设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布随机变量序列，且服从参数为 $\theta\ (\theta>0)$ 的指数分布. 则下列不正确的是______

A. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\theta\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n\theta}{\sqrt{n}\ \theta} \le x\right\} = \Phi(x)$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta}} \le x\right\} = \Phi(x)$

D. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - \theta}{\sqrt{n\theta}} \le x\right\} = \Phi(x)$

此题一看选项知道考的是中心极限定理.

$\because X_i \sim Exp(\theta)$. $\therefore E(X_i) = \dfrac{1}{\theta}$ $D(X_i) = \dfrac{1}{\theta^2}$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \overset{\cdot}{\sim} N\left(\dfrac{n}{\theta}, \dfrac{n}{\theta^2}\right)$

标准化

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - \frac{n}{\theta}}{\sqrt{n}/\theta} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1).$$

$$= \frac{\theta\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n}{\sqrt{n}}$$

$\therefore$ A 对. 其他错.

设A、B、C为三个独立的随机事件，$0<P(C)<1$，则下列选项中独立的是______

A. $A-B$与C　　B. $\overline{A\cup B}$与C　　C. $\overline{AB}$与$\bar{C}$

D. AC与$\bar{C}$

若A、B、C相互独立，则它们的交、并、补与其它的只要不重叠都相互独立.

具体地：

A：
$$P[(A-B)C]=P(A\bar{B}C)=P(A)P(\bar{B})P(C)$$
$$=P(A)(1-P(B))P(C)$$
$$=[P(A)-P(A)P(B)]P(C)$$
$$=[P(A)-P(AB)]P(C)$$
$$=P(A-B)P(C)\quad ✓$$

B：
$$P(\overline{A\cup B}C)=\cancel{P(\overline{A\cup B})}\,P(\bar{A}\bar{B}C)=P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$$
$$=(1-P(A))(1-P(B))P(C)$$
$$=[1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)]P(C)$$
$$=[1-P(A)-P(B)+P(AB)]P(C)$$
$$=(1-P(A\cup B))P(C)$$
$$=P(\overline{A\cup B})P(C)\quad ✓$$

此题为什么需要$0<P(C)<1$

∵ 0概率事件与1概率事件与任意事件独立.

C：
$$P(\overline{AB}\,\bar{C})=P(\overline{AB\cup C})=1-P(AB\cup C)=1-P(AB)-P(C)+P(ABC)$$
$$=1-P(AB)-P(C)+P(A)P(C)P(B)=1-P(AB)-P(C)+P(C)P(AB)$$
$$=1-P(AB)\div P(C)(1-P(AB))$$
$$=(1-P(AB))(1-P(C))$$
$$=P(\overline{AB})P(\bar{C})\quad ✓$$

D：$P(AC\bar{C})=0$　　$P(AC)=P(A)P(C)$　　$P(\bar{C})=1-P(C)$　　× 23

一仪器同时收到50个信号U_i，$i=1,2,\cdots,50$. 设U_i独立且都服从$(0,10)$内的均匀分布，则$P\{\sum_{i=1}^{50}U_i>300\}\approx$ ____

A. 0.0071　　B. 0.0093　　C. 0.0710　　D. 0.0082.

此题中心极限定理

$\because U_i \sim U(0,10)$　$\therefore E(U_i)=5$　$D(U_i)=\frac{25}{3}$

$\sum_{i=1}^{50}U_i \overset{\sim}{\sim} N(250, \frac{50\times25}{3})$

$$P(\sum_{i=1}^{50}U_i>300)=1-F(300)=1-\Phi(\frac{300-250}{\frac{25}{3}\sqrt{6}})$$

$$=1-\Phi(\sqrt{6})=1-\Phi(2.45)=1-0.9929=0.0071$$

此题需要查表，一般考试会只用写到Φ的形式！

$X \sim f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ ，$x\in\mathbb{R}$ ，则 $D(X)=$ ____ .

