DIGITÁLIS TECHNIKA I

Dr. Lovassy Rita
Dr. Pődör Bálint

Óbudai Egyetem KVK Mikroelektronikai és Technológia Intézet

3. ELŐADÁS: LOGIKAI (BOOLE) FÜGGVÉNYEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

1

2

IRODALOM

Arató Péter: Logikai rendszerek tervezése, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990, Műegyetemi Kiadó 2004, 55013 műegyetemi jegyzet

Zsom Gyula: Digitális technika I és II, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000, (KVK 49-273/I és II)

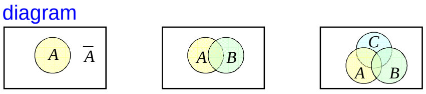
Rőmer Mária: Digitális rendszerek áramkörei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989, (KVK 49-223)

Rőmer Mária: Digitális technika példatár, KKMF 1105, Budapest 1999

Az előadások ezen könyvek megfelelő fejezetein alapulnak.

LOGIKAI VÁLTOZÓK SZEMLÉLTETÉSE

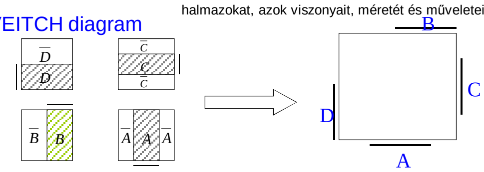
VENN diagram



Grafikus ábrázolás

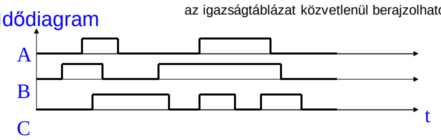
halmazokat, azok viszonyait, méretét és műveleteit szemlélteti

VEITCH diagram



az igazságtáblázat közvetlenül berajzolható

Idődiagram



BOOLE-ALGEBRA AXIÓMÁI

1. Az Boole-algebra **kétértékű** elemek halmazára értelmezett.
2. A halmaz minden elemének létezik a **komplemens**-e is.
3. Műveletek a **konjunkció** (logikai **ÉS**), illetve a **diszjunkció** (logikai **VAGY**).
4. A logikai műveletek: **kommutatív**–ak, **asszociatív**–ak, **disztributív**-ak
5. Kitüntetett elemek az **egység** elem (értéke mindig **1**), és a **null** elem (értéke mindig **0**).

5

LOGIKAI MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

kommutativitás (felcserélhetőség):
$A \bullet B = B \bullet A$
$A + B = B + A$

asszociativitás (csoportosíthatóság):
$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C = A \bullet B \bullet C$
$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

disztributivitás (átrendezhetőség):
$A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$
$A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$

6

LOGIKAI MŰVELETEK ÉS DUALITÁS

Röviden áttekintjük a logikai alapműveletek közötti kapcsolatot melyet a dualitás fejez ki és lényegében a De Morgan tételeken alapul.

A kétargumentumos műveletek közül kettőt-kettőt alapművelet-párokként választhatunk. (Egyiket vagy a másikat, de nem mindkettőt.)
Ezek a művelet-párok a következők:
ÉS (logikai szorzás) — **VAGY** (logikai összeadás: +)
NEM-ÉS (**NAND**) — **NEM-VAGY** (**NOR**)
A műveletpárok egyik tagja a másik un. duális párja.
A duális műveletpárokat De Morgan tételek kapcsolják össze.
A duális művelet-párokkal (és a negációval) kifejezhetjük bármelyik másik műveletet.

LOGIKAI ÁRAMKÖRÖK KIALAKÍTÁSA

Tetszőleges logikai összefüggés, vagy logikai függvény is előállítható a **NEM-ÉS** vagy **NEM-VAGY** alapművelet párokkal. Vagyis tetszőleges logikai áramkör kialakítható csupán **NEM-ÉS**, vagy csupán **NEM-VAGY** kapuk alkalmazásával.
A NAND és az NOR univerzális műveletek.
Elvileg elég csak NAND vagy csak NOR kapukat tartatni, azokból bármilyen logikai áramkör felépíthető.
Gyakorlati jelentőség: az elektronikus erősítők általában invertáló jellegűek (180 fokos fázistolás).
Ezért a gyakorlatban a NEM-ÉS (NAND) és a NEM-VAGY (NOR) a szokásos alapelem.

