjegyzés: Valóságos fizikai rendszer csak elhanyagolásokkal és egy korlátozott frekvencia sávon belül közelíthető az ideális differenciáló tag differenciálegyenletével. A 2.1. táblázat 3. sorában látható differenciálegyenletben nem teljesül a be-, és kimenet között az ok-okozat kapcsolatot reprezentáló $n \geq m$ feltétel.

Differenciálegyenlet: $x_{ki}(t) = K_D \frac{dx_{be}(t)}{dt}$, vagy $x_{ki}(t) = T_D \frac{dx_{be}(t)}{dt}$ <2.32.a.>

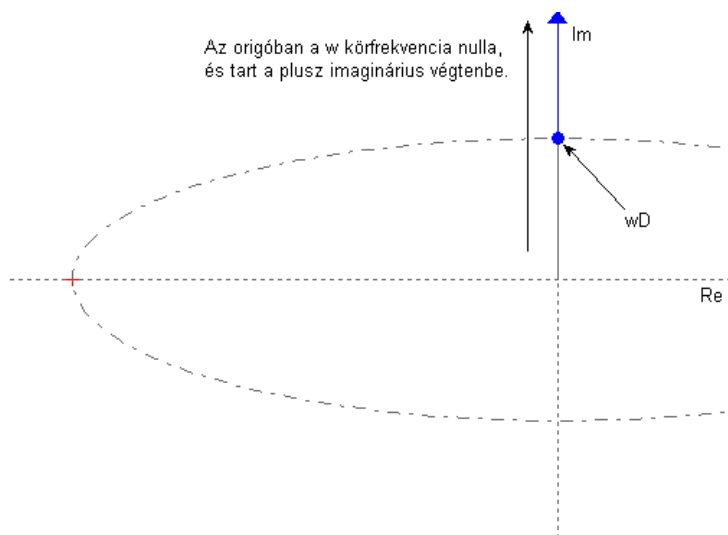
A differenciáló jelátviteli tag esetén a **K_D differenciálási tényező** azonos a **T_D differenciálási idővel**.

A súlyfüggvény, vagyis a $\delta(t)$ adott válasz fizikailag nem értelmezett. (Analitikus vizsgálatokban a $\frac{d\delta(t)}{dt} = -\delta(t)$ konvenciót alkalmazzák.

Az átmeneti függvény: $x_{ki}(t) = h(t) = \delta(t)$ <2.32.b.>

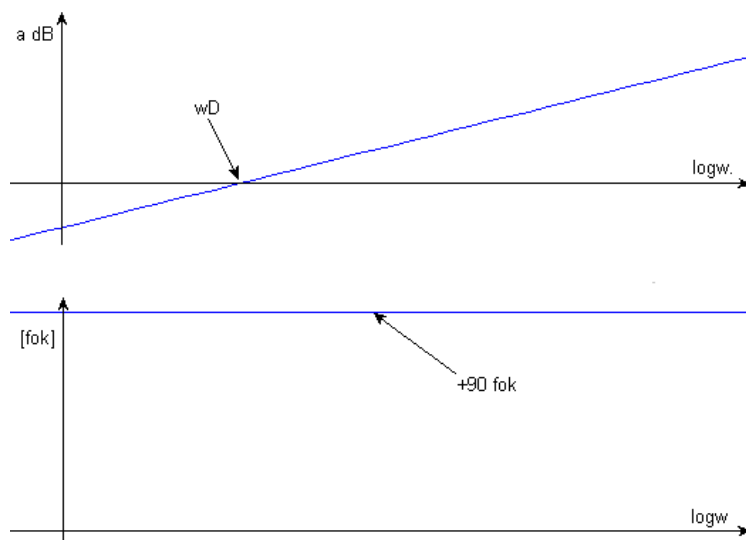
Az átmeneti függvény fizikailag egy keskeny impulzus, matematikailag a $\delta(t)$ Dirac delta, amit a Matlab nem tud ábrázolni.

Körfrekvencia átviteli függvény: $G(j\omega) = K_D j\omega = j\omega T_D = j \frac{\omega}{\omega_D}$ <2.33.>



2.10.a Differenciáló alaptag Nyquist diagramja

A Nyquist diagram (2.10.a. ábra) az origóból induló, és a $+j\infty$ -be tartó egyenes. Az ω körfrekvencia léptékezése az egyenesen a K_D differenciálási tényezőtől függ. Az egységsugarú kör (szaggatott pont vonal) az ω_D körfrekvencia értéknél metszi a differenciáló tag egyenesét a Nyquist diagramon.



2.10.b Differenciáló alaptag Bode diagramja

2. Jelátvivő tag

A $K_D = T_D$ [sec] differenciálási tényező, illetve differenciálási idő számértéke megegyezik az ω_D [rad/sec] körfrekvencia a reciprok értékével.

A Bode diagram (2.10.b. ábra) amplitúdó menetének 0 decibeles értékénél van az ω_D [rad/sec] körfrekvencia.

Operátoros átviteli függvény: $G(s) = K_D s = s \cdot T_D$ <2.33.>

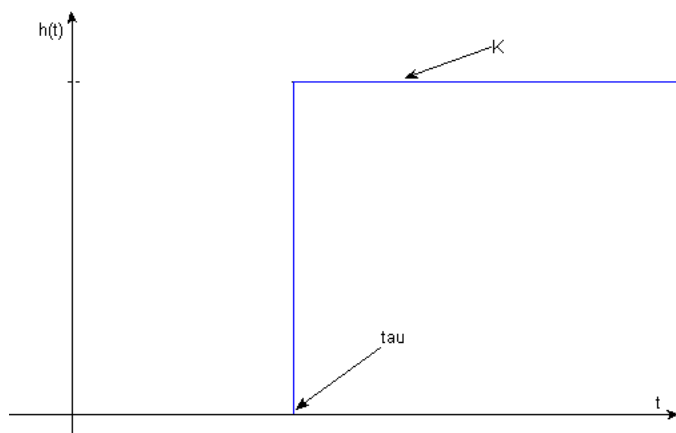
H Holtidős tag

Differenciálegyenlet: $x_{ki}(t) = K \cdot 1(t - \tau)x_{be}(t - \tau)$ <2.34.a.>

A súlyfüggvény: $x_{ki}(t) = g(t) = K \cdot \delta(t - \tau)$ <2.34.b.>

A Matlab program a Dirac deltát nem tudja ábrázolni.

Az átmeneti függvény: $x_{ki}(t) = h(t) = K \cdot 1(t - \tau)$ <2.34.c.>

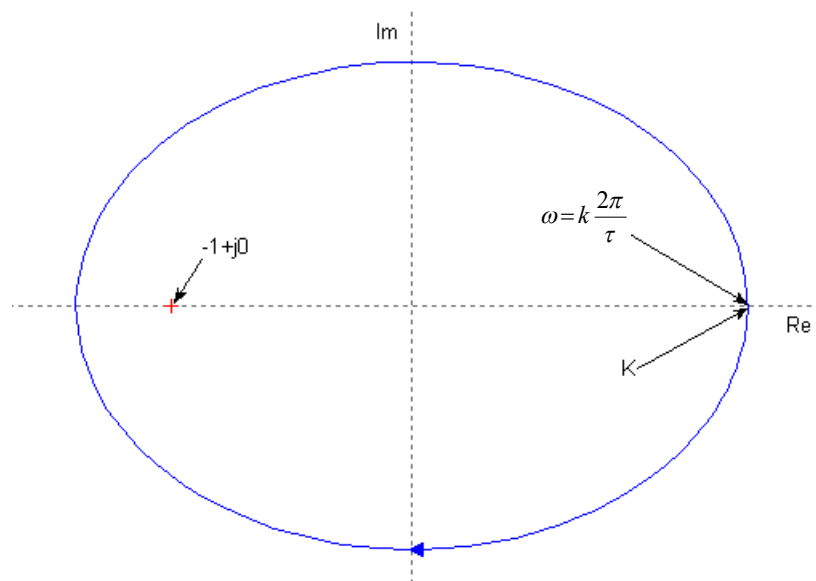


2.11.a Holtidős alaptag átmeneti függvénye

Körfrekvencia átviteli függvény: $G(j\omega) = e^{j\omega\tau}$ <2.35.>

A Nyquist diagrammal történő vizsgálatot nehezíti, hogy a körfrekvencia függvény görbéje végtelen sok egymást fedő, K sugarú kör (a 2.11.a. ábra a léptékezése miatt nem tűnik körnek).

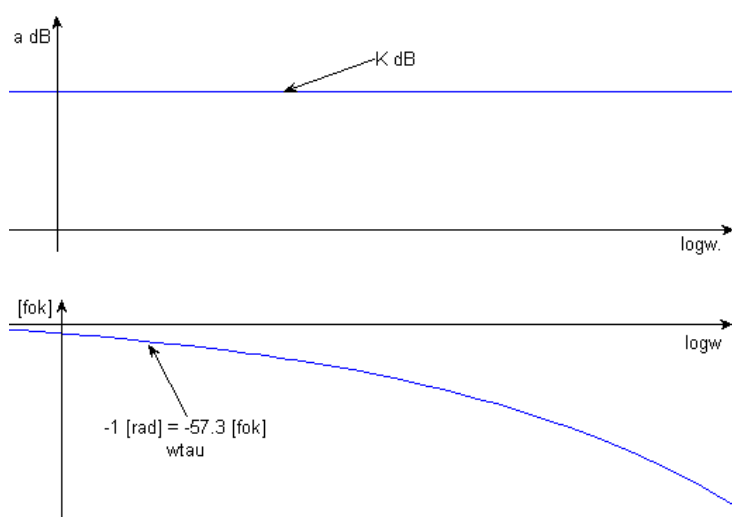
2. Jelátvivő tag



2.11.a Holtidős alaptag Nyquist diagramja

A legsós kör ω körfrekvencia tartománya $\{0 - \frac{2\pi}{\tau}\}$. Az $\omega = k \cdot \frac{2\pi}{\tau} \left[\frac{rad}{sec} \right]$ körfrekvencia értékekhez tartozik a 2.11.a. ábrán jelölt pont, ahol $k = 0, 1, 2, \dots$.

A $\omega_{\tau} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{rad}{sec} \right]$ körfrekvencia érték a $-1 [rad]$, vagyis a $-57.3 [fok]$ fázistoláshoz tartozik.



2.11.b Holtidős alaptag Bode diagramja

A Bode diagram (2.11.b. ábra) jól mutatja a holtidős alaptag erősítő, és nem véges fázistolását. A fázistolás egyenletesen nő a körfrekvencia függvényében. A Bode diagramon, a logaritmikus léptékezés miatt, exponenciális görbét kapunk.

A holtidős alaptag körfrekvencia függvénye nem polinom tört, ami eltér a másik öt alaptagétól.

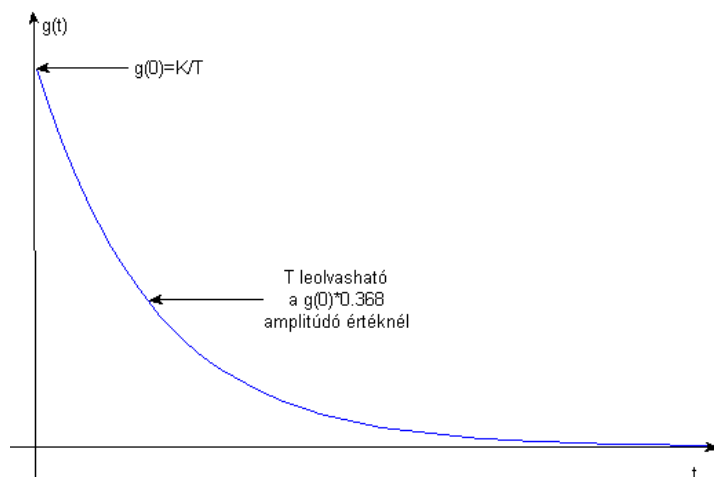
Megjegyzés: Holtidős alaptagot tartalmazó összetett tag esetén nem alkalmazhatók a kifejtési tételek (2.15. és 2.16. kifejezések) és a részlettörtekre bontás (2.17. kifejezés). Az ilyen összetett tagok vizsgálatakor gyakran alkalmazzák, hogy a holtidő hatását csak az analitikus számítások legvégén, τ késleltetéssel veszik figyelembe.

Operátoros átviteli függvény: $G(j\omega) = e^{s \cdot \tau}$ <2.36.>

PT1 Egy tárolós alaptag

Differenciálegyenlet: $T \frac{dx_{ki}(t)}{dt} + x_{ki}(t) = K \cdot x_{be}(t)$ <2.37.a.>

A súlyfüggvény: $x_{ki}(t) = g(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ <2.37.b.>



2.12.a. Egy tárolós alaptag súlyfüggvénye

Az egy tárolós alaptag súlyfüggvényének kezdeti $g(0)$ értékét leolvassa, a $t = T$ értékhez tartozó amplitúdó érték $g(T) = g(0) \cdot e^{-1} = g(0) \cdot 0.368$. Ezt az amplitúdó értéket megkeresve a súlyfüggvényen, a hozzátartozó T érték leolvasható.

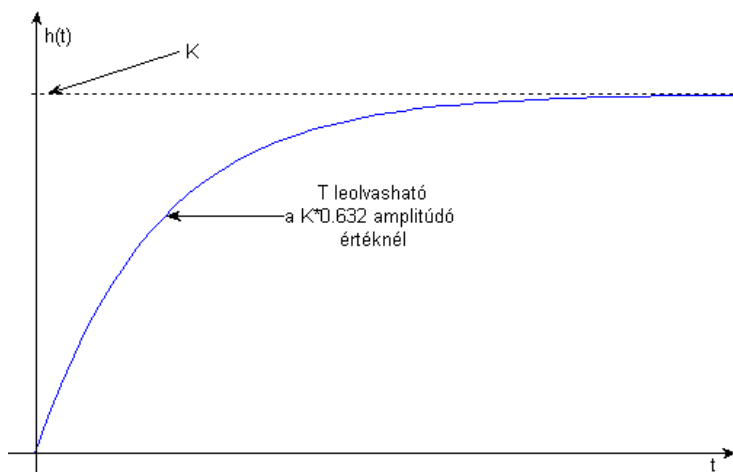
Megjegyzés: A T értéke szerkesztéssel is meghatározható. A kezdeti érintő metszéspontja a t tengelyen a T . Ez az eljárás pontatlanabb.

A K erősítés $K = T \cdot g(0)$ kifejezéssel meghatározható.

Az átmeneti függvény: $x_{ki}(t) = h(t) = K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$ <2.37.c.>

Az egy tárolós alaptag átmeneti függvényének (2.12.b. ábra) végértéke $h(\infty)$ leolvasható, és egységgerjesztés esetén ez a K erősítés érték. Ha a bemenő gerjesztő jel amplitúdója $k \cdot 1(t)$, akkor az erősítés érték: $K = \frac{x_{ki}(\infty)}{k}$.

A $t = T$ értékhez tartozó amplitúdó érték $h(T) = h(\infty) \cdot (1 - e^{-1}) = h(\infty) \cdot 0.632$. Ezt az amplitúdó értéket megkeresve az átmeneti függvényen (2.12.b. ábra), a hozzá-tartozó T érték leolvasható.



2.12.b. Egy tárolós alaptag átmeneti függvénye

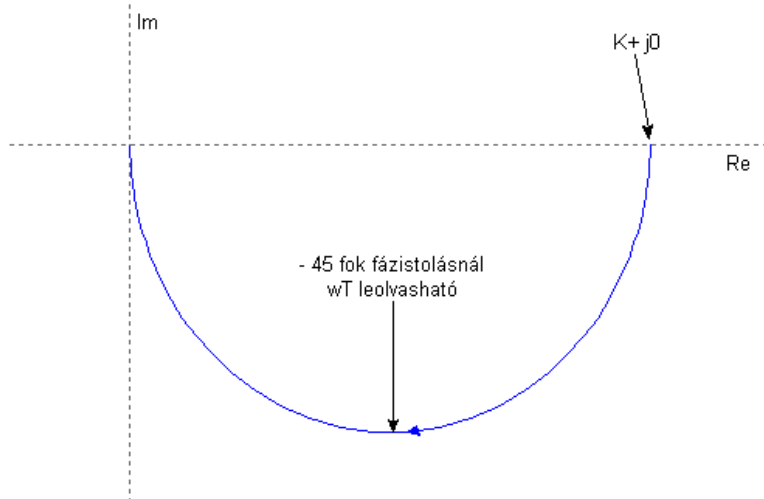
Megjegyzés: A T értéke szerkesztéssel is meghatározható. A kezdeti érintő metszéspontja a végérték meghosszabbított egyenesével (pontosított vonal), majd levetítve a t tengelyre, adja a T értéket. Ez az eljárás pontatlanabb.

Körfrekvencia átviteli függvény: $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega \cdot T + 1} = \frac{K}{j \frac{\omega}{\omega_T} + 1}$ <2.38.>

Számértékre igaz, hogy a $T[\text{sec}] = \frac{1}{\omega_T}$ <2.39.>

2. Jelátvivő tag

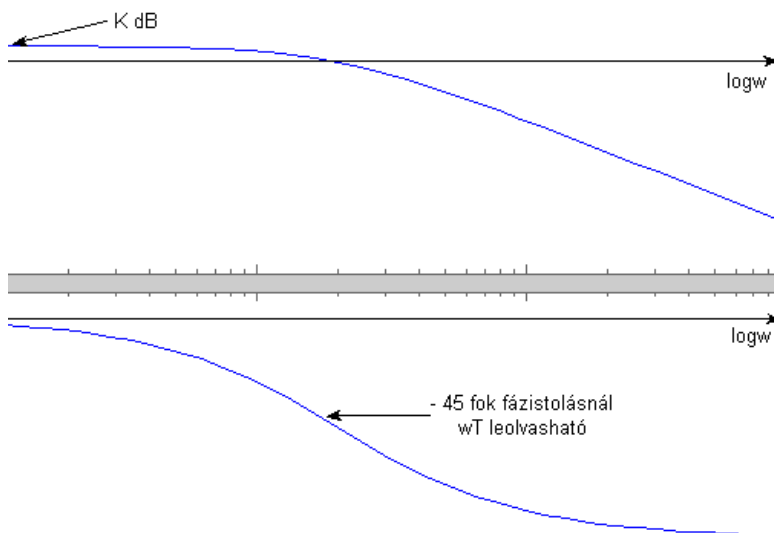
A Nyquist diagram a 2.12.c. ábrán látható. A K erősítés értéke a reális tengelyen leolvasható. A ω_T körfrekvencia érték a -45 fok fázistolás értékhez tartozik.



2.12.c Egy tárolós alaptag Nyquist diagramja

A Bode diagram a 2.12.d. ábrán látható. A -45 fok fázistolás értékhez tartozó ω_T körfrekvencia érték – a 2.39 kifejezés alapján – megadja a T időállandót. A K erősítés értéke decibelben olvasható le a kezdeti körfrekvenciákon.

Megjegyzés: A kezdeti körfrekvenciák vagy az elegendően hosszú idő ugyanazt a állandósult állapot elérését jelenti egy mérnök számára.



2.12.d Egy tárolós alaptag Bode diagramja

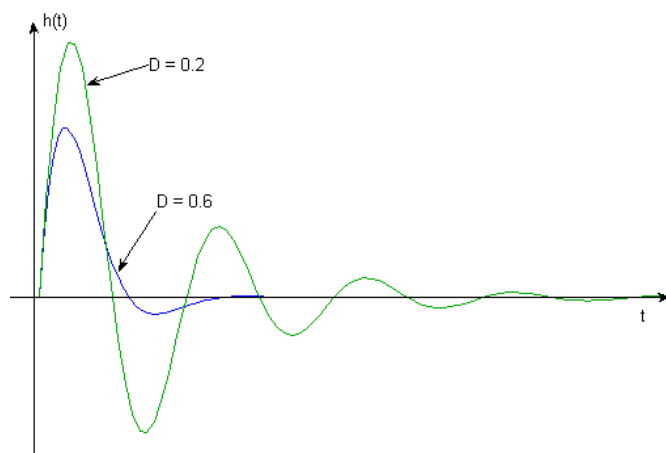
$$\text{Operátoros átviteli függvény: } G(s) = \frac{K}{s \cdot T + 1} \quad <2.41.>$$

PT2 Két tárolós alaptag

$$\text{Differenciálegyenlet: } T^2 \frac{d^2 x_{ki}(t)}{dt^2} + 2 \cdot D \cdot T \frac{dx_{ki}(t)}{dt} + x_{ki}(t) = K \cdot x_{be}(t) \quad <2.42.a.>$$

A D (damping ratio) elnevezése: **csillapítási tényező**. Akkor tekinthető a PT2 jelátviteli alaptagnak, ha $D < 1$. A súlyfüggvény és az átmeneti függvény tömörebb felírásához vezessük be a $C = \sqrt{1 - D^2}$ változót.

$$\text{A súlyfüggvény: } x_{ki}(t) = g(t) = \frac{K}{C \cdot T} \cdot e^{-\frac{D}{T}t} \sin\left(\frac{C}{T}t\right) \quad <2.42.b.>$$



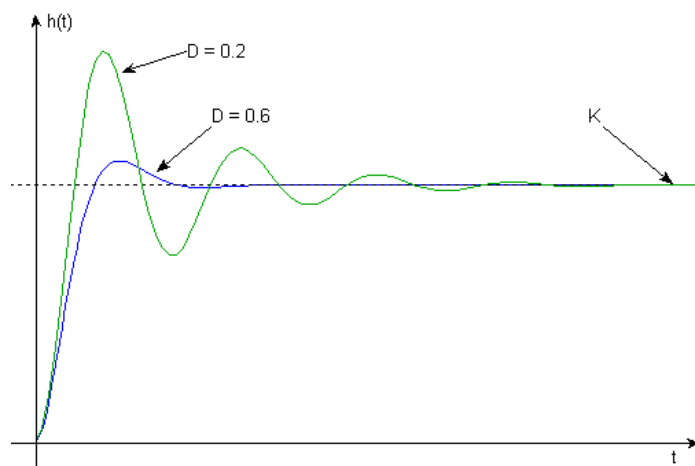
2.13.a. Két tárolós alaptag súlyfüggvénye

A 2.13.a. ábrából nem tudunk paramétert (K , T , D) meghatározni. A nagyobb amplitúdóval kezdődő, hosszabban tartó lengés a D csillapítási tényező kisebb értékére utal. A $D = 0$ határesetben $g(t) = K\omega_T \sin(\omega_T t)$ állandósult lengés alakul ki.

$$\text{Az átmeneti függvény: } h(t) = K \cdot \left\{ 1 - e^{-\frac{D}{T}t} \left[\cos\left(\frac{C}{T}t\right) + \frac{D}{C} \sin\left(\frac{C}{T}t\right) \right] \right\} \quad <2.42.c.>$$

2. Jelátvivő tag

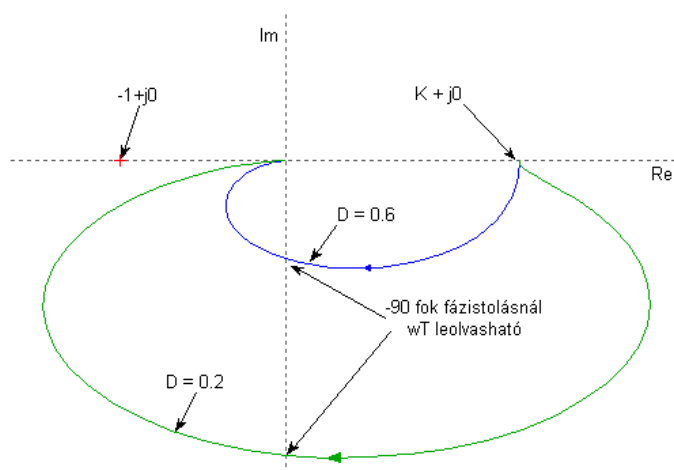
Az átmeneti függvény 2.13.b. ábrájáról csak a K erősítés értéke olvasható le. A D csillapítási tényező értékére csak durva becslés adható. Határesetben itt is állandósult lengés alakul ki.



2.13.a. Két tárolós alaptag átmeneti függvénye

Körfrekvencia átviteli függvény: $G(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 2 \cdot D \cdot T \cdot j\omega + 1}$ <2.43.>

Szokásos még a $G(j\omega) = \frac{K}{\left(j \frac{\omega}{\omega_T}\right)^2 + 2 \cdot D \cdot j \frac{\omega}{\omega_T} + 1}$ alak is.

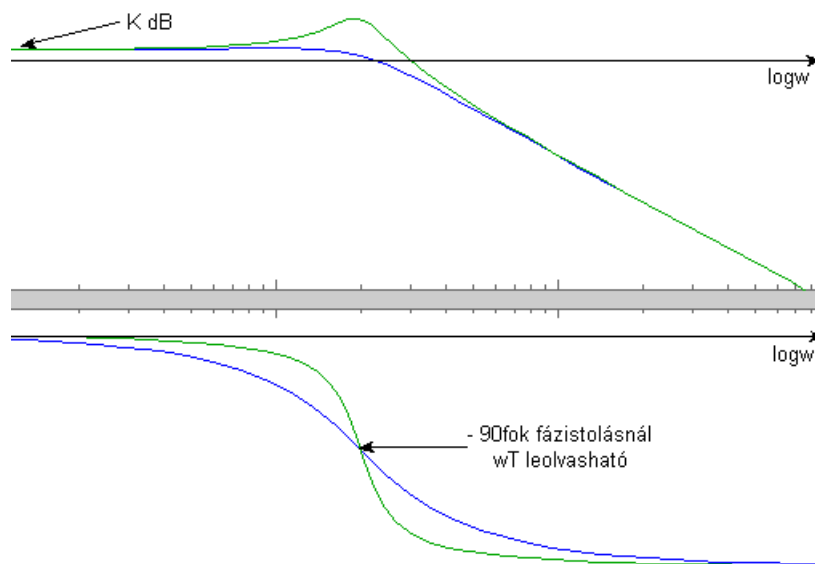


2.13.c. Két tárolós alaptag Nyquist diagramja

A 2.13.c. ábrán a K erősítés értéke a reális tengelyen, az ω_T körfrekvencia a görbe és az imaginárius tengely metszéspontjánál leolvasható. Az ω_T körfrekvencia ismeretében a T időállandó a szokott módon meghatározható.

A Bode diagramon (2.13.d. ábra) a K erősítés értéke a Bode diagram amplitúdó menetén, a kezdeti körfrekvenciákon decibelben leolvasható. Az ω_T körfrekvencia a Bode diagram fázis menetén, a -90 fok fázistoláshoz tartozó körfrekvencia. Ebből a T időállandó a szokott módon meghatározható.

Megjegyzés: A szakirodalom tartalmaz a D csillapítás mértékére is becsléseket, de az ajánlott eljárások csak nagyon lengő ($D < 0.1$) esetekben adnak kielégítően pontos eredményt.

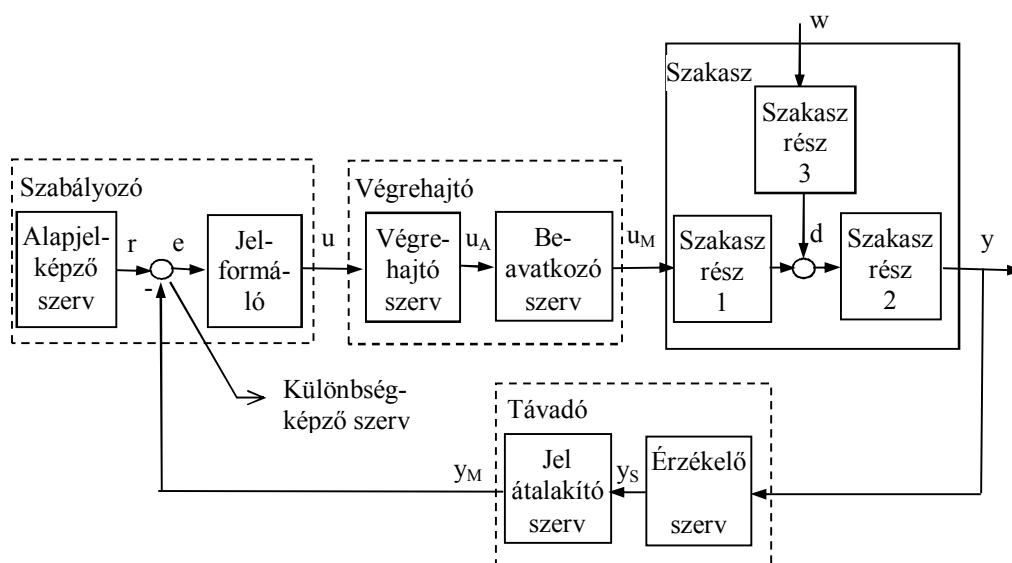


2.13.d. Két tárolós alaptag Bode diagramja

A felsorolt hat alaptag soros, párhuzamos, és visszacsatolt eredőit összetett tagoknak nevezik. A párhuzamosan kapcsolt alaptagok paraméterei az átmeneti függvényről, a sorosan kapcsolt alaptagok paraméterei pedig a körfrekvencia függvény Bode diagramjáról olvashatók le a legegyszerűbben.

Megjegyzés: A Bode ábrázolásmód előnye, hogy a logaritmikus lépték miatt, sorba kapcsolt jelátvivő tagok eredő amplitúdó, és a fázismenete grafikus összeadással megszerkeszthető a sorba kapcsolt jelátvivő alaptagok amplitúdó, és a fázismenetének ismeretében. A grafikus összeadást megkönnyíti, hogy az amplitúdó, és a fázismenet görbéje aszimptotikus egyenesekkel közelíthetők.

A szakasz modell elkészítéséhez a szabályozott berendezés vagy technológia működését leíró, és így a szakasz be-, és kimeneteihez rendelt fizikai jellemzők érték-tartományát kell elsődlegesen meghatározni. Ezért a szakasz be-, és kimeneteit, megkülönböztetésül a többi jeltől, jellemzőknek nevezzük, hiszen a jellemzőknek az érték-készlete is, és a dimenziója is elsődleges fontosságú. Ha a szakasz egyetlen jelátvivő taggal modellezett, akkor a zavarjellemző támadáspontját a szakasz elé, vagy mögé kell helyezni.



3.1. A szabályozási kör részletes blokkvázlata

Az szabályozási körökben a szakasz kivételével szervnek neveznek minden irányítástechnikai funkcióval rendelkező eszközt. Az 3.1. ábrán a szervek elnevezései a blokkokba vannak beírva. A szaggatott vonallal körülhatárolt szervcsoportoknak önálló nevük is van (szabályozó, végrehajtó, távadó) és gyakran egy jelátviteli tagként kezelik ezeket, kivéve a szabályozó berendezést.

A 3.1. ábrán látható szervek és berendezések feladata:

- A **szabályozó** (controller) berendezés magába foglalja az alapjel-képző, különbségképző, és a jelformáló szerveket.
 - Az **alapjel-képző szerv** (reference input element) feladata, hogy előállítsa az Y_D **alapértéknek** megfelelő, az Y_M **ellenőrző jellel** azonos értékészletű és dimenziójú **R alapjelet**.
 - A **különbségképző szerv** (error detector) feladata, hogy összehasonlítsa az R alapjel, és az Y_M ellenőrző jel aktuális értékeit. A két jel különbsége az **e rendelkező jel**, amit gyakran **hibajelnek** is neveznek.
 - A **jelformáló** (compensator) **szerv** feladata, hogy biztosítsa a visszacsatolt hurok stabilitását, és az előírt minőségi paramétereit. A jelformáló szerv, és így a szabályozó berendezés kimeneti jele az U **végreható jel**. A jelformáló szervet gyakran **kompenzáló tagnak** nevezik.

Ha a szabályozó mikroprocesszor alapú, akkor a fenti szervek szoftver taszkok.

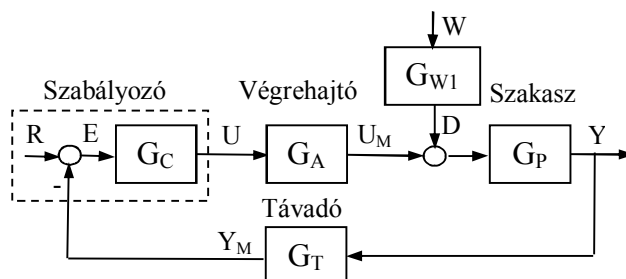
- A **végrehajtó** (actuator) berendezés működteti a folyamatáramot (anyag vagy energia) módosító a beavatkozó szervet. A beavatkozót működtető eszközt is végrehajtó szernek nevezi a magyar szakirodalom.
 - A **beavatkozó szerv** (final element) feladata, hogy a szabályozott berendezés vagy technológia működését befolyásoló U_M **módosító jellemzőt** az U_A **beavatkozó jelnek** megfelelő értékre állítsa.
 - A **végrehajtó szerv** (actuator drive) feladata, hogy működtesse a beavatkozó szervet, és az U végrehajtó jelnek megfelelő pozícióba állítsa. Ha a pontosság érdekében visszaméri az U_A beavatkozó jelet és összehasonlítja az előírt U végrehajtó jellel, akkor **helyzetbe-állító szervnek** nevezik.
- A **szabályozott berendezés, technológia, szakasz** (controlled equipment, process, plant) előírt működése az irányítás célja.
 - Ha a zavaró jellemző hatását is figyelembe kell venni, akkor – a blokkvázlat készítés szabályának megfelelően - a jellemzéséhez két jelátviteli blokk, és egy összegző szükséges.
- A **távadó** (transmitter) berendezés magába foglalja az Y **szabályozott jellemzőt** közvetlenül érzékelő szervet és a jelátalakítót.
 - Az **érzékelő szerv** (sensor) feladata, hogy az y szabályozott jellemző értelmezési tartományát minél pontosabban leképezze az Y_S **érzékel jel** értelmezési tartományába.
 - A **jelátalakító szerv** (transducer) feladata, hogy nagyobb távolságra torzulásmentesen továbbítható, és egyszerűen feldolgozható Y_M ellenőrző jellé alakítsa az Y_S érzékelt jelet.

Megjegyzés: A 3.1. ábrán a jelek és jellemzők kisbetűvel vannak jelezve. Ez a szakirodalomban elterjedt szokás szerint arra utal, hogy az egyik állandósult állapotbeli munkapontból, a másik állandósult állapotba kerülés dinamikai vizsgálatához tartozik a blokkvázlat.

3. Egyhurkos szabályozási kör

Megjegyzés: A 3.2. és a 3.3. ábrákon indexeléssel jeleztük, hogy a zavar támadás pontjának a szakasz elé, illetve mögé helyezése csak modell. Így a zavarjellemző és a zavarjel közötti átviteli függvény függ a támadáspont helyétől.

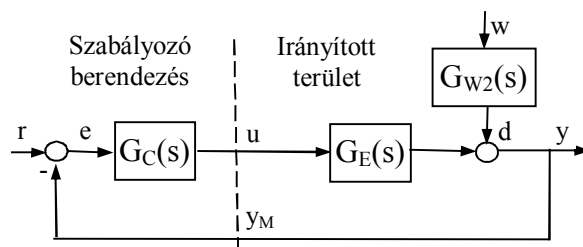
A szabályozási kör blokkvázlata megnevezés alatt leggyakrabban a 3.2. ábrán látható elrendezést értik.



3.2. ábra. A szabályozási kör blokkvázlata

Megjegyzés: A jelek és jellemzők nagybetűvel vannak jelezve, ami arra utal, hogy a 3.2. ábra statikus vizsgálathoz (statikus illesztés, állandósult hiba meghatározása) van hozzárendelve.

A 3.3. ábra az ipari berendezések szabályozásának azt a gyakori esetét reprezentálja, amikor az irányító berendezés felől nézve – az u végrehajtó jel, mint bemenet, és az y_M ellenőrző jel, mint kimenet között – az irányított terület (process field) egyetlen blokkal modellezett. Így a visszacsatoló ágban a jelátvitel 1. Ezt **merev visszacsatolásnak** (unit feedback) nevezik.



3.3. ábra. A szabályozási kör merev visszacsatolású blokkvázlata

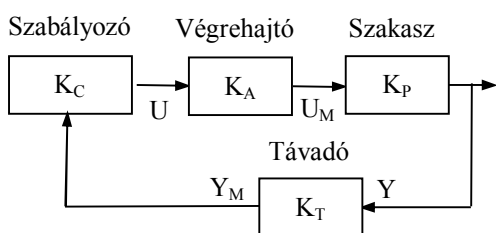
Megjegyzés: Az átviteli függvények az „s” operátoros tartományra utalnak. Hallgatólagosan feltételezzük, hogy a szabályozási kör állandósult állapotba volt (R_0 , Y_0 , W_0) és ehhez képest vizsgáljuk a változást.

A szabályozás célja, hogy az Y szabályozott jellemző – a tranziensek lezajlása után – előírt hibahatáron belül tartsa vagy kövesse az R alapjel által előírt Y_D alapértéket, valamint előírt hibahatáron belülre csökkentse a W zavaró jellemző üzemi értéktől való eltérésének a hatását. Ehhez statikusan illeszteni kell a szabályozási kört, és dinamikusan méretezni kell a kompenzáló tagot.

3.1. Az egyhurkos szabályozási kör statikus illesztése

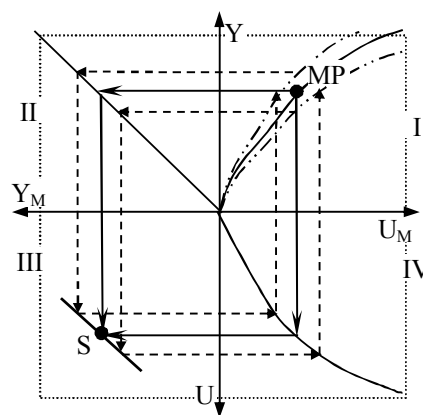
A jelátvivő tag lehet önbeálló, vagy lehet **direkt** vagy **inverz** jellege. Ha növekvő bemenő jel értékekhez tartozó válaszjel állandósult állapotbeli értéke nő, akkor a jelleg direkt, ha a válaszjel állandósult állapotbeli értéke csökken, akkor inverz. Az önbeálló rendszereknek van statikus karakterisztikája. Az egyhurkos szabályozási kör négy berendezése (3.1. ábra) közül legalább kettőnek önbeállónak kell lennie.

Megjegyzés: Leggyakrabban a szabályozó nem önbeálló. Gyakran a szakasz, és ritkán a végrehajtó. A távadó mindig önbeálló, hisz a szabályozott jellemzőt kell leképpeznie. A 3.5. ábrán csak a szabályozó nem önbeálló.



3.4. A szabályozási kör statikus blokkvázlata

Megjegyzés: A 3.4. ábrán a szabályozó berendezés – eltérően a 3.2. ábrától – egy blokkként van ábrázolva és a zavaró jellemző hatását a 3.5. ábrán vesszük figyelembe.



3.5. A statikus karakterisztikák illesztése

Megjegyzés: A 3.4. ábrán a $G(s)$ átviteli függvények helyett a berendezések statikus karakterisztikáinak a vizsgált munkaponthoz tartozó átviteli tényezői vannak a berendezések blokkjaiba írva. Ez a vizsgálatban nem játszik szerepet.

A 3.5. ábra egy olyan speciális koordináta rendszer, amelynek minden síknegyedében a 3.4. ábra berendezéseinek be-, és kimenete van, a 3.4 ábra nyírlányaik megfelelően egymáshoz képest $+90^\circ$ -al el vannak forgatva. A négy koordináta rendszer origója közös.

A 3.5. ábra „I” jobb felső síknegyedében a szakasz $Y=F(U_M)$ statikus (állandósult állapotbeli) karakterisztikája van. A folytonos vonal az átlagos zavar jellemző értékek mellett meghatározott statikus karakterisztika. A szaggatott pont-vonalak a zavar jellemzők hatását, más szavakkal az Y szabályozott jellemző állandósult értékei változásának határait mutatja.

A 3.5. ábra „II” bal felső síknegyedében a távadó $Y_M=F(Y)$ statikus karakterisztikája van. A karakterisztika nem szükségszerűen, de szerencsére sokszor lineáris a teljes jeltartományban. A 3.5. ábrán a távadó statikus karakterisztikája lineáris.

A 3.5. ábra „IV” jobb alsó síknegyedében a végrehajtó $U_M=F(U)$ statikus karakterisztikája van. Számos irányítástechnikai előnnyel bír, ha a végrehajtó statikus ka-

rakterisztikája lineáris. Sajnos legtöbbször, így a 3.5. ábrán is, a végrehajtó statikus karakterisztikája nem lineáris.

A statikus jel illesztés fontos szabálya, hogy a jelek, jellemzők végértékei illeszkedjenek egymáshoz. A 3.5. ábrán ez teljesül, a pontozott vonal keretezi a jelek, jellemzők végértékeit (a kezdeti értékek az origóban vannak).

Megjegyzés: Ez a műszerező mérnök feladata. Olyan távadót választani, ami képes a szabályozott jellemző teljes jeltartományát mérni. Olyan végrehajtót választani, amely képes elegendően nagy módosító jellemzőt szolgáltatni.

A szabályozott szakasz kívánatos „MP” munkapontját a technológus definiálja, és ez mindig berajzolható az I. síknegyedbe. A 3.5. ábrán a szakasz statikus karakterisztikájú, és így az „MP” munkapontja az üzemi statikus karakterisztika görbén van. Ha a zavaró jellemző eltér a tervezett üzemi értékétől, akkor a statikus karakterisztika is módosul (az ábrán szaggatott vonal, dupla pont görbék). A munkapontból balra vetítve a távadó munkapontja, lefelé vetítve a végrehajtó munkapontja jelölhető ki a távadó, illetve a végrehajtó statikus karakterisztikáin (hegyes, folytonos nyilak).

A 3.5. ábra „III” bal alsó síknegyedében a szabályozó van. A mérnöki gyakorlatban fontos eldönteni, hogy a szabályozó jellege direkt vagy inverz legyen. A távadó munkapontjából lefelé és a végrehajtó munkapontjából balra vetítve (hegyes, folytonos nyilak) a 3.5. ábra „III” bal alsó síknegyedében kijelölhető az „S” pont.

Az „S” ponton átfektetett direkt vagy inverz meredekségű egyenessel dönthető el, hogy melyik szabályozó jelleget kell alkalmazni az adott szabályozási körben. A 3.5. ábrán az inverz jelleg (növekvő Y_M ellenőrző jel értékéhez az U végrehajtó jel csökkenő értéke tartozik) bizonyult megfelelőnek. Más statikus jelleggörbék esetén lehet a direkt jelleg a megfelelő választás!

Inverz jellegű statikus karakterisztikájú szabályozó esetén, ha zavar hatására hirtelen megnő vagy lecsökken az Y szabályozott jellemző értéke, akkor a szaggatott nyilak mentén végighaladva az eredeti Y szabályozott jellemző értékének közelébe térünk vissza a 3.5. ábrán.

Megjegyzés: A maradó szabályozási eltérést a kompenzáló tag dinamikai viselkedése szüntetheti meg.

Könnyű ellenőrizni, hogy ha a szabályozási kör statikus karakterisztikái a 3.5. ábra szerinti, akkor direkt meredekségű egyenest átfektetve az „S” ponton az Y szabályozott jellemző értéke távolodik az eredeti „MP” munkapontbeli értékétől.

Megjegyzés: Ha a szabályozó jellegét rosszul választják meg, akkor semmilyen kompenzáló algoritmus nem tudja megakadályozni, hogy a szabályozott jellemző ne valamelyik végértékére üljön ki.

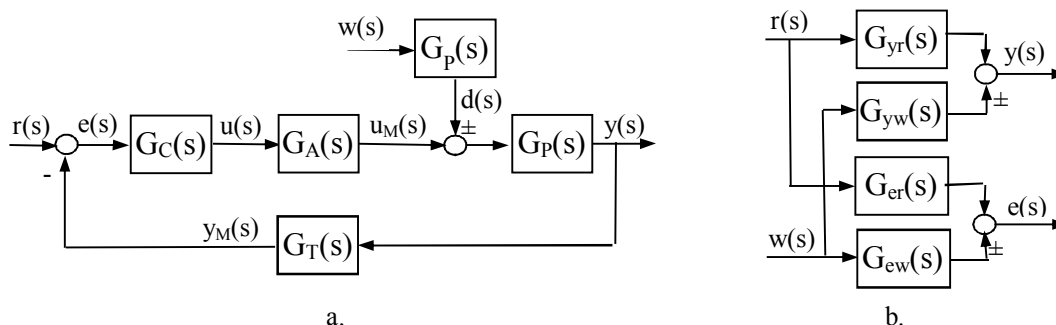
Ha a szakasz nem önbeálló jellegű, akkor a 3.5. ábra „I” jobb felső síknegyedében, a tervezett „MP” munkapontban – a szabályozó berendezéshez hasonlóan – kell a szakasz direkt vagy inverz jellegének megfelelő direkt vagy inverz meredekségű vetítő egyenest berajzolni. Ezután a szabályozó statikus jellegének megkeresése ugyanúgy történik, mint az önbeálló szakasznál.

3.2. A szabályozási kör átviteli függvényei

Az egyhurkos, zárt szabályozási kör alkalmazásának célja, hogy az szabályozott jellemző minél pontosabban kövesse az alapjel által előírt alapértéket, és minél hatásosabban csökkentse a zavaró jellemzők hatását. Az előírt alapértéktől való állandósult eltérés a szabályozási kör statikus hibája, és az átmeneti (tranziens) eltérés a szabályozási kör dinamikus hibája.

Az egyhurkos, zárt szabályozási kört az $r(t)$ alapjel változás és a $w(t)$ zavaró jellemző változás gerjesztheti. Az $y(t)$ szabályozott jellemző változáson kívül, érdemes vizsgálni az $e(t)$ rendelkező jel változását is, mert ebből közvetlenül kiolvasható az előírt értéktől való eltérés.

Feltételezzük, hogy a vizsgált szabályozási kör az „MP” munkapont közelében LTI rendszer, és olyan amplitúdójú jelváltozások gerjesztik, hogy nem lép ki a lineáris tartományból. Így az $r(t)$ alapjel változás, és a $w(t)$ zavaró jellemző változás hatása külön-külön vizsgálható.