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{2}e^{-|x|}dx \xlongequal[\text{关于原点对称}]{\text{奇函数}} 0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$$=\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty} x^2de^{-x}$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} -x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx^2$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot 2x\,dx.$$

$$=-\int_0^{+\infty}2x\,de^{-x}$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} -2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}d2x$$

$$=2e^{-x}\Big|_{+\infty}^{0}=2$$

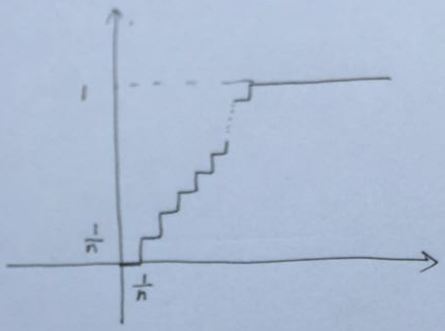
$$\therefore D(X)=E(X^2)-(EX)^2=2$$

事实上，此题积分是 Γ 函数 $\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}dx.$

$$\Gamma(p+1)=p!$$

此处 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=\Gamma(3)=2!=2$

连续型随机变量，分布函数连续；反之，未必！



F(x)处处连续处处不可导！

X与Y同分布，下与然以 2X与X+Y也是同分布（X）

如

X	0	1
P	1/2	1/2

Y	0	1
P	1/2	1/2

则

2X	0	2
P	1/2	1/2

本质：一元函数分布

但 X+Y 分布求解不了.

进一步，若同分布且独立.

则

X\Y	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

∴

X+Y	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

二元函数分布.

$X_1, \cdots, X_n \swarrow X \sim N(0, \sigma^2)$ 独立.

$Y_1, \cdots, Y_n \swarrow Y \sim N(u, \sigma^2)$

若 $\dfrac{k(\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} \sim F$，自由度 $\underline{1, n-1}$，$k = \underline{n(n-1)}$

$$\bar{X} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\left(\frac{\bar{X} - 0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2_1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$ （第4个公式）.

$$\frac{\dfrac{(\bar{X})^2}{\cancel{\sigma^2}/n}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{(n-1)\cancel{\sigma^2}}} = \frac{n(n-1)(\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} \sim F_{1, n-1}$$

设二维r.v. (X,Y) 的 $F(x,y)$ 已知.

则 $P\{x_1 \leq X \leq x_2, Y < y\}$

此题与标准型对照，哪儿不一样，哪儿改为极限(左

具体直播资料中有.

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2 , Y < y\}$$

$<$ $\quad$ $\leq$

$$= F(x_2, y-0) - F(x_1-0, y-0).$$

设 $P(\bar{A})=0.3 \quad P(B)=0.4 \quad P(A|\bar{B})=0.5$，则 $P(B|A)=?$

$1-P(\bar{A})$

$$\because \quad P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=0.5$$

$$\therefore \quad \frac{0.7-P(AB)}{0.6}=0.5 \Rightarrow P(AB)=0.4$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.7}=\frac{4}{7}$$

一个复杂系统由n个相互独立的部件组成．每个部件的可靠性（即在一定时间内无故障的概率）为0.9．且必须有超过80%部件工作才能使整个系统正常工作．问n至少为多少才能使系统的可靠性为0.95？

解：设X为n个部件中无故障的个数，则

$$X \sim B(n,\ 0.9) \overset{\cdot}{\sim} N(0.9n,\ 0.09n)$$

$$P\left\{\frac{X}{n} > 0.8\right\} = 0.95$$

$$P\{X > 0.8n\} = 0.95$$

即 $$1 - F(0.8n) = 1 - \Phi\left(\frac{0.8n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0.95$$

$$\frac{\sqrt{n}}{3} = 1.645$$

$$n = 25$$

设 $X_1,\cdots,X_m$ 是 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$　$Y_1,\cdots,Y_n$ 是 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$

其中σ^2未知，且两个总体相互独立。　假设检验.