Végső soron mindez a De Morgan tételeken alapul!

LOGIKAI KIFEJEZÉSEK ALGEBRAI ÁTALKÍTÁSA

A következőkben néhány példával illusztráljuk a logikai függvények algebrai átalakítását.

Hangsúlyozni kell, hogy a logikai algebra műveleti szabályai eltérnek a szokásos algebra szabályaitól!

LOGIKAI ALGEBRAI ÁTALAKÍTÁS (1)

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést

$$Y = AB + A\overline{B} + ABC\overline{D}$$

Az A változó kiemelhető, utána a zárójelben lévő kifejezés fokozatosan egyszerűsíthető

$$Y = A(B + \overline{B} + BC\overline{D}) = A(1 + BC\overline{D}) = A$$

Válasz: $Y = A$

LOGIKAI ALGEBRAI ÁTALAKÍTÁS (2)

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést

$$Y = \overline{ABC} + \overline{A + B + C}$$

Alkalmazzuk a De Morgan azonosságokat!

$$Y = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{A}(1 + \overline{B}\,\overline{C}) + \overline{B} + \overline{C} =$$

$$= \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

LOGIKAI ALGEBRAI ÁTALAKÍTÁS (3)

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést

$$Y = \overline{C}BA + C\overline{B}A + CB\overline{A} + CBA$$

A jobboldalon szereplő CBA tagot kétszer hozzáadva, a logikai kifejezés nem változik meg! Páronként kiemelést végezve

$$Y = AB(C + \overline{C}) + BC(A + \overline{A}) + CA(B + \overline{B}) =$$

$$= AB + BC + CA$$

PÉLDA: LOGIKAI ALGEBRAI ÁTALAKÍTÁS

$$Y(A,B,C) = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$

Megfelelő kiemelésekkel

$$Y(A,B,C) = (\bar{A}B + A(\bar{B} + B))\bar{C} = (\bar{A}B + A)\bar{C}$$

Most alkalmazzuk az X + Y Z = (X +Y) (X + Z) tételt

$$Y(A,B,C) = (A + \bar{A})(A + B)\bar{C} = (A + B)\bar{C} = A\bar{C} + B\bar{C}$$

Látható, hogy többféle ekvivalens algebrai alak létezhet, bármelyik realizálható.
Az utolsó konjunktív / diszjunktív alak a pl. a Karnaugh táblán végzett minimalizálással nyerhető forma.

AZ ALKALMAZOTT TÉTEL: X + Y Z = (X +Y) (X + Z)

Igazolás

$$X + Y Z = (X + Y)(X + Z)$$

$$= X X + X Y + X Z + Y Z$$

$$= X + X Y + X Z + Y Z$$

$$= X (1 + Y + Z) + Y Z$$

$$= X + Y Z \qquad \text{Q. E. D.}$$

LOGIKAI FÜGGVÉNY REALIZÁLÁSA

Mind az eredeti függvény

$$Y(A,B,C) = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$

mind az ún. minimalizált alak

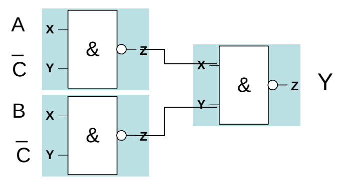
$$Y(A,B,C) = A\bar{C} + B\bar{C}$$

kétszintű, ÉS és VAGY kapus hálózattal illetve a De Morgan szabály szerint NEM-ÉS (NAND) kapus hálózattal realizálható, 12, illetve 6 kapubemenettel.

