

# **INTERPOLASI**

**BAB  
5**

# INTERPOLASI

- Interpolasi adalah teknik mencari harga suatu fungsi pada suatu titik diantara 2 titik yang nilai fungsi pada ke-2 titik tersebut sudah diketahui
- Cara menentukan harga fungsi  $f$  dititik  $x^* \in [x_0, x_n]$  dengan menggunakan informasi dari seluruh atau sebagian titik-titik yang diketahui ( $x_0, x_1, \dots, x_n$ )

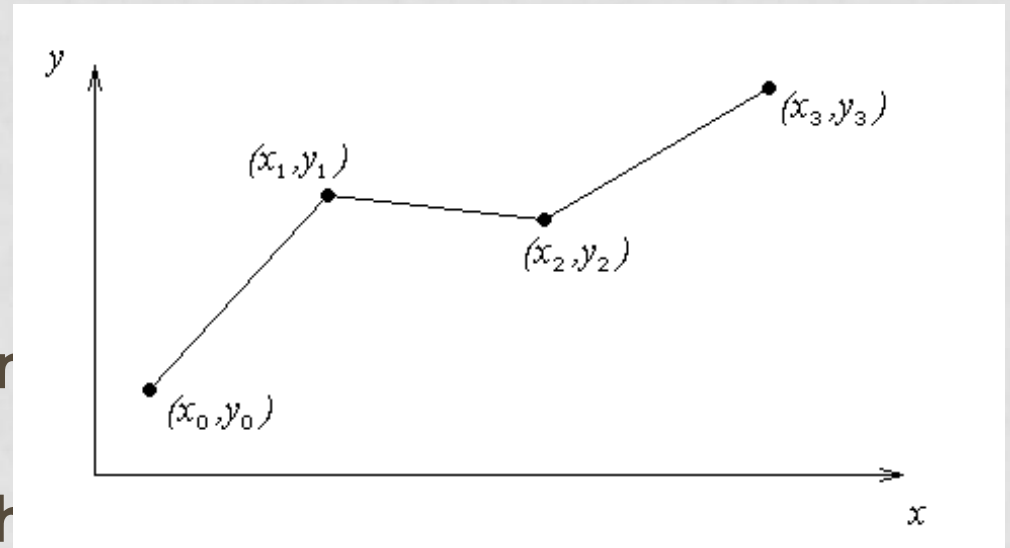
$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	.....	$x_n$
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.....	$f(x_n)$

# TEKNIK UMUM YANG DIGUNAKAN

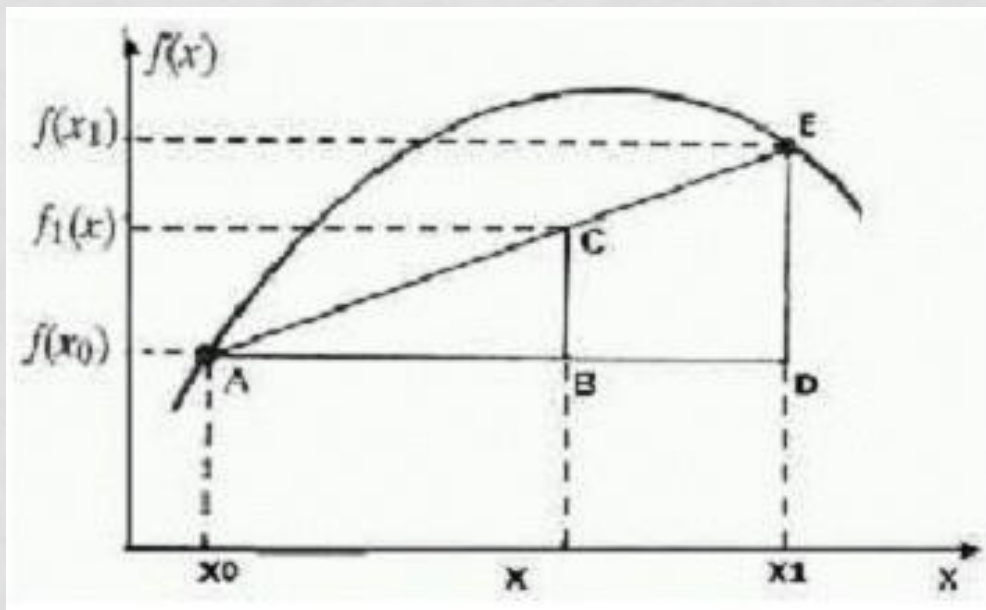
- (i) Membentuk polinomial berderajat  $\leq n$  yg mempunyai harga fungsi di titik-titik yang diketahui → **Polinomial Interpolasi**
- (ii) Masukkan titik yang ingin dicari harga fungsinya ke dalam polinomial interpolasi

# INTERPOLASI LINIER

- ide dasar : pada saat data dalam bentuk tabel tidak begitu bervariasi, sehingga memungkinkan untuk dilakukan pendekatan dengan menggunakan sebuah garis lurus di antara dua titik yang berdekatan.