3.6. Az egyhurkos, zárt szabályozási kör értékkövetés és értéktartás modelljei

Az alapjel és a zavaró jellemző együttes hatása a 3.6.b. ábra alapján felírva.

$$y(s) = G_{yr}(s)r(s) \pm G_{yw}(s)w(s) \quad <3.1.>$$

$$e(s) = G_{er}(s)r(s) \mp G_{ew}(s)w(s) \quad <3.2.>$$

Figyelem: A zavaró jellemző az átlagos üzemi értéktől \pm irányban is változhat. Általában az eltérés mértéke a lényeges paraméter, ezért állandósult állapotbeli hiba meghatározásához, mint legrosszabb esetet, a 3.2. kifejezésben szereplő hibatagok abszolút értékét kell összeadni.

Az ipari szabályozásokban tipikus, az áramkörtechnikában nem jellemző, hogy a szabályozási hurkokat fel lehet nyitni. Ilyenkor az ellenőrző jel nem hat a rendszerre, az alapjel közvetlenül hat a szabályozási hurok tagjaira.

A felnyitott hurokban szereplő jelátviteli tagok átviteli függvényeinek soros eredője a $G_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvény.

Felnyitott hurok átviteli függvény:

$$G_0(s) = \frac{y_M(s)}{r(s)} = G_C(s)G_A(s)G_P(s)G_T(s) =$$

$$= \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad <3.3.>$$

A felnyitott hurok átviteli függvényt szokás volt Bode alakra (3.4. kifejezés) hozni, mert a papír-ceruza stabilitás vizsgálathoz ez a célszerűbb.

$$G_0(s) = \frac{K}{s^i} \frac{\prod (1 + sT_r) \prod (1 + s2DT_s + s^2T_s^2)}{\prod (1 + sT_p) \prod (1 + s2DT_q + s^2T_q^2)} \quad <3.4.>$$

Megjegyzés: A Matlab program nem ismeri a Bode alakot, mert az amplitúdó és fázis menet meghatározása a polinom tört vagy a gyöktényezős alakból nem jelent nehézséget a program számára.

A 3.4. kifejezésben az i a nullaértékű pólusok száma, a K a **hurok átviteli tényező**. Az i számosság indexnek, az értékkövetési és értéktartási képességet befolyásoló szerepe miatt, külön nevet adtak. Az i a szabályozási kör **típuszáma**. Fizikailag az integráló hatások számát jelenti a hurokban. Az egyhurkos szabályozási kör visszacsatoló ágában nem lehet integráló hatás.

Egyhurkos szabályozási körben az i csak három értéket (0, 1, 2) vehet fel. Minden más értéknél nem alakulhat ki állandósult állapot. Ennek megfelelően a típusszámuk alapján nullarendű (zero order), első rendű (first order), és másod rendű (second order) lehet az egyhurkos szabályozási kör.

Megjegyzés: Ha az $i < 0$, akkor differenciáló jellegű a hurok átviteli függvény. Ha a szabályozási hurok előre vezető ága a differenciáló jellegű, akkor a szabályozott jellemző állandósult állapotban csak 0 értékű lehet. Ha a szabályozási hurok visszacsatoló ága differenciáló jellegű, akkor a szabályozási kör állandósult állapotban felszakad, más szóval megszűnik a visszacsatolás. Többhurkos szabályozásokban a belső hurok visszacsatoló ága lehet differenciáló jellegű.

Megjegyzés: Ha az $i \geq 3$, akkor az egyhurkos szabályozási kör biztosan instabil lesz, ami teljesen ellentmond a szabályozás céljának.

A 3.6.a. ábra alapján felírhatók a zárt szabályozási kör átviteli függvényei a gerjesztő és válaszelei között.

Alkalmazhatjuk a Mason szabályt (2A Melléklet). A számlálóban az előre vezető ág (gerjesztő jeltől a gerjesztett jelig található tagok) átviteli függvényeinek szor-

zata, a nevezőben (negatív visszacsatolás esetén) $1 +$ a hurokban található tagok átviteli függvényeinek szorzata van. (Az összegző tag egységnyi erősítésű arányos tag.)

Alapjel átviteli függvény:

$$G_{yr}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_C(s)G_A(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_A(s)G_P(s)G_T(s)} \quad w=0 \quad <3.5.a.>$$

Hibajel átviteli függvény:

$$G_{er}(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + G_C(s)G_A(s)G_P(s)G_T(s)} \quad w=0 \quad <3.5.b.>$$

Zavar átviteli függvény:

$$G_{yw}(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{G_{W1}(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_A(s)G_P(s)G_T(s)} \quad r=0 \quad <3.5.c.>$$

Zavar, hibajel átviteli függvény:

$$G_{ew}(s) = \frac{e(s)}{w(s)} = \frac{-G_{W1}(s)G_P(s)G_T(s)}{1 + G_C(s)G_A(s)G_P(s)G_T(s)} \quad r=0 \quad <3.5.d.>$$

Megjegyzés: A 3.5. kifejezésekben a nevezők megegyezik egymással. A nevező $1 + G_0(s)$, vagyis a felnyitott hurok átviteli függvénye $+1$ a nevezője a zárt szabályozási kör minden átviteli függvényének.

3.4. Az értékkövetési és az értéktartási képesség

Az egyhurkos, zárt szabályozási kör egyik feladata, hogy a szabályozott jellemző minél pontosabban kövesse az alapjel által előírt alapértéket. Azt, hogy a tranziensek lezajlása után egyáltalán képes-e követni az alapjel által előírt alapértéket, és ha igen, akkor mekkora hibával, nevezik értékkövetési képességnek.

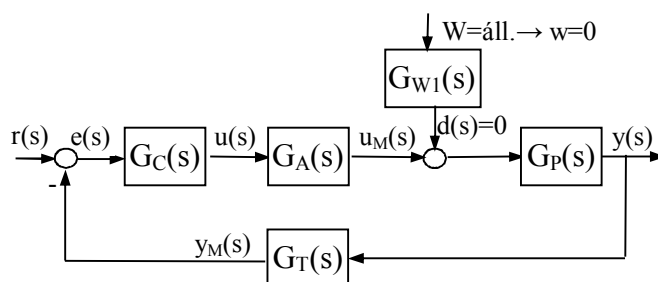
A szabályozási kör másik feladata, hogy a zavaró jellemzők hatása minél rövidebb ideig és minél kisebb amplitúdóval térítse el a szabályozott jellemzőt az előírt értékétől. Azt, hogy a tranziensek lezajlása után képes-e megszüntetni vagy csökkenteni a zavaró jellemző okozta eltérést, nevezik értéktartási képességnek.

Az egyhurkos, zárt szabályozási kör értékkövetési és értéktartási képességét elegendő a gerjesztés hatására felvett új állandósult állapotban vizsgálni, hiszen azt kell eldönteni, hogy visszatér-e a szabályozási kör az előírt értékéhez vagy annak közelébe, vagy távolodik tőle. A gerjesztés okozta tranziens hossza és időbeli lefutása a szabályozási kör minőségi paramétereit határozza meg.

Az egyhurkos szabályozási kör értékkövetési képessége

Az egyhurkos, zárt szabályozási kör értékkövetés és értéktartás modelljéhez képest (3.6.b. ábra), ha csak az értékkövetés a vizsgálat tárgya, akkor W zavaró jellemző állandó és így $w=0$. Ennek megfelelően az egyhurkos, zárt szabályozási kör értékkövetés képességének vizsgálatához elegendő – az 3.2. kifejezésből levezetett – 3.6. kifejezés határértékének vizsgálata.

$$e(s) = G_{er}(s) \cdot r(s) \quad <3.6.>$$



3.7. Értékkövetés

Az $e(t)$ rendelkező jel –a tranziensek lecsengése után – számszerűen tartalmazza alapérték és a tényleges szabályozott jellemző értékek közötti eltérést. Az eltérés meghatározható a végérték meghatározására vonatkozó, határérték tétel segítségével.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{er}(s) \cdot r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot r(s) \cdot \frac{1}{1 + G_0(s)} \quad <3.7.>$$

A 3.7. kifejezésbe behelyettesítve az általános vizsgáló jel függvényt és a hurokátviteli függvény Bode alakra hozva kapjuk a 3.8. kifejezést.

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{c}{s^k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{s^i} \frac{\prod_{r=1}^R (1 + sT_r)}{\prod_{p=1}^P (1 + sT_p)} \frac{\prod_{s=1}^S (1 + 2DT_s s + T_s^2 s^2)}{\prod_{q=1}^Q (1 + 2DT_q s + T_q^2 s^2)}} \Rightarrow \frac{c}{s^{k-1}} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^i}} \quad <3.8.>$$

Az vizsgáló jelek Laplace transzformáltjait a 2.2. táblázat tartalmazza. Az $c \cdot 1(t)$, $c \cdot t \cdot 1(t)$, és a $c \cdot t^2 \cdot 1(t)$ időtartománybeli vizsgáló jelekre adott állandósult válasz vizsgálata elég a szabályozási kör értékkövetési képességének meghatározásához.

A vizsgáló jelek operátoros alakja $r(s) = \frac{c}{s^k}$, ahol ugrás formájú jel esetén $k=1$, egység sebességugrás esetén $k=2$, és gyorsulásugrás esetén $k=3$.

3. Egyhurkos szabályozási kör

A 3.8. kifejezés alapján az egyhurkos, zárt szabályozási kör értékkövetési képessége a szabályozási kör típuszámától (i), az időtartománybeli vizsgáló jel erősítésétől és típusától (c és k), valamint a hurok átviteli tényező (K) értékétől függ.

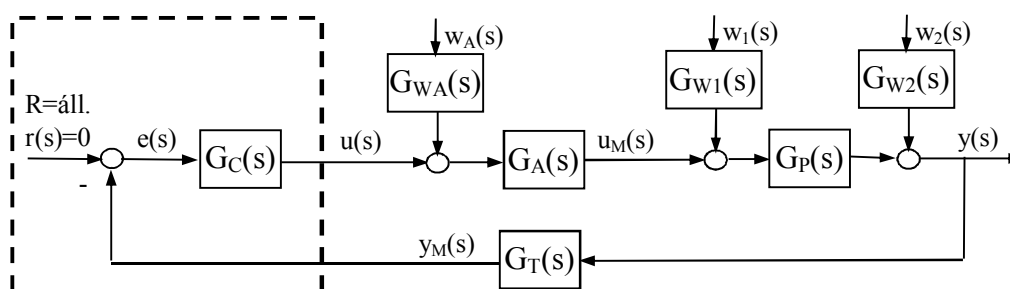
3.1. táblázat. A szabályozási kör értékkövetési képessége

Az alapjel		Szabályozási kör		
		0 típusú	1 típusú	2 típusú
Egység ugrás	$c \cdot 1(t)$	$\frac{c}{1+K}$	0	0
Egység sebességugrás	$c \cdot t \cdot 1(t)$	∞	$\frac{c}{K}$	0
Egység gyorsulásugrás	$c \cdot \frac{t^2}{2} 1(t)$	∞	∞	$\frac{c}{K}$

A táblázatba a 0 jelentése, hogy a tranziens lecsengését követően hibamentesen képes az előírt értéket követni, a ∞ jelentése, hogy egyre távolodik az előírt értéktől a szabályozott jellemző. A véges hibával történő jelkövetés pontossága a vizsgáló jel c erősítésétől és a K hurokátviteli tényezőtől függ.

Az egyhurkos szabályozási kör értéktartási képessége

A zavaró jellemzőknek a támadáspontja általában a részletes szakasz modellen belül van (3.1. ábra). Az egyszerűsített hatásvázlatokon (3.2. és 3.3. ábrák) vagy a szakasz elé, vagy mögé van áthelyezve a zavaró jellemzők támadáspontja.



3.8. Értéktartáskor a lehetséges zavaró jellemző támadáspontok

A végrehajtó berendezés szerveire – például a berendezés tápellátásán keresztül – szintén hathat zavaró jellemző, amit a végrehajtó berendezés előtt szokás a hatásvázlaton ábrázolni.

Megjegyzés: A kompenzáló szerv előtt, a különbségképző szervre ható zavarjellemző nem léphet fel, mert az itt ható zavart nem lehet az alapjeltől megkülönböztetni. Az ipari rendszerekben a szabályozó berendezések mikroprocesszor alapúak, és így a szabályozó berendezés szervei szoftver taszkok, így ez a feltétel könnyen teljesül.

Ha csak az értékkövetés a vizsgálat tárgya, akkor R alapjel állandó és így $r=0$. Ennek megfelelően az egyhurkos, zárt szabályozási kör értékkövetés képességének vizsgálatához elegendő – az 3.2. kifejezésből levezetett – 3.9. kifejezés határértékének vizsgálata.

$$e(s) = G_{ew}(s) \cdot w(s) \quad <3.9.>$$

Az $e(t)$ rendelkező jel –a tranziensek lecsengése után – számszerűen tartalmazza a zavaró jellemző okozta hibát. A hiba meghatározható a végérték meghatározására vonatkozó, határérték tétel segítségével.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{ew}(s) \cdot w(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot w(s) \cdot \frac{G(s)}{1 + G_0(s)} \quad <3.10.>$$

A zavaró jellemző, mint gerjesztő jel, általános alakja $w(s) = \frac{c}{s^k}$. A $G_{ew}(s)$ zavar-, hibajel átviteli függvények számlálójának $G(s)$ értéke függ a zavaró jellemző támadáspontjától. Behelyettesítés és Bode alakra hozás után:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{c}{s^k} \cdot \frac{K_w \frac{1}{s^j} \frac{\prod_{m=1}^M (1 + sT_m)}{\prod_{k=1}^K (1 + sT_k)} \frac{\prod_{n=1}^N (1 + 2DT_n s + T_n^2 s^2)}{\prod_{l=1}^L (1 + 2DT_l s + T_l^2 s^2)}}{1 + \frac{K}{s^i} \frac{\prod_{r=1}^R (1 + sT_r)}{\prod_{p=1}^P (1 + sT_p)} \frac{\prod_{s=1}^S (1 + 2DT_s s + T_s^2 s^2)}{\prod_{q=1}^Q (1 + 2DT_q s + T_q^2 s^2)}} \Rightarrow \frac{c}{s^{k-1}} \frac{\frac{K_w}{s^j}}{1 + \frac{K}{s^i}} \quad <3.11.>$$

A 3.11. kifejezésben a K_w az előre vezető ág erősítése, és „j” számosság index az előre vezető ágba található integráló hatások száma. A 3.11. kifejezés $j > i$ esetén, minden mástól függetlenül a végtelenbe tart. A $j \leq i$ automatikusan teljesül, ha a zavaró jellemzőhöz tartozó átviteli függvényben $G_w(s)$ nincs integráló hatás.

A 3.11. kifejezés alapján az egyhurkos, zárt szabályozási kör értéktartási képessége a szabályozási kör típuszámán (i), az időtartománybeli vizsgáló jel erősítésén és típusán (c, k), valamint a hurokerősítés (K) értékén túl, függ az előre vezető ág erősítésétől (K_w) és az előre vezető ágba található integráló hatások számától (j), vagyis a zavaró jellemző támadáspontjától is.

3.2. táblázat A szabályozási kör értékkövetési képessége

A zavaró jellemző jellege	Szabályozási kör					
	i = 0	i = 1		i = 2		
	j = 0	j = 0	j = 1	j = 0	j = 1	j = 2
$c \cdot 1(t)$	$\frac{c \cdot K_w}{1 + K}$	0	$c \cdot \frac{K_w}{K}$	0	0	$c \cdot \frac{K_w}{K}$
$c \cdot t \cdot 1(t)$	∞	$c \cdot \frac{K_w}{K}$	∞	0	$c \cdot \frac{K_w}{K}$	∞
$c \cdot \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$	∞	∞	∞	$c \cdot \frac{K_w}{K}$	∞	∞

A táblázatba a 0 jelentése, hogy a tranziens lecsengését követően hibamentesen képes az előírt értéket követni, a ∞ jelentése, hogy egyre távolodik az előírt értéktől a szabályozott jellemző.

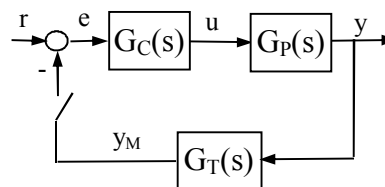
A 3.1. vagy 3.2. táblázatok és a határérték tételek segítségével meghatározható olyan K hurokerősítés, amely biztosítja az adott technológia számára az elegendő pontosságot. Előfordulhat, hogy a zárt szabályozási kör – az így meghatározott K hurokerősítés mellett - már nem stabil.

A visszacsatolt rendszerekben az instabilitást a válaszjel önmagára való visszahatása okozza. Az állítást az alábbi gondolat kísérlettel igazoljuk.

A 3.9. ábrán felnyitott kapcsolóállásban gerjessze a felnyitott hurkot szinuszos $r(t) = \sin \omega t$ alapjel. Addig változtassuk a szinuszos alapjel körfrekvenciáját, amíg a felnyitott hurok végén nem jelenik meg az $y_M(t) = K_{pw} \sin \{\omega_{pw} t - \pi\} = -K_{pw} \sin \omega_{pw} t$ jel.

Ha a kapcsolót zárjuk, a különbségképzés miatt, a rendelkező jel a következő periódus idő alatt $e(t) = \sin \omega_{pw} t + K_{pw} \sin \omega_{pw} t$ értékű lesz.

Nagyok sok (végtelen) periódus idő alatt:



3.9. Az instabilitás magyarázata

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \sin \omega_{pw} t + \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \sin(\omega_{pw} t) \sum_{i=1}^{i \rightarrow \infty} K_{pw}^i \right\} \quad <3.12.a.>$$

$$\text{Ha a } K_{pw} < 1, \text{ akkor } \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i \rightarrow \infty} K_{pw}^i = 0, \text{ és ha } K_{pw} \geq 1, \text{ akkor } \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i \rightarrow \infty} K_{pw}^i = \infty. \quad <3.12.b.>$$

Megjegyzés: Természetesen a fizikai folyamat nem így zajlik, de a gondolat kísérlet jól mutatja, hogy a -180° fázistolásnak, és az egységnyi erősítésnek kitüntetett szerepe van.

3.5. Az egyhurkos, zárt szabályozási kör stabilitása

A stabilitás definíciója: Stabil az egyhurkos szabályozási kör, ha a hurok bármely pontján impulzus jellegű zavarás éri, vagy ha az alapjel változik, akkor véges idő eltelte után, a szabályozott jellemző ismét képes tartani (követni) az alapjel által előírt alapértéket.

Megjegyzés: A fenti stabilitás kritérium csak lineáris rendszerekre igaz. A nem lineáris szabályozási akkor kör stabil, ha véges idő eltelte után, egy megengedett tolerancia sávon belül ingadozva, képes ismét tartani (követni) az alapjel által előírt alapértéket, miután a hurok valamely pontján impulzus jellegű zavarás érte.

3.5.1. A stabilitás vizsgálat a szabályozási kör differenciálegyenlete alapján

A $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvény inverz Laplace transzformációja a zárt szabályozási kör differenciál egyenletét. A differenciál egyenletet impulzus (Dirac delta $\delta(t)$) gerjesztésre megoldva kapjuk meg a tranziens viselkedést.

Megjegyzés: Ha feltétezzük, hogy a $G_W(s)$ jelátvivő tag (3.8. ábra) nem tartalmaz integráló hatást, akkor az alapjel átviteli függvény előre vezető ága tartalmazza a legtöbb integráló hatást egy adott szabályozási körben, ezért a hurok bármely más pontján támadó zavarimpulzus hatása kisebb.

Ha a $G_W(s)$ jelátvivő tag tartalmaz integráló hatást, akkor a zavar támadás pontja előtt legalább egy integráló hatásnak kell lennie, mert különben képtelen a zavaró jellemző hatását csökkenteni. Ha van integráló hatás a zavar támadás pontja előtt, akkor megint elegendő a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvény vizsgálata.

A zárt szabályozási kör karakterisztikus egyenlete a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvényből úgy kapható meg, hogy először az alapjel átviteli függvényt polinom tört alakra kell hozni (3.13.a. kifejezés), majd azt rendezve kapjuk a 3.13.b. kifejezést.

$$G_{yr}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad <3.12.a.>$$

$$a_n s^n y(s) + \dots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = b_m s^m r(s) + \dots + b_1 s r(s) + b_0 r(s) \quad <3.13.b.>$$

Ezután a 2.1. táblázat szabályait alkalmazva az átviteli függvényből előáll a differenciálegyenlet.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \quad <3.14.>$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad <3.15.>$$

Az LTI differenciálegyenlet tranziens összetevőjének megoldása a 3.16. kifejezés, ahol p_i a karakterisztikus egyenlet gyökei és c_i a karakterisztikus egyenlet együtthatóitól függő konstans tényezők.

$$y_{\text{trnziens}}(t) = \sum_{i=0}^n c_i e^{p_i t} \quad <3.16.>$$

A p_i gyökök valós számok, illetve konjugált komplex szám párok. Ha a p_i gyökök reális része negatív, akkor véges idő elteltével a differenciálegyenlet tranziens válaszfüggvénye a mérnöki gyakorlat szempontjából nulla.

Megjegyzés: A differenciálegyenlet megoldása – különösen $n \geq 3$ esetén – nehézkes volt. A papír-ceruza módszer másik komoly problémája az volt, hogy a paraméterváltoztatások (például a K hurokerősítés növelése) konkrét várható hatása nem volt jól megbecsülhető. Ezen a számítógépes matematikai programok segítettek. Azonban a mérnöki gyakorlatban, a felhalmozódott gyakorlati tapasztalatok okán, továbbra is a körfrekvencia tartománybeli vizsgálatok az elterjedtebbek.

Vegyük észre, hogy jelátvivő tag dinamikus viselkedését leíró differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei, és a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvény nevezőjének gyökei azonosak!

$$\begin{aligned} a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 &= 0 \\ a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 &= 0 \end{aligned} \quad <3.17.>$$

3.5.1. A stabilitás vizsgálat a szabályozási kör alapjel átviteli függvénye alapján

A 3.18. kifejezés a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvény polinom tört és gyök tényező alakjai. A számláló gyökeit zérusoknak (a jele: z), a nevező gyökeit pólusoknak (a jele: p) nevezi a szakirodalom.

$$G_{yr}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = K_{zp} \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_1)} \quad <3.18.>$$

Definíció: Stabil az egyhurkos szabályozási kör, ha a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvény pólusai negatív valós részűek. A stabilitás határhelyzete, ha a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvénynek van pólusa az imaginárius tengelyen.

A polinom tört alak nevezőjének gyökei, vagyis a pólusok, azonosak a zárt szabályozási kör differenciál egyenletének tranziens megoldását adó karakterisztikus

egyenlet gyökeivel (3.17. kifejezés). Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei negatív valós részűek, akkor a zárt szabályozási kör differenciálegyenletének tranziens része – elegendő idő elteltével – elhálnak. Ha a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvénynek van pólusa az imaginárius tengelyen, akkor Dirac delta gerjesztés hatására állandósul amplitúdójú szinuszos lengés alakul ki a szabályozott jellemző értékében.

A **pólus-zérus elrendezés** (pole-zero map) a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvény pólusainak és zérusainak az ábrázolása a komplex számsíkon. A szakirodalomban a pólusoknak „x”, a zérusoknak „o” a jelképe. Az alapjel átviteli függvény pólus-zérus elrendezéséből azonnal leolvasható, hogy stabil-e a zárt szabályozási kör, vagy sem.

Egyszerűsített stabilitás definíció: Stabil az egyhurkos szabályozási kör, ha a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvény pólusai a komplex számsík baloldalon vannak.

Ha a zárt szabályozási kör valamely paramétere, leggyakrabban a K hurokátviteli tényezője kismértékben megváltozik, akkor a pólusok és a zérusok értékei is kismértékben módosulnak. Az adott paraméter, például K hurokerősítés függvényében a pólus és a zérus értékek vándorlását a komplex számsíkon leíró görbének **gyökhely görbe** (pole-zero loci) a neve.

A gyökhely segítségével meghatározható, hogy mely paraméter értéknél metszi görbe az imaginárius tengelyt. Az ehhez a metszésponthoz tartozó hurokerősítés érték a K_{krit} kritikus hurokerősítés.

Megjegyzés: A zérusok száma és elhelyezkedése a gyökhely görbe alakját befolyásolja.

A 3A Melléklet első példája egy a $G_{yr}(s)$ alapjel átviteli függvény alapján történő stabilitás vizsgálat.

3.5.2. A stabilitás vizsgálat a felnyitott hurok átviteli függvénye alapján

A felnyitott hurok $G_0(j\omega)$ körfrekvencia átviteli függvénye frekvencia tartománybeli méréssel és a közelítő átmeneti függvénye időtartománybeli méréssel meghatározható (2C Melléklet). A közelítő átmeneti függvényből a $G(s)$ közelítő átviteli függvény határozható meg. Az ipari gyakorlatban nagyon gyakran csak ilyen fekete doboz elven meghatározott modellünk van.

Akár a fizikai, kémiai egyenletekből (2B Melléklet), akár méréssel történik a szabályozási hurokban szereplő jelátviteli tagok átviteli függvényeinek meghatározása, az eredmény a $G_0(j\omega)$ felnyitott hurok körfrekvencia átviteli függvény.

A $G_0(j\omega)$ felnyitott hurokátviteli függvényből a stabilitás precíz meghatározásához – a komplex függvényanalízis szabályai felhasználásával – Nyquist által kidolgozott kritériumokra van szükség.

Megjegyzés: Az analitikus bizonyításokban felhasznált reziduum és az argumentum tételek a komplex számsíkon körintegrált alkalmaznak, és olyan függvényekre igazak, amelyekben a komplex változó értelmezési tartománya a komplex számsík. Ezért Nyquist kiegészítette a vizsgált $G_0(j\omega)$ hurok átviteli körfrekvencia függvényt a fiktív $-\omega$ körfrekvenciákon értelmezett görberésszel.

A $-\omega$ körfrekvenciákon értelmezett görberész a reálistengelyre vetített tükörképe a fizikai ω körfrekvenciákon értelmezett görberésznek. Az így értelmezett $G_0(j\omega)$ a teljes hurokátviteli körfrekvencia függvény. A két görberész együtt vagy valódi zárt görbét alkot. A zárt görbén a körfrekvencia az $\omega=+0$ érték egy komplex számsík pontból indulva, az $\omega=\pm\infty$ ponton keresztül - ami mindig az origóban van - az $\omega=-0$ értékhez a kiindulási komplex számsík ponthoz tart, és így zárt görbét alkot.

Az argumentum tétel alkalmazhatóságának feltétele, hogy a komplex számsíkon a bal félsíkra essenek a vizsgált függvény gyökei. Ez stabil szabályozási kör esetén az $f(s)=1+G_0(s)$ függvényre teljesül. Az argumentum tétel vonatkoztatási pontja az origó. Ha a vonatkoztatási pontot a $(-1, j0)$ pontba transzformáljuk, akkor a vizsgált függvény a $G_0(j\omega)$ lesz. Ezen jegyzetben a matematikai részt kihagyva csak ökölszabályszerűen kerülnek ismertetésre a stabilitási kritériumok.

Minimál-fázisú rendszernek nevezik az olyan $G_0(j\omega)$ felnyitott hurokátviteli függvénnyel rendelkező szabályozási kört, amely $G_0(j\omega)$ felnyitott hurokátviteli függvényének nincs pozitív valósrésű gyöke (pólusa és zérusa).

Megjegyzés: A Bode diagramot csak minimál-fázisú átviteli függvény esetén lehet készíteni. Ezért a nem minimál-fázisú $G_0(j\omega)$ felnyitott hurokátviteli függvény csak Nyquist diagramon, a Nyquist stabilitási kritériummal vizsgálható.

A Nyquist és a Bode diagram ugyanazon $G_0(j\omega)$ felnyitott hurok átviteli körfrekvencia függvényt más koordináta rendszerben ábrázolja.

Emlékeztető:

A Nyquist diagram a $G_0(j\omega)$ hurok átviteli körfrekvencia függvényt komplex számsíkon ábrázolja. A Bode diagram az Euler szabályt alkalmazva külön ábrázolja az amplitúdó átvitelt $A(\omega)$ és a fázis menetet $\varphi(\omega)$.

A fázistolást azonos dimenziójú [fok] a Nyquist és a Bode diagramon.

A dimenzió nélküli amplitúdó átvitelt más léptékkel - a Nyquist diagramon az $A(\omega)=|G(j\omega)|$, a Bode diagramon az $20\log A(\omega)$ - van ábrázolva.

A Nyquist görbén az ω körfrekvencia léptékeztetése lineáris, a Bode diagramon az amplitúdó menet és a fázis menet - egymással összhangban - logaritmikus léptékeztetű ω tengelyen van ábrázolva.

A Nyquist diagramon kulcsszerepet játszó $(-1, j0)$ vonatkoztatási pontnak, a Bode diagram amplitúdó diagramján a 0 dB-es tengely, és a Bode diagram fázis diagramján a -180° -os fázistolás felel meg.

Először a minimál-fázisú rendszerek stabilitás vizsgálatát tekintjük át. A következő szakkifejezéseket alkalmazzuk a definíciókban.

Annak az ω_p körfrekvenciának, ahol a felnyitott hurok fázistolása $-\pi = -180^\circ$ **fázis-keresztvezőési körfrekvencia** (phase crossover frequency) a neve.

Annak az ω_c körfrekvenciának, ahol az amplitúdó átvitel egységnyi vagyis a hurokerősítés értéke $K(\omega_c) = 1$, **amplitúdó-keresztvezőési körfrekvencia** (gain crossover frequency) a neve. A magyar szakirodalomban az amplitúdó-keresztvezőési körfrekvenciának **vágási körfrekvencia** a neve.

A $G_0(j\omega)$ felnyitott hurok körfrekvencia átviteli függvény alapján történő stabilitás vizsgálathoz célszerű bevezetni az **erősítés tartalék** (gain margin), és a **fázistartalék** (phase margin) fogalmait.

Ha $gm > 1$, akkor a szabályozási körnek van erősítéstartaléka. Az gm erősítés tartalék a fázis-keresztvezőési körfrekvenciák közül értékben legnagyobbán az $a(\omega_{pmax})$ amplitúdó átvitel reciprok értéke.

$$gm = \frac{1}{a(\omega_{pmax})} \quad <3.20.>$$

Megjegyzés: Az $a(\omega_{pmax})$ amplitúdó átvitel értéke a Nyquist diagramon a $G_0(j\omega)$ hurokátviteli körfrekvencia függvény aktuális körfrekvencia pontjának az origótól mért távolsága. A Bode diagramon, az amplitúdó meneten az ω_{pmax} körfrekvencia értéknél decibelben olvasható le.

Ha $pm > 0$, akkor a szabályozási körnek van fázistartaléka. Az pm fázistartalék minden vágási körfrekvenciákhoz tartozó $\varphi(\omega_{ck})$ fázistolás távolsága a -180° -os fázistolástól.

$$pm_k [^\circ] = \varphi(\omega_{ck}) [^\circ] - (-180) [^\circ], \text{ ahol } k = 1, 2, \dots, k \quad <3.21.>$$

Megjegyzés. A $\varphi(\omega_{ck})$ fázistolások értéke Nyquist diagramon a $G_0(j\omega)$ hurokátviteli körfrekvencia függvény és az egységsugarú kör metszéspontjaihoz tartozó vektoroknak a reális tengely által bezárt szögei. A Bode diagramon az aktuális ω_{ck} körfrekvenciákon a fázis menetről leolvasható fázistolások. A mérnöki gyakorlatban előforduló szabályozási körök többségében, a $G_0(j\omega)$ felnyitott hurok átviteli függvénynek csak egy-egy vágási és fázis-keresztvezőési körfrekvenciája van.

Bode stabilitási kritérium: A zárt szabályozási kör stabil, ha a felnyitott hurok átviteli függvény ω_p fázis-keresztvezőési körfrekvenciáján az amplitúdó átvitel $a(\omega_p) < 1$, és az ω_c vágási körfrekvencián (amplitúdó-keresztvezőési körfrekvencián) a körfrekvenciához tartozó fázistolás $\varphi(\omega_c)$ nem éri el a -180° -ot.

Ha több fázis-keresztvezőési körfrekvencia van, akkor elegendő, ha a legnagyobb értékűnél teljesül a feltétel. Ha több vágási körfrekvencia van, akkor mindegyiknél teljesülnie kell a feltételnek

Egyszerűsített stabilitás definíció: Ha a szabályozási kör hurokátviteli függvényének van fázistartaléka és van erősítés tartaléka, akkor stabil.

A 3A Melléklet 2. példája egy $G_0(j\omega)$ hurok átviteli függvény Bode kritérium alapján történő stabilitás vizsgálata.

Nyquist stabilitási kritérium: A zárt szabályozási kör stabil, ha a $G_0(j\omega)$ felnyitott hurok átviteli körfrekvencia függvény komplex számsíkon fekvő görbéjén indulva az $\omega = 0$ értéktől, az $\omega = \pm\infty$ ponton keresztül haladva az $\omega = -0$ felé, a $(-1, j0)$ pont bal kézre esik. A stabilitás határhelyzete, ha a $G_0(j\omega)$ felnyitott hurokátviteli körfrekvencia függvény görbéje áthalad a $(-1, j0)$ ponton.

A teljes Nyquist stabilitás kritérium: A zárt szabályozási kör stabil, ha a teljes $G_0(j\omega)$ felnyitott hurokátviteli körfrekvencia függvény komplex számsíkon fekvő, a $\pm\omega$ körfrekvencia tartományon értelmezett görbéje, az $\omega = +0$ értéktől indulva, az $\omega = \pm\infty$ ponton keresztül haladva az $\omega = -0$ felé, N_p alkalommal kerüli meg az óramutató járásával ellentétes irányban a $(-1, j0)$ pontot. Az N_p a pozitív valósrésű pólusok száma. A stabilitás határhelyzete, ha a $G_0(j\omega)$ felnyitott hurokátviteli körfrekvencia függvény görbéje áthalad a $(-1, j0)$ ponton.

Megjegyzés: Ha $N_p = 0$, akkor a $(-1, j0)$ pontot a teljes görbének balkézről kell elkerülnie, vagyis a minimál fázisú rendszerekre megadott Nyquist stabilitási kritérium érvényes.

A 3A Melléklet 3. példája egy minimál fázisú hurokátviteli függvény stabilitás vizsgálata a Nyquist kritérium alapján és a 4. példája egy nem minimál fázisú hurokátviteli függvény stabilitás vizsgálata a teljes Nyquist kritérium alapján.

3.6. Az egyhurkos, zárt szabályozási kör minőségi jellemzői

A szabályozási kör – működési elvéből adódóan – átmeneti (tranziens) időre eltér az előírt értéktől. A gyakorlati alkalmazásokban, a berendezés vagy technológia ki-elégítő működése érdekében a tranziens lejátszódásának (elhalásának) időtartama és az előírt értéktől való maximális és/vagy állandósult eltérés egyaránt fontos paraméter.

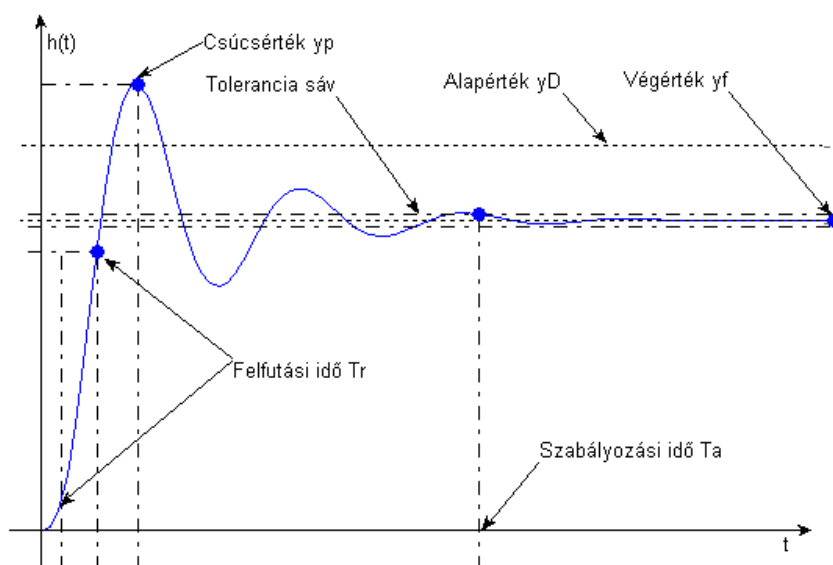
Az értéktartási és követési képesség, valamint a stabilitási vizsgálatok a tranziensek lecsengése utáni állandósult (statikus) állapotot tanulmányozzák.

A tranziensek vizsgálatához a szabályozási kör dinamikus jelátvitelét kell tanulmányozni. A szabályozási kör dinamikus jelátvitelének tulajdonságainak leírásához definiáltak minőségi jellemzőket az idő tartományban.

Megjegyzés: Egy adott berendezés vagy technológia működését az időtartományban érzékeljük, ezért a zárt szabályozási kör operátoros és vagy körfrekvencia tartománybeli alapjel átviteli függvényéből is az időtartománybeli minőségi jellemzőket akarjuk meghatározni.

3.6.1. A minőségi jellemzők az időtartományban

Ha az egyhurkos, zárt szabályozási kör az (R_1, Y_1) stabil munkapontban működik, és a bemenetét $R_1+r(t)$ alapjel gerjeszti, ahol $r(t)$ ugrás jellegű, akkor az $Y_1+y(t)$ szabályozott jellemző mérhető a kimenetén. Az időtartományban a minőségi jellemzőket az $r(t)$ ugrás jellegű gerjesztő jelre adott $y(t)$ válaszfüggvény, más szavakkal a zárt szabályozási kör átmeneti függvényének dinamikai jellemzőire definiálták.



3.10. Lengéses beállású zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

A 3.10. ábrán a válaszfüggvényről leolvasható, illetve megszerkesztendő (alapérték, tolerancia sáv) vannak feltüntetve. (Az ábrán a betűkódok a Matlab korlátai miatt térnek el a jegyzetben használt jelölésektől.)

- ♦ A $h(\infty)$ **végérték** (final value) a zárt szabályozási kör új állandósult állapota (a 3.10. ábrán y_f). Az Y_D **alapérték** (előírt érték, a 3.10. ábrán y_D), ahová a szabályozott jellemzőnek be kellett volna állnia. Az alapérték és a végérték különbsége az $y_h = Y_D - h(\infty)$ szabályozási hiba, avagy a **maradó szabályozási eltérés** (remaining error, steady-state error). Az $h(\infty)$ végérték, az Y_D alapérték, és az y_h maradó szabályozási eltérés közül csak a y_h szabályozási hiba a minőségi jellemző.
- ♦ A mérnöki gyakorlatban az $\pm 5\%$ a megengedett maximális **tolerancia sáv** (tolerance band), ami a végérték 95%-a és 105%-a közötti sáv (A3.10. ábrán $\pm 2\%$). A tolerancia sáv szélességét a technológiai igény határozza meg.
- ♦ A T_a **szabályozási idő** (settling time) a szabályozott jellemző értékének tartósan a tolerancia sávon belülre kerüléséhez szükséges idő (a 3.10. ábrán T_a). A T_a sza-

3. Egyhurkos szabályozási kör

bályozási idő értéke függ a választott tolerancia sáv értéktől is. A szabályozási idő minőségi jellemző.

Megjegyzés: Bármely önbeálló jelátviteli taghoz rendelhetünk tolerancia sávot. Ha nem zárt szabályozási kört vizsgálunk, akkor a tolerancia sávon belülre kerüléshez szükséges időt beállási időnek nevezik.

- ♦ A tolerancia sávot szokás a dinamikai pontosság $\Delta_{\%} = \frac{h(T_a) - h(\infty)}{h(\infty)} 100\%$ megadásával definiálni.
- ♦ A $h(T_p)$ **csúcsérték** az átmeneti függvény maximális értéke, ahol T_p a csúcsérték elérésének időpontja.
- ♦ Az M_p **túllendülés** (overshoot) a szabályozási kör minőségi jellemzője. A túllendülés, avagy túllövés az $M_p \% = \frac{h(T_p) - h(\infty)}{h(\infty)} 100\%$ kifejezéssel számítható ki.

Megjegyzés: A $h(T_p) < h(\infty)$ esetén a túllendülés értéke nulla, akkor is, ha a zárt szabályozási kör átmeneti függvényének van lokális maximuma. Számos szakkönyv $\delta\%$ -al jelöli a túllendülést.

- ♦ A T_r **felfutási idő** (rising time) az átmeneti függvény kezdeti nagy meredekségű szakaszán a $h(\infty)$ végérték 10%-kától, a végérték 90%-káig jutáshoz szükséges időtartam. A felfutási idő minőségi jellemző.

Megjegyzés: Lehet eltérő alsó és felső határt definiálni, de akkor ezt külön jelezni kell. A felfutási időt emelkedési időnek is nevezik.

- ♦ A v **lengés szám** (oscillation's number). A T_a szabályozási időn belüli lengési periódusok száma, vagyis a végértéken való első áthaladástól a fölé-lendületek száma. A lengés szám minőségi jellemző.
- ♦ A d **csillapítási tényező** (damping). A d csillapítási tényező a második és az első túllendülés arányát adja meg. A csillapítási tényező minőségi jellemző.

Megjegyzés: A folyamat-, és a gyártásautomatizálásban a maradó szabályozási eltérés, a szabályozási idő, és a túllendülés a leggyakrabban vizsgált minőségi jellemzők. Mechanikai, áramlástechnikai rendszerekben a lengés szám korlátozása is fontos. A híradástechnikában van jelentősége a felfutási időnek és a csillapítási tényezőnek.

Az aperiodikus beállású szabályozási kör átmeneti függvénye nem tartalmaz túllendülést. Így a lengő hajlamhoz tartozó minőségi jellemzők nem értelmezhetők (csillapítási tényező) vagy nullaértékűek (túllendülés, lengésszám). A többi minőségi jellemző (maradó szabályozási eltérés, a szabályozási idő, a felfutási idő) azonosak a már tárgyalt lengő hajlamú válaszfüggvényénél (3.10. ábra) bemutatottakkal.

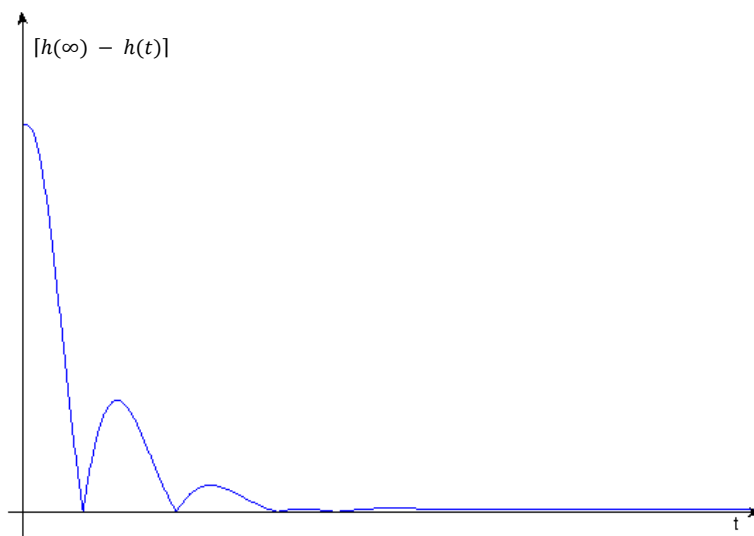
A leggyakrabban előforduló feladat, hogy minél kisebb T_a szabályozási idő és korlátozott az M_p túllendülés mellett, a valóságos $y(t)$ szabályozott jellemző és az előírt Y_D alapérték közötti eltérés minél kisebb legyen. A kompenzáló tag megválasztásához és paramétereinek optimalizálásához fontos, hogy a különböző minőségi szempontokat egy jellemző tartalmazza. Ez a minőségi jellemző az integrál kritérium. Az integ-

rál kritérium meghatározása azonos lengő jellegű és aperiodikus beállítás esetén. A számítási mód alapján az integrál kritériumoknak külön nevet adtak.

♦ Abszolút érték hibaterület (IAE). Abszolút integrál kritérium

$$I_{AE} = \int_0^{\infty} |h(\infty) - h(t)| dt, \text{ vagy } \int_0^{\infty} |y(\infty) - y(t)| dt \quad <3.22.a.>$$

Az Y_D alapérték helyett a $y(\infty)$ ($1(t)$ gerjesztés esetén $h(\infty)$) van a 3.22. egyenletekben, hogy a maradó szabályozási eltérés ne torzítsa az eredményt.



3.10. A végérték és a válaszfüggvény különbségének abszolút értéke.

Az abszolút integrál kritérium torzításmentes, de az analitikus elemzésekben nem lehetett alkalmazni.

Az analitikus elemzésekben elsődlegesen a négyzetes integrál kritériumot (ISE) – amit szokás effektív integrál kritériumnak is nevezni – alkalmazták.

A 3.11. ábrán a négyzetes és az abszolút integrál kritérium argumentumai (integrálandó függvényei) láthatók.

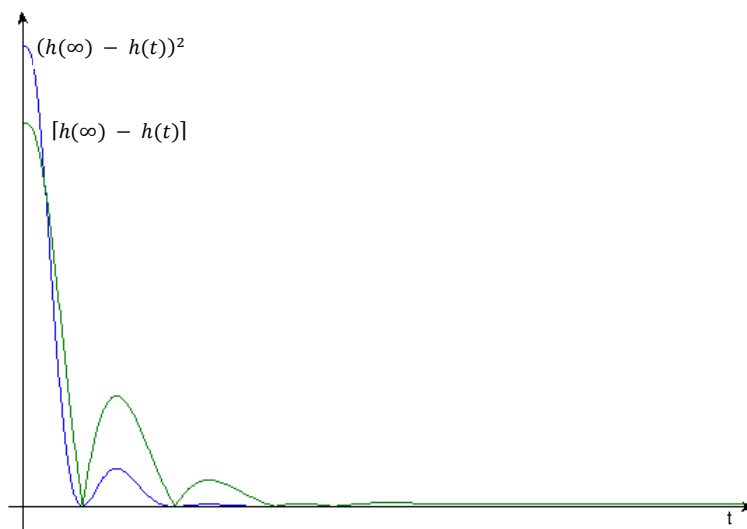
♦ Négyzetes hibaterület (ISE). Négyzetes integrál kritérium.

$$I_{QS} = \int_0^{\infty} (h(\infty) - h(t))^2 dt, \text{ vagy } I_{QS} = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t))^2 dt \quad <3.22.b.>$$

Megjegyzés: A számítógépes optimalizáló programok integrál szummát alkalmaznak, így nem gond az IAE nulla értékeit meghatározni az integráláshoz.