NAND KAPUS REALIZÁLÁS

A kétszintű NAND kapus realizálás az alábbi átalakításon alapul (De Morgan szabályok!)

$$Y(A,B,C) = A\bar{C} + B\bar{C} = \overline{\overline{(A\bar{C})}\;\overline{(B\bar{C})}}$$



LOGIKAI (BOOLE-) FÜGGVÉNYEK

1. Kétváltozós logikai függvények (összefoglaló)
2. Határozott és nem teljesen határozott logikai függvények és kombinációs hálózatok.
3. Logikai függvények kanonikus algebrai alakjai, diszjunktív és konjunktív normálalakok.

17

LOGIKAI (BOOLE) FÜGGVÉNYEK

A Boole algebra egy- és kétváltozós műveletei egyúttal egy- és kétváltozós függvényeknek is tekinthetők.
A függvény fogalma a változók számának kiterjesztésével általánosítható.
n-változós Boole függvény vagy logikai függvény

$$Z = f(X_1, X_2, ...X_n)$$

A Z függő változó logikai értékét az n db X_i független változó értékei határozzák meg.

18

LOGIKAI FÜGGVÉNYEK ÉS KOMBINÁCIÓS HÁLÓZATOK

Minden egyes logikai függvényhez megadható egy kombinációs hálózat, illetve minden egyes logikai feladathoz és kombinációs hálózathoz tartozik egy logikai függvény.

A logikai függvények segítségével egyértelműen leírható a kombinációs hálózatok működése.

Ezért célszerű, ha a logikai függvények tulajdonságaival részletesebben megismerkedünk.

Egy- és kétváltozós logikai függvények: részletes ismertetés

EGYVÁLTOZÓS LOGIKAI FÜGGVÉNYEK

Egy változó esetén négy különböző logikai függvénykapcsolat állhat fenn.

A	$f_o^1(A)$	$f_1^1(A)$	$f_2^1(A)$	$f_3^1(A)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Az egyes függvényeket f_i^n jelöli. Az i index annak a bináris számnak decimális értéke melyet az oszlopba írt logikai értékek mint bináris számjegyek alkotnak.

Két logikai konstans 0, 1, és két „igazi" függvény A, $\overline{A}$.

KÉTVÁLTOZÓS LOGIKAI FÜGGVÉNYEK

Kétváltozós logikai függvények osztályozása, Boole algebrai alakja és tulajdonságai.

Két változó esetén a bemeneti kombinációk száma $2^2 = 4$, és így a lehetséges kétváltozós függvények száma $2^4 = 16$. Mindegyik függvény a változókra nézve egy-egy műveletet vagy összetett műveletet ír le.

Általános esetben, n változó esetén a bemeneti kombinációk száma $k = 2^n$, és a lehetséges n-változós logikai függvények száma 2^k, rendkívül gyorsan (exponenciálisan) nő.

Hányféle „n" változós Boole függvény van?

A kétargumentumos műveletekből (a triviális eseteket is beleértve)

$$2^{2^2} = 16$$

Ez itt az argumentumok száma

különböző volt.

Az „n" változós függvényekből

$$2^{2^n}$$

különböző van.

n=3 esetén 256
n=4 esetén 65 536
n=5 esetén 4 294 967 296
A függvények száma a változók számával igen gyorsan növekszik

KÉTVÁLTOZÓS LOGIKAI FÜGGVÉNYEK

A B	f_o^2	f_1^2	f_2^2.....	f_8^2	f_{14}^2	f_{15}^2
0 0	0	1	0	0	0	1
0 1	0	0	1	0	1	1
1 0	0	0	0	0	1	1
1 1	0	0	0	1	1	1

Az egyes függvényeket f_i^n jelöli. Az i index annak a bináris számnak decimális értéke melyet az oszlopba írt logikai értékek mint bináris számjegyek alkotnak, a legfelsőt tekintve a legkisebb helyértéknek.

Ld. Rőmer 9. old.,illetve Zsom (I) 71. old.

MEGJEGYZÉS A JELÖLÉSEKRŐL

Az előírt jegyzetek (Zsom illetve Rőmer féle) azt a jelölést alkalmazzák, mikor az i index annak a bináris számnak decimális értéke melyet az oszlopba írt logikai értékek mint bináris számjegyek alkotnak, a legfelsőt tekintve a legkisebb helyértéknek.