$H_0: 2\mu_1 \geq \mu_2$　　$H_1: 2\mu_1 < \mu_2$.

试给出上述检验的检验统计量及拒绝域。显著性水平为α.

$$2\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(2\mu_1-\mu_2, \left(\frac{4}{m}+\frac{1}{n}\right)\sigma^2\right).$$

$$\frac{(2\bar{X}-\bar{Y})-(2\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{4}{m}+\frac{1}{n}}\,\sigma} \sim N(0,1)$$

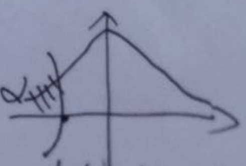
$$\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m+n-2}$$

$$\frac{\dfrac{(2\bar{X}-\bar{Y})-(2\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{4}{m}+\frac{1}{n}}\,\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{(m+n-2)\sigma^2}}} = \frac{(2\bar{X}-\bar{Y})-(2\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{4}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}$$

$\because$ $H_0: 2\mu_1 \geq \mu_2$　　$H_1: 2\mu_1 < \mu_2$

在H_0为真时，检验统计量为 $T = \dfrac{2\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{4}{m}+\frac{1}{n}}}$

拒绝域为 $\left\{T < -t_{m+n-2}^{(\alpha)}\right\}$



$t_{m+n-2}^{(1-\alpha)} = -t_{m+n-2}^{(\alpha)}$

X 服从对数正态分布.

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\begin{cases}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}x^{-1}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & ; x>0\\ 0 & ; x\le 0\end{cases}$$

求矩估计与最大似然估计.

① 矩估计

$$\begin{cases}\bar{X}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal[x=e^{\mu+\sigma t}]{令\ \frac{\ln x-\mu}{\sigma}=t} \int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}}dt=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\\ \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\end{cases}$$

$$\xlongequal{令\ \frac{\ln x-\mu}{\sigma}=t} e^{2\mu+2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-2\sigma)^2}{2}}dt=e^{2\mu+2\sigma^2}$$

$$\begin{cases}\mu+\frac{\sigma^2}{2}=\ln\bar{X}\\ 2\mu+2\sigma^2=\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\right)\end{cases}\quad 解得\quad\begin{cases}\hat{\mu}=2\ln\bar{X}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\right)\\ \hat{\sigma}^2=\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\right)-2\ln\bar{X}\end{cases}$$

② 最大似然估计.

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_i}e^{-\frac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\frac{1}{x_1\cdots x_n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

设 $l(\mu,\sigma^2)=\ln L(\mu,\sigma^2)=\ln\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}+\ln\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}+\ln\frac{1}{x_1\cdots x_n}+\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$

$$\begin{cases}\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\frac{2\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)}{2\sigma^2}=\frac{2}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\mu\right)=0\Rightarrow\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\\ \frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=\frac{-\frac{n}{2}}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0\Rightarrow\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}\right)^2}{n}\end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2$ 比大小.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + nc^2 - 2c\sum_{i=1}^{n}x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + nc^2 - 2n\bar{x}c$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2$$

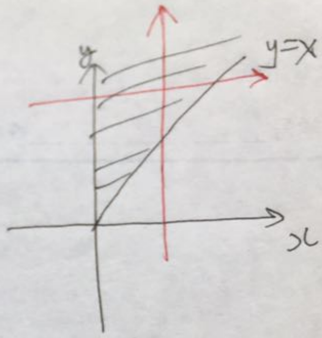
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + nc^2 - 2n\bar{x}c\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

$$= nc^2 + n\bar{x} - 2n\bar{x}c$$
$$= n(c^2 + \bar{x} - 2\bar{x}c)$$
$$= n(c-\bar{x})^2 \geq 0.$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

事实上，直觉所有样本中，与距离 $\bar{x}$ 的偏离程度最小.