A négyzetes integrál kritérium – az abszolút integrál kritériumhoz képest – kiemeli a kezdeti, egynél nagyobb amplitúdójú eltérést és alulértékeli a túllendüléseket

és a hosszú idő elteltével is fennálló eltérést. E torzítás csökkentésére az idővel súlyozott integrál kritériumot javasolták alkalmazni.



3.11. Az IAE és az ISE integrál kritériumok argumentumai.

◆ Idővel súlyozott négyzetes hibaterület (ITQE)

$$I_{TQS} = \int_0^{\infty} (h(\infty) - h(t))^2 \cdot t^{\alpha} dt, \text{ vagy } I_{QS} = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t))^2 \cdot t^{\alpha} dt \quad <3.23.c.>$$

Probléma, hogy az α kitevő megválasztására nem sikerült általánosan alkalmazható ajánlás találni. Előnye viszont, hogy a szabályozás elvéből adódóan mindenképpen fellépő nagy a kezdeti hiba nincs túlsúlyozva.

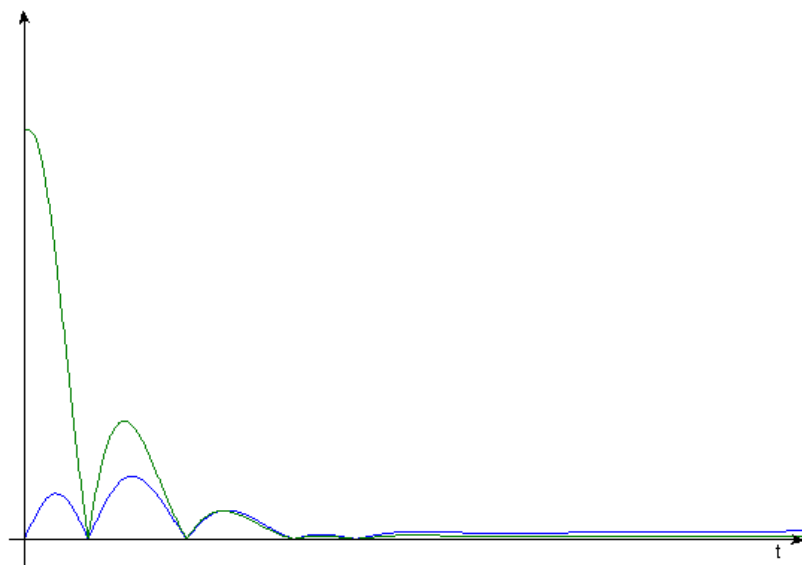
◆ Idővel súlyozott abszolút érték hibaterület (ITAE)

$$\int_0^{\infty} |h(\infty) - h(t)| \cdot t dt, \text{ vagy } \int_0^{\infty} |y(\infty) - y(t)| \cdot t dt \quad <3.23.d.>$$

A 3.12. ábrán az abszolút és az idővel súlyozott abszolút integrál kritériumok argumentumai (integrálandó függvényei) láthatók.

Az idővel súlyozás jelentősen csökkenti a nagy kezdeti eltérést, és kisé növeli a hosszú távú eltérések hatását.

Minthogy a kezdeti nagy eltérés szükségszerűen fellép és a szabályozási idő minimalizálása cél, a legjobb paramétereket az idővel súlyozott abszolút integrál kritériummal történő optimalizálás szolgáltatja.



3.12. Az IAE és az ITAE argumentumai.

3.6.2. Az időtartománybeli minőségi jellemzők becslése a zárt szabályozási kör körfrekvencia függvénye alapján

A zárt szabályozási kör $G_{yr}(j\omega)$ alapjel átviteli körfrekvencia függvényének $|G_{yr}(j\omega)|$ amplitúdó menete méréssel felvehető, és így meghatározható a kezdeti amplitúdó átvitel $|G_{yr}(0)|$, a maximális kiemelés (peak gain) $|G_{yr}(\omega_{pg})|$, ahol az ω_{pg} a zárt szabályozási kör körfrekvencia átviteli függvényén a maximális kiemeléshez tartozó körfrekvencia. A T_a szabályozási idő és az M_p túllendülés megbecsülhető a zárt szabályozási kör körfrekvencia átviteli függvényének amplitúdó menetéből.

A T_a szabályozási idő becslése:

$$T_{a5\%} \approx \frac{3}{\omega_{pg}} \quad <3.24.>$$

Az M_p túllendülés becslése:

$$\begin{array}{lll} M_m \geq 1.5 & 1.25 < M_m < 1.5 & M_m \leq 1.25 \\ \frac{h(T_p)}{h(\infty)} \leq M_m - 0.1 & \frac{h(T_p)}{h(\infty)} \approx M_m & \frac{h(T_p)}{h(\infty)} < M_m \end{array} \quad <3.25.>$$

Az M_m az amplitúdó menet kiemelése a maximális mínusz a kezdeti amplitúdó átvitel:

$$M_m = |G_{yr}(\omega_{pg})| - |G_{yr}(0)| \quad <3.26.>$$

A M_m decibel értéket át kell váltani dimenzió nélküli erősítés értéké! Az átmeneti függvény végértéke $h(\infty)$ és a kör körfrekvencia diagram amplitúdó menetének kezdeti dimenzió nélküli erősítés értéke $|G_{yr}(0)|$ azonos. A $h(T_p)$ a zárt szabályozási kör átmeneti függvényének csúcserőssége. A vágási körfrekvencia, és a zárt szabályozási kör ω_{pg} körfrekvencia között az összefüggés: $\omega_c \approx \omega_{pg}$.

A 3A Melléklet 5. példája egy $G_{yr}(j\omega)$ alapjel átviteli függvény paramétereiből becsli meg az időtartománybeli minőségi jellemzőket.

3.6.3. Az időtartománybeli minőségi jellemzők közelítő meghatározása a zárt szabályozási kör pólusai alapján

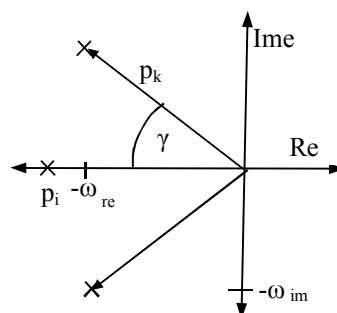
Amint azt a 3.17. kifejezés mutatta a zárt szabályozási kör pólusai azonosak a zárt szabályozási kör dinamikáját leíró differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökeivel, és így meghatározzák a transziens viselkedést.

Az 3.16. kifejezés $y_{trnziens}(t) = \sum_{i=0}^n c_i e^{p_i t}$ egyenletből minden időtartománybeli minőségi paraméter kiszámítható.

Különösen több pólus esetén a számítás munkaigényes. Ezért az alapesetek jól memorizálható eredményeit megadják (3.4. táblázat).

A táblázat a 3.13. ábra jelöléseit alkalmazza. A konjugált komplex gyökpár:

$$p_{1,2} = -\omega_{re} \mp j\omega_{im}$$



3.13. Pólusok elhelyezkedése

3.4. táblázat Az időtartománybeli minőségi jellemzők, és a zárt szabályozási kör pólusai közötti összefüggések.

Egyetlen reális pólus esetén $T_1 = \frac{-1}{p_1}$	$T_{a2\%} = 4 \cdot T_1, \quad T_{a5\%} = 3 \cdot T_1$
Több, k független reális pólus esetén $T_i = \frac{-1}{p_i}$	$T_{a2\%} = 5 \cdot \sum_{i=1}^k T_i, \quad T_{a5\%} = 4 \cdot \sum_{i=1}^k T_i$
Komplex pólus pár esetén $T_1 = \frac{1}{ -\omega_{re} + j\omega_{im} }$ és $T_1 = \frac{1}{ -\omega_{re} - j\omega_{im} }$	$T_{a2\%} = 5 \cdot (T_1 + T_2),$ $T_{a5\%} = 4 \cdot (T_1 + T_2),$ $M_p = e^{-\pi \cdot \text{ctg} \gamma}$

4. Kompenzálás

A kompenzálás célja a zárt szabályozási kör minőségi jellemzőinek a javítása. A kompenzálás céljából adódóan, csak stabil zárt szabályozási kört eredményező kompenzálás lehet megfelelő.

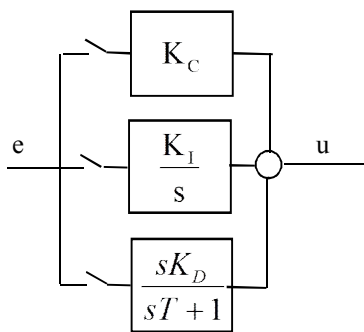
A klasszikus szabályozás elméletén alapuló szabályozásokban a legelterjedtebb a PIDT jelformáló tag struktúra. A mindennapi szóhasználatban, katalógusokban PID szabályozónak (three term controller) hívják.

Az általános célú ipari szabályozó berendezésekben a P, I, DT1 hatások párhuzamos csatornáknak vannak megvalósítva. A csatornák ki-, és bekapcsolhatók, hogy a szabályozandó szakasz igényének megfelelően variálható legyen a szabályozó berendezés jellege. Más szavakkal. A szabályozandó szakasz paramétereitől függ, hogy mely csatornákat hasznos bekapcsolni.

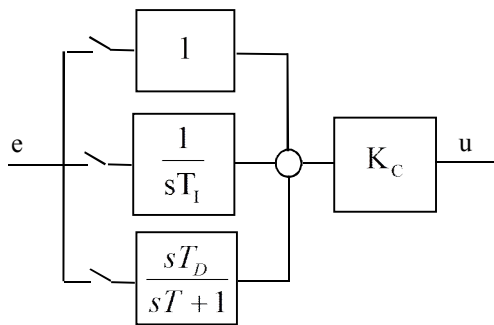
Elsődlegesen áramkörtechnikában alkalmazzák, de a mintavételes szabályozásokban, az iparban is előfordul a PIPDT jelformáló tag struktúra, ami párhuzamosan kapcsolt PI és PDT soros eredője.

4.1. A PIDT kompenzáló tag

A hurokerősítés növelésére szolgáló P arányos, a maradó szabályozási eltérés mérséklését, megszüntetését szolgáló I integráló, és a fázistartalék növelésével a szabályozási kör gyorsítását szolgáló DT1 differenciáló hatást tartalmaz.



4.1.a. Amerikai PIDT



4.1.b. Európai PIDT

$$G_C(s) = K_C + \frac{K_I}{s} + \frac{sK_D}{sT + 1} \quad <4.1.a.>;$$

$$G_C(s) = K_C \left\{ 1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{sT + 1} \right\} \quad <4.1.b.>$$

4. Kompenzálás

A PIDT kompenzáló tag paraméterei kétféle – amerikai (4.1.a. ábra) és európai (4.1.b. ábra) – struktúra szerint adhatók meg. A hagyományosan kialakult kétféle felírási mód között szoros kapcsolat van.

Együttható összehasonlítással a K_C arányos erősítés (proportional gain) azonos mindkét felírási módban. A T_I integrálási idő (integral time, reset time) fordítottan arányos a K_I integrálási tényezővel (reset rate).. A T_D differenciálási idő (derivative time, repeat time) arányos a K_D differenciálási tényezővel (repeat rate).

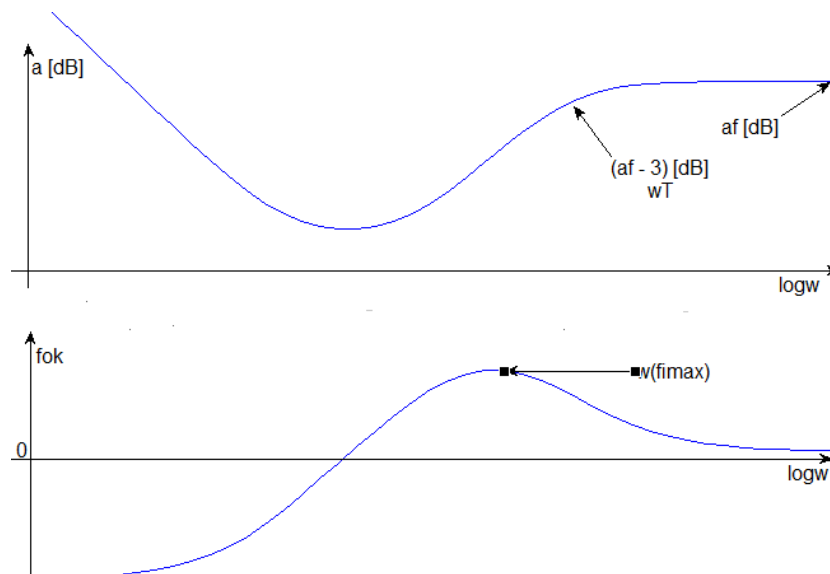
$$K_C = K_C; \quad T_I = \frac{K_C}{K_I}; \quad T_D = \frac{K_C}{K_D}; \quad A_D = \frac{T_D}{T} \geq 5 \quad <4.2.>$$

A jegyzet az európai felírási módot használja. Az európai struktúrában a kompenzálási időállandók csak az alábbi relációkat betartva választhatók.

$$T_I \geq 4 \cdot T_D; \quad T_D \geq 5 \cdot T; \quad <4.3.>$$

A 4.3. kifejezéssel megadott időállandó relációk oka a PIDT jelátvivő tag Bode diagramja alapján érthető meg (4.2. ábra).

Megjegyzés: A 4.2. ábrán a konkrét φ_{max} és $\omega(\varphi_{max})$ érték a T_I , T_D , és T időállandók arányától (4.3. kifejezés) függ.



4.2. ábra. A PIDT kompenzáló tag Bode diagramja

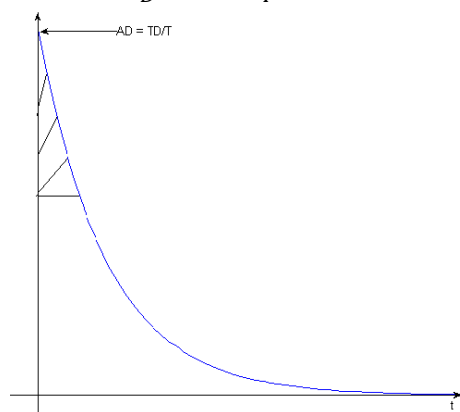
4. Kompenzálás

Az integráló hatás az állandósult állapotbeli hibát csökkenti vagy szünteti meg, vagyis az alacsony körfrekvenciákra kell hatnia, ezért a T_I a legnagyobb időállandó, az ω_I a legkisebb körfrekvencia és a fenti jelleg érdekében $\omega_D \geq 4 \cdot \omega_I$.

Differenciáló hatás csak egy frekvenciasávban valósítható meg. A differenciáló jellegű tartomány annál nagyobb, minél távolabb van egymástól az ω_D , és az ω_T (a távolság legalább $\omega_T \geq 5 \cdot \omega_D$).

Az A_D **differenciálási erősítés** (4.2. kifejezés) növelésének határt szab az u végrehajtó jel véges volta. A 4.3. ábrán jól látható, hogy az u végrehajtó jel véges értéke miatt, a vonalkázott terület energia tartalma elvész.

Megjegyzés: Az ipari rendszerekben az A_D szokásos értéke: {5–20} között van. Áramkörtechnikában lehet jóval nagyobb.



4.3. ábra.

A DT jelátvivő tag átmeneti függvénye

P kompenzálás esetén csak az arányos csatorna van bekapcsolva. A P kompenzálás az integráló jellegű eredő szakaszok kompenzálásához ajánlott.

I kompenzálás esetén csak az integráló csatorna van bekapcsolva. Az I kompenzálás a nagyon nagy holtidővel rendelkező eredő szakaszok kompenzálásának egyetlen lehetséges módja a klasszikus PIDT struktúrával.

D kompenzálás nem létezik. Állandósult állapotban a D hatás felszakítja a szabályozási kört, ami ellentmond a szabályozás céljának.

PI kompenzálás esetén az arányos és az integráló csatorna van bekapcsolva. PI kompenzálás az önbeálló jellegű eredő szakaszok kompenzálásához javasolt.

PDT kompenzálás esetén az arányos és a differenciáló csatorna van bekapcsolva. PDT kompenzálás integráló jellegű eredő szakaszok kompenzálásához ajánlott.

A szabályozási körben I és DT1 hatást együtt nem szokás alkalmazni, mert PT1 tag jellege van, ráadásul az ω_I/ω_D megszabja a jelformáló tag erősítését.

PIDT kompenzálás esetén mindhárom csatorna be van kapcsolva. Ez a legérzékenyebb az eredő szakasz paramétereinek változására, ezért csak akkor javasolják, ha sokkal jobb minőségi jellemzőket szolgáltat, mint a PI vagy PDT.

Kompenzálás méretezéséhez vagy Bode vagy gyöktényezős alakra kell hozni a $G_C(s)$ jelformáló tag átviteli függvényét.

A **PIDT kompenzáló tag** Bode alakja a 4.1.b. kifejezés közös nevezőre hozásával áll elő.

$$G_C(s) = \frac{s^2 T_I (T_D + T) + s(T_I + T) + 1}{s T_I (sT + 1)} \quad <4.4.>$$

A 4.4. kifejezésből a gyöktényezős alak:

4. Kompenzálás

$$G_C(s) = K_{zp} \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + p_1)} \quad <4.5.>$$

A gyöktényezős alak paraméterei:

$$K_{zp} = K_C \frac{T_D + T}{T}; \quad z_{1,2} = \frac{-(T_1 + T) \pm \sqrt{(T_1 + T)^2 - 4T_1(T_D + T)}}{2T_1(T_D + T)}; \quad p_1 = \frac{1}{T} \quad <4.6.>$$

A 4.3. kifejezésben előírt relációk betartása esetén a zérusok reális gyökök.

Az ipari gyakorlatban, számos esetben, az önbeálló jellegű eredő szakaszhoz a PI, integráló jellegű eredő szakaszhoz a PDT kompenzációs struktúra az előnyösebb.

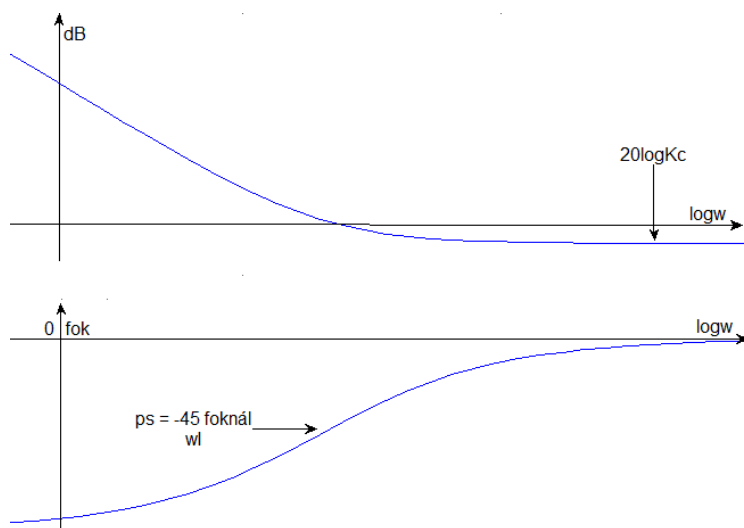
A **PI kompenzáló tag** Bode és gyöktényezős alakjai az alábbiak:

$$G_C(s) = K_C \frac{sT_I + 1}{sT_I}; \quad G_C(s) = K_{zp} \frac{s + z_1}{s} \quad <4.7.>$$

A gyöktényezős alak dimenzió nélküli paraméterei:

$$K_{zp} = K_C; \quad z_1 = \frac{1}{T_I} = \omega_I \quad <4.8.>$$

A PI kompenzáló tag Bode diagramja



4.4. ábra. A PI kompenzáló tag Bode diagramja

4. Kompenzálás

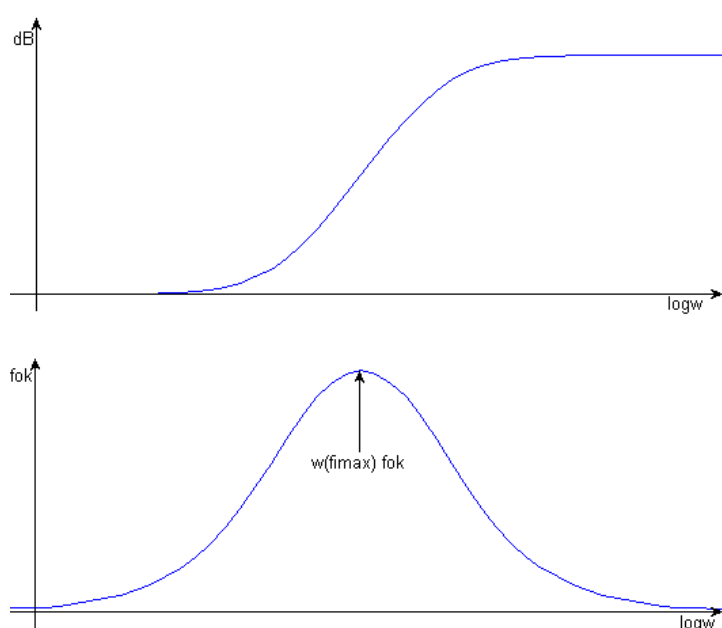
A PDT kompenzáló tag Bode és gyöktényezős alakjai az alábbiak:

$$G_C(s) = K_C \frac{s(T_D + T) + 1}{sT + 1}; \quad G_C(s) = K_{zp} \frac{s + z_1}{s + p_1} \quad <4.9.>$$

A gyöktényezős alak dimenzió nélküli paramétereit:

$$K_{zp} = K_C(A_D + 1); \quad z_1 = \frac{1}{T_D + T} = \omega_{DT}; \quad p_1 = \frac{1}{T} = \omega_T \quad <4.10.>$$

A PDT kompenzáló tag Bode diagramja:



4.5. ábra. A PDT kompenzáló tag Bode diagramja $K_C = 1$.

Az $\omega(\varphi_{max}) = \sqrt{\omega_T \cdot \omega_{DT}}$. Ha ismert $\omega(\varphi_{max})$ és az A_D differenciálási erősítés értéke, akkor a $\omega_T = (A_D + 1) \cdot \omega_{DT}$ behelyettesítéssel számítható ω_{DT} , majd ω_T .

A φ_{max} értéke az A_D differenciálási erősítés értékétől függ.

4.1. Táblázat. PDT kompenzáló tag maximális pozitív fázistolása

A_D	5	8	9	15
φ_{max}	45.6 [°]	53.1 [°]	54.9 [°]	61.9 [°]

A **P** és az **I** jelátviteli alaptagokat a 2. fejezet részletesen tárgyalta.

4.2. A PIPDT kompenzáló tag

A PIPDT kompenzáló tag három (P, PI és PDT) jelátviteli tag soros eredője. A Bode és gyöktényezős alakjai az alábbiak:

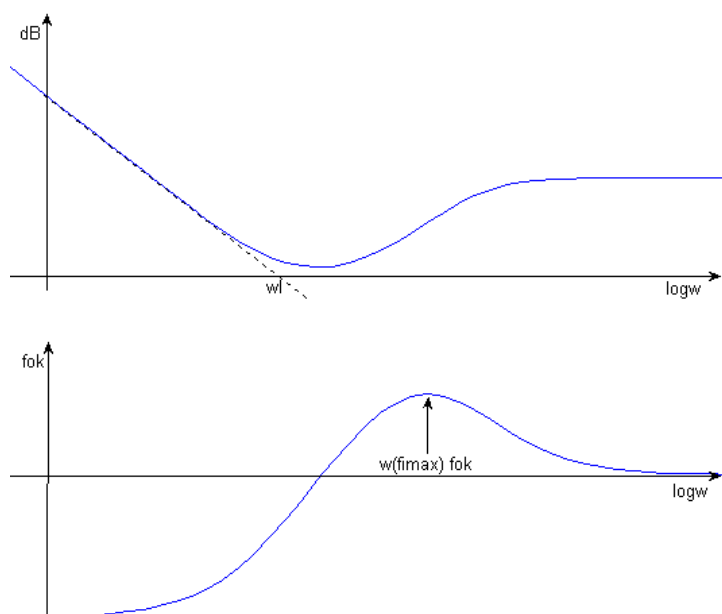
$$G_C(s) = K_C \frac{sT_I + 1}{sT_I} \frac{s(T_D + T) + 1}{sT + 1}; \quad G_C(s) = K_{zp} \frac{s + z_1}{s} \frac{s + z_2}{s + p_1} \quad <4.11.>$$

A gyöktényezős alak paramétereit:

$$K_{zp} = K_C(A_D + 1); \quad z_1 = \frac{1}{T_I}; \quad z_2 = \frac{1}{T_D + T}; \quad p_1 = \frac{1}{T} \quad <4.12.>$$

A 4.12 kifejezésben a K_{zp} , z_2 , és p_1 paraméterek azonosak a PDT kompenzáló tagéval (4.8. kifejezés) és $z_1 = \omega_I$.

A PDT kompenzáló tag Bode diagramja:



4.6. ábra A PDT kompenzáló tag Bode diagramja

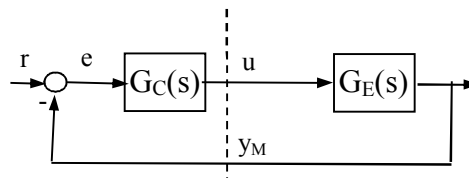
A PIPDT1 kompenzáló tag Bode diagramja nagyon hasonlít a PIDT kompenzáló tag Bode diagramjára, csak a törésponti körfrekvenciák vannak más helyen.

Megjegyzés: A PIPDT előnye, hogy a 4.11. kifejezés zérusai gyorsan és egyszerűen meghatározhatók. Figyelem: A 4.1. táblázat nem használható, mert $\omega(\varphi_{max})$ értékét befolyásolja a PI összetevő fázis menete, és az ω_I és ω_D aránya.

4.3. A kompenzáló tag helye a szabályozási körben

A 4.7. ábrán a szaggatott vonal jelzi a szabályozó és az eredő szakasz határát.

A 4.7. ábrán a kompenzáló jelátviteli tag és az eredő szakasz sorosan helyezkednek el. Ezt az elrendezést nevezik **soros kompenzálásnak**.

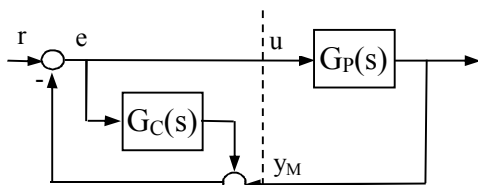


4.7. Soros kompenzálás

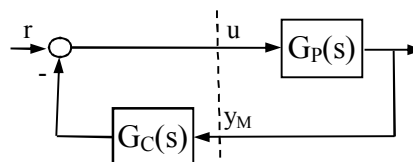
Megjegyzés: Az iparban, egy hurkos szabályozási kör esetén ez a tipikus.

A kompenzáló jelátviteli tag lehet az eredő szakasszal párhuzamosan elhelyezve (4.8.a. ábra), ez a **párhuzamos kompenzálás**, és lehet a visszacsatoló ágban (4.8.b. ábra) is, ez a **visszacsatolt kompenzálás**.

Megjegyzés: A visszacsatoló ág, és így a visszacsatolt kompenzáló jelátviteli tag, nem tartalmazhat integráló hatást, mert akkor vagy nulla értékre áll a szabályozott jellemző vagy a kimeneten állandósult lengés alakul ki.



4.8.a. Párhuzamos kompenzálás



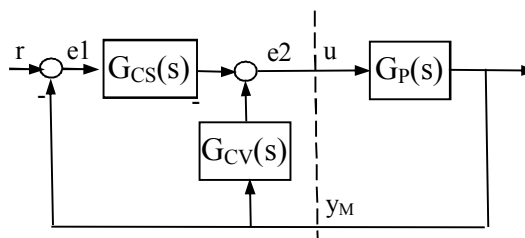
4.8.b. Visszacsatolt kompenzálás

Többhurkos szabályozások esetén a kompenzálási struktúrák keverten is előfordulnak. A 4.9. ábrán a szabályozó berendezés soros és visszacsatolt kompenzáló tagot is tartalmaz.

A többhurkos szabályozás jelentősen képes javítani a szabályozási kör stabilitását és a minőségi paramétereit.

Megjegyzés: Ha mikroprocesszor alapú a szabályozó, akkor a kompenzáló tagok szoftver taszkok, és így a kevert kompenzálási struktúra alkalmazása nem jár jelentős költség vonzattal.

Megjegyzés: A mikroprocesszor alapú szabályozó berendezésekben mód van közel ideális D hatás előállítására, mivel a kompenzáló tagok szoftver taszkok. Ha a mintavételi idő gyakorisága olyan, hogy a hibrid rendszer folyamatosnak tekinthető, akkor – az u végrehajtó jel véges amplitúdója miatt – az ideális D hatás kevésbé bizonyult megfelelőnek, mint a DTI.



4.9. Soros és visszacsatolt kompenzálás

4.4. A kompenzáló tag méretezése

A kompenzálás történhet az eredő szakasz –a szabályozó berendezés felől nézve, egyetlen jelátviteli tagként kezelve a szabályozandó rendszert – szürke vagy fekete doboz modellje alapján.

A szürke doboz modell az eredő szakasz operátoros átviteli függvényeit szolgáltatja. A fekete doboz modell a méréssel meghatározott eredő szakasz körfrekvencia átviteli függvényét vagy átmeneti függvényét szolgáltatja.

4.4.1. Kompenzálás pólus áthelyezéssel

A pólus áthelyezéssel történő kompenzáláshoz ismerni kell az eredő szakasz pólusait, vagyis elsődlegesen szürke doboz modell esetén alkalmazzák. A 4B. Mellélet mutat rá példát.

Megjegyzés: A mért értékekből a Matlab vagy hasonló programok nagyon pontos modellt képesek identifikálni. Egy százaléknál pontosabb modell esetén az identifikált operátoros átviteli függvényre is alkalmazható.

Az eredő szakasz operátoros átviteli függvénye önbeálló jelleg esetén:

$$G_E(s) = K_{Exp} \frac{(s + z_m) \cdots (s + z_1)}{(s + p_n)(s + p_{n-1}) \cdots (s + p_1)} \quad <4.13.>$$

A PIDT kompenzáló tag gyöktényezős alakja:

$$G_C(s) = K_{Czp} \frac{(s + z_{C1})(s + z_{C2})}{s(s + p_{C1})} \quad <4.14.>$$

A pólus áthelyezéssel a $G_0(s) = G_C(s) \cdot G_E(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényben az eredő szakasz két legkisebb értékű $\{p_{min1}, p_{min2}\}$ pólusa helyett $p_{C0} = 0$, és p_{C1} pólusok jelennek meg, ha a PIDT kompenzáló tag paramétereit úgy méretezzük, hogy $z_{C1} = p_{min1}$ és $z_{C2} = p_{min2}$.

Minél kisebb a pólus számértéke, annál nagyobb a hozzátartozó időállandó számértéke. A felnyitott hurok átviteli függvényben az eredő szakasz két legnagyobb időállandója (két legkisebb pólusa) helyett egy integráló hatás ($p_{C0} = 0$) és a PIDT kompenzáló tag DT ágának, kis értékű T időállandója (nagy értékű pólusa) kerül.

Megjegyzés: Az integráló hatás a jelkövetést és értéktartást javító. A lecseréltnél kisebb időállandó kisebb szabályozási időt tesz lehetővé.

A PIDT paramétereinek méretezésekor a Bode alakjának számlálóját (4.4. kifejezés) vetjük egybe a $(s + p_{min1})(s + p_{min2})$ kifejezés Bode alakjával.

4. Kompenzálás

$$s^2 T_I (T_D + T) + s(T_I + T) + 1 = s^2 \frac{1}{p_{\min 1} \cdot p_{\min 2}} + s \frac{p_{\min 1} + p_{\min 2}}{p_{\min 1} \cdot p_{\min 2}} + 1 \quad <4.15.>$$

Az eredő szakasz pólusai konkrét számértékek, így a 4.15. kifejezés jobboldalán konstans együtthatók vannak. Az együtthatók összehasonlításával csak két egyenlet írható fel, ezért az A_D differenciálási erősítés értéket nekünk kell megválasztani.

$$T_I T = \frac{1}{p_{\min 1} \cdot p_{\min 2}} \frac{1}{(A_D + 1)} \quad <4.16.>$$

$$T_I + T = \frac{p_{\min 1} + p_{\min 2}}{p_{\min 1} \cdot p_{\min 2}}$$

A 4.16. kifejezés másodfokú egylethez vezet, aminek a két gyöke T_I és T . A 4.3. kifejezésben előírt reláció mellett ezek mindig reális gyökök. Az A_D és a T ismeretében a T_D meghatározható.

Megjegyzés: Nem kötöttük ki, hogy az eredő szakasz két legkisebb értékű $\{p_{\min 1}, p_{\min 2}\}$ pólusa reális gyök, mert a 4.16. kifejezés, akkor is két reális értéket szolgáltat, ha $\{p_{\min 1}, p_{\min 2}\}$ konjugált komplex gyökpár. Ilyenkor PIDT kompenzáció esetén a komplex gyök abszolút értékének a reciprok értéke T_0 körül jobbra, balra kell felvenni T_I és T_D értékét. A póluskiejtéses kompenzációban megengedett kisebb távolság a T_I és a T_D között, de a $T_I \geq 2.5 \cdot T_D$ reláció ekkor is betartandó.

Ha a hurok átviteli függvény $G_0(s) = K_C g_0(s) = K_C g_C(s) G_E(s)$ rendelkezik fázis- és erősítés tartalékkal, akkor stabil. A fázistartalék mértéke befolyásolja a zárt szabályozási kör minőségi jellemzőit.

A fázistartalék megválasztására nincs egyértelmű szabály. Az alábbi megfontolások iránymutatók:

- ♦ Ha a „pm” fázistartalék értéke $90^\circ \geq pm \geq 70^\circ$, akkor nagy valószínűséggel aperiodikus a zárt szabályozási kör tranziens viselkedése ugrás jellegű gerjesztés esetén.
- ♦ Ha a „pm” fázistartalék értéke $70^\circ \geq pm \geq 45^\circ$, akkor nagy valószínűséggel kezelhető mértékű túllendülés lesz a tranziens viselkedésben.
- ♦ Ha a „pm” fázistartalék értéke $45^\circ \geq pm \geq 30^\circ$, akkor nagy valószínűséggel a zárt szabályozási kör tranziens viselkedése lassan csillapodó lengő jellegű.

A PIDT kompenzáló tag K_C erősítése attól függ, hogy mekkora a fázistartaléka a $G_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvénynek.

A T_I , T_D , T ismeretében a $g_C(s)$, valamint ismert az eredő szakasz $G_E(s)$ átviteli függvénye, és így a $g_0(s) = g_C(s) G_E(s)$ már adott. A $g_0(s)$ hurok átviteli függvény Bode diagramján megkereshető az választott fázistartalékhoz tartozó leendő ω_c vágási körfrekvencia. A leendő ω_c vágási körfrekvenciához tartozó $a(\omega_c)$ amplitúdó átvitel reciprok értéke lesz a K_C érték.

4. Kompenzáció

4A. Melléklet 1. példájában és a 4B. Melléklet Esettanulmányban számpéldával van bemutatva a PIDT kompenzáció pólus áthelyezéssel.

Megjegyzés: Szürke doboz modellben mód van a gyökhely görbék felrajzoltatásának, ami precízebb K_C meghatározást tesz lehetővé.

Ha a szabályozási körben – például az ellenőrző jel zajos volta miatt – csak **PI** kompenzáló tagot célszerű alkalmazni, akkor csak egy zérus van a kompenzáló tagban.

$$G_C(s) = K_{Czp} \frac{(s + z_{C1})}{s}; \quad z_{C1} = \frac{1}{T_I} \quad <4.17.>$$

Az eredő szakasznak csak egy pólusa cserélhető. Ebből adódóan a T_I integrálási idő az eredő szakasz legkisebb pólusának az abszolút értékének reciprok értéke. Egyszerűbben T_I egyenlő az eredő szakasz legnagyobb időállandójával. A K_C erősítés meghatározásának menete azonos.

Megjegyzés: Ha $\{p_{min1}, p_{min2}\}$ konjugált komplex gyökpár, akkor PI kompenzáció esetén a T_I integrálási idő a komplex gyök abszolút értékének a reciprok értéke.

Az eredő szakasz operátoros átviteli függvénye integráló jelleg esetén:

$$G_E(s) = K_{Ezp} \frac{(s + z_m) \cdots (s + z_1)}{s(s + p_{n-1}) \cdots (s + p_1)} \quad <4.18.>$$

Integráló jellegű szakaszhoz PDT kompenzáló tagot kell választani, mert nullaértékű a legkisebb pólus. A magyarázathoz a gyöktényezős alak helyett a Bode alakot célszerű használni:

$$G_C(s) = K_C \frac{s(T_D + T) + 1}{sT + 1} \quad <4.19.>$$

Ha a $T_D + T = T_{Emax}$, ahol a T_{Emax} az eredő szakasz legnagyobb értékű időállandója, akkor A_D megválasztásával T_D és T már adódik. A K_C erősítés meghatározásának menete ugyanaz.

Megjegyzés: Ha az eredő szakasz - méréssel felvett - körfrekvencia függvényén az ω_{tk} törésponti körfrekvenciák jól megkereshetők, akkor az ω_{tk} törésponti körfrekvenciák ismeretében felírható a $G_E(j\omega)$ közelítő átviteli függvénye.

A Matlab és a hozzá hasonló programok identifikáló eljárásai nulla vagy egy holtidő, nulla vagy egy zérus, és egy, kettő vagy három pólus beállítását engedélyezi. A pólusok közül az egyik lehet nulla, vagyis integráló jellegű átviteli függvényt is tud identifikálni. Az a tapasztalat, hogy ennyi variációs lehetőség elegendő a kielégítő pontosságú modellalkotáshoz.

4.4.2. Kompenzálás az eredő szakasz körfrekvencia függvénye alapján

Ha a rendelkezésünkre áll az eredő szakasz - méréssel meghatározott - amplitúdó átvitele és fázistolása a számunkra fontos körfrekvencia tartományban, de nem tudunk kielégítő pontosságú modellt alkotni, akkor a pólus áthelyezés módszere nem alkalmazható.

A mért értékek Bode diagramon történő ábrázolásának előnye, hogy a $G_0(j\omega) = K_C g_0(j\omega) = K_C g_C(j\omega) G_E(j\omega)$ hurok átviteli függvény Bode diagramja előállítható a tagok Bode diagramjának grafikus összegzésével.

A módszer lényege, hogy ismerve a $g_C(j\omega)$ kompenzáló tag Bode diagramjának általános alakját és méréssel felvett $G_E(j\omega)$ eredő szakasz konkrét Bode diagramját, meg kell találni azt a körfrekvencia értéket, amely közös pont, és így a két grafikon egymásra illeszthető. A $g_C(j\omega)$ kompenzáló tag Bode diagramjának általános alakjai: PI (4.4. ábra.), PDT (4.5. ábra.), és a PIDT (4.2. ábra.).

A Bode diagramon történő kompenzálás lépései:

1. Az eredő szakasz Bode diagramjának meghatározása.
2. A $G_C(j\omega)$ kompenzáló tag megválasztása az eredő szakasz ismeretében.
3. A minőségi elvárások által választott fázistartalék (pm°) és a választott $g_C(j\omega)$ kompenzáló tag általános Bode diagramjának ismeretében, a $G_E(s)$ eredő szakasz Bode diagramjának fázismentén a megkeresendő (ps°) fázistolás érték meghatározása.
4. A $G_E(j\omega)$ eredő szakasz Bode diagramjának fázismentén az adott (ps°) fázistolás értékhez tartozó ω körfrekvencia meghatározása.
5. A $G_E(j\omega)$ eredő szakasz Bode diagramján leolvasott ω körfrekvencia értékből a választott kompenzáló tag időállandóinak meghatározása.
6. Az időállandók ismeretében a $g_C(j\omega)$ konkrét Bode diagramjának, majd a $g_0(j\omega) = g_C(j\omega) G_E(j\omega)$ meghatározása.
7. A $g_0(j\omega)$ és az előírt fázistartalék (pm°) ismeretében a leendő ω_C vágási körfrekvencia, vagyis a $ps^\circ = (pm - 180)^\circ$ fázistoláshoz tartozó ω körfrekvencia, meghatározása.
8. A leendő ω_C vágási körfrekvencia értékhez tartozó $a(\omega_C)$ amplitúdó átvitel értékének meghatározása a $g_0(j\omega)$ Bode diagramján. A K_C ennek az amplitúdó átviteli értéknek a reciproka.
9. A $G_C(j\omega)$ kompenzáló tag átviteli függvényének minden paramétere ismert. Felvehető a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye, és meghatározhatók a minőségi jellemzők. Ha indokolt a paraméterek módosítása, akkor célszerű új (pm°) értéket választva megismételni a kompenzálási lépéseket.

PI kompenzáló tag illesztése az eredő szakasz körfrekvencia függvényére

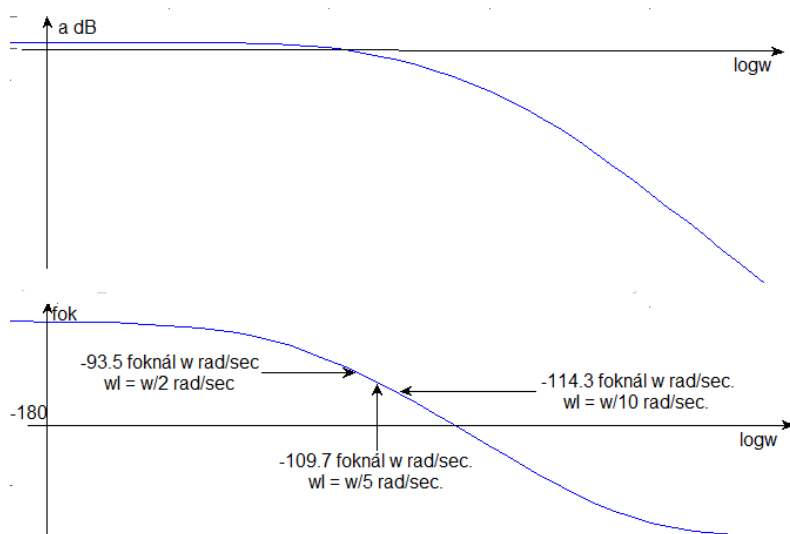
A 4.10. ábra Bode diagramja alapján egyértelmű, hogy a mért eredő szakasznak négy pólusa van (0° , és -360° között monoton csökkenő a fázismenet), és önbeálló a szakasz (nincs integráló jellege, hiszen nulla fokról indul).

Nem derül ki az amplitúdó, és fázismenetből, hogy mekkorák az időállandók, van vagy nincs konjugált komplex gyökpár, és a konjugált komplex gyökpárhoz tartozó időállandók a legnagyobbak vagy nem.

Az önbeálló szakaszokhoz gyakori a PI kompenzáló tag választása. A 4.4. ábrán látható, hogy a PI kompenzálás Bode diagramján az ω_I körfrekvencia a -45° fázistoláshoz tartozik. Az ω_I többszörös (2, 5, 10) értékeihez tartozó amplitúdó átvitel „a” és fázistolás „ p_{SPI} ” értékeket tartalmazza a 4.2. táblázat.

4.2. Táblázat. PI kompenzáló tag fázistolása többszörös ω_I értékeknél

	$2\omega_I$	$5\omega_I$	$10\omega_I$
p_{SPI}	$-26.5 [^\circ]$	$-11.3 [^\circ]$	$-5.7 [^\circ]$
a	1.12	1.09	1.005



4.10. ábra. Az eredő szakasz Bode diagramja

A 4.10. ábrán a $\omega_C = 2\omega_I$, $\omega_C = 5\omega_I$, és a $\omega_C = 10\omega_I$ feltételezéssel és $pm = 60^\circ$ választással kiszámolt fázistolás értékeknél leolvasott leendő ω_C vágási körfrekvenciák is be vannak jelölve. Az ω_I a leendő ω_C értékéből egyszerű osztással meghatározható.

A K_C erősítés érték meghatározásának módja az amplitúdó átvitelt az ω_C vágási körfrekvencián a kívánt értékre állítja, ezért csak a kompenzáló tag fázistolását kell figyelembe venni a leendő ω_C vágási körfrekvencia meghatározásához.

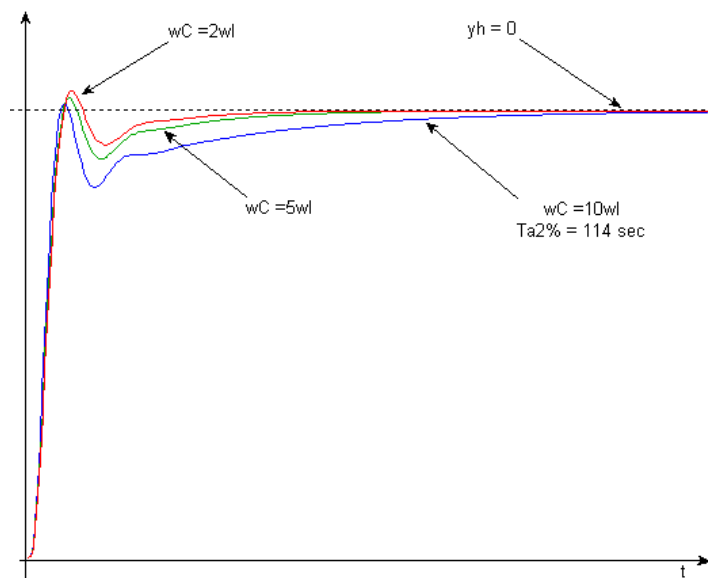
$$ps^\circ = pm^\circ - ps_{PI}^\circ - 180^\circ \quad <4.20.>$$

A 4.20. kifejezésben a „ps” a $G_E(s)$ eredő szakasz Bode diagramján megkeresendő fázistolás értéke.

Az ω_I ismeretében a PI $g_C(s)$ kompenzáló tag amplitúdó és fázismenete grafikusán rászerezhető a 4.10. ábrára. Az így kapott $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényen $pm = 60^\circ$ fázistartalék esetén a $ps = -120^\circ$ fázistoláshoz tartozó leendő ω_C vágási körfrekvenciát lehet meghatározni, majd ezen a körfrekvencián az $a(\omega_C)$ amplitúdó átvitelt. Ennek reciprokok értéke a K_C erősítés. 4A Melléklet 2. példa.