Lehet ennek fordítottját is használni (a legalsó a legkisebb helyérték), ezt használja pl. az Arató-féle könyv (Műegyetem), illetve az említett web-es anyag (BMF Székesfehérvár).

LOGIKAI ÁLLANDÓK

A B	f_o^2	f_1^2	f_2^2....	f_{14}^2	f_{15}^2
0 0	0	1	0	0	1
0 1	0	0	1	1	1
1 0	0	0	0	1	1
1 1	0	0	0	1	1

Az egymást 15-re kiegészítő indexű függvények egymás negáltjai.

f_o^2 null-függvény, változó értékétől függetlenül mindig 0 értékű.
f_{15}^2 egység-függvény, változó értékétől függetlenül mindig 1 értékű.
Lényegében logikai konstansokról van szó.

25

EGYARGUMENTUMOS FÜGGVÉNYEK

A táblázatból f_{12}^2 (A,B) = A

f_3^2 (A,B) = $\overline{A}$

f_{10}^2 (A,B) = B

f_5^2 (A,B) = $\overline{B}$

Ezek nem valódi (kétváltozós) függvények, az egyes változók ponált vagy negált értékeit állítják elő. Lényegében egyargumentumos függvények.
Az i és 15-i indexű függvények egymás negáltjai.

26

KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

A B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	ÉS		A		B		VAGY	VAGY-NEM		$\overline{B}$		$\overline{A}$		ÉS-NEM	1

Egyargumentumos
Egyargumentumos
Logikai konstansok

27

LOGIC FUNCTIONS: AND, OR, NAND, NOR

A B	f_1^2	f_7^2.....	f_8^2	f_{14}^2
0 0	1	1	0	0
0 1	0	1	0	1
1 0	0	1	0	1
1 1	0	0	1	1

$\overline{A+B}$	$\overline{AB}$	AB	A+B
NOR	NAND	AND	OR
NEM-VAGY	NEM-ÉS	ÉS	VAGY

28

KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK: ANTIVALENCIA, EKVIVALENCIA

Függvény neve	f(A,B)
Logikai konstansok	0, 1
Egyváltozós függvények	A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$
AND, OR, NAND, NOR	A•B, A+B, $\overline{A \bullet B}$, $\overline{A+B}$
XOR (A⊕B), XNOR (A⊙B)	$\overline{A}$ B+A $\overline{B}$, $\overline{A}\,\overline{B}$+A B
INHIBÍCIÓ (TILTÁS)	A ⊃ B, B ⊃ A
IMPLIKÁCIÓ (KÖVETKEZTETÉS)	A → B, B → A

29

ANTIVALENCIA ÉS EKVIVALENCIA

Antivalencia (más neve kizáró vagy)

XOR (A ⊕ B),

Ekvivalencia

XNOR (A ⊙ B)

Angolul: antivalency (exclusive-or)
equivalency vagy coincidence

30

ANTIVALENCIA (XOR)
XNOR EKVIVALENCIA (XNOR)

A B	f_6^2	f_9^2
0 0	0	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

A két függvény egymás ellentettje (negáltja)

$A \oplus B = \overline{A \odot B}$

XOR $f_6^2 = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$,

XNOR $f_9^2 = A \odot B = \bar{A}\bar{B} + AB$

31

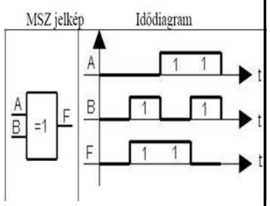
ANTIVALENCIA, EXCLUSIVE-OR

A B	f_6^2
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

$f_6^2 = \bar{A}B + A\bar{B}$

szokásos jelölése:

$f_6^2 = A \oplus B$



ANTIVALENCIA más néven KIZÁRÓ-VAGY (EXCLUSIVE-OR XOR), a függvény akkor 1, ha vagy az egyik, vagy a másik változó 1, és 0, ha mindkét változó egyszerre 0 vagy 1.