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其他 \end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y}\,dy=e^{-x}; & x>0 \\ 0; & 其他 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases} \int_0^{y} e^{-y}\,dx=ye^{-y}; & \boxed{y>0} \\ 0; & 其他 \end{cases}$$

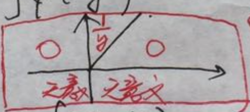
Y的边缘概率只与y有关.

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

此处 $Y=y$ 相当于常数

而 $X=x$ 是变量（依赖于常数y）

$\boxed{当\ Y=y>0\ 时}$



$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{\boxed{ye^{-y}}}=\begin{cases} \frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y}; & \boxed{0<x<y} \\ 0; & 其他 \end{cases}$$

当 $\boxed{Y=y\ 取其他值时}$，$f_{X|Y}(y|y)$ 无意义！

类似地：$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

此处 $X=x$ 相当于常数

而 $Y=y$ 是变量（依赖于常数x）

当 $\boxed{X=x>0\ 时}$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{e^{-x}}=\begin{cases} \frac{e^{-y}}{e^{-x}}=e^{x-y}; & \boxed{y>x} \\ 0; & 其他 \end{cases}$$

当 $\boxed{X=x\ 取其他值时}$，$f_{Y|X}(y|x)$ 无意义！

设 $X_i \cdots$ 独立且 $\sim Exp(1)$ 记 $Y_i = X_{2i} + X_{2i-1}$, $i=1,2,\cdots$

$X_i \sim Exp(1)$ $E(X_i)=1$ $DX_i=1$

$EY_i=2$ $DY_i=2$

则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \xrightarrow{P}$ 方法一 $\underline{E(Y_i^2)=(E}Y_i)^2+DY_i=2^2+2=6$

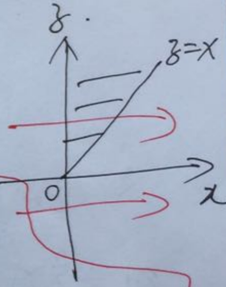
方法二

这里就需要解决. $X\sim Exp(1)$, $Y\sim Exp(1)$ 独立.

$$Z=X+Y\sim\ ?$$

利用卷积公式.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,dx.$$



方法三:

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \xrightarrow{P} E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right]$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}+X_{2i-1})^2$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}^2+X_{2i-1}^2+2X_{2i}X_{2i-1})$

$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{2i-1}\right]$

$= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{2n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{2i-1}\right]$

$EX_i=1$, $EX_i^2=2$ $= \frac{1}{n}[2\times 2n + 2\times n]$

$= 6$

其中 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}; & x>0 \\ 0; & x\le 0 \end{cases}$

$f_Y(z-x)=\begin{cases} e^{x-z}; & z-x>0 \Longrightarrow z>x. \\ 0; & z-x\le 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \int_0^z e^{-z}dx = ze^{-z}; & z>0 \\ 0; & z\le 0 \end{cases}$$

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z)\,dz=\int_0^{+\infty} z^3 e^{-z}\,dz \xlongequal{\text{分部积分}}$$

事实上, $\int_0^{+\infty} z^3 e^{-z}dz$ $-\int_0^{+\infty} z^3 de^{-z} = z^3e^{-z}\Big|_{+\infty}^{0} - \int_{+\infty}^{0} e^{-z}dz^3$

$\Gamma(4)=3!=6$ $= -3\int_0^{+\infty} z^2 de^{-z} \xlongequal[\text{再分部积分}]{\text{走N次}} 6$

则上题 $Y_i = X_{2i}+X_{2i-1}$ 服从上面谈到 $f_Z(z)$ 的分布. 且独立.