Megjegyzés: A Bode diagramon az amplitúdó átvitel $a(\omega_C)[dB]$ decibelben van ábrázolva, ezért $K_C = -a(\omega_C)[dB]$.

A 4.11. ábrán, $G_0(s)$ ismeretében, mind három $G_C(s)$ választás mellett a zárt szabályozási kör átmeneti függvényei láthatók.



4.11. ábra. Az szabályozási kör átmeneti függvénye.

A 4.11. ábra egy konkrét pólus elrendezésre igaz. Kaphatunk ennél lengőbb jelet, ezért első beállításkor az $\omega_C = 2\omega_I$ választása nem ajánlott. Az $\omega_C = 10\omega_I$ választása, akkor célszerű, ha vannak konjugált komplex gyökpárra utaló jelek az eredő szakasz Bode diagramján.

PDT kompenzáló tag illesztése az eredő szakasz körfrekvencia függvényére

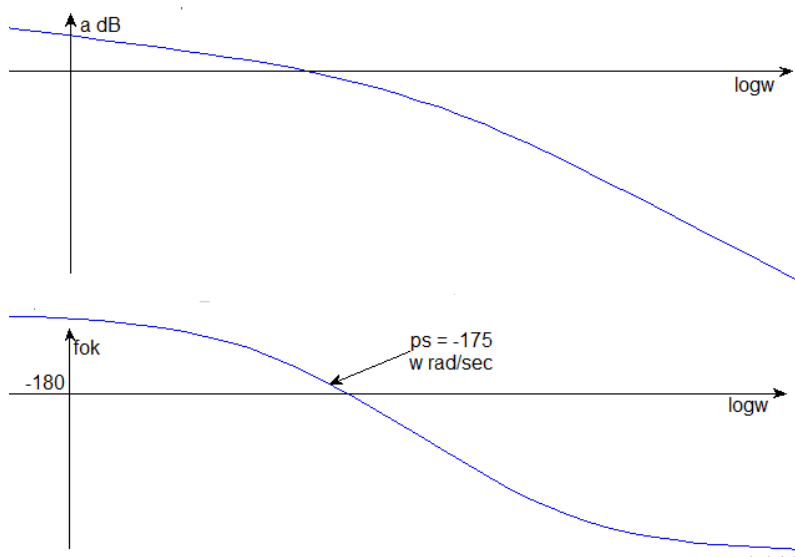
A 4.12. ábra Bode diagramja alapján egyértelmű, hogy a mért eredő szakasznak négy pólusa van (-90° , és -360° között monoton csökkenő a fázismenet), és integráló jellegű, hiszen -90° -ról indul. Nem derül ki az amplitúdó, és fázismenetből, hogy mekkorák az időállandók, van vagy nincs konjugált komplex gyökpár.

Az integráló szakaszokhoz gyakori a PDT kompenzáló tag választása. A 4.5. ábrán látható, hogy a PDT kompenzáló tagnak pozitív fázistolása van. A pozitív fázistoláshoz tartozó körfrekvencia érték az A_D differenciálási erősítés értékétől függ (4.1. táblázat). PDT kompenzálás esetén nem csak a fázistartalék értéket, hanem az A_D differenciálási erősítés értéket is választani kell.

Az eredő szakasz Bode diagramjának és a kompenzáló tag jellegének meghatározása után - a harmadik lépésben - a $G_E(s)$ eredő szakasz Bode diagramján megkeresendő fázistolás értékét kell meghatározni, ami PDT kompenzálás esetén:

$$ps^\circ = pm^\circ - \varphi_{max}^\circ - 180^\circ \quad <4.21.>$$

Ha a fázistartalék pm° és φ_{max}° konkrét érték, akkor a 4.21. kifejezéssel kiszámolt „ps” fázistolás értéknél az $\omega(\varphi_{max})$ [rad/sec] leolvasható az eredő szakasz Bode diagramjáról (A 4.12. ábrán $pm^\circ = 60^\circ$ és $\varphi_{max}^\circ = 54.9^\circ$).



4.12. ábra. Az eredő szakasz Bode diagramja

Az $\omega(\varphi_{max}) = w$ [rad/sec] összerendeléssel az ω_{DT} és az ω_T kiszámítható, ha ismerjük A_D értékét.

4. Kompenzálás

$$\omega_T = \sqrt{A_D + 1} \cdot \omega(\varphi_{max}); \quad \omega_{DT} = \frac{\omega(\varphi_{max})}{\sqrt{A_D + 1}} \quad <4.22.>$$

Ebből az időállandók:

$$T = \frac{1}{\omega_T}; \quad T_D + T = \frac{1}{\omega_{DT}}; \quad T_D = \frac{1}{\omega_{DT}} - \frac{1}{\omega_T} \quad <4.23.>$$

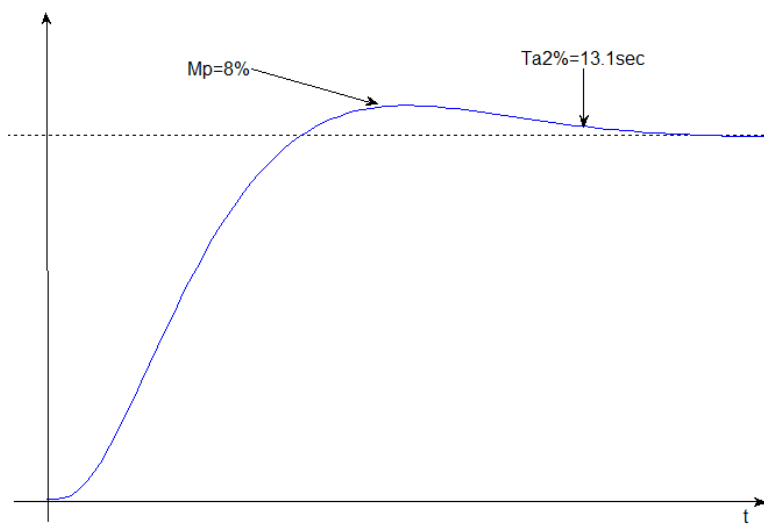
Megjegyzés: Ha ismert $\omega(\varphi_{max})$ és A_D , akkor a PDT kompenzáló tag átviteli függvényében (4.9. kifejezés) szereplő $(T_D + T)$ és T értékek már meghatározhatók, mivel az $\omega(\varphi_{max}) = \sqrt{\omega_T \cdot \omega_{DT}}$ kifejezésbe az $\omega_T = (A_D + 1)\omega_{DT}$ behelyettesítéssel kapott másodfokú egyenlet megoldása az ω_{DT} és az ω_T .

A kompenzálás hatodik lépése az időállandók ismeretében a $g_C(j\omega)$ (4.9. kifejezés), majd a $g_0(j\omega)$ meghatározása.

$$g_0(j\omega) = g_C(j\omega)G_E(j\omega) \quad <4.24.>$$

A $g_0(j\omega)$ függvényen a $pm = 60^\circ$ fázistartalék, $ps = -120^\circ$ fázistoláshoz tartozó körfrekvencián az amplitúdó átvitel reciprok értéke lesz a K_C erősítés.

A 4.13. ábra - az így megválasztott kompenzáló taggal - a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye.



4.13. ábra. Az szabályozási kör átmeneti függvénye

Megjegyzés: Ha ennyi túllendülés sem megengedett, akkor a fázistartalékot növelésével $pm = 65^\circ$ célszerű újra méretezni a kompenzáló tagot.

4. Kompenzálás

Ha az integráló jellegű szakaszhoz szimpla **P** kompenzáló tagot választunk, akkor a kompenzálás menetének első két lépése után a fázistartalék megválasztása, majd a nyolcadik lépés jön.

A $G_E(j\omega)$ eredő szakasz Bode diagramján a fázistartalék értéke meghatározza a leendő ω_c vágási körfrekvencia értéket, és ennek az amplitúdó átviteli értéknek a reciprok értéke a K_C .

A 4A Melléklet 3. példája egy PDT kompenzáció.

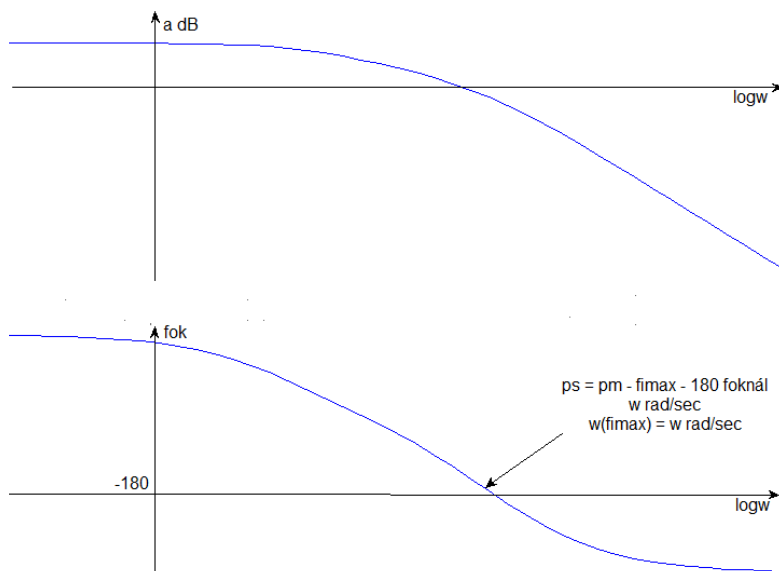
PIDT, PIPDT kompenzáló tag illesztése az eredő szakasz körfrekvencia függvényére

A PIDT (4.2. ábra) és a PIPDT (4.6. ábra) kompenzáló tag Bode diagramja nagyon hasonló. A kompenzálás menetében sincs különbség közöttük. A PIDT vagy a PIPDT kompenzáló tag önbeálló és integráló jellegű szakaszokra is alkalmazható.

A kompenzálás 3. lépésében a keresendő (ps°) fázistolás érték meghatározásakor a φ_{max}° értéke függ az ω_D/ω_I arányától, és az A_D differenciálási erősítés értékétől. (Például: $\omega_D/\omega_I = 4$ és $A_D = 8$ esetén $\varphi_{max}^\circ = 54.2^\circ$ vagy $\omega_D/\omega_I = 10$ és $A_D = 10$ esetén $\varphi_{max}^\circ = 57.5^\circ$)

$$ps^\circ = pm^\circ - \varphi_{max}^\circ - 180^\circ \quad <4.25.>$$

A kompenzálás 4. lépéséhez fázistartalékot, és φ_{max}° érték ismeretéhez ω_D/ω_I arányt, és A_D differenciálási erősítést kell választani.



4.14. ábra. A kompenzálás 4. lépése

4. Kompenzálás

A 4.14. ábrán a fázistartalék $pm = 60^\circ$, az arány $\omega_D/\omega_I = 5$, és a differenciálási erősítés $A_D = 8$.

A kompenzálás 5. lépéséhez alkalmazhatjuk az alábbi kifejezéseket:

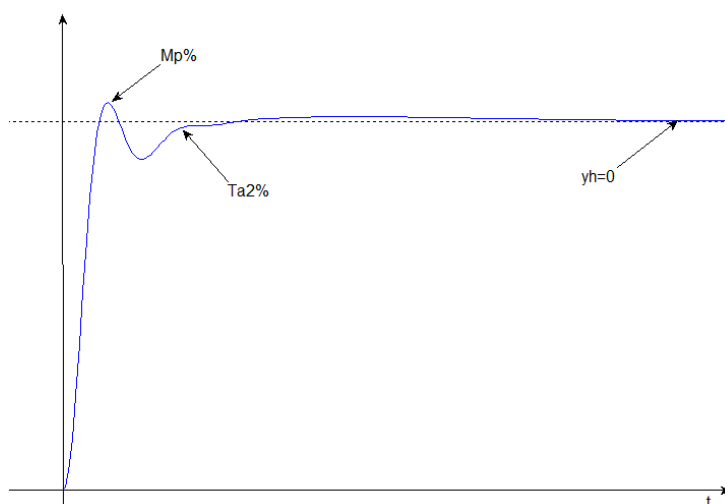
$$T = \frac{1}{\omega_T} = \frac{1}{\omega(\varphi_{\max})\sqrt{A_D + 1}}; \quad T_{DT} = \frac{1}{\omega_{DT}} = \frac{\sqrt{A_D + 1}}{\omega(\varphi_{\max})} \quad <4.26.a.>$$

$$T_D = T_{DT} - T; \quad T_I = 5 \cdot (T_{DT} - T) \quad <4.26.b.>$$

Megjegyzés: A $T_I = 5 \cdot T_D$ arányt azért választottuk, mert a 4.14. ábra alapján az eredő szakasz pólusai relatíve közel vannak egymáshoz.

Az időállandók ismeretében a $g_c(j\omega)$ (4.11. kifejezés), majd a $g_o(j\omega)$ meghatározása következik. A $g_o(j\omega)$ függvényen az ismert módon a K_C erősítés meghatározható, és így a $G_C(s)$ kompenzáló tag minden paramétere ismert.

A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye:



4.15. ábra. PIDT kompenzációval a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

A 4A Melléklet 4. példája egy PIDT kompenzálás önbeálló szakasz körfrekvencia függvényének Bode diagramján.

Megjegyzés: Az összehasonlíthatóság érdekében ugyanazon az önbeálló és integráló szakaszokon mutatjuk be a különböző kompenzációs technikákat. A 4A Melléklet konkrét számpéldái is azt reprezentálják, hogy nem mindig a PIDT kompenzálás adja a legjobb eredményt.

A PIDT kompenzálás integráló jellegű szakaszokon bár lehetséges, ritkán szolgáltat jó minőségi jellemzőket (4A Melléklet 5. példa).

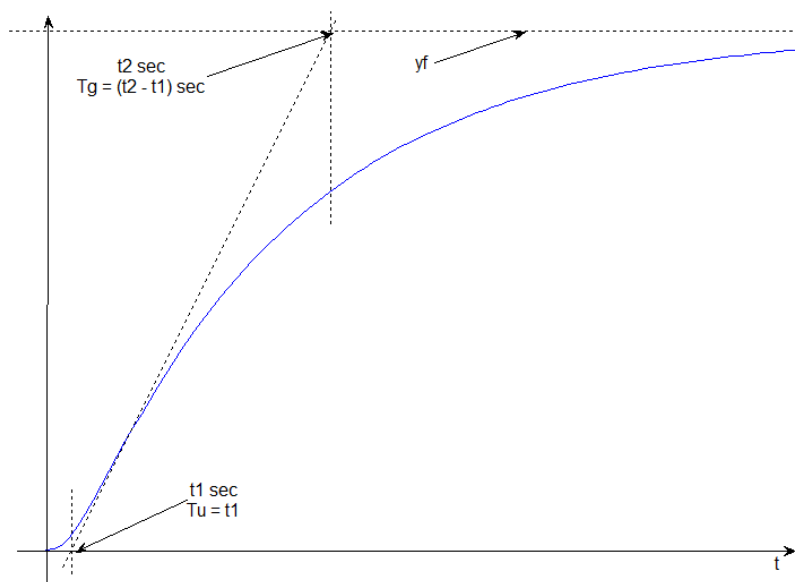
4.4.3. Kompenzálás az eredő szakasz átmeneti függvénye alapján

A szabályozó berendezés felől nézve felvehető a $G_E(s)$ eredő szakasz $h(t)$ átmeneti függvénye.

Az átmeneti függvényen történő kompenzálás lépései:

1. Az eredő szakasz átmeneti függvényének meghatározása. Az eredő szakasz vagy önbeálló (self-adjustment), vagy nem önbeálló (without adjustment), más szóval integráló jellegű.
2. Az eredő szakasz jellegének megfelelő segédvonalak szerkesztése. Szerkesztéssel az önbeálló eredő szakasz HPT1 jelátvivő taggal, míg az integráló jellegű eredő szakasz vagy IT1 vagy HIT1 jelátviteli taggal közelíthető.
3. A $G_C(s)$ kompenzáló tag típusának (P, I, PI, PDT, PIDT) eldöntése.
4. A $G_C(s)$ kompenzáló tag paramétereinek meghatározása táblázatból.
5. Felvehető a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye, és meghatározhatók a minőségi jellemzők, és ha indokolt a kompenzáló tag paramétereinek módosításával hangolható a szabályozási kör.

Önbeálló szakasz kompenzálása az átmeneti függvénye alapján



4.16. ábra. Az eredő szakasz átmeneti függvénye

4. Kompenzálás

A 4.16. ábrán az eredő szakasz ugrásalakú bemenetre adott, méréssel felvett válaszfüggvénye (átmeneti függvénye) látható. A szerkesztő egyenesek a végérték ($y(\infty)$, az ábrán y_f) egyenese és a válaszfüggvény inflexiós pontjának érintő egyenese. A válaszfüggvény inflexiós pontjának érintő egyenese az időtengelyt t_1 , és a $y_M(\infty)$ szerkesztő egyenest a t_2 időpontban metszi. További két szerkesztő egyenes a t_1 és t_2 időpontok helyét jelöli a válaszfüggvényen.

A HPT1 közelítő átviteli függvény:

$$G_{HPT} = K_p \frac{1}{sT_g + 1} e^{-sT_u} \quad <4.27.a.>$$

$$K_p = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} ; \quad T_g = t_2 - t_1; \quad T_u = t_1 \quad <4.27.b.>$$

Az önbeálló szakaszok szabályozásakor a szabályozó jellegének megválasztására F. Piwinger adott ajánlást. Az ajánlás HPT1 szakasz modellt feltételezve, szimulációs vizsgálattal készült, és közé tétele óta az empirikus tapasztalat visszaigazolt.

4.3. táblázat. Önbeálló szakaszokhoz a szabályozó jellegének megválasztása

P	PI	PID	I
$\frac{T_g}{T_u} \geq 50$	$50 \geq \frac{T_g}{T_u} \geq 7.4$	$7,4 \geq \frac{T_g}{T_u} \geq 3.3$	$3.3 \geq \frac{T_g}{T_u}$

Megjegyzés: Az ajánlást úgy kell érteni, hogy az ajánlott kompenzáló tag jelleggel elérhető minőségi paramétereknél jelentősen jobbat más jellegűvel nem érhetünk el. A határok nem élesek, hanem átfedik egymást, ezért határ közeli érték esetén (például 7 és 8 között) egyéb megfontolások döntenek.

A kompenzáló tag jellegének eldöntése után meg kell határozni a paramétereit.

Az önbeálló szakaszokra számos ajánlást dolgoztak ki a múlt század ötvenes éveitől. A legelterjedtebben alkalmazott a szakirodalomban CHR rövidítéssel hivatkozott alpmunka. A CHR (Chien-Hrones-Reswick) ajánlás HPT1 szakasz modellt feltételez. Külön-külön vizsgálja az értékkövetési és értéktartási képességet, Mindkét esetben aperiodikus és lengő beállásra is megtörtént a paraméteroptimalizálás.

A másik alpmunka a Ziegler-Nichols ajánlás, aminek az optimum feltétele: Minden túllendülés az előző az előző túllendülés fele. A Ziegler-Nichols ajánlás alkalmazásához a zárt szabályozási kört, P jellegű kompenzációval, a stabilitás határhelyzetébe kell hozni. A stabilitás határhelyzetéhez tartozó kompenzáló tag K_{CK} kritikus erősítése és a szabályozott jellemző állandósult lengésének T_K periódus ideje alapján határozható meg a kompenzáló tag paramétereit.

4. Kompenzálás

4.4. táblázat. CHR ajánlás legjobb értéktartás képességre

	Leggyorsabb aperiodikus $M_p=0\%$			Leggyorsabb lengő $M_p \leq 20\%$		
	$K_C = k \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	T_I	T_D	$K_C = k \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	T_I	T_D
P	$k = 0.30$	-	-	$k = 0.70$	-	-
PI	$k = 0.60$	$4 T_u$	-	$k = 0.70$	$2.3 T_u$	-
PID	$k = 0.95$	$2.4 T_u$	$0.42 T_u$	$k = 1.20$	$2.0 T_u$	$0.42 T_u$

4.5. táblázat. CHR ajánlás legjobb értékkövetés képességre

	Leggyorsabb aperiodikus $M_p=0\%$			Leggyorsabb lengő $M_p \leq 20\%$		
	$K_C = k \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	T_I	T_D	$K_C = k \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	T_I	T_D
P	$k = 0.30$	-	-	$k = 0.70$	-	-
PI	$k = 0.35$	$1.2 T_g$	-	$k = 0.70$	-	-
PID	$k = 0.60$	T_g	$0.5 T_u$	$k = 0.95$	$1.35 T_g$	$0.47 T_u$

4.6. táblázat. Ziegler-Nichols ajánlás

P	PI	PID
$K_C = 0.5 \cdot K_{CK}$	$K_C = 0.45 \cdot K_{CK}$ $T_I = 0.85 \cdot T_K$	$K_C = 0.6 \cdot K_{CK}$ $T_I = 0.5 \cdot T_K$ $T_D = 0.12 \cdot T_K$

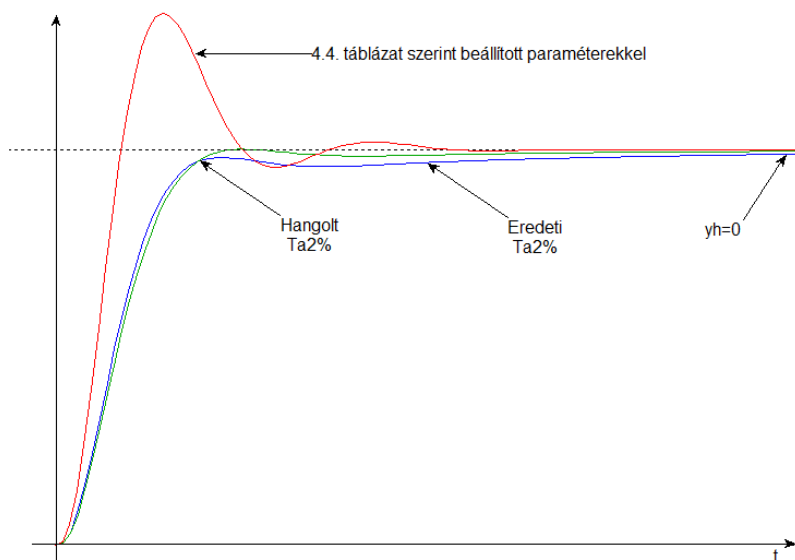
A Ziegler-Nichols ajánlás előnye, hogy nem ír elő közelítő szakasz modellt. Hátránya, hogy az ipari szabályozásokban nem megengedett a stabilitás határhelyzetében való működtetés, mert balesetveszélyes. Az optimum feltétel sem megfelelő a mechanikai, kémiai, stb. rendszerek számára.

A módszer, minthogy a HPT1 tag csak közelíti a valóságot, általában utána hangolást igényel. A hangolás szempontjai:

- ◆ A K_C erősítés növelése gyorsítja a szabályozási kört, de növeli a túllendülésre való hajlamot.
- ◆ A T_I integrálási idő csökkentése gyorsítja a szabályozási kört, de növeli a túllendülésre való hajlamot.
- ◆ Az alálendülés túl nagyra választott T_I integrálási idő jele.

A 4.16. ábra T_g és T_u értéke alapján PI kompenzálást választva, és a leggyorsabb aperiodikus értékkövetésre optimalizálva (4.5. táblázat), kapjuk a 4.17. ábrát. A 4.17. ábrán a táblázat alapján és a hangolt paraméterekkel beállított kompenzáló tagot tartalmazó szabályozási kör átmeneti függvénye egymásra rajzolva látható.

Figyelem felhívásként ugyanarra az ábrára rajzoltuk a 4.4. táblázat alapján beállított, leggyorsabb aperiodikus, PI kompenzáló taggal felvett válaszfüggvényt is. A 4.4. táblázat kompenzáló tag beállítása a szakasz és a kompenzáló tag között támadó zavarjellemzőt feltételezve optimalizál, miközben az alapjel állandó. Az alapjel megváltozására nagyon rossz minőségi jellemzőket produkál.



4.17. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

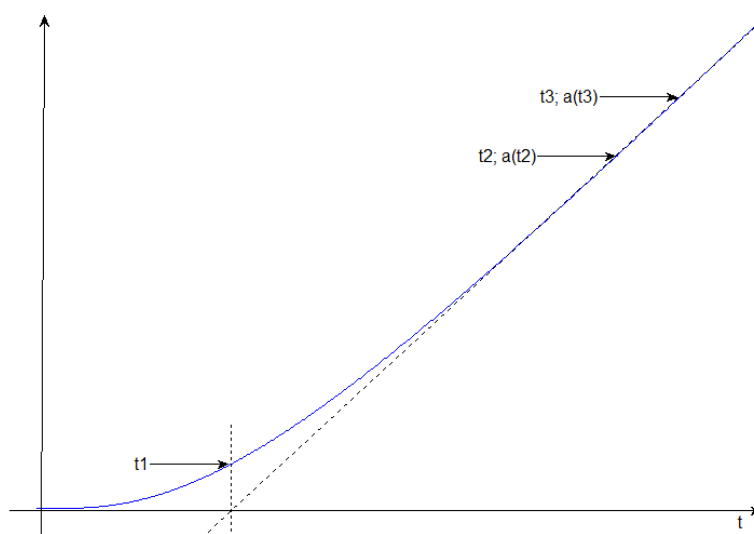
A 4.17. ábrán a táblázat alapján beállított szabályozó paraméterekkel a válaszfüggvény alálendülést mutat. A lassú dinamikájú beállítás miatt csökkentjük a T_I integrálási időt 20%-al. A szokásos hangolási lépés 10%, ezért ellensúlyozandó a túllendülésre való hajlamnövekedést csökkentjük a K_C erősítést 10%-al. A hangolás eredményeképp gyorsabb a szabályozási kör.

A 4A Melléklet 6. példája számértékkel is magyarázza az eredő önbeálló szakasz átmeneti függvényén alapuló eljárást.

Megjegyzés: Az optimális szabályozó beállítást kereső eljárások nem ilyen próbálgatáson alapulnak.

Integráló jellegű szakasz kompenzálása az átmeneti függvénye alapján

Az integráló jellegű eredő szakasz ugrásalakú bemenetre adott, méréssel felvett válaszfüggvénye (átmeneti függvénye) látható a 4.18. ábrán. A szerkesztő egyenes a válaszfüggvény egyenletesen emelkedő szakaszának meghosszabbított egyenese. A meghosszabbított egyenes az időtengelyt t_1 időpontban metszi. A szerkesztő egyenes a t_1 időpont helyét jelöli a válaszfüggvényen. A t_2 és a t_3 két tetszőleges időpont a válaszfüggvény egyenletesen emelkedő szakaszán. A $a(t_2)$ és $a(t_3)$ a t_2 és a t_3 időpontokhoz tartozó amplitúdó érték.



4.18. ábra. Az eredő szakasz átmeneti függvénye

Az IT1 közelítő átviteli függvény:

$$G_{IT1} = \frac{1}{sT_{lm}} \frac{1}{sT_g + 1} \quad <4.28.a.>$$

$$T_{lm} = \frac{t_3 - t_2}{a(t_3) - a(t_2)} ; \quad T_g = t_1 \quad <4.28.b.>$$

A T_{lm} a szakasz integrálási ideje.

Integráló jellegű eredő szakaszhoz a legmegfelelőbb a PDT kompenzáló tag. Ha a mért ellenőrző jel zajos, akkor P kompenzáló tag a megfelelő, mert a differenciáló hatás a jelzajt felerősíti. A PIDT kompenzálás, bár lehetséges, általában nem szolgáltat kielégítő minőségi jellemzőket.

4. Kompenzálás

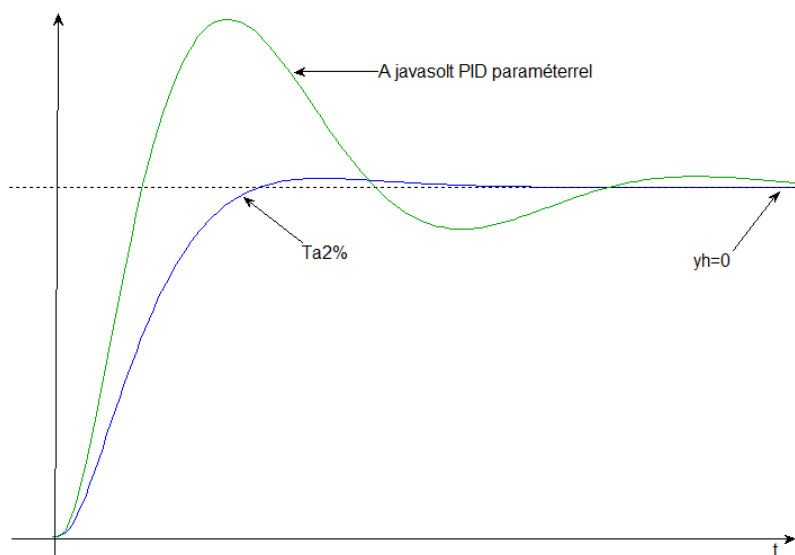
Megjegyzés: Ha szükség van maradó szabályozási hibától mentes jelkövetésre, akkor a kettéstípusú szabályozási kör (integráló jellegű eredő szakasz, PIDT kompenzálás) helyett több hurkos (például kaszkád) szabályozási struktúra ajánlott.

A kompenzáló tag jellegének eldöntése után meg kell határozni a paramétereit. Az IT1 közelítő jelátviteli tagra és értékkövetésre gyakran alkalmazott a Friedrich (4.7. táblázat) ajánlás, mert egyszerűen mérhetők a paraméterei (4.18. ábra) és nem igényel egyéb megfontolásokat.

4.7. táblázat. Friedrich ajánlás legjobb értékkövetés képességre

	Leggyorsabb lengő $M_p \leq 20\%$		
	$K_C = k \cdot \frac{T_{lm}}{T_g}$	T_I	T_D
P	$k = 0.7$	-	-
PD	$k = 0.7$		$0.5 \cdot T_g$
PID	$k = 1.2$	$3.2 \cdot T_{lm}$	$0.8 \cdot T_g$

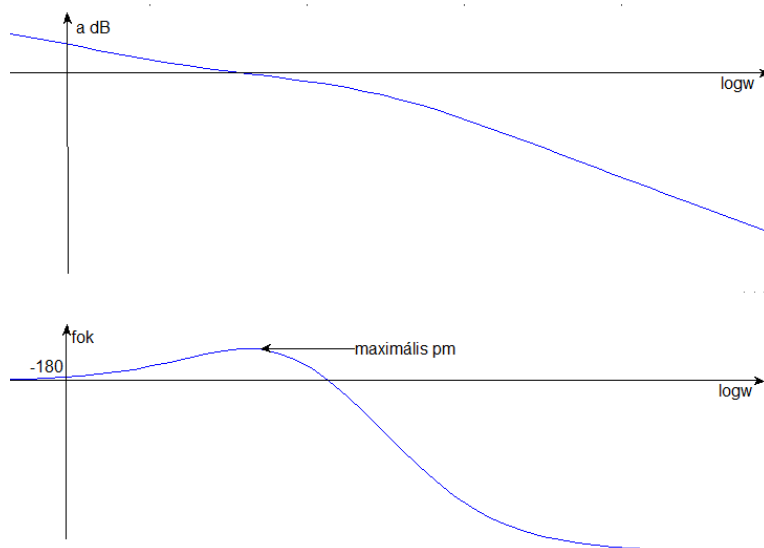
A 4.19. ábrán egymásra rajzolva látható a zárt szabályozási kör, 4.7. táblázat PDT és PIDT ajánlásának megfelelő kompenzáló tag paraméterekkel és $A_D = 8$ választással felvett, válaszfüggvénye.



4.19. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

4. Kompenzálás

A PIDT kompenzáló taggal felvett válaszfüggvény minőségi jellemzői hangelással sem nagyon javítható. A K_C növelése vagy csökkentése egyaránt csökkenti a fázistartalék értékét, és így növeli a lengéshajlamot, amit a felnyitott hurok átviteli függvény Bode diagramja (4.20. ábra) magyaráz.



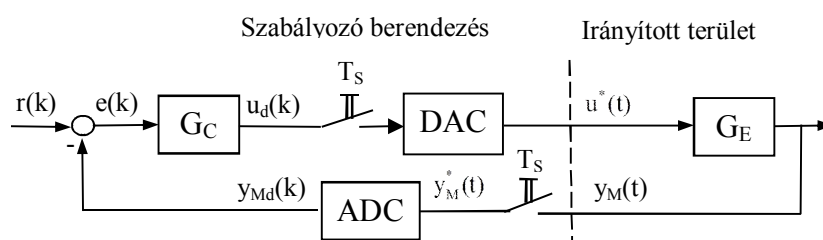
4.20. ábra. Soros PIDT kompenzáló tag és integráló eredő szakasz Bode diagramja

Megjegyzés: A szakirodalom számos ajánlást tartalmaz. Ezek különböző közelítő függvényre bontva, és azon belül a közelítő függvény időállandóinak aránya alapján alesetekre bontva ad ajánlásokat.

A 4A Melléklet 7. példa számszerűen lépésről-lépésre bemutatja az integráló jellegű eredő szakasz kompenzálását.

5. Hibrid és mintavételezett szabályozási kör

Manapság a szabályozó berendezések döntően mikroprocesszor alapúak. Az irányított terület (G_E eredő szakasz) jelei és jellemzői az analóg jeltartományban értelmezettek. Az 5.1. ábrán, és a továbbiakban a k jelöli a $k \cdot T_S$ időközönkénti időpontot. A T_S (sample time, scan time) a mintavételi idő.



5.1. A mintavételezett jelfolyam

Az $y_M(t)$ ellenőrző jelből T_S időközönként vesz mintát a szabályozó berendezés. A mintavételezési időpontokban értelmezett digitális számsorozatot $y_{Md}(k)$ egy A/D átalakító és tartó (az 5.1. ábrán ADC) állítja elő és tartja a következő mintavételi időpontig. Az ADC bemenetén az időben folytonos, de értékkészletében kvantált $y_M^*(t)$ ellenőrző jel van. A kompenzáló algoritmus eredményeként kapott $u_d(k)$ digitális szám T_S időközönként jut a D/A átalakító, és tartó (az 5.1. ábrán DAC) bemenetére. A DAC kimenete szolgáltatja az időben folytonos, de értékkészletében kvantált $u^*(t)$ végrehajtó jelet.

A T_S mintavételi idő megválasztásától függ, hogy tervezési szempontból a kompenzáló tag analóg vagy diszkrét szabályozónak tekintendő.

5.1. A mintavételezés hatása

A kvantálásból származó eltérés az A/D, D/A átalakítók felbontásától függ. Az iparban manapság 12, esetleg ± 11 bites átalakítókat használnak. A negyed vagy fél ezrelék kvantálásból származó eltérés egy nagyságrenddel kisebb, mint a távadók pontossága, illetve mint a végrehajtók érzékenysége. Így mérnöki szempontból a kvantálási hiba statisztikailag belesimul az távadók és végrehajtók hibájába.

Labor körülmények között végzett speciális mérésekben (például rezgés analízis) szükség van nagyobb pontosságra, és így a 15, esetleg 16 bites átalakítókra.

A mintavételezés felfogható modulációs eljárásnak, amelyben a hordozó jel Dirac delta sorozat:

$$y_{Md}(k) = y_M(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_s) = y_M(t) \cdot i_T(t) \quad <5.1.>$$

LTI rendszereket vizsgálva, határozzuk meg az $y_{Md}(kT_s)$ mintavételezett jel körfrekvencia spektrumát.

Rövid matematikai visszatekintés: Az 5.1. kifejezés Laplace transzformálása a komplex konvolúció, és a Reziduum tétel segítségével határozható meg. A komplex konvolúció tétel, az $f_1(t)$, és $f_2(t)$ időfüggvények $F_1(s)$, és $F_2(s)$ Laplace transzformáltjának ismeretében, két időfüggvény szorzatának Laplace transzformáltjának meghatározását definiálja:

$$L\{f_1(t)f_2(t)\} = F(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\sigma)F_2(s-\sigma)d\sigma \quad <5.2.>$$

A Reziduum tétel, ahol a $Res(k)$ az $F_1(\sigma)F_2(s-\sigma)$ szorzatfüggvény k -adik gyökelyén a szorzatfüggvény k -adik gyök nélküli határértéke.

$$F(s) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} Res(k) \{F_1(\sigma)F_2(s-\sigma)\} \quad <5.3.>$$

A Reziduum tétel igényli, hogy az 5.3. kifejezésben a komplex számsíkon zárt görbe mentén történjen az integrálás, ezért matematikailag a fiktív $-\omega$ körfrekvenciákon is értelmezzük a körfrekvencia függvényt.

Az 5.1. kifejezés függvényeinek Laplace transzformáltja:

$$L\{y_M(t)\} = y_M(s); \quad L\{i_T(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT_s} = \frac{1}{1 - e^{-sT_s}} \quad <5.4.>$$

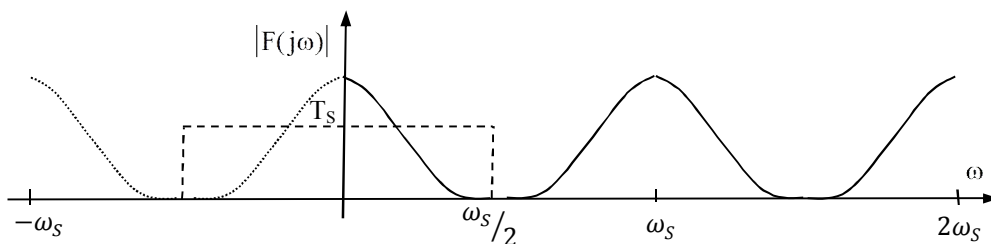
Az $i_T(s)$ gyökei $s_k = -k\omega_s$, ahol $k=0, \pm 1, \pm 2$, stb., és $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ (sample rate) ezért

$$y_{Md}(s) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} Res(k) \left\{ y_M(\sigma) \frac{1}{1 - e^{-T_s(s-\sigma)}} \right\} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_M(s + k \cdot j\omega_s) \quad <5.5.>$$

Az 5.5. kifejezés periodikus, és $k=0$ esetben, $s=j\omega$ behelyettesítéssel tartalmazza az $\frac{1}{T_s} y_M(j\omega)$ értéket.

A Shannon tétel: Ha az $F(j\omega)$ jel a $\{0 - \omega_L\}$ körfrekvencia tartományban sávkorlátozott és a legnagyobb körfrekvencia összetevő a jelben kisebb, mint a mintavételei körfrekvencia fele $\left\{\omega_L < \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}\right\}$, akkor T_s erősítésű és $\frac{\omega_s}{2}$ sávszélességű ideális szűrővel az eredeti $F(j\omega)$ jel kiszűrhető.

A Shannon tételnek eleget tevő mintavételezett jel spektrumát az 5.2. ábra szemléletesen mutatja. Az 5.2. ábrát értelemszerűen csak a pozitív ω körfrekvenciákon kell értelmezni.

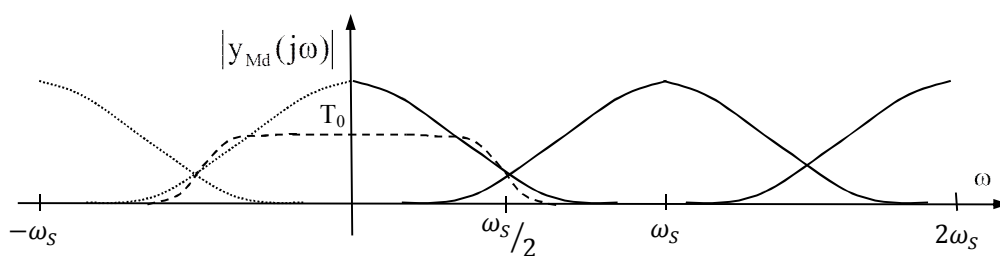


5.2. Sávkorlátozott mintavételezett jel spektruma

A Shannon feltételek teljesülése esetén az $y_M^*(t)$ mintavételezett analóg értékekből az $y_M(t)$ ellenőrző jel helyreállítható. Továbbá, ha csupa lineáris matematikai műveletet végzünk az $y_{Md}(kT_s)$ értékekkel, akkor az eredményül kapott $u(kT_s)$ számértékekből az $u^*(t)$ végrehajtó jel előállítható.

Csak hogy a valóságos fizikai rendszerek nem sávkorlátozottak és ideális aluláteresztő szűrő sem valósítható meg.

Az 5.3. ábra, amit szintén csak a pozitív ω körfrekvenciákon kell értelmezni, mutatja a valóságos fizikai jel és aluláteresztő szűrő körfrekvencia spektrumát.



5.3. Valóságos fizikai mintavételezett jel spektruma

Az 5.3. ábrán látható, hogy az aluláteresztő szűrővel szűrt jelben jelentős felharmonikus összetevő jelenik meg, ami hibát eredményez a jel helyreállításában.

Az 5.3. ábrán az is látható, hogy a periodikusan keletkező felharmonikus összetevők csúcspontjai $\frac{\omega_s}{2}$, $\frac{3\omega_s}{2}$, $\frac{5\omega_s}{2}$, stb. távolságra vannak az $\frac{\omega_s}{2}$ körfrekvenciától.

Ha a valóságos fizikai jel körfrekvencia spektruma alul-áteresztő szűrő jellegű, akkor minél távolabb van a csúcs, annál kisebb a felharmonikus okozta hiba.

A mintavételezés okozta hiba attól függ az $\frac{\omega_s}{2}$, $\frac{3\omega_s}{2}$, $\frac{5\omega_s}{2}$, stb. körfrekvenciákon mekkora az amplitúdó átvitel, és hogy milyen meredeken csökken az amplitúdó átvitel a magasabb körfrekvenciákon.

5.2. A mintavételi idő megválasztása hibrid szabályozásban

A hibrid szabályozásokat tervezés szempontjából analóg szabályozásként szokás kezelni. Ennek feltétele a T_s mintavételi idő helyes megválasztásával a felharmonikus összetevőkből származó hiba néhány ezreléknél kisebb legyen.

Szürke doboz modell esetén ismertek az eredő szakasz időállandói. Fekete doboz modell esetén az eredő szakasznak vagy az időtartánybeli átmeneti függvénye vagy a körfrekvencia tartománybeli átviteli függvény grafikus megjelenítése (Bode diagram) lett mérésrel meghatározva.

Szürke doboz modell alapján

Ha ismert az eredő szakasz átviteli függvénye, akkor ismertek a pólusai is. A pólusok abszolút értékek reciprok értéke az eredő szakasz T_k időállandói. Ha a T_s mintavételi idő megválasztásakor eleget teszünk az alábbi ajánlásnak, akkor a mintavételezésből származó hiba legfeljebb néhány ezrelék.

$$\frac{\sum_{k=1}^K T_k}{50} \geq T_s \geq \frac{\sum_{k=1}^K T_k}{150}; K: a \text{ pólusok száma} \quad <5.6.>$$

Ha az eredő szakasz közel PT1 jellegű vagy rendelkezik egy domináns időállandóval, akkor nagyobb számmal {100 – 150} célszerű osztani, hiszen az amplitúdó viszonylag magas körfrekvenciákon sem csökken meredeken.

Ha az eredő szakasz három vagy több időállandóval rendelkezik és nincs közöttük domináns, akkor kisebb számmal {50 – 100} célszerű osztani, hiszen az amplitúdó meredeken csökken a nagyobb körfrekvenciákon.

Ha integráló jellegű az eredő szakasz, akkor az eredő szakasz Bode alakjának időállandóit (köztük a T_I integrálási időt) kell összegezni.

Szürke doboz modell, átmeneti függvény alapján

A 3.4. táblázat mutatja a kapcsolatot az eredő szakasz beállási ideje ($T_{a2\%}$ vagy $T_{a5\%}$) és az időállandói között. Nagyjából az időállandók összegének ötszöröse a 2%-os és négyszerese az 5%-os pontosságú beállási idő. Az 5.6. kifejezés alapján:

$$\frac{T_{a2\%}}{250} \geq T_s \geq \frac{T_{a2\%}}{750}; \quad \frac{T_{a5\%}}{200} \geq T_s \geq \frac{T_{a5\%}}{600} \quad <5.7.>$$

Az átmeneti függvény alakjából kell következtetni időállandók számára és közelségére. Ezt követően az osztó paraméter megválasztásának szempontjai azonosak.

Integráló jellegű eredő szakasz esetén az IT1 szakaszközelítésnek megfelelő T_I integrálási időnek és T_g látszólagos időállandónak az összegét kell osztani legalább {500 – 750} közötti számmal. Minél távolabb vannak egymástól, annál nagyobb.

Megjegyzés: A szürke és fekete doboz modell esetén is igaz, hogy ha valóságos holdidő van az eredő szakaszban, akkor a holtidő legyen egészszámu többszöröse a mintavételi időnek.

Szürke doboz modell, körfrekvencia átviteli függvény alapján

Az algoritmus feldolgozásának idő igénye T_s időtartamú jelkésleltetést – H holtidős tagot - hoz a szabályozási körbe, ami torzítja a $G_0(j\omega)$ felnyitott hurok átviteli függvény fázismenetet. A holtidős tag fázisa lineárisan csökken, vagyis aránypárba állítható a körfrekvencia és a hozzátartozó fázistolás.

Megjegyzés: A Bode diagramon a logaritmikus lépték miatt csökken exponenciálisan a holtidős tag fázisa.

Ha a holtidős tag fázismenetén a $2\omega_s$ körfrekvencián engedünk 1 [rad] fázistolást és az ω_c vágási körfrekvencián a holtidős tag fázistolása $\Delta\varphi$, akkor érvényes az 5.8. kifejezés. A kifejezésben az ω_s a mintavételi körfrekvencia.

$$\frac{\Delta\varphi[\text{rad}]}{1[\text{rad}]} = \frac{\omega_c[\text{rad/sec}]}{2 \cdot \omega_s[\text{rad/sec}]}; \text{ a körfrekvencia diagramon számértékre } \omega_s = \frac{1}{T_s} \quad <5.8.>$$

Ha nincs vágási körfrekvencia, akkor a legkisebb törésponti körfrekvenciát kell az 5.8. kifejezésben felhasználni.