32

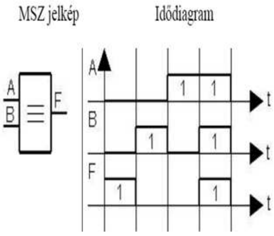
EKVIVALENCIA, EXCLUSIVE-NOR

A B	f_9^2
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

$f_9^2 = AB + \bar{A}\bar{B}$

szokásos jelölése:

$f_9^2 = A \odot B$



EKVIVALENCIA (EXCLUSIVE-NOR, XNOR), a függvény akkor 1, ha mindkét változó egyszerre 0 vagy 1, és akkor 0 ha az egyik, vagy a másik változó 1.

33

ANTIVALENCIA

A B	f_6^2
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Az igazságtáblázat szerint a $f_6^2 = A \oplus B$ művelet egyben megvalósítja a két bites maradéknélküli bináris összeadás aritmetikai műveletét ("fél összeadó").

Az antivalencia kapu felfogható egy-bites "digitális komparátor"-nak is, ha a bemenetére érkező két bit azonos értékű, a kimeneten 0 jelet ad, ha eltérő, akkor 1-et.

34

EXCLUSIVE-OR, ANTIVALENCIA

$A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$,

⇒ Az XOR megvalósítja két bit átvitel nélküli összeadását (fél-összeadó).

⇒ Funkcionál mint vezérelt inverter (vezérlőjel: A, feldolgozandó jel: B).

⇒ Funkcionál mint "páratlanság-vizsgáló": ha páratlan számú bemeneten van 1, akkor a kimenet 1, ellenkező esetben 0. Itt már implikáltuk az XOR kiterjesztését több bemenetre (értelmezés az MSz szerint, részletes magyarázat Zsom I, 76-77 old.!)

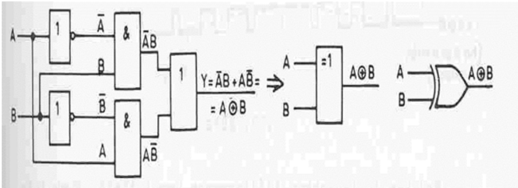
35

KIZÁRÓ-VAGY

Az EXCLUSIVE-OR megvalósítása történhet a definiáló Boole algebrai egyenlet alapján NEM, ÉS és VAGY kapukkal, vagy megfelelő átalakítás után NAND kapukkal mint univerzális elemmel.
Az TTL és CMOS áramköri családokban van külön kész EXCLUSIVE-OR kapu is.

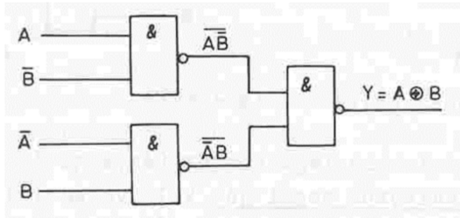
36

EXCLUSIVE-OR NEM, ÉS, VAGY KAPUS MEGVALÓSÍTÁSA



37

EXCLUSIVE-OR (ANTIVALENCIA) NAND KAPUS MEGVALÓSÍTÁSA



$A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B} = (\overline{\bar{A}B}) \bullet (\overline{A\bar{B}})$

Itt feltételezzük, hogy a negált változók rendelkezésre állnak.

38

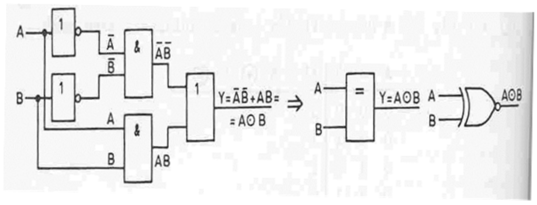
EXCLUSIVE-NOR: EKVIVALENCIA

$A \odot B = \bar{A}\bar{B} + AB$

Az igazságtáblázat szerint az XNOR az XOR negáltja.
Több változóra való kiterjesztéskor az XNOR függvénynek többféle értelmezése is előfordul!
Pl. az MSZ szerint három változó esetén a függvény értéke csak a 0 0 0 és az 1 1 1 bemeneti kombinációkra 1, az összes többire 0. A másik szokásos értelmezés esetén a függvény értéke akkor 1, ha a változók között páros számú 1 van.