$\therefore \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \xrightarrow{P} E(Y_i^2) = E(Z^2) = 6$

3设 $X \sim Exp(\lambda)$ 求 $P\{\max(X, \frac{1}{X}) \leq 3\} = ?$

$$P\{\max(X, \frac{1}{X}) \leq 3\} = P\{X \leq 3, \frac{1}{X} \leq 3\}$$

此题因 $X \sim Exp(\lambda)$ 只有 $x>0$ 时有概率.

$$\xlongequal{} P\{\frac{1}{3} \leq X \leq 3\} = F_X(3) - F_X(\frac{1}{3})$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\xlongequal{} (1-e^{-3\lambda}) - (1-e^{-\frac{1}{3}\lambda})$$

$$= e^{-\frac{1}{3}\lambda} - e^{-3\lambda}$$

X, Y 独立　X 的分布律
X	1	2
p	0.3	0.7

$Y \sim Exp(1)$　求 $Z = X+Y$ 的分布函数

解：$F_Z(z) = P\{X+Y \le z\}$

$$\xlongequal[\text{公式}]{\text{全概率}} P\{X=1, X+Y \le z\} + P\{X=2, X+Y \le z\}$$

$$= P\{X=1, Y \le z-1\} + P\{X=2, Y \le z-2\}$$

$$\xlongequal[\text{独立}]{X, Y} P\{X=1\}P\{Y \le z-1\} + P\{X=2\}P\{Y \le z-2\}$$

$$= 0.3F_Y(z-1) + 0.7F_Y(z-2)$$

其中 $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y<0 \\ 1-e^{-y} & ; y \ge 0 \end{cases}$

由此可见 z 分 1，2 两个重要节点.

当 $z<1$ 时，　$F_Z(z) = 0$

当 $1 \le z < 2$ 时，　$F_Z(z) = 0.3(1-e^{1-z})$

当 $z \ge 2$ 时，　$F_Z(z) = 0.3(1-e^{1-z}) + 0.7(1-e^{2-z})$

$= 1 - 0.3e^{1-z} - 0.7e^{2-z}$

$X_i \cdots \sim U(0,1)$ 独立

则 $\dfrac{X_1^5+\cdots+X_n^5}{n} \xrightarrow{P} E(X_i^5)$

$\| \quad$ 记 $X_i \sim U(0,1)$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 f(x)\,dx$

函数的期望，

用公式法.

$\displaystyle = \int_0^1 x^5 \cdot 1\,dx$

$= \dfrac{1}{6}$

设 $P\{X=k\}=C_2^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{3-k}$ $k=1,2,3$，其中 $0<p<1$

$x_1,x_2,\cdots,x_n \swarrow X$，则 $\bar{X}\xrightarrow{P}$ ______.

$\bar{X}\xrightarrow{P} EX$.

进一步

X	1	2	3
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$$
\begin{aligned}
EX &= 1\cdot(1-p)^2+2\cdot 2p(1-p)+3p^2 \\
&=(1-p)^2+4p-4p^2+3p^2 \\
&=1+p^2-2p+4p-p^2 \\
&=2p+1
\end{aligned}
$$

（此题与二项分布有区别哦！）

设 $X_1, \cdots, X_5$ 是 $X \sim N(0, \sigma^2)$　$Y_1, \cdots, Y_6 \sim N(\mu, \sigma^2)$

X, Y 独立. 若

$$\frac{a\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{6}(Y_i - \bar{Y})^2} \sim F.$$

则 $a =$ ____ ， 自由度 ______

此题构造 F 分布.

分子构造: $\sum_{i=1}^{5} X_i \sim N(0, 5\sigma^2)$

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} X_i - 0}{\sqrt{5\sigma^2}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right)^2}{5\sigma^2} \sim \chi_1^2$$

分母的构造 $\dfrac{\sum_{i=1}^{6}(Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \sim \chi_5^2$

$$\therefore \frac{\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right)^2}{5\sigma^2}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{6}(Y_i-\bar{Y})^2}{5\sigma^2}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{6}(Y_i-\bar{Y})^2} \sim F_{1,5}.$$

$\therefore a = 1.$

a. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 抽 $X \sim P(\lambda)$，则 $E(\bar{X}^2) =$

$E(S^2) =$

① $E(\bar{X}^2) = [E(\bar{X})]^2 + D\bar{X} = (EX)^2 + \frac{DX}{n}$

$= \lambda^2 + \frac{\lambda}{n}$

② $E(S^2) = D(X) = \lambda$

b. 设 $X \sim F(n,n)$ 记 $p_1 = P\{X \geq 1\}$ $p_2 = P\{X \leq 1\}$

则（ C ）

A. $p_1 < p_2$ B. $p_1 > p_2$ C. $p_1 = p_2$ D. p_1, p_2 的大小无法比较.

此题写法与 $X \sim F_{n,n}$（一个意思）.