Ha az eredő szakasz leendő vágási körfrekvenciáján csak néhány fokos fázistorzulást {0.015 – 0.075 [rad]} eredményezhet a mintavétel, akkor:

$$0.015[\text{rad}] \leq \frac{\omega_c \cdot T_s}{2}[\text{rad}] \leq 0.075[\text{rad}]; \quad \frac{0.03}{\omega_c}[\text{sec}] \leq T_s[\text{sec}] \leq \frac{0.15}{\omega_c}[\text{sec}] \quad <5.9.>$$

Az eredő szakasz körfrekvencia függvényének fázismenetén jól látható az idő-állandók száma, és amplitúdó menetén az időállandók egymáshoz való közelsége. A konstans {0.03 – 0.15} megválasztásának megfontolása azonos az előzőekével.

Szokás a vágási körfrekvencián megengedett fázistorzulás mértékével definiálni a mintavételi időt. Az 5.8. kifejezés rendezve és $\Delta\varphi$ dimenzióját fokra váltva:

$$\frac{\pi[\text{rad}] \cdot \Delta\varphi[^\circ]}{180[^\circ]} = \frac{(\omega_c \cdot T_s)[\text{rad}]}{2}; \quad T_s \leq \frac{\pi}{90^\circ \cdot \omega_c} \Delta\varphi[^\circ] [\text{sec}] \quad <5.10.>$$

5.3. A Z transzformáció

Ha valamilyen korlátozás miatt, az előbbi feltételeket nem teljesítő mintavételi időt kell alkalmazni, akkor figyelembe venni a mintavételezés hatását.

Ha az kT_s időpontokban az $x(t)$ függvény számértéke $x(k)$, akkor az $x_d(t)$ diszkrét időfüggvény felírható, mint számértékek végtelen sorozata.

$$x_d(t) = x(0)\delta(t) + x(1)\delta(t - T_s) + \dots + x(k)\delta(t - kT_s) + \dots \quad <5.11.>$$

Áttérve az operátoros körfrekvencia tartományra:

$$x(s) = x(0) + x(1)e^{-sT_s} + \dots + x(k)e^{-skT_s} + \dots \quad <5.12.>$$

Az $x_d(s)$ a „z” változó függvénye lesz, ha:

$$z = e^{sT_s}; \quad x(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots + x(k)z^{-k} + \dots \quad <5.13.>$$

A Z transzformáció általános alakja:

$$Z\{x(t)_{t=kT_s}\} = Z\{x_d(t)\} = x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)z^{-k} \quad <5.14.>$$

Az 5.14. kifejezésben az $x(z)$ hatványsor. Minden hatványsor konvergens egy ρ sugarú körben, és ha a hatványsor kitevője negatív, akkor $R = 1/\rho$ sugarú körön kívül konvergens. Az összegképletet azonban sokszor nehéz meghatározni.

Az inverz Z transzformáció a Reziduum tételt használja fel

$$Z^{-1}\{x(z)\} = x_d(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(z)z^{k-1} dz \quad <5.15.>$$

ahol C egy R sugarú, origó középpontú kör kerülete a „ z ” komplex számsíkon.

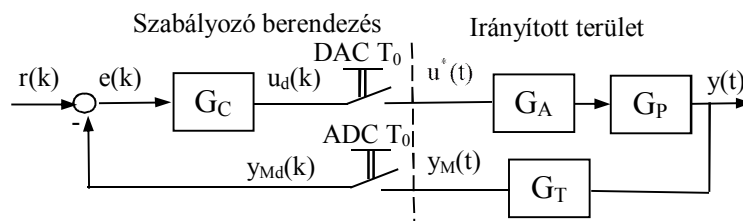
Megjegyzés: Az 5.14. kifejezésben definiált konverzióból adódóan a Z transzformáció is csak belépő függvényekre igaz, vagyis az $x(z)$ függvény inverz Z transzformált $x_d(t)$ időfüggvénye csak $t \geq 0$ értékekre értelmezett. Az is érthető, hogy az inverz Z transzformáció eredménye az $x_d(t)$ időfüggvény csak diszkrét idejű kT_s időpontokban ad értéket. A folytonos $x(t)$ függvényről csak az mondható el, hogy lefedi a $x_d(t)$ időfüggvény diszkrét idejű pontjait. Ha jól választottuk meg a T_s mintavételi időt, akkor a diszkrét idejű pontokhoz tartozó értékeket összekötő egyenes a folytonos $x(t)$ függvény néhány ezrelék pontosságú közelítése.

LTI rendszerekben a diszkrét idejű függvényekre érvényesek az 5.1. táblázatban felsorolt szabályok. Összehasonlításképp a középső oszlopban a Laplace transzformáció szabályait is tartalmazza a táblázat.

5.1. táblázat. A Z transzformáció szabályai

$c \cdot x(t)$	$c \cdot x(s)$	$c \cdot x(z)$
$c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$	$c_1 \cdot x_1(s) + c_2 \cdot x_2(s)$	$c_1 \cdot x_1(z) + c_2 \cdot x_2(z)$
$\frac{1}{T_I} \int x(t) dt$	$\frac{x(s)}{sT_I}$	$\frac{T_s}{T_I} \frac{z}{z-1} x(z)$
$T_D \frac{dx(t)}{dt}$	$T_D s x(s), x(t)_{t=0} = 0$	$T_D \frac{z-1}{z} x(z)$
$l(t-\tau) \cdot x(t-\tau)$	$e^{-s\tau} x(s)$	$z^{-k} x(z), \tau = kT_s$

Fontos különbség a **diszkrét idejű**, és a folytonos (operátoros vagy komplex körfrekvencia) átviteli függvények között, hogy a folytonos átviteli függvényekre definiált soros, párhuzamos, és visszacsatolt eredő kifejezések a diszkrét idejű átviteli függvényekre csak akkor igazak, ha jelátviteli tag előtt és mögött mintavételező van. Más szavakkal, csak mintavételezett, diszkrét idejű jelek között definiálható $G(z)$ diszkrét idejű átviteli függvény.



5.4. ábra A mintavételező szerepe a jelfolyamban

Az 5.4. ábrán a kompenzáló jelátvivő tag be-, és kimenetén is diszkrét idejű jelek vannak, így $G_C(z)$ egy lépésben meghatározható. De a G_A , G_P , G_T jelátviteli tagok diszkrét idejű átviteli függvényét, bár egyszerűbb lenne, nem érdemes külön-külön meghatározni, mert az így kapott diszkrét idejű átviteli függvényeket nem szabad soros tagként kezelve összeszorozni. A mintavételes szabályozási kör elemzéséhez az eredő szakasz $G_E(s)=G_A(s)G_P(s)G_T(s)$ átviteli függvényét kell alkalmazni.

A $G_E(z)$ diszkrét idejű átviteli függvény a $g_E(t)$ függvény Z transzformáltja, ahol $g_E(t)=L^{-1}\{G(s)\}$. Ezután már az operátoros tartománybeli soros és visszacsatolt eredő kifejezések alkalmazhatók a $G_0(z)$ felnyitott hurok és a $G_{yr}(z)$ alapjel átviteli függvények meghatározására.

$$G_0(z) = G_C(z) \cdot G_E(z); \quad G_{yr}(z) = \frac{G_C(z) \cdot G_E(z)}{1 + G_C(z) \cdot G_E(z)} = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)} \quad <5.16.>$$

Az 5.14. kifejezés összegképletének meghatározása nem egyszerű, és az 5.15. kifejezés megoldása körülményes. Ezért a leggyakrabban alkalmazott jelek, és függvények Z transzformált alakját a szakkönyvek táblázatos formában megadják.

5.2. táblázat Időfüggvények Laplace és Z transzformált alakjai

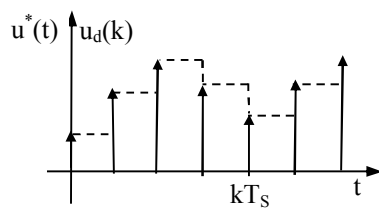
$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{z \cdot T_s}{(z-1)^2}$
$\frac{T_D}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{sT_D}{1+sT}$	$\frac{T_D}{T} \frac{z}{z-b}, b = e^{-\frac{T_s}{T}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-b}, b = e^{-aT_s}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(c-d)}{(z-c)(z-d)}, c = e^{-aT_s}, d = e^{-bT_s}$

Ha adva van egy $G(z)$ átviteli függvény, akkor az 5.2. táblázat alkalmazásához meg kell határozni a nevező gyökeit (pólusait). Ezt követően részlettörtekre kell bontani. Az egyes részlettörtek nevezője csak első fokú vagy másodfokú polinom lehet gyöktényezős alakban.

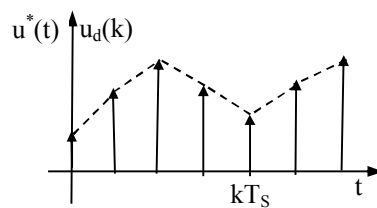
5.4. Az „s” és a „z” tartomány közötti konverzió

A cél a polinom tört alakot megtartó konverzió, amellyel teljesül, hogy az analóg $u(t)$ jellel gerjesztett eredő szakasz (folytonos jelátvivő tag) $y_M(t)$ válasz függvénye, és az $u_d(t)$ diszkrét jelsorozattal gerjesztett eredő szakasz válaszfüggvénye a mintavételi időpontokban azonosak legyenek.

Az $u_d(t)$ diszkrét jelsorozat végtelenül keskeny, kT_s időközönként megjelenő impulzussorozat. Ez fizikailag alkalmatlan az eredő szakasz gerjesztésére. Szükség van tartó szervre a mintavételi időpontok között. A tartó szerv bemeneti jele a $u_d(t)$ diszkrét jelsorozat, kimeneti jele a $u^*(t)$.



a. A nullarendű tartószerv jelei



b. Az elsőrendű tartószerv

5.5. ábra. Tartószervek

A nullarendű tartószerv (zero order hold) kimeneti jele $u^*(t)$ jel lépcsőkből áll (5.5.a. ábra). Az $u_d(k)$ amplitúdójú lépcső leírható két, T_s idővel eltolt egységugrás különbségeként. A lépcsők egymástól csak amplitúdóban és a kezdő időpontban térnek el egymástól. A közös rész a DAC $g_w(t)$ súlyfüggvénye.

$$u_d(k)\{1[t - kT_s] - 1[t - (k+1)T_s]\}; \quad g_w(t) = \{1(t) - 1(t - T_s)\} \quad <5.17.>$$

A nullarendű tartószerv súlyfüggvényének Laplace transzformáltja a $G_w(s)$ átviteli függvény:

$$G_w(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT_s} \quad <5.18.>$$

A nullarendű tartószerv $G_w(s)$ átviteli függvényét az eredő szakasz részeként kell figyelembe venni $G_E^*(s) = G_w(s) \cdot G_E(s)$.

Az elsőrendű tartószerv (first order hold) kimeneti jele $u^*(t)$ jel trapéz alakú lépcsőkből áll (5.5.b. ábra). Az $u_d(k)$ amplitúdójú trapéz lépcső leírható az $u_d(0)$ kezdő értékkel és két, T_s idővel eltolt, sebességugrás különbségeként, és így tovább.

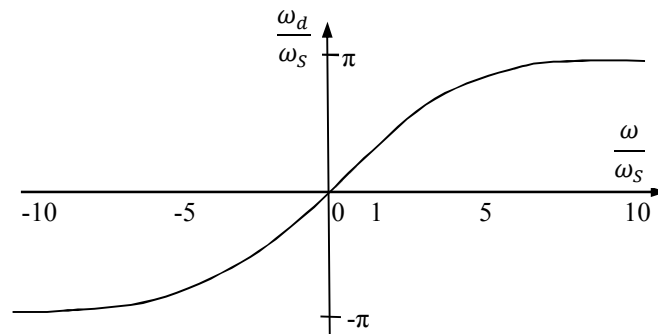
Megjegyzés: A mérnöki gyakorlatban csak nagyon nagy T_s mintavételi idő esetén ad jobb eredményt, mint a nullarendű tartószerv.

A $G(s)$ és a $G(z)$ átviteli függvény közötti konverzió behelyettesítéssel

Kézenfekvő lenne, hogyha már ismert a $G(s)$ átviteli függvény, akkor hasonlóan az $s=j\omega$ helyettesítéshez, valamilyen alkalmas $s=f(z)$ konverziót találni. A $z = e^{sT_s}$ kifejezésből az $s = \frac{\ln z}{T_s}$ behelyettesítés az úgynevezett optimális leképezés, de ez transzcendens függvény, ezért az eredmény nem polinom tört alak.

A különböző konverziós technikák közül a Tustin képlet (5.19. kifejezés) előnye, hogy az optimális leképezéssel megegyező tartományba képi le az s komplex számsíkot a z komplex számsíkba (5.6. ábra). A Tustin konverzió további előnye, hogy az 5.19. kifejezést az eredő szakasz $G_E(s)$ átviteli függvénybe behelyettesítve magába foglalja a nullarendű tartószervet is.

$$s \approx \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}; \text{ a körfrekvencia tartomány } \frac{\pi}{T_s} \geq \omega_d \geq -\frac{\pi}{T_s} \quad <5.19.>$$



5.6. Analóg, diszkrét jel körfrekvencia tartományai

Az 5.6. ábra vízszintes tengelyén az 1 értéknél van az ω_s mintavételezési körfrekvencia. Az átkonvertálás nem lineáris, mint azt az 5.6. ábra is mutatja, a magas körfrekvencia tartományban torzul. Az is látható az ábrán, hogy az $\omega \leq \omega_s$ körfrekvenciákon a konverzió közel lineáris. Ezért a torzulás a szabályozási hurokban nem jelent problémát, hiszen helyes kompenzáló tag méretezés esetén az $\omega_c \ll \omega_s$ és így a magasabb körfrekvenciák messze esnek.

A diszkrét szabályozó alkalmazásakor a betartandó mintavételi arány:

$$\frac{\sum_{k=1}^K T_k}{12.5} \geq T_s \geq \frac{\sum_{k=1}^K T_k}{50}; \quad \frac{T_{a5\%}}{50} \geq T_s \geq \frac{T_{a5\%}}{200} \quad <5.20.>$$

A $G_C(z)$ átviteli függvény meghatározása a differenciálegyenletből

A jelátvivő tag differenciál egyenlete legyen:

$$\begin{aligned} c_n \frac{d^n x_{ki}(t)}{dt} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{ki}(t)}{dt} + \dots + c_1 \frac{dx_{ki}(t)}{dt} + c_0 x_{ki}(t) = \\ d_m \frac{d^m x_{be}(t)}{dt} + d_{m-1} \frac{d^{m-1} x_{be}(t)}{dt} + \dots + d_1 \frac{dx_{be}(t)}{dt} + d_0 x_{be}(t) \end{aligned} \quad <5.21.>$$

A jelátvivő tag differenciál egyenletéből, a differencia egyenlet felírható. A részletes magyarázatot az 5A Melléklet tartalmazza.

$$\begin{aligned} c_n x_{ki}\{kT_S\} + c_{n-1} x_{ki}\{(k-1)T_S\} + \dots + c_1 x_{ki}\{(k-n+1)T_S\} + c_0 x_{ki}\{(k-n)T_S\} = \\ d_m x_{be}\{kT_S\} + d_{m-1} x_{be}\{(k-1)T_S\} + \dots + d_1 x_{be}\{(k-m+1)T_S\} + d_0 x_{be}\{(k-m)T_S\} \end{aligned} \quad <5.22.>$$

A Z transzformáció az 5.1. táblázat alapján elvégezhető.

$$\begin{aligned} c_n x_{ki}(z) + c_{n-1} x_{ki}(z)z^{-1} + \dots + c_1 x_{ki}(z)z^{-n+1} + c_0 x_{ki}(z)z^{-n} = \\ d_m x_{be}(z) + d_{m-1} x_{be}(z)z^{-1} + \dots + d_1 x_{be}(z)z^{-m+1} + d_0 x_{be}(z)z^{-m} \end{aligned} \quad <5.23.>$$

Az 5.22. kifejezésből a diszkrét idejű $G(z)$ átviteli függvény

$$G(z) = \frac{x_{ki}(z)}{x_{be}(z)} = \frac{d_m + d_{m-1}z^{-1} + \dots + d_1z^{-m+1} + d_0z^{-m}}{c_n + c_{n-1}z^{-1} + \dots + c_1z^{-n+1} + c_0z^{-n}} \quad <5.24.>$$

Megjegyzés: A differencia egyenletből előállított $G(z)$ átviteli függvény nem tartalmazza a nullarendű tartószervet.

A differencia egyenlet c_i , és d_i együtthatóinak számértékét az a_i , b_i értékek, és a T_S mintavételezési idő határozzák meg (5A Melléklet).

Ha az 5.22. kifejezésben az $x_{ki}(k) = u(k)$ és $x_{be}(k) = y_M(k)$ és az együtthatók (c_i , d_i) egy kompenzáló tag differenciálegyenletéből képzettek, akkor rekurzív formula készíthető az $u(k+1)$ kiszámítására. A számítás időigénye miatt a kT_S időpontban rendelkezésre álló mért ($y_M(k), y_M(k-1), \dots, y_M(k-m)$) ellenőrző jel értékekből és a már kiszámolt ($u(k), u(k-1), \dots, u(k-n+1)$) végrehajtó jel értékekből lehet az $u(k+1)$ értékét kiszámítani, vagyis T_S holtidő elteltével áll rendelkezésre az új végrehajtó jel.

$$\begin{aligned} u(k+1) = -\frac{c_{n-1}}{c_n} u(k) - \frac{c_{n-2}}{c_n} u(k-1) - \dots - \frac{c_1}{c_n} u(k-n+2) - \frac{c_0}{c_n} u(k-n+1) + \\ + d_m y_M(k) + d_{m-1} y_M(k-1) + \dots + d_1 y_M(k-m+1) + d_0 y_M(k-m) \end{aligned} \quad <5.25.>$$

Inverz Z transzformáció részlettörtekre bontással

Ha $x_{ki}(z)$ polinom tört formában adott, akkor gyöktényezős alakra kell hozni:

$$x_{ki}(z) = G(z)x_{be}(z) = \frac{\beta_k + \beta_{k-1}z^{-1} + \dots + \beta_1z^{-k+1} + \beta_0z^{-k}}{\alpha_i + \alpha_{i-1}z^{-1} + \dots + \alpha_1z^{-i+1} + \alpha_0z^{-i}} \quad <5.26.>$$

$$x_{ki}(z) = G(z)x_{be}(z) = \frac{\beta_k (z + q_1)(z + q_2) \dots (z + q_k)}{\alpha_i (z + p_1)(z + p_2) \dots (z + p_i)} \quad <5.27.>$$

A polinom tört részlettörtekre bontható. A részlettörtek nevezője nem tartalmazhat komplex számot és a $p = -1$ integráló hatás (5.2. táblázat), ezért a lehetséges részlettört alakok:

$$\frac{Az}{(z-1)}; \quad \frac{Bz}{(z-1)^2} = \frac{B_1z}{(z-1)} + \frac{B_2z}{(z-1)^2}; \quad \frac{Cz}{(z-a)}; \quad \frac{Dz}{(z^2 - cz + d)} \quad <5.28.>$$

Megjegyzés: A tapasztalatok szerint a kétszeres integráló hatást érdemes a fenti módon felbontani.

Értelemszerűen a gyöktényezős alak pólusai döntik el, hogy a lehetséges részlettörtek közül melyiket és hányszor kell alkalmazni.

Közös nevezőre hozva a részlettörteket a számláló a polinom tört formátumú lesz, és az együttható összehasonlítás az 5.26 kifejezéssel „k” darab, „k” ismeretlenes egyenletrendszert eredményez.

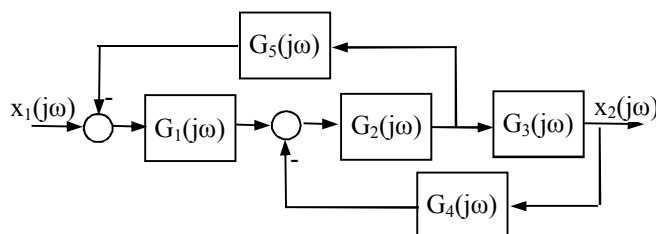
Megjegyzés: A részlettörtre bontásra van külön Matlab parancs.

Mellékletek

2.A. Melléklet

A Mason szabály alkalmazása

Példa: Határozza meg a 2A.1. ábrán látható összetett blokkvázlat eredő $G(j\omega)$ körfrekvencia átviteli függvényét.



2A.1. Összetett blokkvázlat

A Mason szabály: Az eredő komplex körfrekvencia függvény számlálójában a független előre vezető ágak átviteli függvényeinek összege, a nevezőjében a független hurok átviteli függvényeinek összege van.

Az előre vezető ág átviteli függvénye a nyilak mentén a gerjesztő jeltől a gerjesztett jelig található jelátviteli tagok komplex körfrekvencia függvényeinek szorzata.

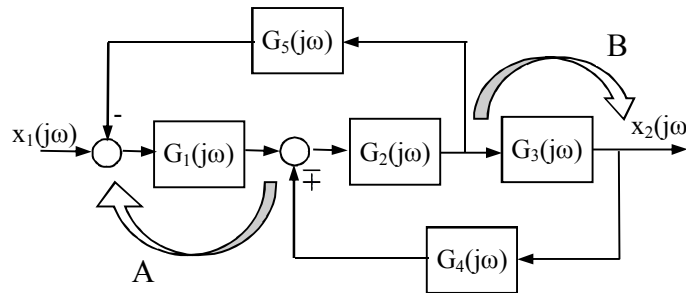
A hurok a nyilak mentén haladva önmagába visszatérő útvonal. A hurokban egy jelátvivő tag csak egyszer szerepelhet. A hurokátviteli függvény a hurokban található jelátviteli tagok komplex körfrekvencia függvényeinek szorzata. A hurokátviteli függvény előjele attól függ, hogy hány negatív előjelű összegző van a hurokban. Páros számú esetén mínusz, páratlan számú esetén plusz a hurok előjele.

Megjegyzés: Független az előre vezető ág, ha a nyilak mentén haladva legalább egy a többi ágtól eltérő jelátviteli tagja van. Független egy hurok, ha a nyilak mentén haladva legalább egy a többi huroktól eltérő jelátviteli tagja van a huroknak.

A 2A.1 ábra blokkvázlatában egy előre vezető ág van $G_{N1} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$, és két független hurok $G_{D1} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_5$ és $G_{N1} = G_2 \cdot G_3 \cdot G_4$. Mind a két hurokban egy negatív előjelű összegző tag van. Az eredő

$$G(j\omega) = \frac{G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_5(j\omega) + G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega) \cdot G_4(j\omega)} \quad <2A.1>$$

A 2A.1 ábra blokkvázlata meglehetősen egyszerű volt. Ebben a feladatban a blokkvázlat átalakítás nem jelent könnyebbséget. Azonban a Mason szabály alkalmazása bonyolult (több hurok és több elágazás) komplex blokkvázlat esetében könnyen eltéveszthető, míg blokkvázlat átalakításkor mindig csak néhány elemre kell koncentrálni. A feladatot vagy az „A” összegző pont, vagy a „B” elágazás áthelyezésével is meg lehet oldani (2A.2. ábra).

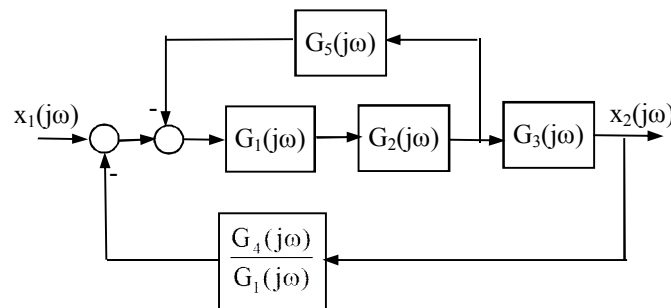


2A.2. Összetett blokkvázlat átalakítási lehetőségei

Az „A” összegző pont áthelyezése

Első lépés:

A 2.7.a. és a 2.7.c. szabályokat alkalmazva kapjuk a 2A.3. ábrát.



2A.3. Az összegző pont áthelyezése

Második lépés:

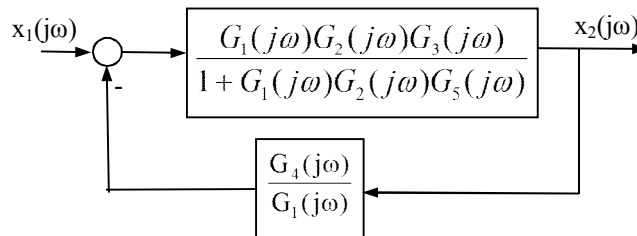
A 2A.3. ábrán összevonva a soros $G_1(j\omega)$ és $G_2(j\omega)$ blokkokat kapjuk a $G_{12}(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$ blokkot. Ez van visszacsatolva a $G_5(j\omega)$ blokkal.

Az eredmény a következő:

$$G_{125}(j\omega) = \frac{G_{12}(j\omega)}{1 + G_{12}(j\omega)G_5(j\omega)} = \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_5(j\omega)} \quad <2A.2>$$

2.A. Melléklet. Mason szabály

A G125 blokkal a G3 sorban van, és ez van vissza csatolva a 2A.3. ábrán látható blokkal. Az eredményt a 2A.4 ábra mutatja.



2A.4. Összevonások

A 2A.4. ábrára felírva a visszacsatolt eredő szabályát:

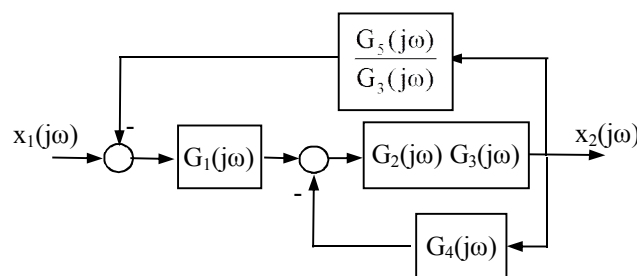
$$G(j\omega) = \frac{\frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_5(j\omega)}}{1 + \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_5(j\omega)} \cdot \frac{G_4(j\omega)}{G_1(j\omega)}} = \frac{\frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_5(j\omega)}}{1 + \frac{G_2(j\omega)G_3(j\omega)G_4(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_5(j\omega)}}$$

Egyszerűsítve az emeletes törtet szorozzuk be a fenti kifejezés számlálóját és a nevezőjét egyaránt a $1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_5(j\omega)$ függvénnyel, és ekkor visszakapjuk a 2A.1. kifejezést.

Az „B” elágazás áthelyezése

Első lépés:

A 2.7.e. szabályt alkalmazva kapjuk a 2A.5. ábrát. Az ábrán rögtön egyetlen blokként rajzoltuk meg a G_2 és a G_3 soros eredőjét.



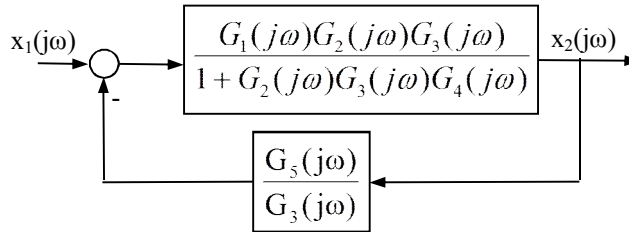
2A.5. Az elágazás áthelyezése

Második lépés:

A G_2 , G_3 , és a G_4 alkotta hurok visszacsatolt eredője

$$G_{234}(j\omega) = \frac{G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 + G_2(j\omega)G_3(j\omega)G_4(j\omega)} \quad <2A.3>$$

Az így kapott G_{234} sorban van a G_1 taggal, és ez van visszacsatolva 2A.6. ábra.



2A.6. Összevonások

A 2A.6. ábrára felírva a visszacsatolt eredő szabályát:

$$G(j\omega) = \frac{\frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 + G_2(j\omega)G_3(j\omega)G_4(j\omega)}}{1 + \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 + G_2(j\omega)G_3(j\omega)G_4(j\omega)} \frac{G_5(j\omega)}{G_3(j\omega)}} = \frac{\frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 + G_2(j\omega)G_3(j\omega)G_4(j\omega)}}{1 + \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_5(j\omega)}{1 + G_2(j\omega)G_3(j\omega)G_4(j\omega)}}$$

Egyszerűsítve az emeletes törtet szorozzuk be a fenti kifejezés számlálóját és a nevezőjét egyaránt a $1 + G_2(j\omega)G_3(j\omega)G_4(j\omega)$ függvényvel, és ekkor visszkapjuk a 2A.1. kifejezést.

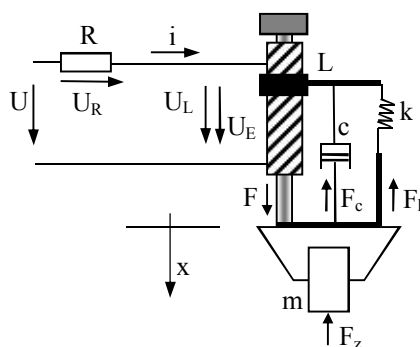
$$G(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 \pm G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_5(j\omega) \pm G_2(j\omega)G_3(j\omega)G_4(j\omega)} \quad <2A.4>$$

2.B. Melléklet

Elektromechanikus modell

A matematikai modell készítése a berendezés, készülék, vagy szerv egyes részegységeinek működését leíró fizikai, kémiai egyenletek felhasználásával, valamint a részegységek egymásra hatásának figyelembevételével történik. Az eljárás legegyszerűbben egy példa segítségével magyarázható.

Egy masszírozó szék egyik nyomófejének elektro-mechanikus sémája látható a 2B.1. ábrán. Az L induktivitású tekercset gerjesztve a mágnesezhető rúd x irányban elmozdul, és elmozdítja az m tömegű nyomófejet. A nyomófej mozgását a c csillapítási tényezőjű lengéscsillapító mérsékli. A gerjesztés megszűnéskor a k rugótényezőjű lágy laprúgó akadályozza meg a nyomófej lötyögését. A tekercset az U feszültség gerjeszti, és a tekercs és vezetékek ellenállása R . A masszírozó szék nyomófeje a használója által átlagosan F_{z0} ellenerő nehezedik. A nyomófejre nehezülő átlagos ellenerő ingadozása $F_z(t)$.



2B.1. ábra Nyomófej sémája

A feladat az $u(t)$ feszültség, mint bemenő jel, és az $x(t)$ elmozdulás, mint kimenő jel közötti kapcsolatot modellező differenciálegyenlet felírása.

A nyomófejre, mint mechanikai rendszerre, érvényes Newton második törvénye. Az F a nyomófejre ható erő. Az F erő ellen hat az F_k rugóerő, az F_z nyomófejre nehezülő átlagos ellenerő, és az F_c súrlódási erő jellegű csillapítás.

A $\sum F$ a tömegszer a gyorsulás. Az F nyomófejre ható erő a tekercsben folyó árammal, az F_c mozgás csillapítása az elmozdulás sebességével, az F_k rugóerő az elmozdulással arányos.

$$\sum F = F - F_c - F_k - F_z \quad m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = K_i i(t) - c \frac{dx(t)}{dt} - kx(t) + F_z(t) \quad <2B.1.>$$

A 2B.1. kifejezésben a „ K_i ” az elektromotoros-erő tényező, a „ c ” a csillapítási tényező, a „ k ” a rugóerő állandó, és az „ m ” a mágnesezhető rúd és a nyomófej tömege. A kifejezésben nem vesszük figyelembe, hogy a rúd és a nyomófej tömege nem pontos, és a melegezési veszteséget.

2.B. Mellélet Szürke doboz modell

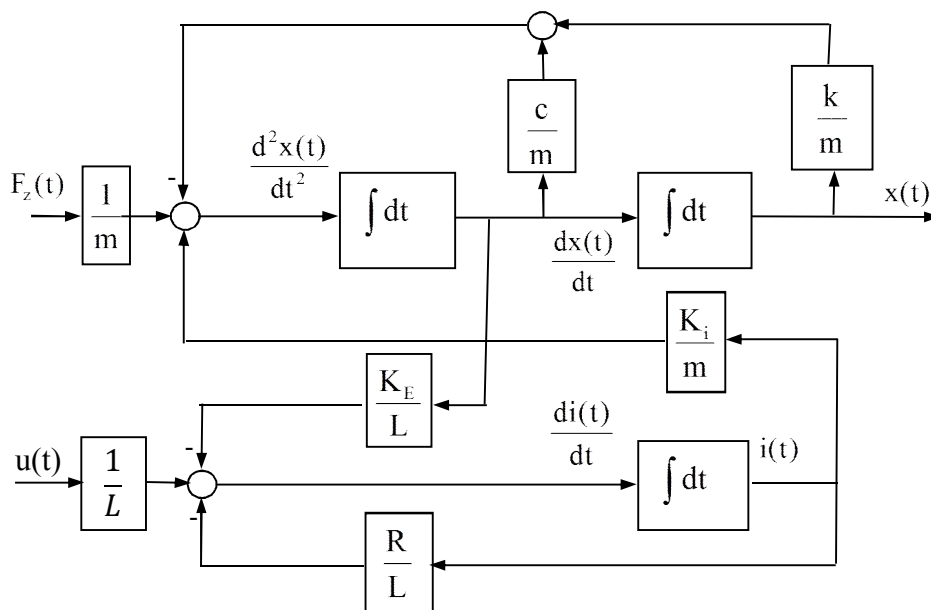
Az elektromos hurokra igaz Kirchoff törvénye. A mágnesezhető rúd mozgása a tekercsben az elmozdulás sebességével arányos U_E feszültséget indukál. Az ellenálláson az árammal arányos U_R , a tekercsen az áramváltozás sebességével arányos U_L feszültség esik.

$$\sum U = U - U_R - U_L - U_E \quad 0 = u(t) - R \cdot i(t) - L \frac{di(t)}{dt} - K_R \frac{dx(t)}{dt} \quad <2B.2.>$$

A 2B.2. kifejezésben a „ K_E ” az elektromotoros tényező, az „ R ” a tekercs ellenállása, és az „ L ” a tekercs induktivitása. A kifejezésben nem vesszük figyelembe a tekercs hiszterézisét, és koncentrált paraméterűnek tekintjük az elektronikus áramkört.

Rendezzük át a 2B.1. és 2B.2. kifejezéseket úgy, hogy a legmagasabb rendű differenciálhányados legyen a baloldalon.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= \frac{K_I}{m} i(t) - \frac{c}{m} \frac{dx(t)}{dt} - \frac{k}{m} x(t) + \frac{1}{m} F_z(t) \\ \frac{di(t)}{dt} &= \frac{1}{L} u(t) - \frac{R}{L} i(t) - \frac{K_E}{L} \frac{dx(t)}{dt} \end{aligned} \quad <2B.3.>$$



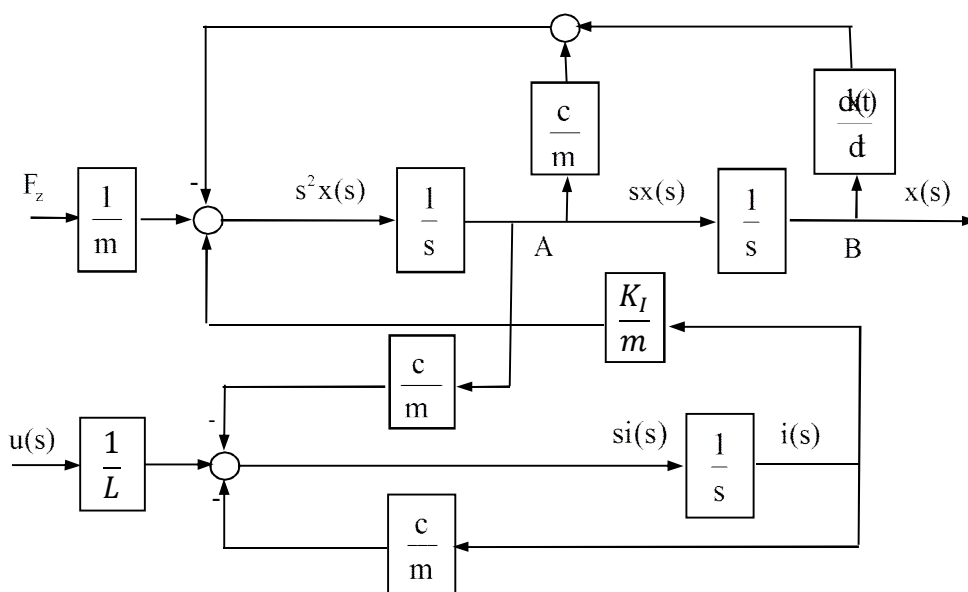
2B.2. ábra. A nyomófej differenciálegyenleteinek blokkvázlata

Az elektromos és a mechanikai rendszer között - mint az várható volt - kölcsönhatás van.

2.B. Mellélet Szürke doboz modell

Az u gerjesztő feszültség és az x elmozdulás közötti kapcsolat meghatározásához megszerkeszthető az egyenletrendszer blokkvázlata. A 2B.2. ábra a 2B.3. egyenletrendszer grafikus megjelenítése. Figyelem a blokkvázlat átalakítási szabályok alkalmazhatóságához át kell térni az operátoros vagy a körfrekvencia tartományba.

Az integrálási ($L\left\{\int dt\right\} = \frac{1}{s}$) és a differenciálási ($L\left\{\frac{d}{dt}\right\} = s$) műveletek formális átírása belépő függvényeket feltételezve megengedhető. Így kapjuk a 2B.2. ábrából a 2B.3. ábrát.



2B.3. ábra. A nyomófej operátoros egyenleteinek blokkvázlata

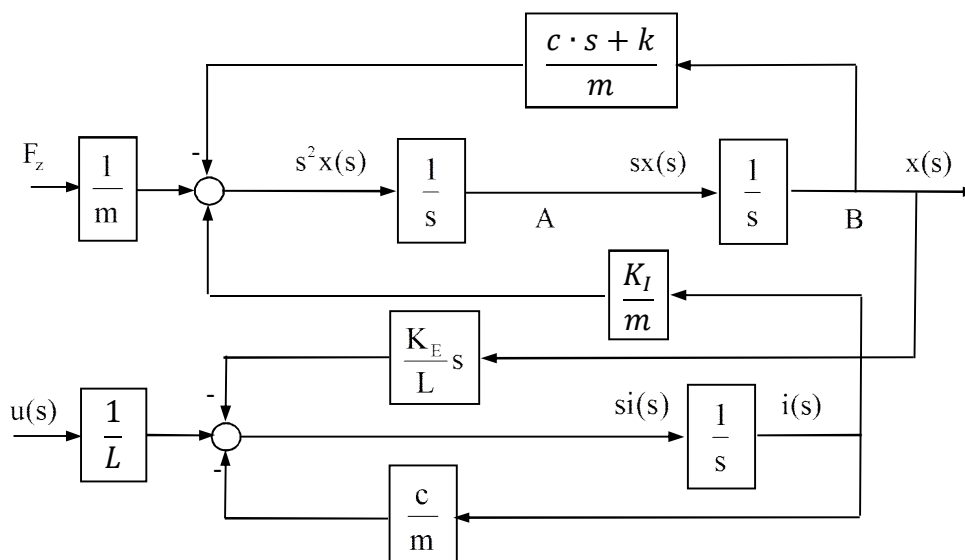
A 2B.3. kifejezés a differenciálegyenleteinek Laplace transzformálásával is átférthetünk az operátoros tartományba (2B.4. kifejezés).

$$s^2 x(s) = \frac{K_I}{m} i(s) - \frac{c}{m} s \cdot x(s) - \frac{k}{m} x(s) + \frac{1}{m} F_z(s) \quad <2B.4.>$$

$$s \cdot i(s) = \frac{1}{L} u(s) - \frac{R}{L} i(s) - \frac{K_E}{L} s \cdot x(s)$$

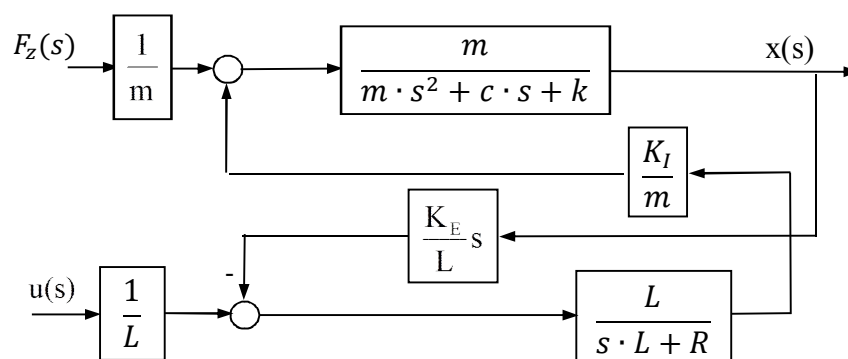
Megjegyzés: A 2B.3 ábra a 2B.4 kifejezés grafikus megjelenítése.

A 2B.3. ábrán az „A” pontban levő elágazások „B” pontba helyezésével, és a párhuzamos visszacsatoló ágak egyesítésével jön létre a 2B.4. ábrán látható egyszerűített blokkvázlat.



2B.4. ábra. A nyomófej operátoros egyenleteinek egyszerűsített blokkvázlata

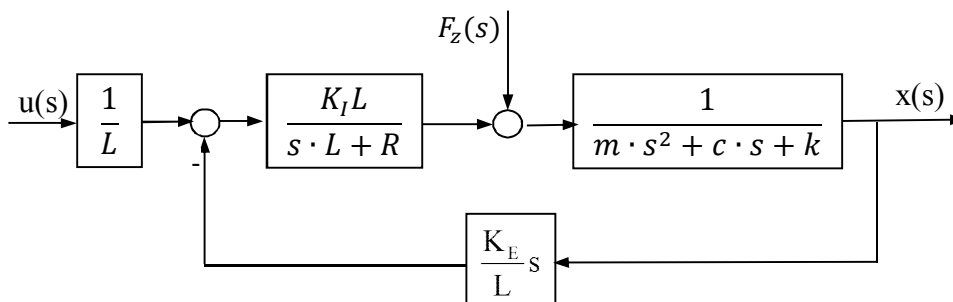
A 2B.4. ábrán az $sx(s)$ és az $si(s)$ jeleket tartalmazó, negatívan visszacsatolt hurkokat egy blokkal helyettesítve kapjuk a 2B.5. ábrán látható blokkvázlat.



2B.5. ábra. A nyomófej egyszerűsített operátoros blokkvázlat

A 2B.5. ábrán az $u(s)$ gerjesztéstől a nyílak mentén haladva az $x(s)$ elmozdulásig kapjuk az előre vezető ágot. Az $x(s)$ elmozdulástól az $u(s)$ egy visszacsatolás van. A 2B.6. ábra létrejöttéhez a szükséges még, hogy a zavaró jellemző támadáspontja mögé helyezzük át az $\frac{1}{m}$ blokkot.

A 2B.6. ábra a szabályozandó szakasz modellje, ahol az $u(s)$ a módosító és az $x(s)$ a szabályozott jellemző. Az ellenerő ingadozása $F_z(s)$ a zavarjellel.



2B.6. ábra. A nyomófej blokkvázlata

A 2B.6. ábra alapján felírhatók az átviteli függvények $u(s)$ gerjesztő feszültség és a $x_{ki}(s)$ elmozdulás között, valamint az ellenelő ingadozása $F_z(s)$ és a $x_{ki}(s)$ elmozdulás között.

$$G_{xu}(s) = \frac{x_{ki}(s)}{u(s)} = \frac{K_I}{s^3 Lm + s^2(Lc + Rm) + s(Lk + Rc + K_I K_E) + Rk} \quad <2B.5.>$$

$$G_{xF}(s) = \frac{x_{ki}(s)}{F_z(s)} = \frac{sL + R}{s^3 Lm + s^2(Lc + Rm) + s(Lk + Rc + K_I K_E) + Rk} \quad <2B.6.>$$

A differenciálegyenlet az $u(t)$ gerjesztő feszültség és a $x_{ki}(t)$ elmozdulás között a $x_{ki}(s) = G_{xu}(s) \cdot u(s)$ egyenlet inverz Laplace transzformálásával kapjuk. Az inverz Laplace transzformált a 2.1. táblázat alkalmazásával:

$$\frac{Lm}{K_I} \frac{d^3 x_{ki}(t)}{dt^3} + \frac{Lc + Rm}{K_I} \frac{d^2 x_{ki}(t)}{dt^2} + \frac{Lk + Rc + K_I K_E}{K_I} \frac{dx_{ki}(t)}{dt} + \frac{Rk}{K_I} x_{ki}(t) = 1(t) \cdot u(t)$$

A 2B.6 kifejezést hasonló módon inverz Laplace transzformálhatjuk. A kapott eredmény bal oldala megegyezik, csak a jobboldali gerjesztés más.

Elektromos modell

Az eljárás egyrészt a komplex impedancia fogalmának (2B.7. kifejezések) bevezetésén alapszik.

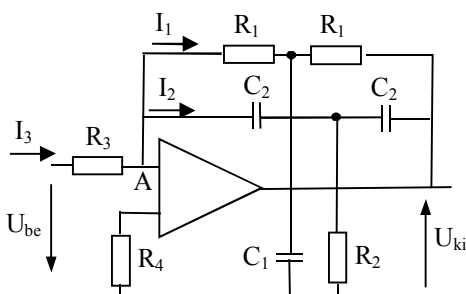
$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_L = j\omega L \quad <2B.7.>$$

Másrészt annak bizonyításán alapszik, hogy a komplex impedanciákra érvényesek a Kirchoff és Ohm törvényei (2B.8. kifejezések).

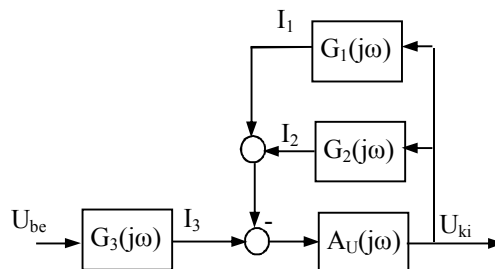
$$\sum U_i(j\omega) = 0, \quad \sum I_i(j\omega) = 0, \quad Z(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} \quad <2B.8.>$$

Az eljárás legegyszerűbben egy példa segítségével mutatható be.

Határozza meg a 2B.7.a. ábrán látható kettős T szűrő áramkör átviteli függvényét! A kettős T szűrő áramkörben a műveleti erősítő „A” csomópontja virtuális földpont, mert a műveleti erősítőbe befolyó és az R_4 ellenálláson átfolyó (az ábrán nem is jelzett) áram elhanyagolható a csomópontba befolyó I_3 , és kifolyó I_2 és I_1 mellett.