# INTERPOLASI LINIER



$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

atau

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

sehingga

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot (x - x_0)$$

# CONTOH :

- Jarak yang dibutuhkan sebuah kendaraan untuk berhenti adalah fungsi kecepatan. Data percobaan berikut ini menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak yang dibutuhkan untuk menghentikan kendaraan.

Kecepatan (mil/jam)	10	20	30	40	50	60	70
Jarak henti (feet)	12	21	46	65	90	111	148

- Perkirakan jarak henti yang dibutuhkan bagi sebuah kendaraan yang melaju dengan kecepatan 45 mil/jam.

## CONTOH :

- maka untuk mencari nilai  $x=45$  maka,

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{90 - 65}{50 - 40}(45 - 40)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{25}{10}(5) = 65 + 12.5 = 77.5 \text{ feet}$$

# EXAMPLE

The upward velocity of a rocket is given as a function of time in Table 1. Find the velocity at  $t=16$  seconds using linear splines.

t	v(t)
s	m/s
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Table : Velocity as a function of time

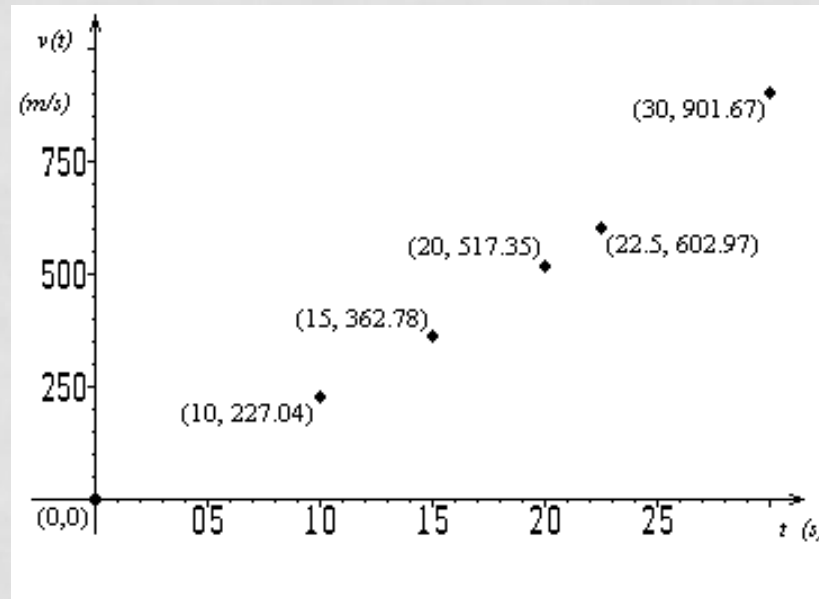


Figure : Velocity vs. time data for the rocket example





# LINEAR INTERPOLATION

$$t_0 = 15, \quad v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20, \quad v(t_1) = 517.35$$