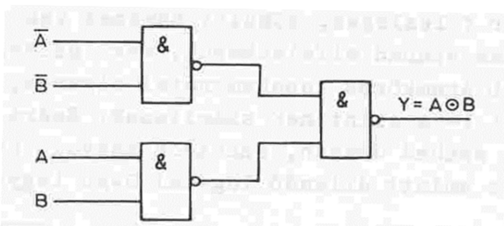
39

EKVIVALENCIA (XNOR) NEM, ÉS, VAGY KAPUS MEGVALÓSÍTÁSA



40

EXCLUSIVE-NOR (EKVIVALENCIA) NAND KAPUS MEGVALÓSÍTÁSA

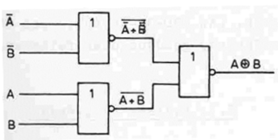


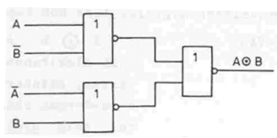
A NAND kapus realizálás a De Morgan azonosságok felhasználásával végzett átalakítások eredménye.

41

NOR KAPUS REALIZÁLÁSOK

Természetesen mind az ANTIVALENCIA (XOR) mind az EKVIVALENCIA (XNOR) megvalósítható kizárólag NOR kapuk felhasználásával.





42

INHIBÍCIÓ (TILTÁS)
IMPLIKÁCIÓ (KÖVETKEZTETLÉS)

Ezt a négy függvényt illetve műveletet itt csak megemlítjük, bővebb anyag a jegyzetekben található. Szerepük inkább a formális logikában van.

A négy függvény:

$A \supset B$	A TILTJA B-T
$B \supset A$	B TILTJA A-T
$A \rightarrow B$	HA A AKKOR B IS
$B \rightarrow A$	HA B AKKOR A IS

43

INHIBÍCIÓ, TILTÁS

A	B	f_2^2	f_4^2
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

A TILTJA B-T $f_2^2 = A \supset B = \overline{A}\,B$

B TILTJA A-T $f_4^2 = B \supset A = A\,\overline{B}$

44

IMPLIKÁCIÓ, KÖVETKEZTETÉS

A	B	f_{11}^2	f_{13}^2
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

HA A AKKOR B IS $f_{11}^2 = A \rightarrow B = \overline{A} + B$

HA B AKKOR A IS $f_{13}^2 = B \rightarrow A = A + \overline{B}$

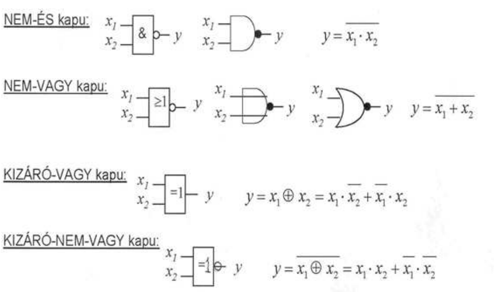
45

LOGIKAI KAPUK RAJZJELEI

Ugyanazon logikai funkció illetve logikai kapu jelölésére az irodalomban, mint pl. könyvek, folyóiratok, tervrajzok, gyártó- és kereskedelmi cégek alkalmazási segédletei és katalógusai, stb., (sajnos) többféle jelölési rendszer, és ennek megfelelően többféle szabvány létezik.

Az MSZ 9200/33-73 szám alatt rögzíti a kötelező előírásokat kétállapotú (bináris) logikai elemek rajzjeleire vonatkozóan.

TOVÁBBI RAJZJELEK



REALIZÁLÁS KAPUKKAL

MSZ USA jelkép

• Negáció

$\overline{A}$

A	F
0	1
1	0

•ÉS (AND)

$A \cdot B$

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

•VAGY (OR)

$A + B$

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

•EKVIVALENCIA

$A \otimes B = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1