2B.7.a. Kettős T szűrő áramkör



2B.7.b. Az áramkör blokkvázlata

Az „A” csomópontot összegzőnek tekintve előáll – a 2B.7.b. ábrán mutatott – a kettős T szűrő áramkör blokkvázlat modellje.

Megjegyzés: A U_{ki} mérőnyíl irányát úgy vettük fel, hogy az egyenletekben ne kelljen a mínusz előjelet alkalmazni.

A 2.6. kifejezések alkalmazásával:

$$G_E(j\omega) = \frac{U_{ki}(j\omega)}{U_{be}(j\omega)} = G_3(j\omega) \cdot \frac{A_U(j\omega)}{1 + A_U(j\omega)\{G_1(j\omega) + G_2(j\omega)\}} \quad <2B.9.>$$

Az $A_U(j\omega)$ a műveleti erősítő körfrekvencia átviteli függvénye. Az $A_U(j\omega)$ a műveleti erősítő katalógus adata. A részletes katalógusok PT2 tagként modellezik és megadják az ω_A , és ω_B körfrekvenciákat, és az A_U egyenfeszültség erősítés kezdő DC értékét. A körfrekvencia értékekből az időállandók (T_A és T_B) könnyen meghatározhatók. (2B.10.a. kifejezés).

Ha az ω_B olyan körfrekvencia tartományba esik, amit már érdektelen, akkor az $A_U(j\omega)$ PT1 jelátvivő taggal is modellezhető. (2B.10.b. kifejezés)

Megjegyzés: Ha a katalógus csak a Bode diagramot adja meg, akkor a 2C. Mellékletben bemutatott módon határozható meg a körfrekvencia átviteli függvény.

$$A_U(j\omega) = \frac{A_U}{(1 + j\omega T_A)(1 + j\omega T_B)} \quad <2B.10.a.>$$

$$A_U(j\omega) = \frac{A_U}{(1 + j\omega T_A)} \quad <2B.10.b.>$$

Az „A” csomópont potenciálját elhanyagolva (virtuális földpont) a 2B.7.b. ábra átviteli függvényei a komplex impedanciákon feszültség és áramosztással meghatározhatók:

$$G_1(j\omega) = \frac{I_1(j\omega)}{U_{ki}(j\omega)} = \frac{1}{2R_1} \frac{1}{1 + j\omega \frac{R_1 C_1}{2}} = \frac{1}{2R_1} \frac{1}{1 + j\omega T_1} [S] \quad <2B.11.a.>$$

$$G_2(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{U_{ki}(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C_2} \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega 2R_2 C_2} = (j\omega C_2) \frac{j\omega T_2}{1 + j\omega 2T_2} [S] \quad <2B.11.b.>$$

$$G_3(j\omega) = \frac{I_3(j\omega)}{U_{ki}(j\omega)} = \frac{1}{R_3} [S] \quad <2B.11.c.>$$

A 2B.11. kifejezésekben a körfrekvencia átviteli függvény dimenziója [Siemens]. Behelyettesítve a 2B.11. és a pontosabb 2B.10.a. kifejezéseket a 2B.9. kifejezésbe az emeletes tört rendezésével az eredő körfrekvencia átviteli függvény előáll.

A műveleti erősítő előnye, hogy 10 [kHz] frekvenciáig az $A_U(j\omega) \ll 1$ és így a 2B.9. kifejezés számlálóját és nevezőjét osztva az $A_U(j\omega)$ értékkel:

$$G_E(j\omega) \cong \frac{G_3(j\omega)}{G_1(j\omega) + G_2(j\omega)} \quad <2B.12.>$$

Megjegyzés: Az analóg áramkörtechnikában - különösen több áramköri blokk soros, párhuzamos, és visszacsatolt alkalmazás esetén – nagyon hasznos a blokkvázlat. Például egy PLL áramkör működésének elemzésekor.

A csomóponti és a hurok egyenletek felírásának módszere nemcsak elektronikus rendszerek esetén alkalmazható. A differenciál egyenletek formai hasonlóságára alapozva hőáramlási, áramlási, stb. rendszerek modellezésére is használják

Hőtechnikai modell

A hőmérséklet különbség felel meg a potenciál különbségnek, és a hő energia áramlása az áramnak.

A hőmérséklet: T [$^{\circ}\text{C}$], hőenergia áramlás: q [$\frac{\text{J}}{\text{sec}}$], hő-kapacitás: C [$\frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}}$], és a hő-ellenállás: R [$\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{J}}$].

A fizikai egyenletek

Energiaáramlás: $q = \frac{1}{R}(T_1 - T_2)$, ahol $R = k \frac{A}{L}$, ahol k [$\frac{\text{J}}{\text{m sec}}$] az anyag hő vezetőképessége, A [m^2] felület, L [m] szélesség.

Energiatároló képesség: $C \frac{dT}{dt} = q$, ahol $C = m \cdot c_v$, ahol c_v [$\frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C} \cdot \text{kg}}$] az anyag fajhője.

Áramlástechnikai modell

A nyomás különbség felel meg a potenciál különbségnek, és a térfogat áram az áramnak. Stb.

2.C. Melléklet

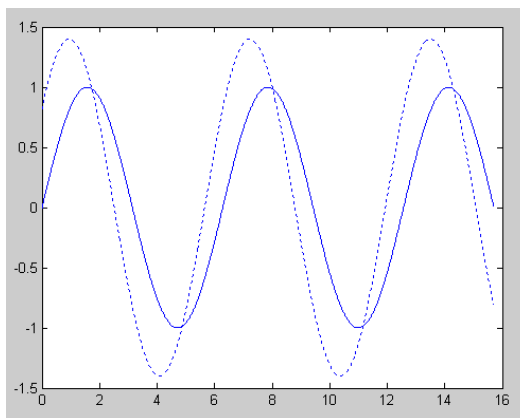
A $G(j\omega)$ meghatározása méréssel

A módszer egy berendezés, készülék, vagy szerv állandó amplitúdójú, nulla fázistolású, folyamatosan növekvő körfrekvenciájú szinuszos gerjesztő jelre adott válasz mérésével, és a mért jelleggörbéhez illeszkedő körfrekvencia átviteli függvény megkeresésével alkot modellt.

A 2C.1. ábrán látható módon például az $MP_1\{X_{be1}, X_{ki1}\}$ munkapontban $x_{be}(t) = X_{be1} + x_{be} \sin \omega_1 t$ gerjesztő jelre $x_{ki}(t) = X_{ki1} + x_{ki} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ a válasz. A 2.20. ábrán a munkaponti értékektől megtisztított szinuszos bemeneti és kimeneti jel (pontvonal) láthatók.

A mérést elegendően sűrűn, különböző ω értékeken megismételve, a szinuszos összetevőkre grafikusán ábrázolható a $G(j\omega)$ körfrekvencia átviteli függvény.

A közelítő $G(j\omega)$ körfrekvencia átviteli függvény meghatározásához – papírceruza – módszer esetén a Bode diagram a legcélszerűbb, mert a logaritmikus lépték következtében, a sorba kötött átviteli függvények grafikus képét az egyes tagok grafikus képének összegeként ábrázolja:



$$\lg G_1(j\omega)G_2(j\omega) = \lg G_1(j\omega) + \lg G_2(j\omega)$$

2C.1. ábra. Szinuszos gerjesztés és válasz

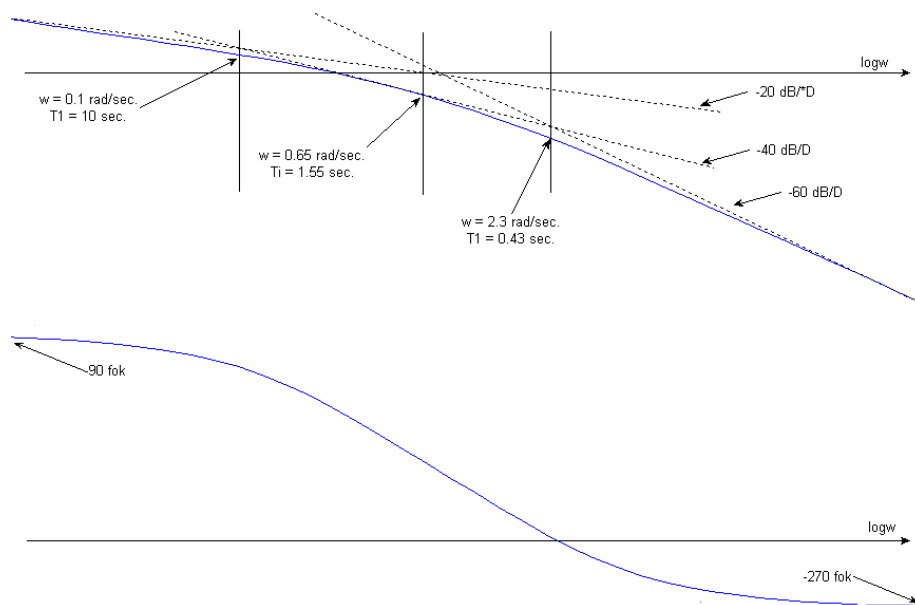
Így a Bode diagramból, az alap jelátvivő tagok Bode diagramjának ismeretében, meghatározható, hogy van-e integráló, és/vagy differenciáló hatás a jelátvivő tag jellegében, és szerkesztő vonalak segítségével meghatározható a törésponti körfrekvenciák értéke is.

A mért amplitúdó átviteli és fázistolás értékeket a Matlab programba konvertálva, majd kirajzoltatva kaptuk a 2C.2. ábrát.

Az ábrán a fázismenet kis ω körfrekvencia értékeken -90° , nagy ω körfrekvencia értékeken -270° . A -90° fázistolás értékből következik, hogy a vizsgált jelátvivő tagban van egy integráló hatás. A -270° -os fázistolás értékekből következik, hogy a vizsgált jelátvivő tagnak három időállandója van.

Az amplitúdó-, és a fázismenet monoton csökkenő voltából következik, hogy nincs differenciáló jelleg.

Az amplitúdó és a fázismenet alapján a mért értékekkel jellemzett jelátviteli tag IT2 taggal modellezhető.



2C.2. ábra. Az komplex körfrekvencia átviteli függvény meghatározása Bode diagramból.

A 2C.2. ábrán az amplitúdó átvitel, viszonylag hosszan rendelkezik, -20 dB/D, -40 dB/D, valamint -60 dB/D szakaszokkal, így szerkesztéssel is lehetséges a T_1 , T_1 , és a T_2 meghatározása. A sorba kapcsolt két darab egy időállandós, és az egy integráló tag törésponti körfrekvenciáinak meghatározása:

A -20 dB/D szerkesztő vonal és a 0 dB-es tengely metszéspontja szolgáltatja az ω_1 törésponti körfrekvenciát. A számértékének reciprok értéke lesz a T_1 integrálási idő.

A -20 dB/D, és a -40 dB/D, valamint a -40 dB, és a -60 dB/D szerkesztő vonalak (pontosított vonalak) metszéspontjai kijelölnék két (ω_1 , és ω_2) törésponti körfrekvenciát. Ezek számértékeinek reciprok értéke lesz a T_1 , és a T_2 időállandó. A grafikus szerkesztéshez szükség van függőleges vonalakra, amelyek kimetszik az amplitúdó meneten a keresett körfrekvencia értékekhez tartozó pontokat.

Megjegyzés: Papír-ceruzamódszer esetén feltétel, hogy a különböző meredekségű egyenes szakaszok az amplitúdó meneten jól elkülönüljenek egymástól (nem lehet konjugált komplex gyök). Számítógépes identifikálás esetén nincs ilyen kikötés. A Bode diagram felvétele a körfrekvencia értékkészletén mintavételezetten történik, és így beolvasható számítógépbe. Csak a jelleg, és a foksám helyes meghatározása lényeges, és az amplitúdó meneten nem kell élesen elkülönülnie a különböző meredekségű szakaszoknak (konjugált komplex gyökpárt is tartalmazhat a vizsgált rendszer). Sőt a számlálóban is feltételezhetünk gyököt. Ettől még a kapott eredmény fekete doboz modell, csak sokkal pontosabb.

Az adatokból a komplex körfrekvencia tartományban a mért eszköz dinamikus viselkedését modellező átviteli függvény:

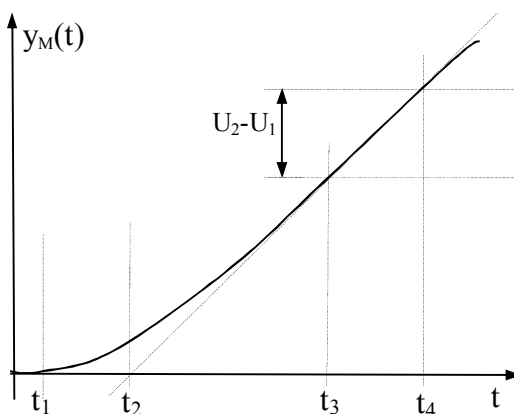
$$G_{IT2}(j\omega) = \frac{1}{j\omega \cdot 1.56} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot 0.43} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot 10} \quad <2C.1.>$$

Papír-ceruzamódszerrel a szerkesztési eljárás, sajnos elég pontatlan.

Megjegyzés: A mérnöki gyakorlatban az automatizálási eszközök gyártói, hasonlóan az áramkör gyártókhoz, az adott eszközhöz csatoltan szolgáltatják az eszköz Bode diagramját $\{a(\omega), \varphi(\omega)\}$, vagy képlettel megadják a $G(j\omega)$ átviteli függvényt, és a töréspont körfrekvenciákat és/vagy időállandókat.

Az átmeneti függvény meghatározása méréssel

A mérés menete: A végrehajtó jel állandó értékét U_1 , ugrásszerűen U_2 értékűre módosítjuk. A 2C.3. ábrán az ellenőrző jel az állandósult Y_{M1} értéktől egyenletesen nő. Az átmeneti függvényéből HIT1 holtidős, integráló, egy energiatárolós vagy IT1 integráló, egy energiatárolós jelleg olvasható le a szerkesztő vonalak segítségével.



2C.3. ábra. Az átmeneti függvény jellegének és paramétereinek leolvasása

A közelítő HIT1 illetve a IT1 operátoros átviteli függvénye:

$$G_E(s) = \frac{1}{sT_I} \frac{1}{sT_g + 1} e^{-sT_u}; \quad G_E(s) = \frac{1}{sT_I} \frac{1}{sT_g + 1} \quad <2C.2.>$$

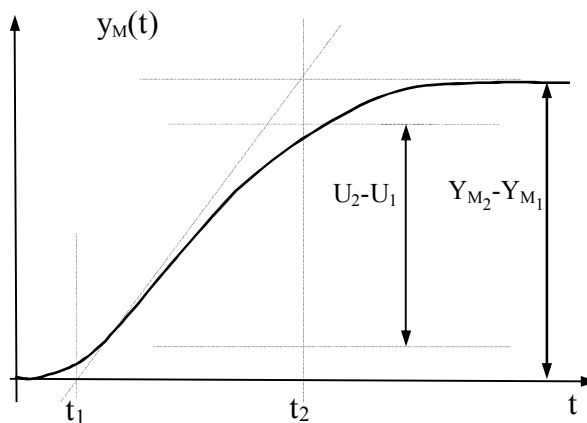
A 2C.2. ábra válaszfüggvényét HIT1 taggal modellezve a holtidő, az átmeneti függvény kezdeti nulla meredekségű szakaszának végén olvasható le $T_u = t_1$. Az egy időállandós tag időállandójának becslésére a $T_g = t_2 - t_1$ kifejezés szolgál, ahol t_2 az állan-

dó meredekségű szakasz és az időtengely metszéspontja. Az átmeneti függvény állandó meredekségű (egyenes) szakaszán felmérve a bemeneti jel az ugrás jellegű U_2-U_1 megváltozását, a $T_1=t_4-t_3$ kifejezés adja meg az integrálási időt.

Megjegyzés: Az integrálási idő T_1 , a válaszfüggvény egyenes szakaszán mért meredekségének reciprok értéke. Ezért bármely két pont koordinátái elegendők a meghatározására.

Ha t_1 kicsi, ezért nehezen meghatározható vagy nincs is, akkor $T_g=t_2$, vagyis a közelítő modell IT1 integráló, egy időállandós tag.

Az azonos mérési eljárással kapott 2C.4. ábra átmeneti függvényéből HPT1 holtidős, egy energiatárolós jelleg olvasható le a szerkesztő vonalak segítségével. A válaszfüggvény az Y_{M2} értéken állandósul, vagyis önbeálló. A válaszfüggvény inflexiós pontjára fektetett egyenes jelöli ki a t_1 időpontot a válaszfüggvény kezdeti Y_{M1} és a t_2 időpontot az Y_{M2} végértékénél.



2C.3. ábra. Az átmeneti függvény jellegének és paramétereinek leolvasása

A közelítő HPT1 operátoros átviteli függvénye:

$$G_E(s) = K_P \frac{1}{sT_g + 1} e^{-sT_u} \quad <2C.3.>$$

Ahol a holtidő $T_u=t_1$. Az egy időállandós tag időállandója a $T_g=t_2-t_1$ érték. A közelítő eredő szakasz modell erősítése:

$$K_P = \frac{Y_{M2} - Y_{M1}}{U_2 - U_1} \quad <2C.4.>$$

Megjegyzés: A Matlab identifikáló programja három pólus egy zérus, egy integráló hatás, és egy holtidő bármely kombinációjára keres közelítő paramétereket.

3.A. Melléklet

Stabilitás vizsgálatok

1. Példa: A stabilitás meghatározása az alapjel átviteli függvény alapján

A 3A.1 ábra szabályozási körének elemei legyenek az alábbiak:

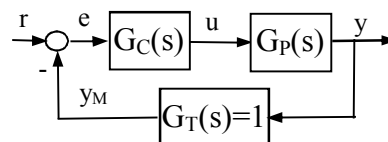
$$G_C(s) = \frac{51s^2 + 37s + 2.4}{2.3s^2 + 15.2s}; \quad G_P(s) = \frac{0.5}{s^3 + 1.9s^2 + 0.7s + 0.05}; \quad G_T(s) = \frac{3.8}{s + 3.8} \quad <3A.1.>$$

Az alapjel átviteli függvényt a $GYR = feedback(GC \cdot GP, GT)$ matlab parancs segítségével, ahol a GYR, GC, GP, és GT matlab változók, kaphatjuk meg:

$$G_{yr}(s) = \frac{25.3s^3 + 115.4s^2 + 71.5s + 4.56}{2.3s^6 + 28.3s^5 + 104.9s^4 + 126.6s^3 + 138.5s^2 + 73.2s + 4.56} \quad <3A.2.>$$

A stabilitás vizsgálatához a nevező gyökeit kell ismerni. Ezeket legegyszerűbben a Matlab pole(GYR) parancsa szolgáltatja:

-5.8531
-5.2770
-0.1882 + 1.0934i; -0.1882 - 1.0934i
-0.7309
-0.0713



3A.1. ábra. Stabilitás vizsgálat példa

Mind a hat pólus negatív valós részű, tehát a szabályozási kör stabil.

Megjegyzés: A konjugált komplex gyökpár, a reális résznél nagyobb abszolút értékű imaginárius rész jelzi, hogy túllendüléssel áll be az előírt értékre.

Nézzünk egy másik példát! Az előző eredő szakasz önbeálló jellegű volt, ez legyen integráló jellegű.

A 3A.1 ábra szabályozási körének elemei legyenek az alábbiak:

$$G_C(s) = \frac{24s^2 + 8.2s + 0.62}{s^2 + 2s}; \quad G_P(s) = \frac{10s + 2}{s^3 + 5.1s^2 + 1.6s}; \quad G_T(s) = \frac{20}{s + 20} \quad <3A.3.>$$

Ugyanazon lépések végig vitele mellett, az alapjel átviteli függvény:

$$G_{yr}(s) = \frac{240s^4 + 4930s^3 + 2623s^2 + 453s + 25}{s^6 + 27s^5 + 154s^4 + 5039s^3 + 2664s^2 + 452s + 25} \quad <3A.4.>$$

A pole Matlab parancs helyett használhatjuk a roots Matlab parancsot is.
`roots([1 27 154 5039 2664 452 25])`

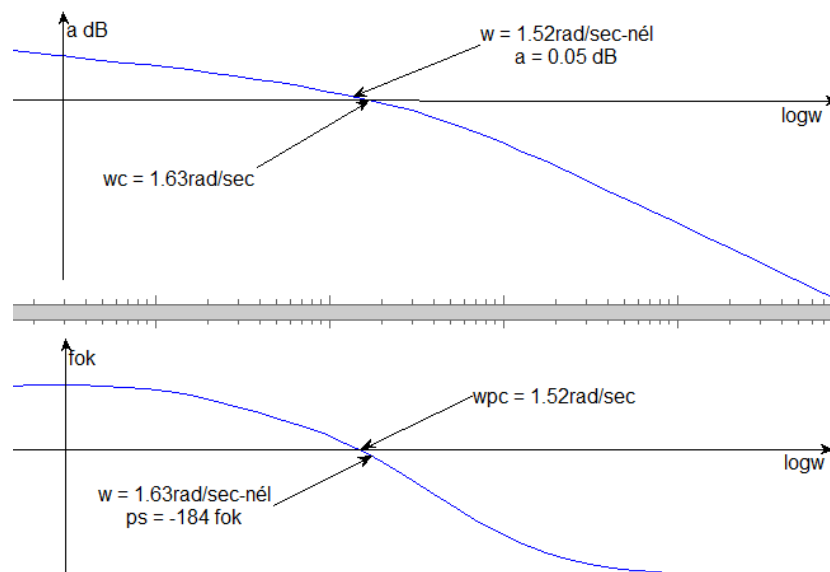
```
-27.9313
 0.6828 +13.3114i; 0.6828 -13.3114i
-0.2524
-0.1490
-0.1329
```

Nem mind a hat pólus negatív valós részű, tehát nem stabil a szabályozási kör.

2. Példa: A stabilitás meghatározása felnyitott hurok átviteli függvényből

Módosítsuk a 3A.1. kifejezést úgy, hogy a kétszeres értékű legyen a szakasz erősítése. Ilyen megtörténhet, ha egy nem lineáris (csak a munkapont környezetében linearizálható) statikus karakterisztikájú eredő szakasz szabályozásakor munkapontot váltunk és a kompenzáló algoritmus marad az eredeti.

$$G_C(s) = \frac{51s^2 + 37s + 2.4}{2.3s^2 + 15.2s}; G_P(s) = \frac{1}{s^3 + 1.9s^2 + 0.7s + 0.05}; G_T(s) = \frac{3.8}{s + 3.8} \quad <3A.5.>$$



3A.2. ábra. Stabilitás a felnyitott hurok Bode diagramján

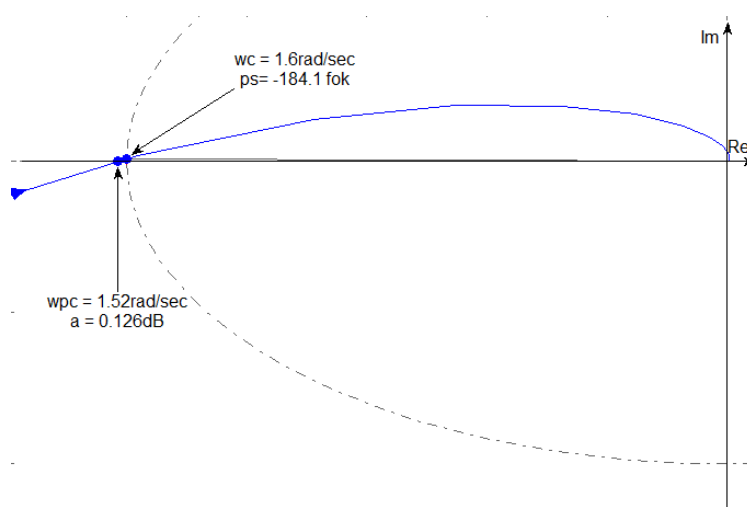
A szabályozási hurokban található elemek átviteli függvényeinek szorzata a felnyitott hurok átviteli függvény ($G_0 = G_C * G_P * G_T$), ahol a G_C , G_P , és G_T Matlab változók:

$$G_0(s) = \frac{193.8s^2 + 140.6s + 9.12}{2.3s^6 + 28.3s^5 + 104.9s^4 + 126.6s^3 + 41.6s^2 + 2.89s} \quad <3A.6.>$$

A zárt szabályozási kör akkor stabil, ha a felnyitott hurok átviteli függvénynek van fázis-, és erősítéstartaléka. A 3A.2. ábrán az egyik sincs meg, ezért a zárt szabályozási kör nem lesz stabil.

Megjegyzés: A gyakorlatban határértékekhez közeli értékeket sem tekintjük megfelelőnek, mert a zárt szabályozási kör hosszan tartó, nagy amplitúdójú lengésekkel áll be az alapértékére.

Vizsgáljuk meg a stabilitás a Nyquist kritériumok alapján is:



3A.3. ábra. Stabilitás a felnyitott hurok Nyquist diagramján

A Nyquist diagramon az fázistartalék az egységsugarú kör és a felnyitott hurok átviteli függvény görbéjének metszéspontján, az erősítéstartalék a reális tengely és a felnyitott hurok átviteli függvény görbéjének metszéspontján olvasható le. Látható, hogy a nem stabil a rendszer.

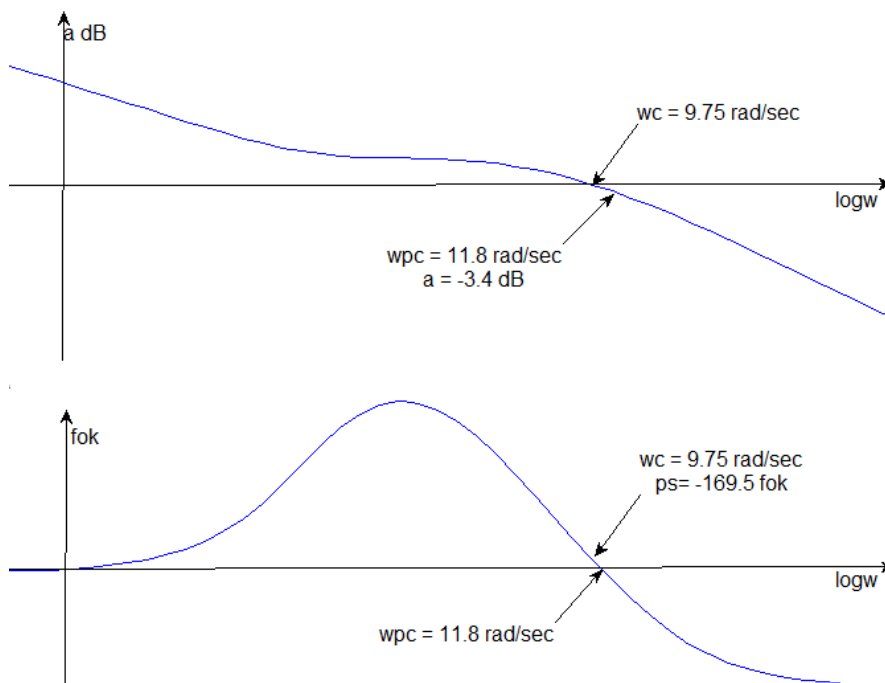
Megjegyzés: A Matlab által felkinált koordinátaléptékeket erőteljesen módosítani kellett, mert a Nyquist diagramon csak a $-1+j0$ pont és a felnyitott hurok átviteli függvény görbéjének egymáshoz képesti elhelyezkedése fontos a stabilitás megállapítása szempontjából.

Vizsgáljuk meg a 3A.3. kifejezéssel definiált szabályozási kört úgy, hogy a kompenzáló tag K_C erősítését és így a hurokerősítést a felére csökkentjük.

$$G_C(s) = \frac{12s^2 + 4.1s + 0.31}{s^2 + 2s}; \quad G_P(s) = \frac{10s + 2}{s^3 + 5.1s^2 + 1.6s}; \quad G_T(s) = \frac{20}{s + 20} \quad <3A.7.>$$

A felnyitott hurok átviteli függvény:

$$G_0(s) = \frac{2400s^2 + 1300s + 226}{s^6 + 27.1s^5 + 135.8s^4 + 239.2s^3 + 64s^2} \quad <3A.8.>$$



3A.4. ábra. Stabilitás a felnyitott hurok Bode diagramján

A szabályozási kör stabil.

Megjegyzés: Ennyire kis értékű fázistartalékot ($pm = 10.5^\circ$) a gyakorlatban nem alkalmazunk, mert a rendszer sok lengéssel áll be az alapértékre.

3. Példa: A stabilitás meghatározása általános Nyquist kritériummal

Legyen az eredő szakasz átviteli függvénye gyöktényezős alakban az alábbi:

$$G_E(s) = \frac{1.2}{(s + 0.15)(s - 0.5)(s + 3)(s + 12)} \quad <3A.9.>$$

Látszik, hogy nem minimál fázisú a rendszer!

Megjegyzés: A polinom tört alakból is látszik. A nevező polinom nem minden együtthatója pozitív, akkor nem minimál fázisú az eredő szakasz.

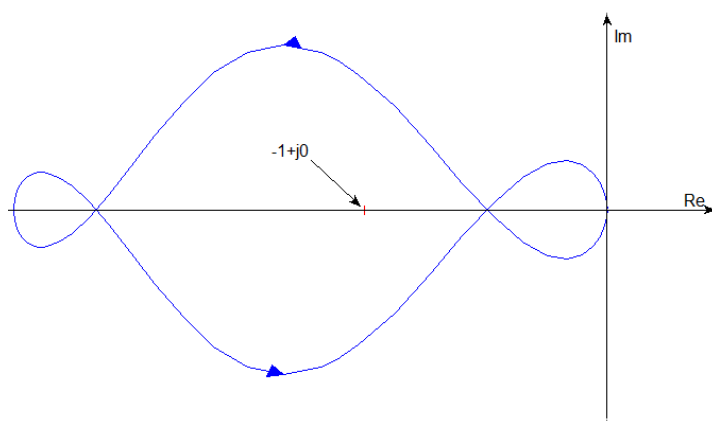
Ha méréssel vesszük fel a körfrekvencia függvényt, akkor a fázismentet alapján a közelítő átviteli függvény kétszeres integráló hatást, két további időállandót, és egy zérust tartalmaz. A közelítő átviteli függvény paramétereinek meghatározása papírceruzamódszerrel lehetséges, de nehézkes.

Ha az átmeneti függvény vesszük fel méréssel, akkor az átmeneti függvény alakjából kétszeres integráló hatásra és egynél több időállandóra következtethetünk. Az I^2T1 közelítő átviteli függvény paramétereinek meghatározása papírceruzamódszerrel nem lehetséges.

Hagyományos PIDT kompenzáló struktúrában gondolkodva PDT kompenzáló tagot célszerű választani. Legyen a PDT kompenzáló tag az alábbi:

$$G_c(s) = \frac{28s + 5.5}{0.6s + 1} \quad <3A.10.>$$

Miután nem minimál fázisú a rendszer, a stabilitás vizsgálat az általános Nyquist kritérium alapján történhet. A felnyitott hurok $G0 = GC * GE$, ahol $G0$, GC , és GE Matlab változók, Nyquist diagramja:



3A.5. ábra. Stabilitás a felnyitott hurok Nyquist diagramján

Egy pozitív valós részű pólusa van a felnyitott hurok átviteli függvénynek, és az óramutató járásával ellentétesen egyszer kerüli meg a $-1+j0$ pontot a körfrekvencia függvény görbéje. A rendszer stabil.

A stabilitás vizsgálatot az alapjel átviteli függvényen is elvégezhető. A választott kompenzáló taggal az alapjel átviteli függvény:

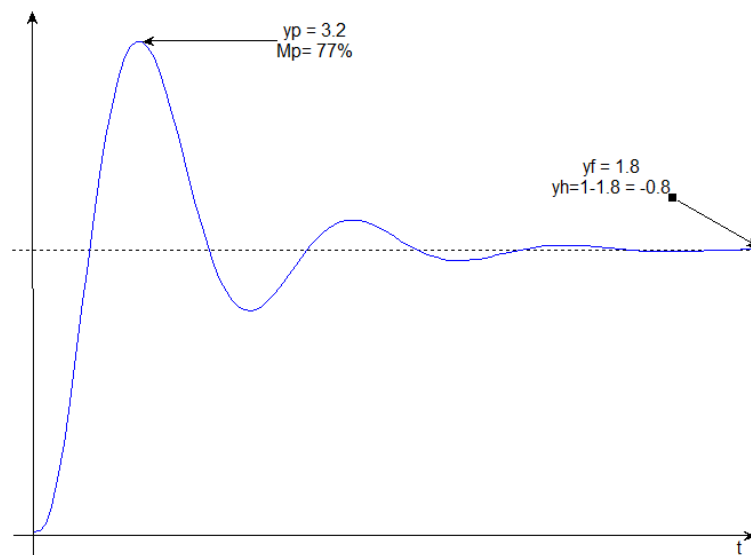
$$G_{yr}(s) = \frac{56.1s + 11}{s^5 + 16.3s^4 + 55s^3 + 37.4s^2 + 30.5s + 6.5} \quad <3A.11.>$$

A nevező gyökei:

-11.9512
-3.7556
-0.1702 + 0.7133i
-0.1702 - 0.7133i
-0.2693

A gyökök valós része negatív, tehát stabil a szabályozási kör.

A zárt szabályozási kör minőségi jellemzői nagyon rosszak (3A.6. ábra) és a hagyományos hangolási technikákkal sem lehet javítani a paramétereket.



3A.6. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

Megjegyzés: Analitikus szabályozó alkalmazásával lehet megfelelő minőségi jellemző értékeket biztosítani.

4.A. Melléklet

Kompenzáló tag méretezése

1. Példa: Pólus áthelyezés módszere

Ehhez ismerni kell az eredő szakasz átviteli függvényét. Ez akkor egyértelmű, ha szürke doboz modellel készült az eredő szakasz átviteli függvénye. A modellalkotási eljárást a 2B és a 4B Mellékletek mutatják be.

Legyen az eredő szakasz átviteli függvénye az alábbi:

$$G_E(s) = \frac{0.3}{s^4 + 5.7s^3 + 8s^2 + 2.9s + 0.2} \quad <4A.1>$$

Az eredő szakasz átviteli függvényének pólusait a Matlab pole(GE) parancsával a legegyszerűbb meghatározni, ahol a GE a 4A.1. kifejezés Matlab változója.

-3.7852

-1.4068

-0.4182

-0.0898

A $(s + p_{\min 1})(s + p_{\min 2})$ szorzat másodfokú egyenletének együtthatóit a Matlab programban a `conv([1 pmin1],[1 pmin2])` parancs szolgáltatja: 1.0000 0.5080 0.0376 A Bode alakhoz a konstans taggal végig kell osztani:

$$26.596 \quad 13.511 \quad 1.0000 \quad <4A.2.>$$

Méretezéskor a PIDT Bode alakjának számlálóját vetjük egybe a $26.6s^2 + 13.5s + 1$ kifejezéssel.

$$s^2 T_I (T_D + T) + s(T_I + T) + 1 = 26.6s^2 + 13.5s + 1 \quad <4A.3.>$$

Az A_D differenciálási erősítés értékét meg kell választani! Legyen 8, és így:

$$T_I T = \frac{1}{p_{\min 1} \cdot p_{\min 2}} \frac{1}{(A_D + 1)} = \frac{26.6}{9} = 2.96 \quad <4A.4.>$$

$$T_I + T = \frac{p_{\min 1} + p_{\min 2}}{p_{\min 1} \cdot p_{\min 2}} = 13.5$$

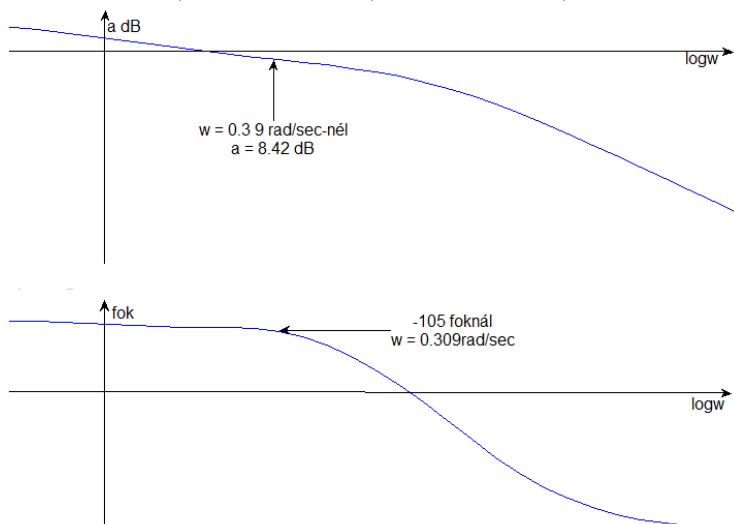
A 4A.4. kifejezés második egyenletéből akár T_1 akár T értékét helyettesítjük az első egyenletébe, az így kapott másodfokú egyenletnek ugyanazok lesznek az együtthatói ($T^2 - 13.5T + 2.96$).

A gyököket, vagyis T_1 és T értékét, a Matlab program `roots([a2 a1 a0])` parancsa szolgáltatja: $T_1 = 13.3 \text{ sec.}$; és $T = 0.22 \text{ sec.}$ Ebből $T_D = 8 \cdot T = 1.68 \text{ sec.}$

Megjegyzés: Az öt értékes jegyet tartalmazó részeredményeket szabad kerekíteni, de nem kötelező. A végeredményt azonban kötelező 3 értékes jegyre kerekíteni.

A PIDT kompenzáló tag időállandóinak ismeretében a Matlab programmal kiszámolhatjuk a $g_C(s)$ kompenzáló tag átviteli függvényét és a $g_0(s) = g_C(s)G_E(s)$ hurok átviteli függvényét.

Ha az az elvárás, hogy ne vagy alig legyen túllövés, akkor kezdjük $pm = 75^\circ$ fázistaralék választással a K_C erősítés értékének meghatározását. A $g_0(s)$ hurok átviteli függvény Bode diagramján a $ps^\circ = (pm - 180)^\circ = -105^\circ$ fázistoláshoz tartozó körfrekvencia értéknél kell az amplitúdó átvitel értékét (4A.1. ábra) meghatározni.



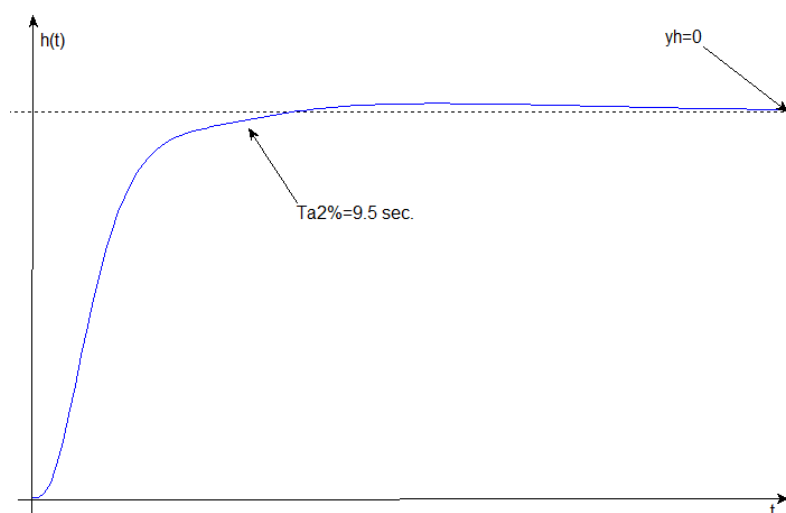
4A.1. ábra. A $pm=75^\circ$ helye a felnyitott hurok átviteli függvényen

Ha leendő vágási körfrekvencián az amplitúdó átvitel $a = -8.4 \text{ [dB]}$, akkor a kompenzáló tag $K_C = +8.4 \text{ [dB]}$ erősítés értékűnek kell lennie.

Emlékeztető: Az arányos tag csak az amplitúdó átvitelt befolyásolja egyenletesen, minden körfrekvencián. A vágási körfrekvencia ott van, ahol az amplitúdó menet metszi a nulladecibeles tengelyt.

Kiszámítva $K_C = 2.64$. Most már a $G_C(s)$ kompenzáló tag minden paramétere, és így a $G_0(s) = G_C(s)G_E(s)$ hurok átviteli függvény is ismert.

A hurokátviteli függvény ismeretében az alapjel átviteli függvény, és ebből a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye (4A.2. ábra) előállítható.



4A.2. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

A4A.2. ábrán látható átmeneti függvény nagyon jó minőségi jellemzői: nincs maradó szabályozási eltérés, a túllendülés 2% alatt maradt, és a beállási idő is kevesebb, mint 10 sec.

Az előbbi példa önbeálló jellegű eredő szakasz volt. Nézzük meg a pólus áthelyezés módszerét integráló jellegű szakaszra.

Legyen az eredő szakasz átviteli függvénye:

$$G_E(s) = \frac{1}{s^4 + 5.3s^3 + 6.9s^2 + 2s} \quad <4A.5.>$$

Célszerű Bode alakra áttérni, amit a gyöktényezős alakból a zérusok és nem nullaértékű pólusok kiemelésével kapunk.

Emlékeztető: A Matlab programban a gyöktényezős alakot a `zpk(sys)` parancs szolgáltatja. A Bode alakhoz a pólusok kiemelését és az időállandók kiszámítását manuálisan kell elvégezni.

$$G_E(s) = \frac{1}{s(s + 3.49)(s + 1.41)(s + 0.41)} = \frac{1}{s2(s0.29 + 1)(s0.71 + 1)(s2.45 + 1)} \quad <4A.6.>$$

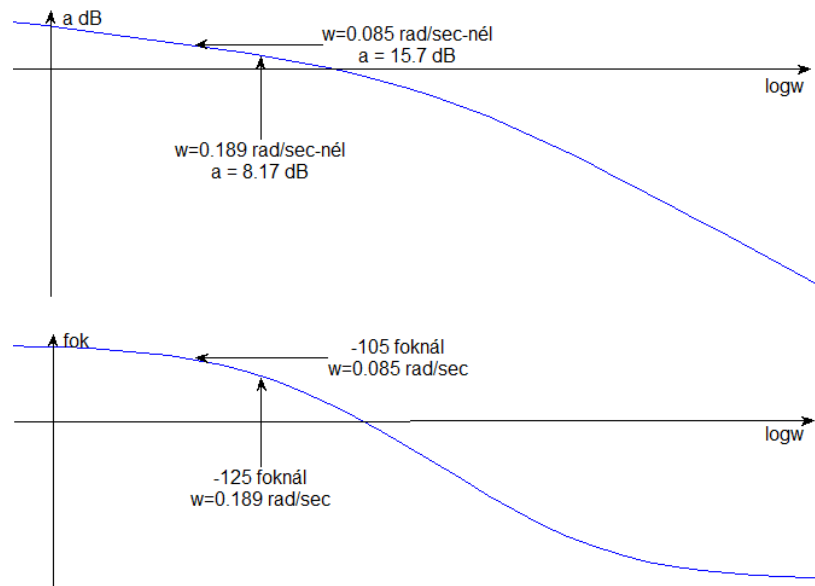
Integráló jellegű eredő szakaszhoz PDT kompenzáló tagot célszerű választani. A PDT kompenzáló tag átviteli függvényének számlálója egy $(T_D + T)$ időállandót tartalmazz és ez az eredő szakasz legnagyobb időállandóját ejtse ki.

$$T_D + T = T_{\max} \rightarrow (A_D + 1)T = T_{\max} \rightarrow T = \frac{T_{\max}}{(A_D + 1)} \rightarrow T_D = A_D \cdot T \quad <4A.7.>$$

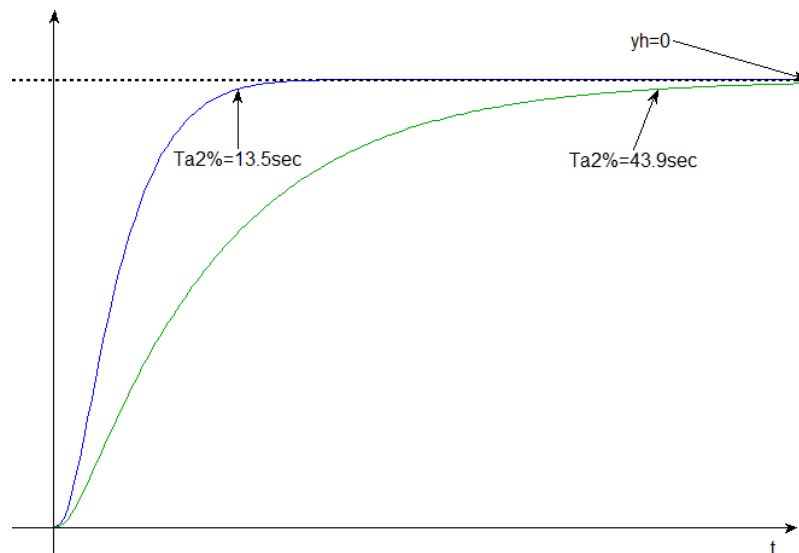
4.A. Mellélet. Kompenzáló tag méretezése

Az A_D differenciálási erősítés értéke legyen megint 8, és így a PDT kompenzáló tag időállandói: $T = 0.27 \text{ sec}$. és $T_D = 2.2 \text{ sec}$.

Az önbeálló esethez hasonlóan a PDT kompenzáló tag időállandóinak ismeretében a Matlab programmal kiszámoltathatjuk a $g_C(s)$ kompenzáló tag átviteli függvényét és a $g_0(s) = g_C(s)G_E(s)$ hurok átviteli függvényt (4A.3. ábra).



4A.3. ábra. A $pm=75^\circ$ és $pm=55^\circ$ helye a felnyitott hurok átviteli függvényen



4A.4. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

A megfelelő fázistartalék megválasztása iteratív eljárás. A 4A.3. ábrán két $pm = 55^\circ$ és $pm = 75^\circ$ fázistartalékokhoz tartozó $ps^\circ = -125^\circ$ és $ps^\circ = -105^\circ$ fázistoláshoz tartozó körfrekvencián kell az amplitúdó átvitel értékét megállapítani $g_0(s)$ hurok átviteli függvény Bode diagramján.