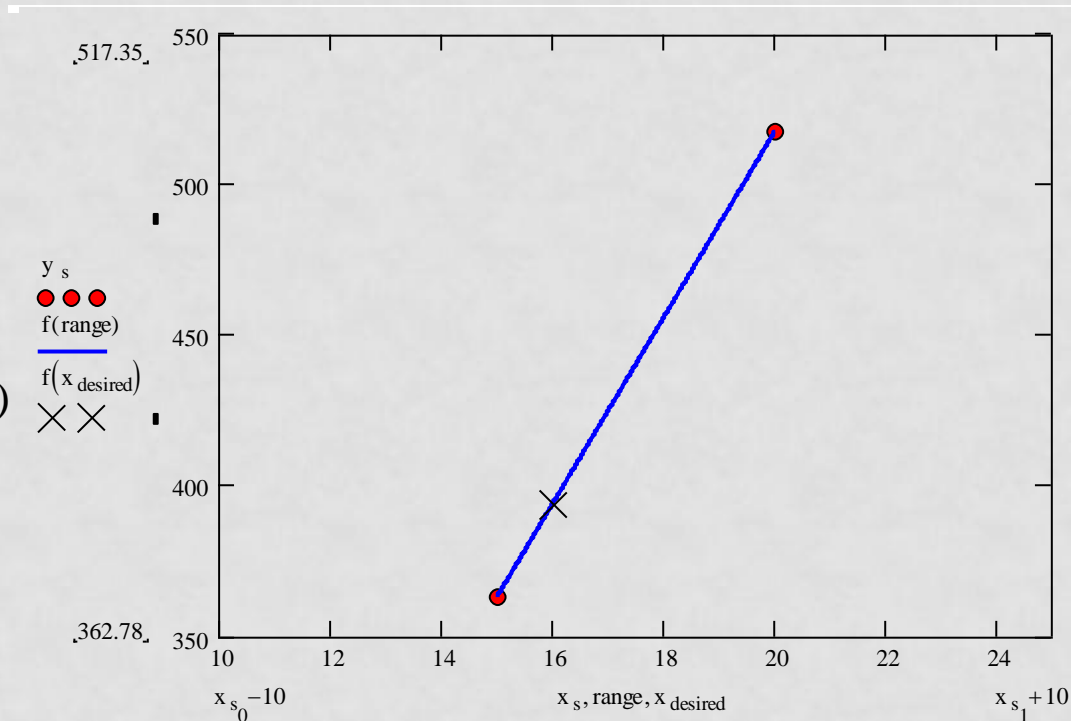
$$\begin{aligned} v(t) &= v(t_0) + \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} (t - t_0) \\ &= 362.78 + \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15} (t - 15) \end{aligned}$$