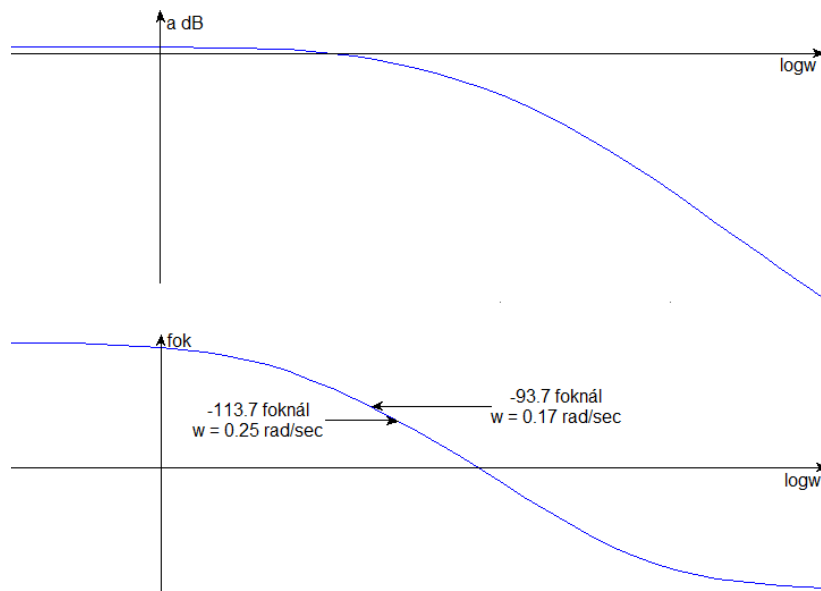
Ha leendő vágási körfrekvenciát a $pm = 55^\circ$ fázistartalékhoz illesztjük, akkor az amplitúdó átvitel $a = 8.17 [dB]$. Az választandó erősítés $K_C = -8.17 [dB]$, amiből $K_C = 0.4$. Ha a $pm = 75^\circ$ fázistartalékhoz illesztjük, akkor illetve az amplitúdó átvitel $a = 15.7 [dB]$, amiből $K_C = 0.16$.

Így a hurok átviteli függvény minden paramétere ismert, ezért az alapjel átviteli függvények meghatározhatók, és ebből a zárt szabályozási kör átmeneti függvényei (4A.4. ábra) ábrázolhatók.

*Megjegyzés: A 4A.4 ábrán látható, hogy a $pm = 55^\circ$ fázistartalék választáshoz tartozó paraméterek közel ideálisak. A tényleges optimalizálás a Matlab **sisotool** GUI (Graphical Unit Interface) segítségével végezhető el.*

2. Példa: PI kompenzálás önbeálló eredő szakasz körfrekvencia diagramján

Az összehasonlíthatóság érdekében ugyanazt a 4A.1. kifejezéssel megadott önbeálló eredő szakaszt kompenzáljuk azzal a feltevéssel, hogy a Bode diagramja méréssel lett meghatározva (4A.5. ábra).



4A.5. ábra. A $pm=75^\circ$ és a $pm=55^\circ$ helye az eredő szakasz Bode diagramján

4.A. Mellélet. Kompenzáló tag méretezése

A 4A.5. ábra fázis menete alapján az eredő szakasz önbeálló és négy időállandója van. De az időállandók papír-ceruza módszerrel csak nagyon pontatlanul határozhatók meg. A választott fázistartalék ($pm = 55^\circ$) és ($pm = 75^\circ$) mellett a kompenzáló tag fázistolását is figyelembe kell venni a leendő ω_c vágási körfrekvencia meghatározásához. Válasszuk az $\omega_c = 5 \cdot \omega_l$ arányt!

A 4.2. táblázatban $\omega_c = 5 \cdot \omega_l$ arányhoz a $ps_{PI}^\circ = -11.3^\circ$ tartozik.

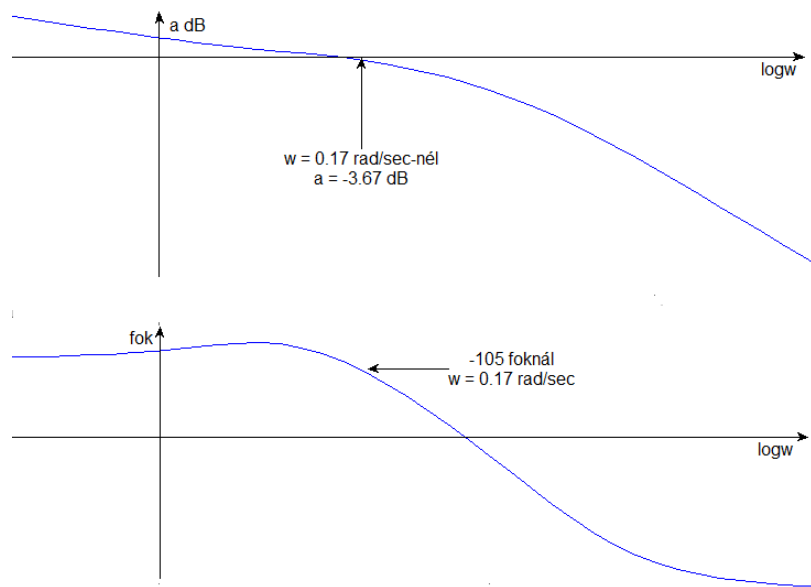
$$ps^\circ = pm^\circ - ps_{PI}^\circ - 180^\circ \quad <4A.8.>$$

Így a $G_E(s)$ eredő szakasz Bode diagramján a megkeresendő fázistolás értékei: $ps^\circ = 55^\circ + 11.3^\circ - 180^\circ = -113.7^\circ$ és $ps^\circ = 75^\circ + 11.3^\circ - 180^\circ = -93.7^\circ$. A ps° fázistoláshoz tartozó körfrekvencia lesz a leendő ω_c vágási körfrekvencia, és a választott $\omega_c = 5 \cdot \omega_l$ arány esetén ennek ötöde az ω_l . Ennek reciprokok értéke a T_l .

$$T_l = \frac{1}{\omega_l} = \frac{5}{\omega_c} = \frac{5}{0.17} = 29.4[\text{sec}]; \quad T_l = \frac{1}{\omega_l} = \frac{5}{\omega_c} = \frac{5}{0.25} = 20[\text{sec}] \quad <4A.9.>$$

Az ω_l ismeretében és $K_C = 1$ választással a PI $g_C(s)$ kompenzáló tag amplitúdó és fázismenete grafikusan rászerezhető a 4A.5. ábrára. Ez két különböző $g_C(s)$ kompenzáló tag, ezért a K_C erősítés értéket két különböző $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvény kell meghatározni.

A $pm = 75^\circ$ fázistartalék esetén a $ps = -105^\circ$ fázistoláshoz tartozó leendő ω_c leendő vágási körfrekvenciát lehet meghatározni a hozzátartozó $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényen.

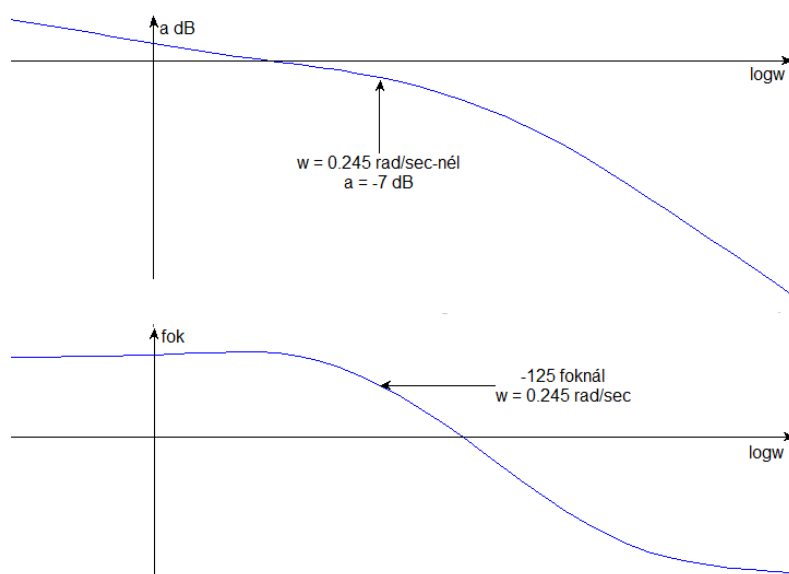


4A.6. ábra. A K_C erősítés meghatározása a felnyitott hurok Bode diagramján

A PI kompenzáló tag paraméterei $K_C = 1.5$, $T_I = 29.4 \text{ sec}$.

A $pm = 55^\circ$ fázistartalékhoz a $ps = -113.7^\circ$ fázistolás tartozik. Ez a $G_E(s)$ eredő szakasz Bode diagramján a megkeresendő fázistolás értéke (4A.5. ábra).

A K_C erősítés érték meghatározásához ismét meg kell határozni a PI $g_C(s)$ kompenzáló tagot, és rá kell szerkeszteni a 4A.5. ábrára. A $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényen a $ps = -125^\circ$ fázistoláshoz tartozó leendő ω_C leendő vágási körfrekvenciát lehet meghatározni, majd ezen a körfrekvencián az $a(\omega_C)$ amplitúdó átvitelt.



4A.7. ábra. A K_C erősítés meghatározása a felnyitott hurok Bode diagramján

A PI kompenzáló tag paraméterei $K_C = 2.2$, $T_I = 20 \text{ sec}$.

A 4A.8. ábra ($K_C = 1.5$, $T_I = 29.4 \text{ sec}$.) és ($K_C = 2.2$, $T_I = 20 \text{ sec}$.) kompenzáló tagokkal a zárt szabályozási kör átmeneti függvényei láthatók.

A 4A.8. ábrán látott átmeneti függvényeken az alálendülés túl nagy integrálási időre utal. A 4A.6. és a 4A.7. ábrák fázismenetének visszahajló jellege mutatja, hogy növelhető az ω_I , például az $\omega_C = 2 \cdot \omega_I$ arány választásával.

A mérnöki munka iteratív jellegű. A próbálkozások tapasztalatai alapján finomítunk. Legyen az $\omega_C = 2 \cdot \omega_I$ és $pm = 65^\circ$.

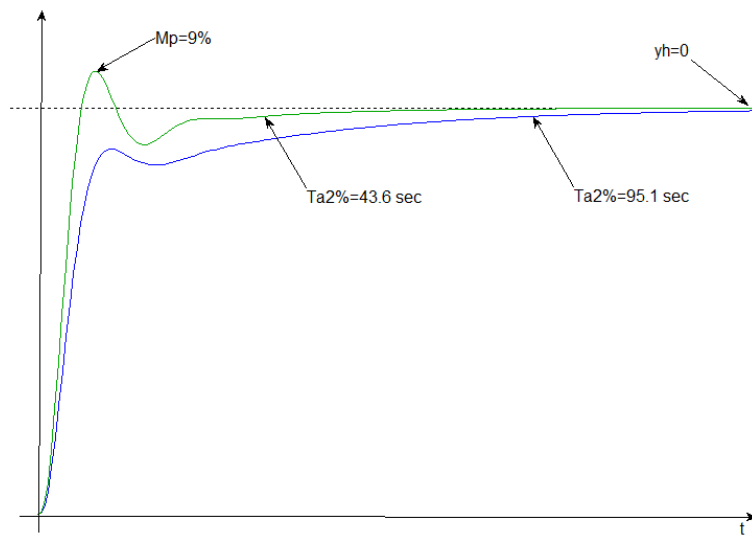
Megjegyzés: Általában egyszerre csak egy paramétert módosítsunk!

A 4.2. táblázatból a $ps_{PI} = -26.5^\circ$, így az eredő szakasz Bode diagramján a keresendő fázistolás $ps = 65^\circ + 26.5^\circ - 180^\circ = -88.5^\circ$.

A többi lépés az előbbieket szerint. Az eredő szakasz mérésével meghatározott Bode diagramján meg kell keresni a leendő ω_C vágási körfrekvencia értékét. Az ω_I ismertében meghatározható a felnyitott hurok átviteli függvény, és azon a K_C erősítés.

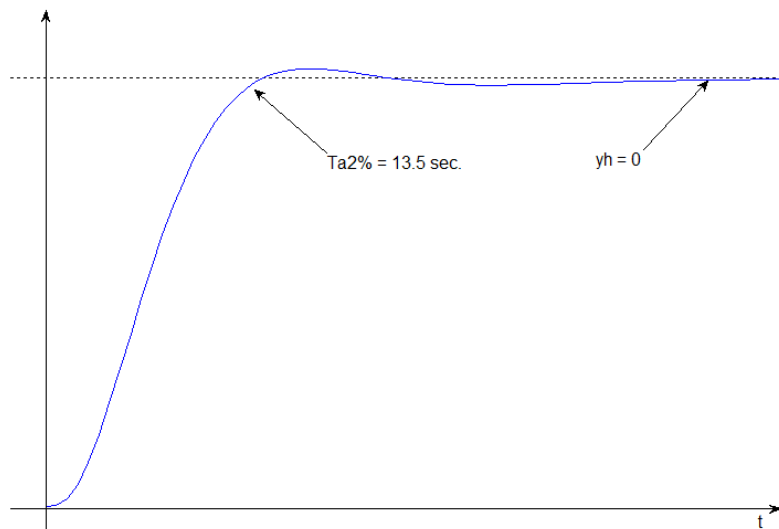
A PI kompenzáló tag paraméterei: $K_C = 1.24$, és $T_I = 13 \text{ sec}$.

4.A. Melléklet. Kompenzáló tag méretezése



4A.8. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvényei

A 4A.9. ábra a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye az $\omega_c = 2 \cdot \omega_l$ és $pm = 65^\circ$ választással meghatározott PI kompenzáló taggal.



4A.9. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

A 4A.9. ábrán látható átmeneti függvény minőségi jellemzői jók, alig rosszabb, mint a pólus áthelyezéssel kapott. Mindkettő tovább hangolható, azonban minden iteratív eljárás időigényesebb, mint az analitikus módszer.

3. Példa: PDT kompenzálás integráló eredő szakasz körfrekvencia diagramján

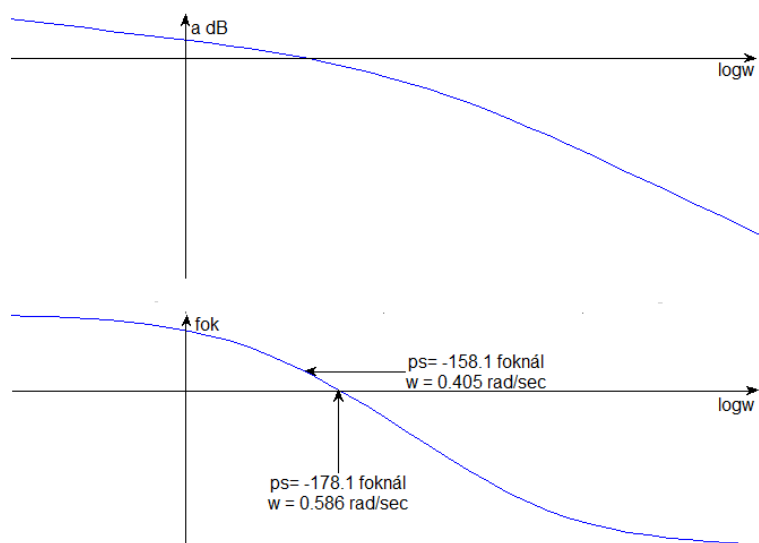
A PDT kompenzáló tagot törésponti körfrekvenciái és a maximális pozitív fázistolása között az alábbi kapcsolat van:

$$G_C(s) = K_C \frac{j\frac{\omega}{\omega_{DT}} + 1}{j\frac{\omega}{\omega_T} + 1} \quad ; \quad \omega(\varphi_{\max}) = \sqrt{\omega_{DT}\omega_T} \quad ; \quad \omega_T = (A_D + 1)\omega_{DT} \quad <4A.10.>$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$\omega_T = \omega(\varphi_{\max})\sqrt{A_D + 1} = \frac{1}{T} \quad ; \quad \omega_{DT} = \frac{\omega(\varphi_{\max})}{\sqrt{A_D + 1}} = \frac{1}{T_D + T} \quad <4A.11.>$$

Az összehasonlíthatóság érdekében a pólus áthelyezési módszerrel már kompenzált 4A.5. kifejezéssel definiált integráló eredő szakaszt kompenzáljuk ismét, azzal a feltevéssel, hogy a Bode diagramja mérésrel lett meghatározva.



4A.10. ábra. A $pm=55^\circ$ és a $pm=75^\circ$ helye az eredő szakasz Bode diagramján

A 4A.10. ábra fázis menete alapján integráló jellegű az eredő szakasz és a T_1 integrálási idővel együtt négy időállandója van. Az időállandók papír-ceruza módszerrel csak pontatlanul határozhatók meg.

$$ps^\circ = pm^\circ - \varphi_{\max}^\circ - 180^\circ \quad <4A.12.>$$

A 4A.12 kifejezés $G_E(s)$ eredő szakasz Bode diagramján megkeresendő fázistolás érték PDT kompenzálás esetén. A φ_{max} értéke függ az A_D differenciálási erősítés értéktől (4.1. táblázat).

Válasszuk az $A_D = 8$ értéket, ahol $\varphi_{max} = 53.1^\circ$. Most is két fázistartalék választásra is végezzük el a kompenzáló tag méretezését! Legyen először $pm = 55^\circ$, ekkor a keresendő fázistolás a 4A.12. kifejezés alapján $ps = -178.1^\circ$. Majd legyen $pm = 75^\circ$, ekkor a keresendő fázistolás $ps = -158.1^\circ$.

A $pm = 75^\circ$ fázistartalékhoz az $\omega(\varphi_{max}) = 0.405 \text{ [rad/sec]}$ körfrekvencia tartozik az eredő szakasz Bode diagramján. A 4A.11. kifejezések alkalmazásával az $\omega_T = 1.215 \text{ [rad/sec]}$ és az $\omega_{DT} = 0.135 \text{ [rad/sec]}$ értékű.

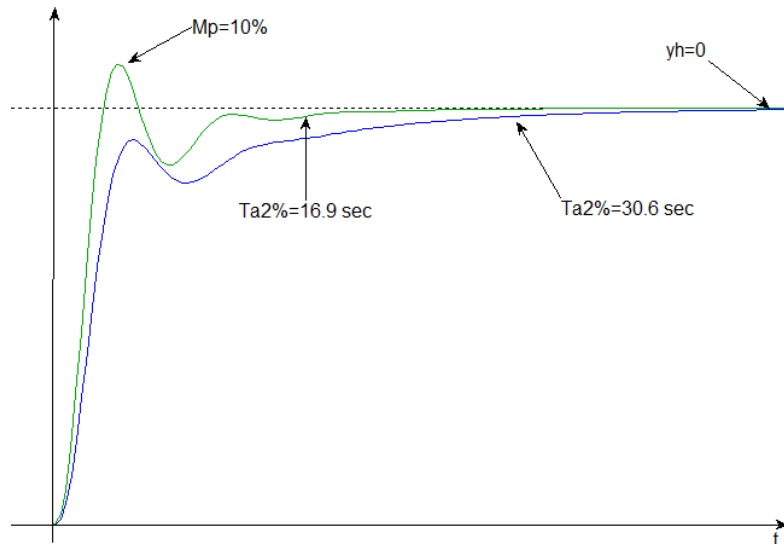
Így $T = 0.82 \text{ [sec]}$ és $T_D + T = 7.41 \text{ [sec]}$, amiből $T_D = 6.59 \text{ [sec]}$. Az időállandók ismeretében a $g_C(s)$ kompenzáló tag Bode diagramja rászerezhető a $G_E(s)$ eredő szakasz Bode diagramjára. Ez lesz a $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvény.

A $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényen a $pm = 75^\circ$ fázistartaléknak megfelelően a $ps = -105^\circ$ fázistoláshoz tartozó körfrekvencia értéknél kell az amplitúdó átvitelt leolvasni. A PDT kompenzáló tag paraméterei a $pm = 75^\circ$ fázistartalékhoz $K_C = 0.4$, $T_D + T = 7.41 \text{ [sec]}$, $T = 0.82 \text{ [sec]}$.

A $pm = 55^\circ$ fázistartalékhoz az $\omega(\varphi_{max}) = 0.586 \text{ [rad/sec]}$ körfrekvencia tartozik (4A.10. ábra). A 4A.11. kifejezések alapján az $\omega_{DT} = 0.195 \text{ [rad/sec]}$ és az $\omega_T = 1.76 \text{ [rad/sec]}$.

Ebből $T_D + T = 5.13 \text{ [sec]}$, $T = 0.57 \text{ [sec]}$, és a hozzátartozó $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényről $K_C = 0.76$.

A két átmeneti függvényt a 4A.11. ábra együtt ábrázolja.



4A.11. ábra. Az integráló jellegű szakasz zárt szabályozási körének átmeneti függvényei

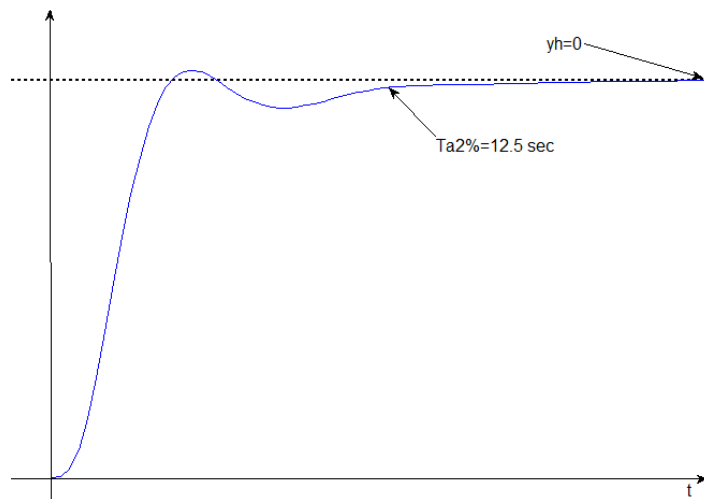
A 4A.11. ábrán látszik, hogy a $pm = 65^\circ$ fázistartalék jobb választás lett volna.

A 4A.11. ábrán látott átmeneti függvényeken az alálendülést a kompenzáló tag időállandóihoz képest nagy integrálási idő okozza. Az integrálási időt azonban nem lehet megváltoztatni, mert ez az eredő szakasz tulajdonsága.

Az alálendülés problémája már a $g_0(s)$ Bode diagramján is látszik. Ha a Bode diagram fázismenete nem monoton csökkenő, akkor a DT1 ág hatása a kellenél alacsonyabb körfrekvenciákon fejti ki a hatását. Az ω_D és ezzel arányosan az ω_T körfrekvencia értékek növelhetők. Ezért a $g_C(s)$ kompenzáló tagban célszerű csökkenteni a T_D és a T értékét.

A $pm = 55^\circ$ fázistartalék választással kapott kisebb T_D és a T értéket csökkentjük körülbelül 20%-al. Legyen a $T_D + T = 4$ [sec] és a $T = 0.45$ [sec]. A 4A.11. ábrán az is látszik, hogy a $pm = 65^\circ$ fázistartalék jobb választás.

A $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényen a $ps = -115^\circ$ értéknél határozzuk meg a K_C erősítést, ami $K_C = 0.73$.



4A.12. ábra. A módosított felnyitott hurok átviteli függvény

Az így kompenzált eredő szakasz minőségi jellemzői már jók.

4. Példa: PIDT kompenzálás önbeálló eredő szakasz körfrekvencia diagramján

Amennyiben az eredő szakasz Bode diagramján jól megszerkeszthető a két legkisebb törésponti körfrekvencia helye (2C Melléklet), akkor az így leolvasott ω_{min1} és ω_{min2} számértékre azonos az eredő szakasz két legkisebb pólusával. Ennek megfelelően a 4A.3. kifejezésekbe a p_{min1} és p_{min2} értékek helyére behelyettesítve a pólus áthelyezés módszere alkalmazható.

Amennyiben a pólusok nem határozhatók meg kielégítő pontossággal úgy - a PDT kompenzációhoz hasonlóan - a PIDT kompenzáló tag legnagyobb pozitív fázistolás értékéhez tartozó körfrekvencia $\omega(\varphi_{max})$ és az eredő szakasz leendő ω_c vágási körfrekvenciája lesz a közös pont.

Az $\omega(\varphi_{max})$ értékét befolyásolja az ω_I és ω_D körfrekvencia aránya és az A_D differenciálási erősítés értéke.

A kompenzálás első lépése a kompenzáló tag ω_I és ω_D körfrekvenciájának az arányát kell eldönteni. A legkisebb töréspontok közelsége miatt, ez az arány 8-nál kisebb, de a PIDT jelleg miatt 2.5-nél mindenképpen nagyobb.

A 4A.1. táblázat tartalmazza a φ_{max} értékeket a legfontosabb esetekre.

4A.1. Táblázat. A PIDT kompenzáló tag legnagyobb pozitív fázistolása

ω_D/ω_I	$A_D = 5$	$A_D = 8$	$A_D = 9$	$A_D = 15$
3	43.1 [°]	51.7 [°]	53.7 [°]	61.3 [°]
5	44.1 [°]	52.3 [°]	54.2 [°]	61.6 [°]
8	44.6 [°]	52.6 [°]	54.4 [°]	61.7 [°]

Ha az arányt és a differenciális erősítést megválasztottuk, akkor a PDT kompenzálás lépéseit kell követni.

A 4A.1 kifejezéssel definiált, már ismert önbeálló szakaszt kompenzálva legyen az ω_D/ω_I arány 3, a differenciális erősítés $A_D=8$, és a fázistartalék $pm = 65^\circ$. A 4A.1. táblázatból a $\varphi_{max} = 51.7^\circ$.

Az eredő szakasz Bode diagramján a megkeresendő fázistolás:

$$ps^\circ = pm^\circ - \varphi_{max}^\circ - 180^\circ = 65 - 51.7 - 180 = -166.7^\circ \quad <4A.12.>$$

Az eredő szakasz Bode diagramján az $\omega(\varphi_{max})$ körfrekvencia értékhez tartozó $\varphi_{max}^\circ = 51.7^\circ$ fázistolás és $pm = 65^\circ$ fázistartalék esetén az $0.59 [rad/sec]$ érték lesz a leendő ω_c vágási körfrekvencia.

A PIDT kompenzáló tag T_D paramétere a 4A.11 kifejezéseket alkalmazva:

$$\omega_T = 3\omega(\varphi_{max}) = 1.79 \frac{rad}{sec} \rightarrow T = \frac{1}{\omega_T} = 0.56 sec. \quad \text{A választott } \omega_D/\omega_I \text{ arány és } A_D$$

alapján: $T_D = 8 \cdot T = 4.48 sec$; $T_I = 3T_D = 13.4 sec$.

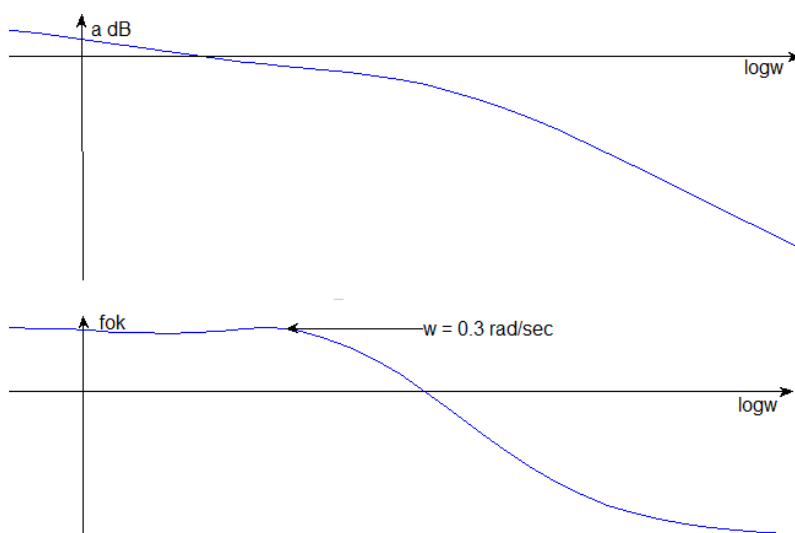
Ha a $g_c(s)$ kompenzáló tag időparaméterei már ismertek, akkor a $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényen, a $pm = 65^\circ$ fázistartalékhoz tartozó $ps = -115^\circ$ értéknél, határozzuk meg a K_C erősítést, ami ez esetben $K_C = 2.8$.

Ha a $G_C(s)$ PIDT kompenzáló tag paraméterei az előbbieket, akkor a zárt szabályozási kör átmeneti függvényében nincs maradó szabályozási eltérés, nincs túllövés, de nagy a szabályozási idő és erőteljes alálendüléssel áll be a rendszer. Ez túl nagy integrálási idő választására utal. A $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvény Bode diagramjának nem monoton csökkenő volta pedig túl nagy differenciálási időre.

Csökkentsük a T_I értékét nagyjából 30%-al, $T_I = 10 \text{ sec}$. Ebből számítva a differenciálási idő is nagyjából 30%-al csökken:

$$T_D = \frac{T_I}{3} = 3.3 \text{ sec.}; \quad T = \frac{T_D}{8} = 0.41 \text{ sec}$$

Megjegyzés: Ez a lépés nem azonos azzal, hogy kisebb fázistartalékot választva keressük meg a leendő ω_c vágási körfrekvencia helyét az eredő szakasz Bode diagramján! A kisebb fázistartalékhoz a felnyitott hurok átviteli függvényen nagyobb K_C erősítés érték tartozik.



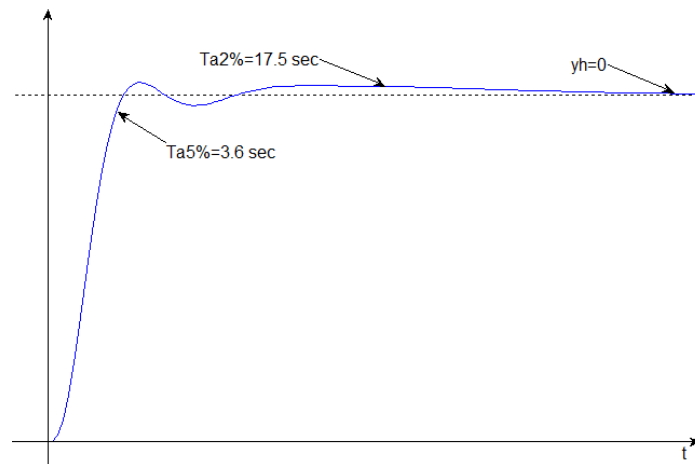
4A.13. ábra. A felnyitott hurok Bode diagramja hangolt PIDT kompenzációval

Az új $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvényen még mindig nem monoton csökkenő a felnyitott hurok átviteli függvény fázismenete (4A.13. ábra). A 4A.13. ábrán a visszahajlás még elég jelentős. Ezért csökkentsük a T_D differenciálási időt (növeljük az $\omega(\varphi_{max})$ körfrekvenciát) nagyjából 20%-al.

Az új kompenzációs paraméterek: $T_I=10\text{sec}$, $T_D=2.7\text{sec}$, $T=0.34 \text{ sec}$, és a $pm = 65^\circ$ fázistartalékhoz tartozó erősítés értéknél $K_C = 3.76$.

Megjegyzés: Egy ismeretlen feladat megoldásakor egy paramétert általában 10%-os lépcsőkben szokás változtatni.

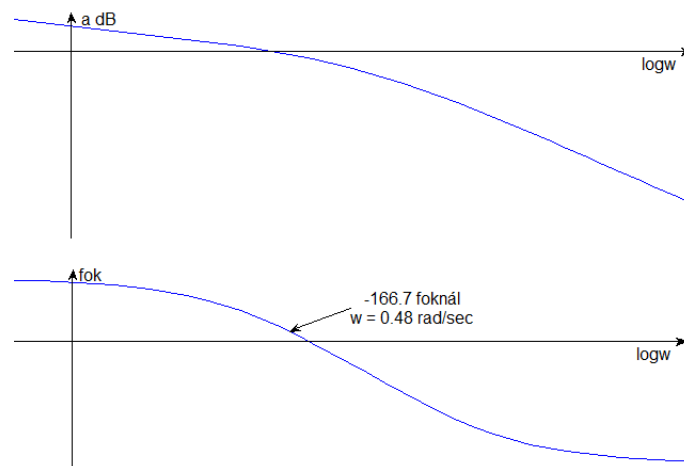
A 4A.14. ábra az új hangolt paraméterű PIDT kompenzáló taggal mutatja a zárt szabályozási kör átmeneti függvényét.



4A.14. ábra. Zárt szabályozási kör átmeneti függvénye, hangolt PIDT kompenzációval

5. Példa: PIDT kompenzáció integráló eredő szakasz körfrekvencia diagramján

A 4A.5 kifejezéssel definiált integráló jellegű szakaszt kompenzálva legyen az ω_D/ω_I arány 3, a differenciális erősítés $A_D=8$, és a fázistartalék $pm = 65^\circ$.



4A.15. ábra. Az integráló jellegű eredő szakasz Bode diagramja

Az eredő szakasz Bode diagramján a megkeresendő fázistolás $ps = -166.7^\circ$, mivel a $\varphi_{max} = 51.7^\circ$ (4A.1. táblázat).

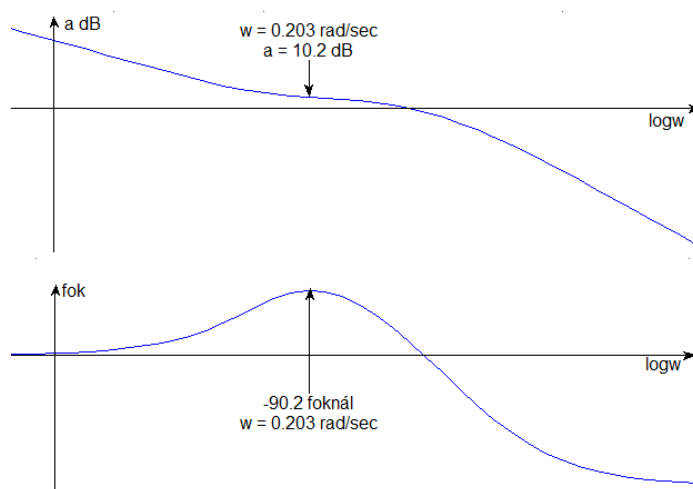
4.A. Mellélet. Kompenzáló tag méretezése

Az eredő szakasz Bode diagramján a leendő ω_c vágási körfrekvencia értékhez az 0.48 [rad/sec] érték tartozik és ez a $\omega(\varphi_{\max})$ körfrekvencia. A PIDT kompenzáló tag időparaméterei a 4A.11 kifejezéseket alkalmazva:

$$\omega_T = 3\omega(\varphi_{\max}) = 1.34 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \rightarrow T = \frac{1}{\omega_T} = 0.75 \text{ sec.}, \text{ és a választott } \omega_D/\omega_I \text{ arány és } A_D$$

alapján: $T_D = 8 \cdot T = 6 \text{ sec}$; $T_I = 3T_D = 18 \text{ sec}$.

Az időparaméterek ismeretében a $g_c(s)$ PIDT kompenzáló tag Bode diagramja rászerezhető az eredő szakasz Bode diagramjára. Az így kapott $g_0(s)$ felnyitott hurok átviteli függvény Bode diagramja látható a 4A.16. ábrán.

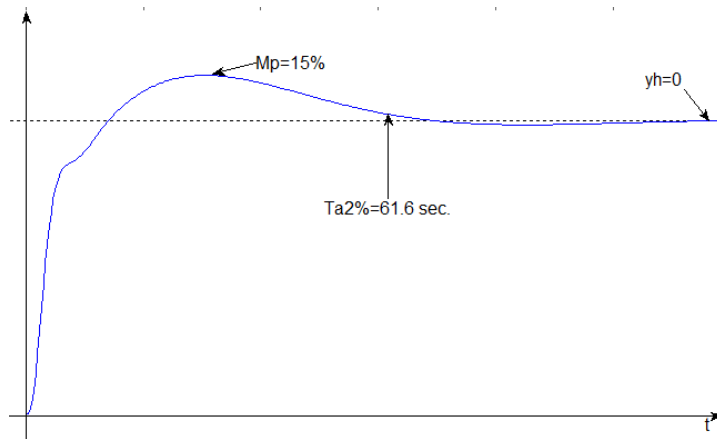


4A.16. ábra. A felnyitott hurok Bode diagramja

A 4A.16. ábra fázismenetén csak egy viszonylag szűk körfrekvencia sávban van egyáltalán fázistartalék. Könnyű belátni, hogy integráló jellegű eredő szakasz esetén a legjobb választás, ha a maximális fázistartaléknál számítjuk ki a PIDT kompenzáló tag K_C erősítését. A 4A.16. ábráról leolvasott amplitúdó átvitelből a $K_C = 0.31$.

Megjegyzés: Az így kiszámolt K_C erősítés értékhez képest, K_C növelése vagy csökkentése egyaránt csökkenti a fázistartaléket és így növeli a lengésre való hajlamot. Ezért aztán az integráló jellegű eredő szakasz PIDT kompenzálásakor a K_C hangolása sem lehetséges. Hangolás a pm fázistartalék, az ω_D/ω_I arány, vagy A_D módosításával lehetséges.

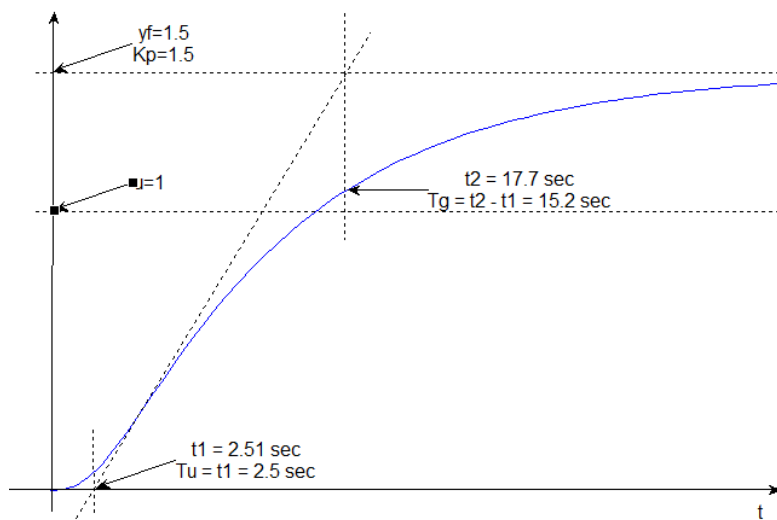
A PIDT kompenzáló tag K_C erősítését módosítva a számított értékre, majd zárva a szabályozási kört kapjuk a zárt szabályozási kör átmeneti függvényét. A 4A.17 ábra minőségi jellemzői rosszabbak, mint a 4A.12. ábra PDT kompenzációval kapott válaszfüggvényé. Integráló jellegű szakaszok esetén a PIDT kompenzáló tag nehezen hangolható, ráadásul a PDT kompenzálás nem minden esetben, bár többnyire, jobb minőségi jellemzőket ad.



4A.17. ábra. Zárt szabályozási kör átmeneti függvénye, integráló jellegű szakasz, PIDT kompenzálás

6. Példa: Kompenzálás önbeálló eredő szakasz átmeneti függvénye alapján

A példasorozatban szereplő önbeálló szakasz átmeneti függvénye:



4A.18. ábra. Az önbeálló jellegű szakasz átmeneti függvénye

Figyelem: A szerkesztéskor ügyeljen arra, hogy a válaszfüggvény inflexiós pontjának érintője egy ponton metszi az átmeneti függvény görbét! Gyakori hiba, hogy a válaszfüggvényre rásimuló regressziós egyenest rajzolják meg.

A $G_{HPT} = K_p \frac{1}{sT_g + 1} e^{-sT_u}$ közelítő HPT1 átviteli függvény három paramétere (4A.18.

ábra) $K_p = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} = \frac{1.5}{1} = 1.6$, $T_g = t_2 - t_1 = 17.7 - 2.5 = 15.2 \text{ sec}$, és $T_u = t_1 = 2.5 \text{ sec}$.

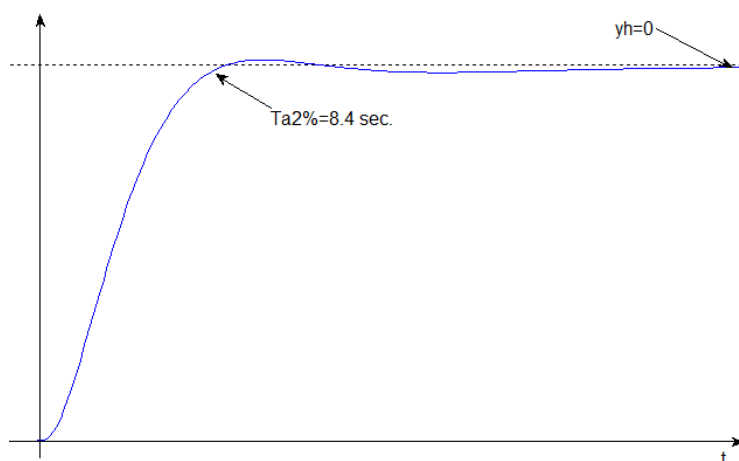
A Piwinger ajánlás (4.3. táblázat) a $\frac{T_g}{T_u} = 6$ érték esetén PIDT kompenzálást javasol.

Ha a leggyorsabb aperiodikus beállítás értékkövetéskor a cél, akkor a CHR ajánlás az alábbi paramétereket szolgáltatja (4.5. táblázat):

$$K_C = 0.6 \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u} = 2.4; T_I = T_g = 15.2 \text{ sec}; T_D = 0.5 T_u = 1.25 \text{ sec}; T = \frac{T_D}{8} = 0.16 \text{ sec}.$$

Felparaméterezve a $G_C(s)$ kompenzáló tagot a fenti paraméterekkel és zárva a felnyitott hurkot, a zárt szabályozási kör átmeneti függvény a 4A.19 ábrán látható.

Megjegyzés: Az eredmény nem minden esetben ennyire jó.



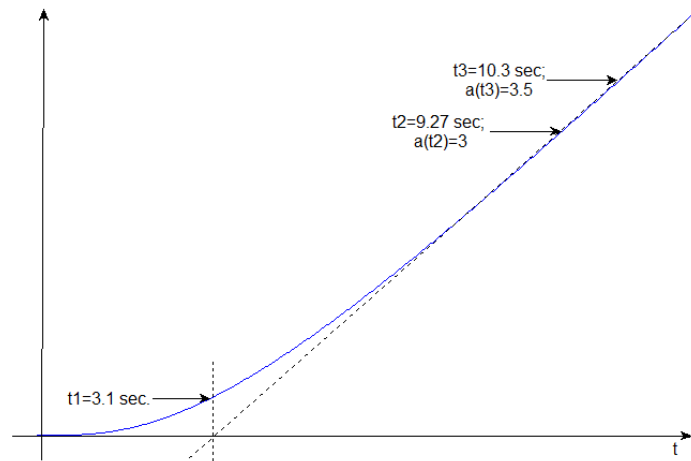
4A.19. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

7. Példa: Kompenzálás integráló eredő szakasz átmeneti függvénye alapján

Az összehasonlíthatóság miatt a példasorozatban már különböző módszerekkel már kompenzált integráló szakasz átmeneti függvénye az alábbi:

A $G_{IT1} = \frac{1}{T_{lm}} \frac{1}{sT_g + 1}$ közelítő IT1 átviteli függvény két paramétere:

$$T_I = \frac{t_2 - t_1}{a(t_2) - a(t_1)} = \frac{10.3 - 9.27}{3.5 - 3} = 2 \text{ sec.} \text{ és } T_g = t_1 = 3.1 \text{ sec.}$$

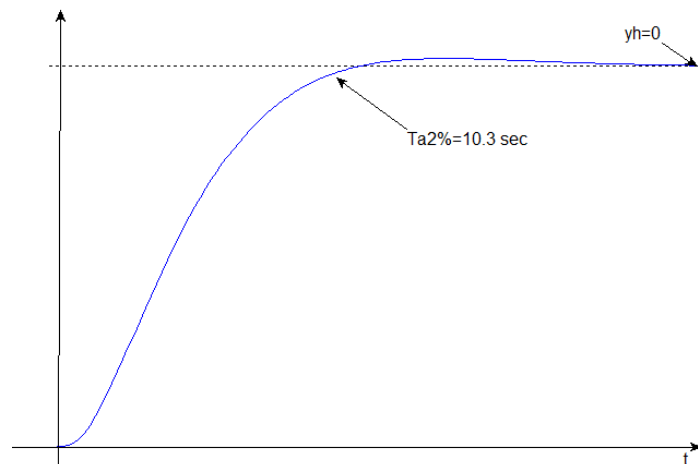


4A.20. ábra. Az integráló jellegű szakasz átmeneti függvénye

A kettéstípusú egyhurkos szabályozási kör érzékeny a paraméterszórásra, ezért a Friedlich ajánlásból a PDT kompenzálást választjuk!

$$K_C = 0.7 \frac{T_{lm}}{T_g} = 0.45; T_D = 0.5 T_g = 1.55 \text{ sec.}; T = \frac{T_D}{8} = 0.19 \text{ sec.}$$

Felparaméterezve a $G_C(s)$ kompenzáló tagot a fenti paraméterekkel és zárva a felnyitott hurkot, a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye a 4A.21 ábrán látható.



4A.21. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

4.B. Melléklet

Esettanulmány

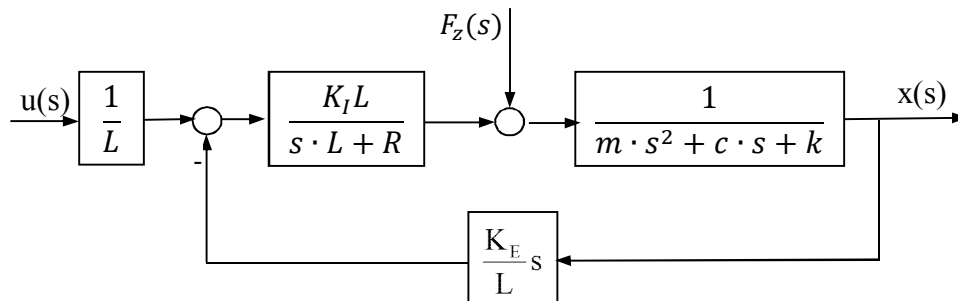
A szabályozandó szakasz modell és a szabályozási kör leírása

Egy masszírozó szék nyomófejeit számítógép vezérli. Minden nyomófejhez több, idődiagrammal jellemezhető program tartozik. Minden program meghívja a modellhez illesztett szabályozó algoritmust.

A nyomófej mozgásának értéktartománya: $X: \{0-5 \text{ [mm]}\}$. Az $u(t)$ gerjesztő értéktartománya: $U: \{0-10 \text{ [V]}\}$. A masszírozó széket használó személyek tömegét 40 és 110 [kg] között feltételezve, az átlagos érték körüli ingadozás mértéke $m_z: \{\pm 30 \text{ [kg]}\}$.

Állandó értékű zavar azért keletkezik, mert a különböző súlyú kezelt személy az átlagostól eltérő értékű ellenerővel nehezedik a nyomófejre. Az ellenerő az időben változik, mert a kezelés közben mozog a kezelt személy. Ennek megfelelően a zavarjellemző $f_z = f_{z0} \cdot 1(t) + f_{zt} \cdot t \cdot 1(t)$ összetevőkre bontható.

A masszírozó szék nyomófej alábbi operátoros körfrekvencia szürke doboz blokkmodellje és átviteli függvényei a 2B. Mellékletben van levezetve.



4B.1. ábra. Masszírozó gép nyomófej szakaszmodell

$$G_{xu}(s) = \frac{x_{ki}(s)}{u(s)} = \frac{K_I}{s^3 L m + s^2 (L c + R m) + s (L k + R c + K_I K_E) + R k} \quad <4B.1.>$$

$$G_{xF}(s) = \frac{x_{ki}(s)}{F_z(s)} = \frac{s L + R}{s^3 L m + s^2 (L c + R m) + s (L k + R c + K_I K_E) + R k} \quad <4B.2.>$$

A szabályozási kör kialakításához érzékelni kell a nyomófej mozgását. A 2B.1. ábrán a rudazat a nyomófejjel ellentétes vége egy kapacitív érzékelőt közelítve, távolodva mo-

zog. Az érzékelő elektronikája 1 [mm] elmozdulásra 2 [V] ellenőrző jelet szolgáltat. Az érzékelő P arányos taggal modellezhető és $K_T = 2 [V/mm]$, ha az érzékelő elektronika időállandói jóval kisebbek, mint a mechanikai rendszeré.

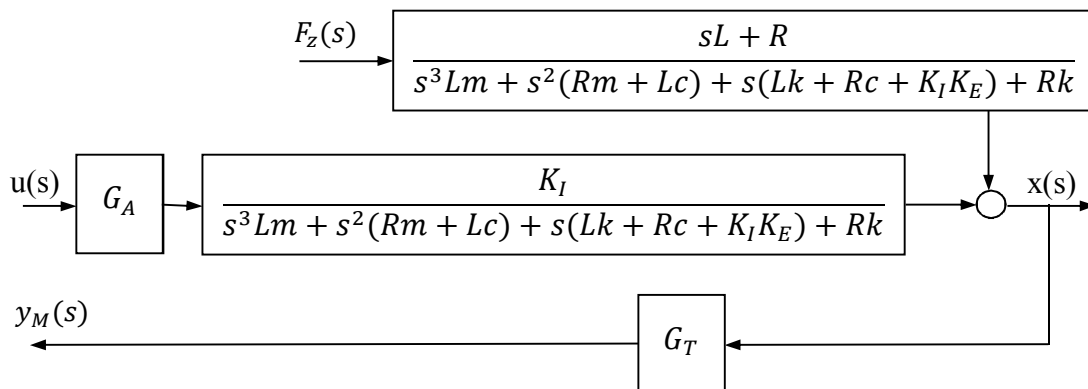
Az $u(t)$ gerjesztő feszültség kellő teljesítményéről egy teljesítményerősítő elektronika gondoskodik. A teljesítményerősítő 10 [V_{DC}] végrehajtójelre 12 [V_{AC}] effektív értékű beavatkozó jelet szolgáltat. Feltételezve, hogy az időállandói jóval kisebbek, mint a mechanikai rendszeré, a teljesítményerősítő P arányos taggal modellezhető és az erősítése $K_A = 1.2$.

A 4B.1. táblázat az elektromechanikai rendszer szerkezeti elemeinek konkrét fizikai jellemzőit szolgáltatja.

4B.1. táblázat A fizikai paraméterek megnevezése és értéke

A mozgó mechanikai szerkezet tömege:	$m = 2.4 \cdot 10^{-1}$ [kg]
A gerjesztő tekercs induktivitása:	$L = 5.3 \cdot 10^{-2}$ [H]
A gerjesztő tekercs ohmos ellenállása	$R = 4.6 \cdot 10^{-2}$ [Ω]
A lágy laprúgó, rúgóerő tényezője	$k = 2.9 \cdot 10^1$ [N/mm]
A lengéscsillapító csillapítási tényezője	$c = 6,6$ [Nsec./mm]
Az indukált erő áramtényezője	$K_i = 9.4$ [N/A]
Az elektromotoros feszültség tényezője	$K_E = 3.1 \cdot 10^{-2}$ [Vsec./mm]

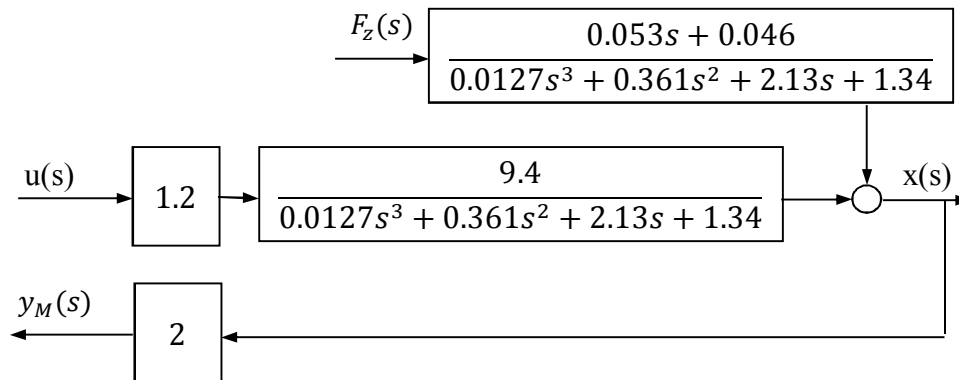
A 4B.1. kifejezés a $G_P(s)$ szakaszmodell, a 4B.2. kifejezés a $G_W(s)$ a kimeneten támadó zavarhatást modellező blokk, a $G_A = K_A$ a végrehajtó, és a $G_T = K_T$ a távadó átviteli függvénye a 4B.2. ábrán.



4B.2. ábra. Masszírozó gép nyomófej egyszerűsített eredő szakasz modell

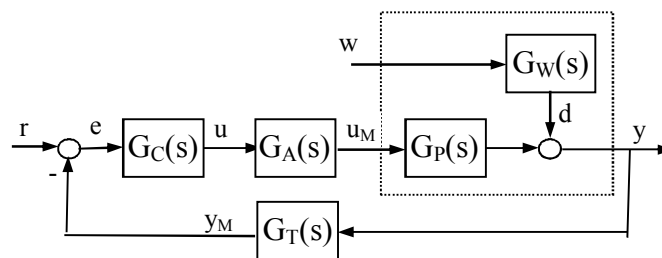
Az eredő szakasz ($G_E(s)$) az irányító berendezés felől látott a végrehajtó, szakasz, távadó együtt, vagyis nyitott szabályozási körnél az u végrehajtó jelre adott y_M választ jellemző átviteli függvény.

Három értékes jegyig kiszámolva az átviteli függvények együtthatóinak számértékeit kapjuk a 3B.3. ábrát.



4B.3. ábra. Masszírozó gép nyomófej eredő szakasz modell számértékekkel

Az egyhurkos szabályozási kör az alábbi:



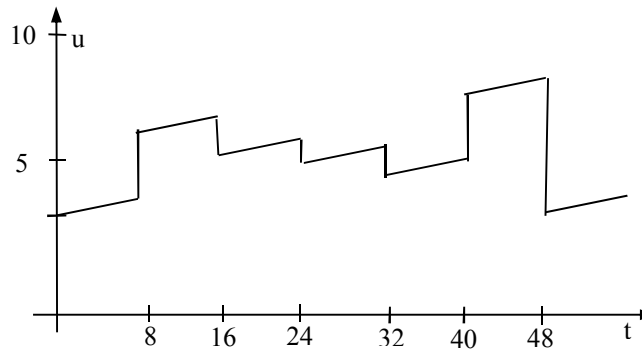
4B.4. ábra. A nyomófej modell szabályozási köre

A zavarjellemző $f_z = f_{z0} \cdot 1(t) + f_{zt} \cdot t \cdot 1(t)$ két összetevőre bontható. Az $f_{z0} \cdot 1(t)$ egyen összetevő a masszírozó gépet használó személyek eltérő súlyából adódik. A mikroprocesszor alapú szabályozó a kiválasztott masszírozó program indításakor, a gépet használó személy által észrevehetetlenül rövid idő alatt, ezt ki kompenzálja.

Az $r(s)$ alapjel operátoros alakja.

A szabályozási kört, és különösen a minőségi paramétereit, célszerű a legösszetettebb és leggyorsabb nyomófej mozgásra méretezni, hiszen így nyilvánvalóan megfelelő lesz az egyszerűbb és lassabb mozgások esetén is. A nyomófej szabályozó berendezésének a legösszetettebb programja a nyomófej mozgására a 4B.5. ábrán látható idődiagramot

írja elő. Az előírt idődiagramnak három jelösszetevője van. Egy egyen, egy négyszög impulzus, és egy periodikusan egyenletesen emelkedő összetevő.



4B.5. ábra. A legösszetettebb előírt idődiagram

A szakasz modell, a végrehajtó, és a távadó a teljes értéktartományán belül, lineárisnak tekinthető. Így külön-külön vizsgálható a 4B.5. ábra előírt idődiagramjának, a jelösszetevői.

A 4B.6.a. ábrán az egyen összetevő: $\{2 \text{ [V]}\}$.

A 4B.6.b. ábrán a négyszög impulzus összetevő amplitúdó változás tartománya $\{0-2 \text{ [V]}\}$, kitöltésű tényezője 1:1, periódusideje $T_{p1} = 16 \text{ [sec.]}$.

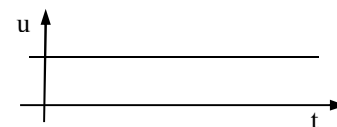
A 4B.6.c. ábrán az egyenletesen emelkedő összetevő: amplitúdó emelkedés tartománya $\{0-3 \text{ [V]}\}$, periódusideje $T_{p2} = 24 \text{ [sec.]}$.

A 4B.5. ábrán látszik, hogy 8 másodpercenként van szakadós változás a gerjesztő jelben. Minden 8. másodpercben négyszög impulzus összetevő 2 [V] amplitúdó változást gerjeszt le vagy fel. Az egyenletesen emelkedő összetevő 8 másodperc alatt 1 [V] emelkedést realizál, és minden 24. másodpercben 3 [V] amplitúdó csökkenést okoz.

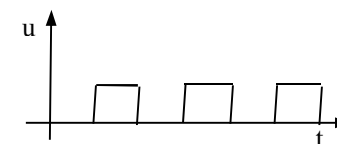
Így a gerjesztő jel 2 [V] amplitúdó értéken indul. A 8. másodpercben 4 [V]-ről 6 [V]-ra ugrik. A 16. másodpercben 7 [V]-ről 5 [V]-ra esik. A 24. másodpercben 6 [V]-ről 5 [V]-ra esik. A 32. másodpercben 6 [V]-ről 4 [V]-ra esik. A 40. másodpercben 5 [V]-ről 7 [V]-re ugrik. A 48. másodpercben 8 [V]-ről 3 [V]-ra esik a jel.

Ezután kezdődik előről és ciklikusan ismétlődik a jelalak. A legnagyobb jelváltozás 5 [V]. Az egyenletes emelkedés mindig 1 [V] 8 másodperc alatt.

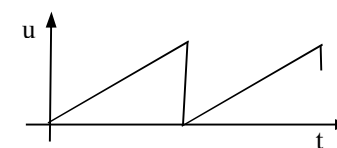
A további vizsgálatokhoz célszerű dimenzió nélkül tenni a gerjesztő feszültség (u végrehajtó jel) $\{0 - 10 \text{ [V}_{DC}\}\}$, az ellenőrző jel (y_M) $\{0 - 10 \text{ [V}_{DC}\}\}$, és az x elmozdu-



4B.6.a. ábra
Egyen összetevő



4B.6.b. ábra
Négyszög impulzus
összetevő



4B.6.c. ábra
Egyenletesen emelkedő
periodikus összetevő

lás (a továbbiakban y szabályozott jellemző) $\{0 - 5 \text{ [mm]}\}$ értékeket. Logikus a $\{0 - 10\}$ számtartomány választása (1.3 kifejezés). Ennek megfelelően az r alapjel és az F_z zavaró ellenerő (a továbbiakban w zavaró jellemző) is ebben a számtartományban lesz értelmezve.

Az értékkövetés vizsgálatához az alábbi vizsgáló jelet fogjuk alkalmazni:

$$r(t) = 5 \cdot 1(t) + 0.125 \cdot t \cdot 1(t); \quad r(s) = \frac{5}{s} + \frac{0.125}{s^2} \quad <4B.3.>$$

Az $w(s)$ zavaró jellemző operátoros alakja.

A masszírozó széket használó személyek tömegét 40 és 110 [kg] között feltételezve, az átlag 75 kg. Az átlagos érték körüli ingadozás mértéke $m_z: \{\pm 35 \text{ [kg]}\}$. A masszírozó szék hátlapja a függőlegessel 15° -os szöget zár be. Így a zavaró ellenerő értéktartománya: $f_z = m_z g \sin 15^\circ = \pm 35 \cdot 9.8 \cdot 0.26 = \pm 88.8 < \pm 100 \text{ [N]}$.

Dimenzió nélkülivé téve a zavaró erő tartományát a $\{0 - 200 \text{ N}\}$ lesz leképezve a $\{0 - 10\}$ számtartományba. Az egyen összetevő kikompenzálása után, az üzemi zavaró jellemző érték 5, és az ettől való eltérés okozza a zavarást. Ha a személy mocorgásából származó ingadozás amplitúdója a teljes tartomány 10%-a (az alaphelyzet körül $\pm 5\%$), és egyenletes mozgást feltételezzünk, akkor $0.5 \cdot t \cdot 1(t)$ zavarösszetevővel számolhatunk. Az értéktartás vizsgálatához az alábbi jelet fogjuk alkalmazni:

$$w(t) = 0.5 \cdot t \cdot 1(t); \quad w(s) = \frac{0.5}{s^2} \quad <4B.4.>$$

A kompenzáló tag megválasztása.

A $G_c(s)$ kompenzáló tag megválasztásakor fontos szempont, hogy jelkövetésre is szükség van, ezért legalább egyes típusú szabályozási körre lesz szükség. Az is szempont, hogy lehetőleg 2 másodpercen belül álljon rá az új értékre, ezért hasznos gyorsítani. A működtetési környezet elektro-mágneses szempontból nem zajos, ezért a PIDT struktúra a megfelelő választás.

A PIDT kompenzáló tag paramétereit meghatározhatjuk a pólus kiejtés módszerével, az eredő szakasz átmeneti függvényéből ajánlások alkalmazásával, vagy az eredő szakasz körfrekvencia függvényén történő méretezéssel.

Kompenzáló tag méretezése a pólus kiejtés módszerével

A 2B.3. ábra alapján ismert az eredő szakasz átviteli függvénye

$$G_E(s) = \frac{22.6}{0.0127s^3 + 0.361s^2 + 2.13s + 1.34} \quad <4B.5.>$$

4.B. Mellélet. Esettanulmány

A Matlab program segítségével a pólusok: $p_1=-20.49$, $p_2=-7.22$, $p_3=-0.713$. Az időállandók (2.14. kifejezés): $T_1=0.049$ [s], $T_2=0.138$ [s], $T_3=1.4$ [s]. Az eredő szakasz beállási ideje (3.4. táblázat) $5 \cdot \sum T = 8.2$ [s], 2% toleranciasávnál.

A pólus kiejtés módszere azon alapul, hogy a két időállandó, ami megegyezik a két legkisebb pólussal, ejtsük ki a PIDT kompenzáló tag zérusaival.

$$G_{PID}(s)G_E(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{sT_I(sT+1)} \frac{K_p}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \quad <4B.6.>$$

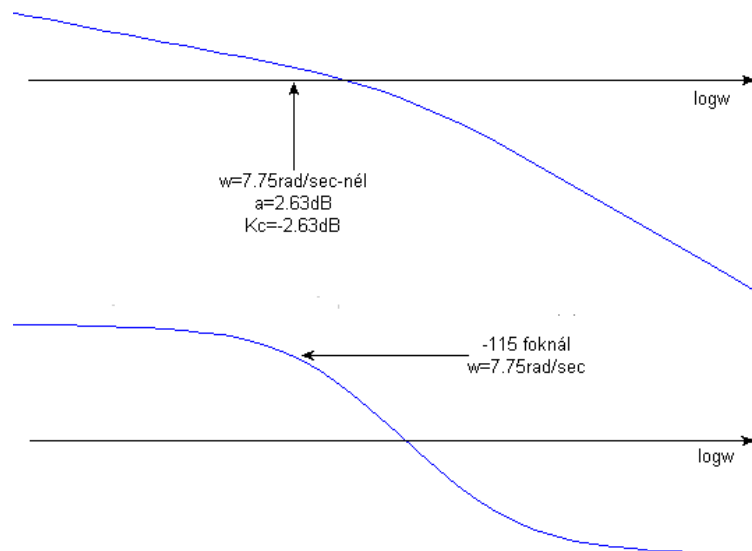
Az esettanulmányban $(s+7.22)(s+0.713) = s^2 + 7.93s + 5.19$. Osztva a konstans taggal $0.194s^2 + 1.54s + 1$.

A PIDT kompenzáló tag számlálóját: $s^2T_I(T+T_D) + s(T_I+T) + 1$. Az együttható összehasonlításához két egyenlet írható fel. A DT tag időállandóinak arányát nekünk kell megválasztani. Legyen $A_D = 9$ és így $T_D = 9T$. Az egyenletek:

$$\begin{aligned} T_I + T &= 1.54 \rightarrow T = 1.54 - T_I \\ T_I \cdot 10 \cdot T &= 0.194 \rightarrow T_I \cdot 10 \cdot (1.54 - T_I) = 10T_I^2 + 15.4T_I = 0.194 \end{aligned} \quad <4B.7.>$$

Megoldva a másodfokú egyenletet a $T_I = 1.527$ [s] és $T = 0.013$ [s], így $T_D = 0.117$ [s]. Kerekítve $T_I = 1.53$ [s] és $T_D = 0.12$ [s] adódik. A $G_C(s)$ kompenzáló tag átviteli függvénye $K_C = 1$ feltételezéssel.

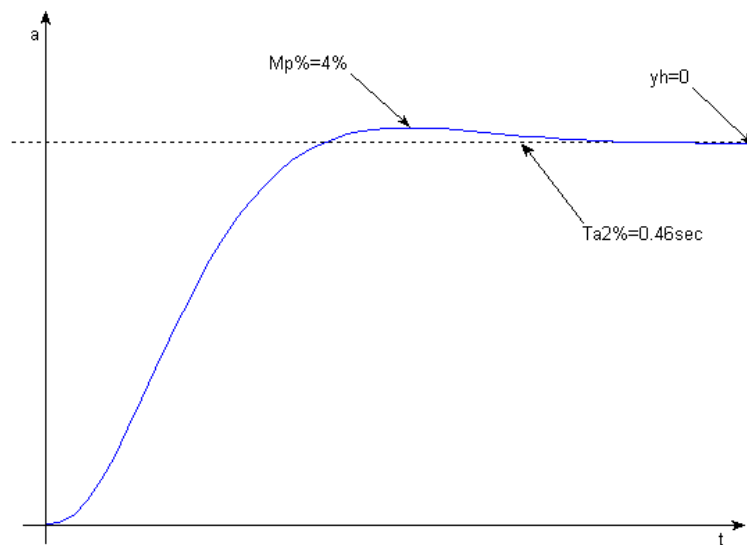
$$G_C(s) = 1 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{1.53s} + \frac{0.12s}{0.013s+1} \right\} \quad <4B.8.>$$



4B.7. ábra. A G_0 felnyitott hurok Bode diagramja

A $G_0(s)$ kompenzáló tag K_C erősítését a felnyitott hurok átviteli függvény Bode diagramján határozhatjuk meg. Ehhez el kell dönteni, hogy mekkora fázistartalékra méretezzünk. Az esettanulmányban legyen $pm = 65^\circ$, ami nagy valószínűséggel aperiodikus vagy minimális túllendülést tartalmazó szabályozási kört eredményez.

A 4B.7. ábrán meghatározott $K_C = -2.63 [dB]$ értéket átszámítva, majd a $K_C = 0.74$ értékkel módosítva a kompenzáló tagot kapjuk a zárt szabályozási kör átmeneti függvényét (4B.8. ábra).



4B.8. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvény

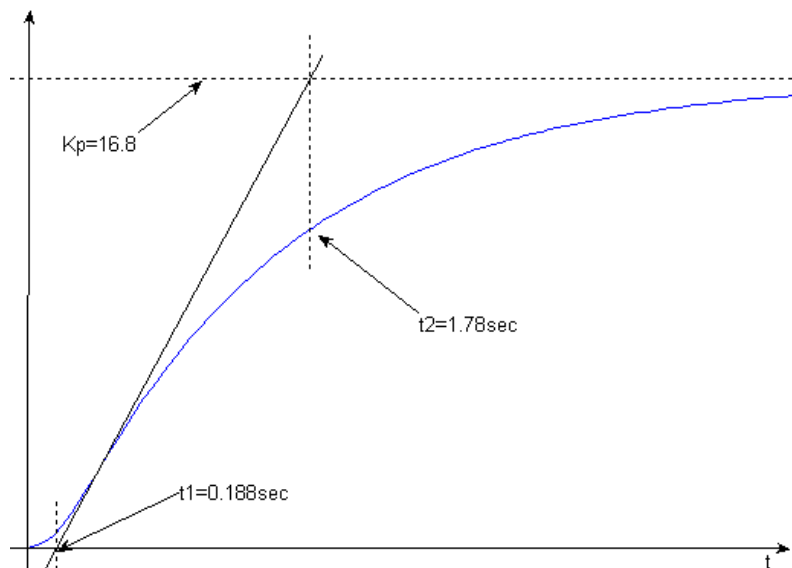
A minőségi jellemzők jók. Nincs maradó hiba, az eredő szakasz beállási idejéhez képest a szabályozási idő jelentősen lecsökkent (8.2 másodpercről 0.46 másodpercre), és kicsi (4%) a túllendülés. A szabályozási kör átmeneti függvényének az alakjából látszik, hogy a hurokerősítés csekély csökkentése aperiodikus beállású szabályozási kört eredményez anélkül, hogy a szabályozási idő növekedne.

Kompenzáló tag méretezése az eredő szakasz átmeneti függvénye alapján

Az összehasonlíthatóság érdekében az esettanulmányban szürke modell módszerrel meghatározott eredő szakaszt vizsgáljuk, csak feltételezzük, hogy az átmeneti függvénye mérésrel lett meghatározva.

A 4B.9. ábrán látható átmeneti függvény önbeálló. Fekete doboz elven az önbeálló szakaszokat leggyakrabban HPT1 taggal modellezzük.

$$G_p(s) = K_p \frac{1}{sT_g + 1} e^{-sT_u} \quad <4B.9.>$$



4B.9. ábra. Az eredő szakasz átmeneti függvény

Mivel a gerjesztés egységnyi az átmeneti függvény vég- és kezdeti érték különbsége a $K_p = 16.8$ szakaszerősítés. Az átmeneti függvény inflexiós pontján átfektetett érintő egyenes, a függvény kezdő értékét a t_1 időpontban, végértékét a t_2 időpontban metszi. A látszólagos holtidő értéke $T_u = t_1 = 0.19$ [sec.]. A látszólagos egy tárolós tag idő-állandója $T_g = t_2 - t_1 = 1.78 - 0.19 = 1.59$ [sec]. Így a 4B.14. kifejezés valamennyi paraméterét meghatároztuk.

A leggyakrabban alkalmazott ajánlás a kompenzáló tag paramétereire CHR (Chien, Hrones, Reswick) ajánlásokat a 4B.2. táblázat tartalmazza

4B.2. táblázat A CHR ajánlások

Leggyorsabb aperiodikus				Leggyorsabb lengő $M_p \% \leq 20\%$		
		T_I	T_D		T_I	T_D
P	$K_C = 0,3 \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	-	-	$K_C = 0,7 \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	-	-
PI	$K_C = 0,35 \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	$1.2 T_g$	-	$K_C = 0,7 \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	-	-
PID	$K_C = 0,6 \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	T_g	$0.5 T_u$	$K_C = 0,95 \frac{1}{K_p} \frac{T_g}{T_u}$	$1.35 T_g$	$0.47 T_u$

Megjegyzés: A CHR: Chien, Hrones, Reswick által elvégzett, HPT1 modellt és négyzetes integrál kritériumot alkalmazó analitikus optimalizálás.

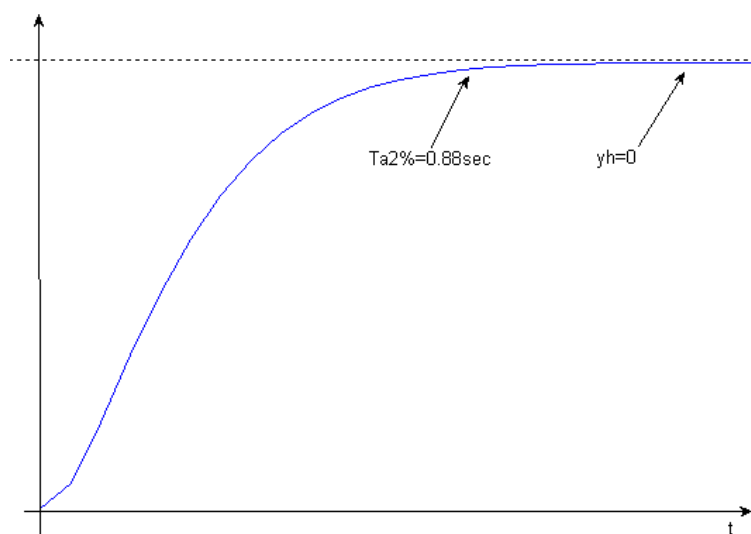
A látszólagos egy tárolás tag időállandójának és a holtidőnek a 8.4-es aránya megengedne PI kompenzáló tagot a 4B.3. táblázatban látható Piwinger ajánlás szerint, de a lehető leggyorsabb beállásra törekszünk.

4B.3. táblázat A Piwinger ajánlás

P	PI	PID	I
$\frac{T_g}{T_u} \geq 50$	$50 \geq \frac{T_g}{T_u} \geq 7.4$	$7.4 \geq \frac{T_g}{T_u} \geq 3.3$	$3.3 \geq \frac{T_g}{T_u}$

Az esettanulmány feladatában a leggyorsabb aperiodikus beállítás és a PID kompenzáció a megfelelő választás.

A 4B.2. táblázat alapján $K_C = 0.3$, $T_I = 1.59$ [sec], $T_u = 0.095$ [sec]. A valós szabályozó PIDT, ezért a DT csatorna egy tárolás tagjának időállandóját nekünk kell megválasztani. Legyen $T = 0.01$ [sec].



4B.10. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvény

A minőségi jellemzők jók. Nincs maradó hiba, az eredő szakasz beállási idejéhez képest a szabályozási idő jelentősen lecsökkent (8.2 másodpercrel 0.88 másodpercre), és nincs túllendülés. Az válaszfüggvény alakjából látszik, hogy lehet próbálkozni a K_C erősítés kismértékű növelésével.

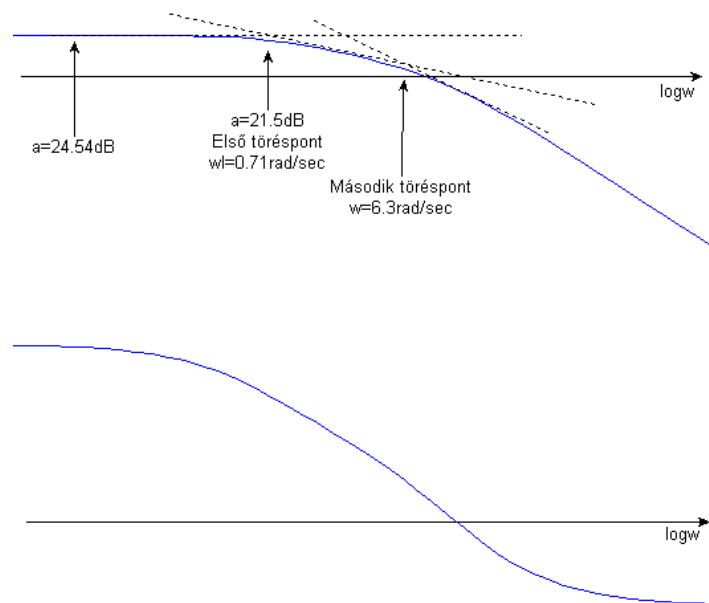
Megjegyzés: A 4B.8. és a 4B.10. ábrák eltérése természetes. Az egyik szürke a másik fekete doboz modell alapján készült.

Kompenzáló tag méretezése az eredő szakasz körfrekvencia függvénye alapján

Az összehasonlíthatóság érdekében ugyanazt az eredő szakaszt vizsgáljuk, mint az előző példában volt, csak feltételezzük, hogy az eredő szakasz körfrekvencia függvénye mérésrel lett meghatározva.

A 4B.11. ábrán a mérésrel meghatározott eredő szakasz körfrekvencia függvénye látható. Az előbbieken már ismertetett megfontolásokból az esettanulmányban PIDT kompenzáló tagot célszerű választani.

Először, ha ez lehetséges, a két legkisebb törésponti körfrekvenciát kell megkeresni. Mivel az eredő szakasz önbeálló, ezért az első törésponti körfrekvencia a kezdeti amplitúdó átvitelhez képest -3 [dB] értékkel kisebb amplitúdó átvitelhez tartozó körfrekvencia lesz. A második törésponti körfrekvencia a -20 [dB/D] és a -40 [dB/D] meredekségű egyenesek metszéspontjánál van (4B.11. ábra).



4B.11. ábra. Az eredő szakasz Bode diagramja

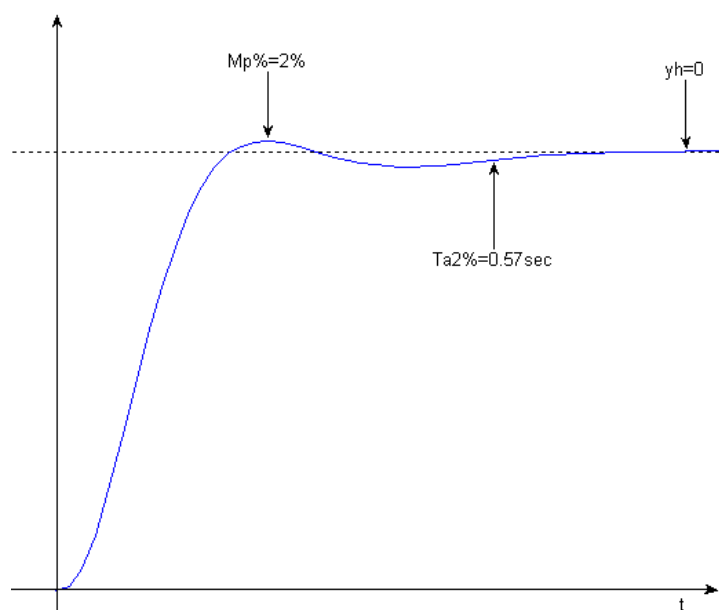
Ha kellően távol van egymástól az eredő szakasz törésponti körfrekvenciái, mint az esettanulmányban, akkor a legkisebb törésponti körfrekvencia reciproka lehet a T_I és a második legkisebb reciproka lehet a T_D . Szokás szerint a T értéke legyen a T_D kilenced része ($A_D = 9$).

Megjegyzés: Ha nem lehet a törésponti körfrekvenciákat meghatározni, akkor nekünk kell megválasztani az ω_D/ω_I arányát és az A_D differenciálási erősítést. A választott értékek megszabják az φ_{max} értéket. Az eredő szakasz Bode diagramján a $ps^\circ = pm^\circ - \varphi_{max}^\circ - 180^\circ$ fázistoláshoz tartozó körfrekvenciát illesztjük a kompenzáló tag $\omega(\varphi_{max})$ pontjához.

Az $\omega(\varphi_{max})$ értéke alapján méretezzük az $\omega_T = \sqrt{A_D + 1} \cdot \omega(\varphi_{max})$ értéket, amiből $T_D = A_D \cdot T$. A T_I/T_D aránya azonos a ω_D/ω_I aránnyal. A mért eredő szakasz és a $K_C=1$ erősítés értékkel méretezett kompenzáló tag Bode diagramjait kell grafikusán összegezni a K_C meghatározásához.

Visszatérve a töréspontok meghatározásán alapuló módszere, a 4B.11. ábra alapján a kompenzáló tag időállandói:

$$T_I = \frac{1}{0.71} = 1.41 \text{ sec}, T_D = \frac{1}{6.3} = 0.159 \text{ sec}, T = \frac{T_D}{A_D} = 0.018 \text{ sec}, K_C = 1. \quad <4B.10.>$$



4B.12. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

A 4B.12. ábra minőségi paraméterei szintén jók.

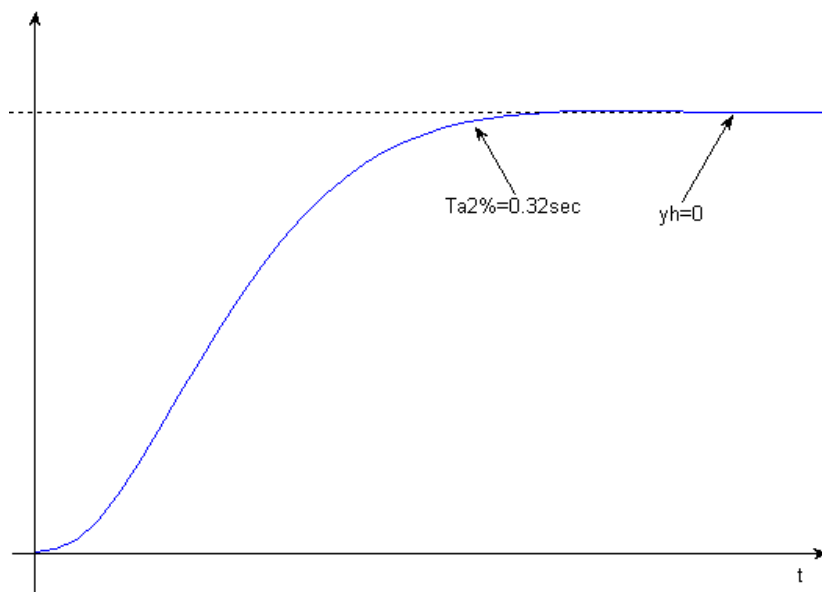
Mind a három méretezési eljárás elfogadható eredményt szolgáltatott. Számítógépes optimumkereséssel lehet a minőségi jellemzőkön javítani.

Az optimumkereséssel kapott kompenzáló tag paraméterek: $T_I = 1.4 \text{ sec.}$, $T_D = 0.13 \text{ sec.}$, és $T = 0.015 \text{ sec.}$, valamint $K_C = 0.6$.

A kompenzáló tag $A_D = 8$ választással:

$$G_C(s) = 0.6 * \left\{ 1 + \frac{1}{1.4s} + \frac{0.13s}{0.015s + 1} \right\} \quad <4B.11.>$$

A 4B.13. ábrán nincs maradó hiba és nincs túllövés, és a szabályozási idő mindössze 0.3sec.



4B.14. ábra. Az optimalizált zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

A maradó szabályozási eltérés meghatározása.

A 4B.4. ábrán látható szabályozási kör állandósult állapotbeli az $e(t)$ hibajele közvetlenül mutatja a maradó szabályozási eltérés mértékét.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \{r(s) \cdot G_{er}(s) + w(s)G_{ew}(s)\} \quad <4B.12.>$$

A 4B.3 és a 4B.4. kifejezések a gerjesztő jelek operátoros értékeit adja meg.

$$r(s) = \frac{5}{s} - \frac{0.125}{s^2}; \quad w(s) = \frac{0.5}{s^2} \quad <4B.13.>$$

A 4B.12. kifejezésben szereplő átviteli függvények:

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}, \quad G_{ew}(s) = \frac{-G_w(s)G_p(s)G_T(s)}{1 + G_0(s)} \quad <4B.14.>$$

A $G_0(s) = G_C(s) G_E(s)$ felnyitott hurok átviteli függvény.

$$G_C(s) = \frac{0.13s^2 + 0.85s + 0.6}{0.021s^2 + 1.4s}; \quad G_E(s) = \frac{22.6}{0.0127s^3 + 0.361s^2 + 2.13s + 1.34} \quad <4B.15.>$$

A felnyitott hurok átviteli függvény polinom tört alakban.

$$G_0(s) = \frac{4.59s^2 + 32s + 22.6}{0.0127s^5 + 0.025s^4 + 0.55s^3 + 3s^2 + 1.88s} \quad <4B.16.>$$

A 4B.12. kifejezést bontsuk két részre:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot r(s) \cdot G_{er}(s) \quad <4B.17.>$$

A hibajel átviteli függvény polinom tört alakban.

$$G_{er}(s) = \frac{0.0127s^5 + 0.025s^4 + 0.55s^3 + 3s^2 + 1.88s}{0.0127s^5 + 0.025s^4 + 0.55s^3 + 7.6s^2 + 33.8s + 22.6} \quad <4B.18.>$$

A kompenzáló tag paramétereinek meghatározásakor már láttuk, hogy az ugrás alakú alapjel változást – a tranziens lezajlása után – hibamentesen követi. Így elegendő a sebességugrás jelösszetevőre vizsgálni az alapjel követési hibát.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0.125}{s^2} \frac{0.0127s^5 + 0.025s^4 + 0.55s^3 + 3s^2 + 1.88s}{0.0127s^5 + 0.025s^4 + 0.55s^3 + 7.6s^2 + 33.8s + 22.6} \quad <4B.19.> \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) &= \frac{0.125 \cdot 1.88}{22.6} = 0.01[V] \end{aligned}$$

Miután az alapjel 10 [V] tartománya felel meg 5 [mm] elmozdulásnak, az eredményül kapott feszültség hiba 0.04 [mm], vagyis 0.1% követési hibának felel meg.

Hasonlóan az értéktartás összetevő:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot w(s) G_{ew}(s)$$

A zavar-hibajel átviteli függvény polinom tört alakban.

$$G_{ew}(s) = \frac{0.0023s^3 + 0.16s^2 + 0.13s}{0.0003s^5 + 0.024s^4 + 0.56s^3 + 6s^2 + 21.2s + 13.6} \quad <4B.19.>$$

Behelyettesítve

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0.5}{s^2} \frac{0.0023s^3 + 0.16s^2 + 0.13s}{0.0003s^5 + 0.024s^4 + 0.56s^3 + 6s^2 + 21.2s + 13.6} \quad <4B.20.> \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) &= \frac{0.5 \cdot 0.13}{13.6} = 0.005[V] \end{aligned}$$

Így a két hibatényező együttesen 0.15% követési hibát eredményez gyors beállási idővel, ami nagyon jó.

Gyakorlati tapasztalatokon alapuló megfontolások.

Egy szabályozott jellemző állandó értéken tartásához, illetve alapértékének megváltoztatásához azonos struktúrájú, de eltérő paraméterkészletű kompenzáló tag az optimális. Általában a különböző munkapontokban történő állandó értéken tartásához is eltérő paraméterkészletű kompenzáló tag az optimális.

Az ipari folyamatszabályozásban vagy gyártásautomatizálásban alkalmazott irányító berendezések PID algoritmusai alapszolgáltatásként lehetővé teszik a kompenzációs paraméterek változtatását. A lökésmentes (bumpless) paraméterváltás érdekében a paraméterkészlet cseréje előtt egy mintavételi idővel fel kell nyitni, és a paraméterkészlet cseréje után egy mintavételi idővel újra zárni kell a szabályozási kört.

A nem tisztán elektronikus rendszerekben a kompenzáló tag K_C erősítése ne legyen húsznál nagyobb, mert a végreható jel már $\pm 5\%$ rendelkező jel esetén valamelyik végértékére kerülhet, ami káros nem linearitásokat generálhat.

A kettéstípusú egyhurkos szabályozási kör érzékeny a paraméterszórásra, és ritkán szolgáltat jó minőségi jellemzőket. Ha a gyors és pontos jelkövetés a cél, akkor többhurkos szabályozási kört érdemes alkalmazni.

Megjegyzés: Általában kaszkádszabályozási kört vagy két kompenzáló tagot (egyet az előre vezető és egyet a visszacsatoló ágba) alkalmaznak.

Ne feledkezzen meg a szabályozó (PID kompenzáló algoritmus) jellegének (direct / reverse) megfelelő beállításáról.

Az analóg kompenzációs technika alkalmazásának alapfeltétele mintavételi idő vagy gyakoriság (sample time or sample rate), hogy a szabályozási kör hibridnek (digitális szabályozó, analóg eredő szakasz) legyen tekinthető.

Megjegyzés: A mintavételi idő és a mintavételi gyakoriság egymás reciprok értékei.

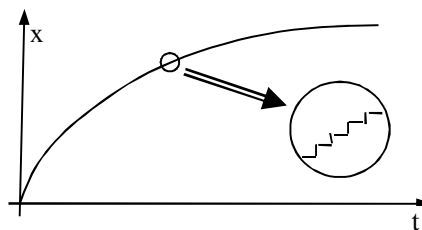
5.A. Melléklet

A differencia egyenletek

A korszerű szabályozó berendezések mikroprocesszor alapúak, ezért T_s időközönként vesznek mintát a bemenetükön és változtatják a kimenetüket.

A kompenzáló algoritmus differencia egyenlet. Az algoritmus futtatásának időigénye T_s holtidőt eredményez (5.25 kifejezés). A differencia egyenletet a kompenzáló tag differenciál egyenletéből állítható elő.

A differencia egyenlet csak kT_s időpontokban ad új értékét. A 5A.1. ábrán kinagyítva látható, hogy a kimenet értékkészlete véges, a jel apró amplitúdó lépcsőkből áll.



5A.1. ábra. A kvantált kimenet

A differenciálhányados definíciója (5A.1 kifejezés) tartalmazza a differencia fogalmát.

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{x\{kT_s\} - x\{(k-1)T_s\}}{T_s} = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \frac{x(k) - x(k-1)}{T_s} \quad <5A.1.>$$

Az elsőfokú differenciálhányados definíciójából levezethető a másodfokú differencia hányados (2A.2. kifejezés).

$$\frac{\frac{x(k) - x(k-1)}{T_s} - \frac{x(k-1) - x(k-2)}{T_s}}{T_s} = \frac{x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)}{T_s^2} \quad <5A.2.>$$

A másodfokú differenciálhányados definíciójából (5A.2 kifejezés) levezethető a harmadfokú differencia hányados. Az eljárás rekurzív folytatásával a negyed, ... n-ed fokú differencia hányadosok sorban meghatározhatók.

Megjegyzés: Pontosabb differencia hányados képezhető három, esetleg még több mintavételi pontból. Ha kellően sűrű a mintavétel, akkor ez érdemben nem javít az ipari kompenzáló algoritmusokon. A szimulációs szoftverek esetén van jelentősége a differencia hányados számítási módjának.

A T_s mintavételi idő megválasztásától függ, hogy hibrid vagy diszkrét rendszer a szabályozási kör. A hibrid rendszer esetén a kompenzáló algoritmus differencia egyenlet, diszkrét rendszer esetén Z transzformált alak.

A P kompenzáló tag és kompenzáló ág differenciál és differencia egyenlete:

$$u(t) = K_C y_M(t); \quad u\{(k+1)T_S\} = K_C y_M(kT_S) \quad <5A.3.a.>$$

Az I kompenzáló tag és kompenzáló ág differenciál és differencia egyenlete:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{T_I} y_M(t), \text{ vagy } u(T) = \frac{1}{T_I} \int_0^T y_M(t) dt$$

$$u\{(k+1)T_S\} = u(kT_S) + \frac{T_S}{T_I} y_M(kT_S); \quad u\{(k+1)T_S\} = \frac{T_S}{T_I} \sum_{i=0}^k y_M(iT_S) \quad <5A.3.b.>$$

A DT kompenzáló ág differenciál és differencia egyenlete:

$$u(t) = K_C T_D \frac{dy_M(t)}{dt} - T \frac{du(t)}{dt};$$

$$u\{(k+1)T_S\} = K_C y_M(kT_S) + K_C \frac{T_D}{T_S} \{y_M(k) - y_M(k-1)\} - \frac{T}{T_S} \{u(k) - u(k-1)\} \quad <5A.3.c.>$$

A PI kompenzáló tag differenciál és differencia egyenlete:

$$u(T) = K_C y_M(t) + \frac{K_C}{T_I} \int_0^T x_M(t) dt;$$

$$u\{(k+1)T_S\} = K_C y_M(kT_S) + K_C \frac{T_S}{T_I} \sum_{i=0}^k y_M(iT_S) \quad <5A.3.d.>$$

A PDT kompenzáló tag differenciál és differencia egyenlete:

$$u(t) = K_C y_M(t) + K_C T_D \frac{dy_M(t)}{dt} - T \frac{du(t)}{dt};$$

$$u\{(k+1)T_S\} = K_C y_M(kT_S) + K_C \frac{T_D}{T_S} \{y_M(k) - y_M(k-1)\} - \frac{T}{T_S} \{u(k) - u(k-1)\} \quad <5A.3.e.>$$

Lévén LTI rendszer a differenciál és a differencia egyenletek a PI kompenzáló tag esetén a P és I kompenzáló ágból és a PDT kompenzáló tag esetén a P és DT kompenzáló ágból lett összerakva, úgy a PIDT kompenzáló tag differenciál és a differencia egyenlete összerakható a P, I, és DT ágak differenciál és a differencia egyenleteiből.

Diszkrét szabályozó $G_C(z)$ kompenzáló algoritmus egyaránt képezhető az 5.3. kifejezések differencia egyenleteiből (ehhez célszerű növekményes alakra áttérni!), vagy a $G_C(s)$ operátoros átviteli függvényből Tustin behelyettesítéssel.