$$v(t) = 362.78 + 30.913(t - 15)$$

At  $t = 16$ ,

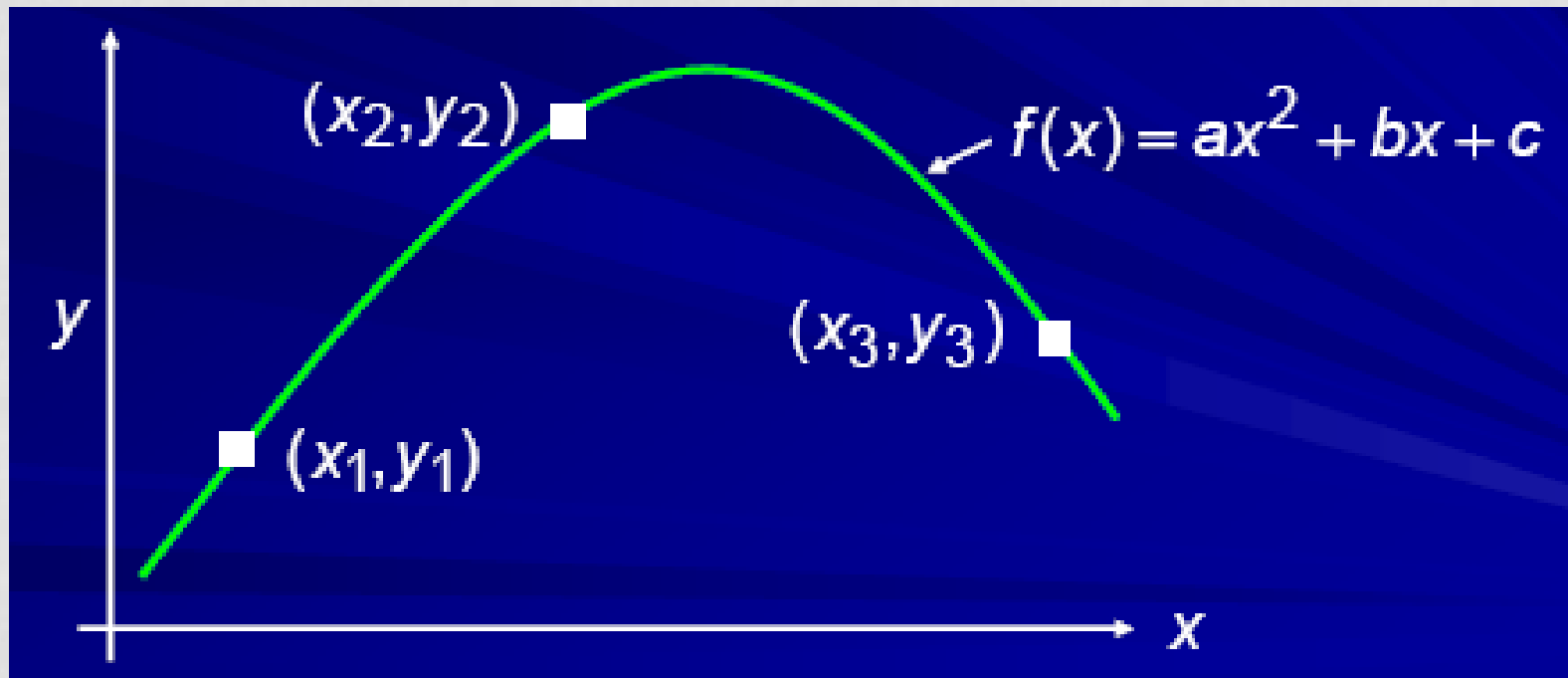
$$v(16) = 362.78 + 30.913(16 - 15)$$

$$= 393.7 \text{ m/s}$$



# INTERPOLASI KUADRAT

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$



# INTERPOLASI KUADRAT

- Titik-titik data  $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$   $(x_3, y_3)$

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2$$

$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3$$

- Hitung  $a$ ,  $b$  dan  $c$  dari sistem persamaan tersebut dengan Metode Eliminasi Gauss

# CONTOH :

- Diberikan titik  $\ln(8) = 2.0794$ ,  $\ln(9) = 2.1972$ ,  $\ln(9.5) = 2.2513$ . Tentukan nilai  $\ln(9.2)$  dengan interpolasi kuadrat
- Sistem Pers Linier yang terbentuk.
  - $64 a + 8 b + c = 2.0794$
  - $81 a + 9 b + c = 2.1972$
  - $90.25 a + 9.5 b + c = 2.2513$
- Penyelesaian  $a = -0.0064$   $b = 0.2266$   
 $c = 0.6762$
- Sehingga  $p_2(9.2) = 2.2192$

# POLINOM NEWTON

- Persamaan Polinom Linier

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

- Bentuk pers ini dapat ditulis :

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

- Yang dalam hal ini  $a_0 = y_0 = f(x_0)$  (1)

- Dan  $a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$  (2)

- Pers ini mrpk bentuk selish terbagi (divided-difference)

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

# POLINOM NEWTON

- Polinom kuadratik

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Atau

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Dari pers ini menunjukkan bahwa  $p_2(x)$  dapat dibentuk dari pers sebelumnya  $p_1(x)$ . Nilai  $a_2$  dapat ditemukan dengan mengganti  $x=x_2$  untuk mendapatkan

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (3)$$

- Nilai  $a_0$  dan  $a_1$  pada pers 1 dan 2 dimasukkan pada pers 3

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

# POLINOM NEWTON

- Dengan melakukan utak-atik aljabar, pers ini lebih disukai

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

# POLINOM NEWTON

- Jadi tahapan pembentukan polinom Newton :

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$



# POLINOM NEWTON

- Nilai konstanta  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , merupakan nilai selisih terbagi ,  
dg nilai

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

- Yang dalam hal ini

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

# POLINOM NEWTON

- Dengan demikian polinom Newton dapat ditulis dalam hub rekursif sebagai :

- Rekurens

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

- basis  $p_0(x) = f(x_0)$

- Atau dalam bentuk polinom yang lengkap

sbp :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

## CONTOH SOAL :

- Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri  $f(x)=\cos(x)$  dalam range  $[0.0, 4]$  dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu taksirlah  $f(x)$  dengan  $x=2.5$  dengan Polinom Newton derajat 3.

$x_i$	$y_i$	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
0.0	1	-0.4597	-0.2484	0.1466	-0.0147
1.0	0.5403	-0.9564	0.1913	0.0880	
2.0	-0.4161	-0.5739	0.4551		
3.0	-0.99	0.3363			
4.0	-0.6536				

## CONTOH SOAL :

- Contoh cara menghitung nilai selisih terbagi pada tabel :

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0.5403 - 1}{1 - 0} = -0.4597$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{-0.4161 - 0.5403}{2 - 1} = -0.9564$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)} = \frac{-0.9564 + 0.4597}{2 - 0} = -0.2484$$

## CONTOH SOAL :

- Maka polinom Newton derajat 1,2 dan 3 dengan  $x_0 = 0$  sebagai titik pertama :

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0)$$

$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0)$$

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) + 0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)$$

$$\cos(x) \approx p_4(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) + 0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0) - 0.0147(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0)$$

- Nilai sejati  $f(2.5)$  adalah
  - $F(2.5) = \cos(2.5) = -0.8011$