方法一 若用上侧分位点表示.

$p_1 = P\{X \geq 1\} \Rightarrow 1 = F_{n,n}(p_1) = \frac{1}{F_{n,n}(1-p_1)} \Rightarrow \begin{cases} F_{n,n}(p_1) = 1 \\ F_{n,n}(1-p_1) = 1 \end{cases} \Rightarrow p_1 = 1 - p_1 \Rightarrow p_1 = 1/2$

$p_2 = P\{X \leq 1\} \Rightarrow 1 - p_2 = P\{X > 1\} \Rightarrow 1 = F_{n,n}(1-p_2) = \frac{1}{F_{n,n}(p_2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} F_{n,n}(p_2) = 1 \\ F_{n,n}(1-p_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow p_2 = 1/2$

或者直接理解 方法二 $X \sim F_{n,n}$，则 $Y = \frac{1}{X} \sim F_{n,n}$.

$p_1 = P\{X \geq 1\}$ $p_2 = P\{X \leq 1\} = P\{\frac{1}{X} \geq 1\} = P\{Y \geq 1\}$

$\because X$ 与 Y 同分布，$\therefore P\{X \geq 1\} = P\{Y \geq 1\}$

即 $p_1 = p_2$

$X \sim B(200, 0.01)$ $Y \sim P(4)$ 且X与Y独立.

则 $Cov(2X-3Y, X) =$ ____ .

$$Cov(2X-3Y, X) \overset{\text{性质}}{=} 2DX - 3Cov(X,Y)$$

$\because X, Y$ 独立 $\Rightarrow Cov(X,Y)=0$

$$= 2DX$$

$$= 2 \times 200 \times 0.01 \times (1-0.01)$$

$$= 4 \times 0.99$$

$$= 3.96$$

设 X 的 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x^2+4x+4)}$，则 $EX = \underline{-2}$ $DX = \underline{\frac{1}{2}}$

若 $P\{X>c\} = P\{X<c\}$，则 $C = \underline{-2}$

① 规范性验证.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+2)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x+2)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}$$

可知 $\mu = -2$ $\sigma^2 = \frac{1}{2}$

学生在做一道有4个选项的单项选择题，如果不知道问题的正确答案，就随机猜测。现从卷面上看题答对了。假设学生知道正确答案的概率是0.2，试求该生确实知道正确答案的概率。

$\boxed{\text{此题是经典的贝叶斯公式！}}$

分析：首先对假设学生知道正确答案的概率是0.2需理解正确，就是先验概率，只要参加做此道题的学生，根据经验老师认为学生做对的可能性，若A做（还没做前）答对可能性为0.2，如果没有进一步信息，学生的情况老师只能判断于此，即认为A知道正确答案的概率是0.2（与全体学生一致！）

现在有了进一步信息，A做了此题而且卷面看答对了，有了新信息，对A会做这道题的可能性就要动态调整了，直觉A确实会做的可能性应该比0.2高，具体多少，使用贝叶斯公式具体计算！

$0.2\,\text{会做} \xrightarrow{1} \text{卷面答对}$

$0.8\,\text{不会做} \xrightarrow{0.25} \text{卷面答对}$

$$P(\text{卷面答对}) = 0.2\times1 + 0.8\times0.25 = 0.4$$

$$P(\text{确实会做} \mid \text{卷面答对}) = \frac{0.2\times1}{0.2\times1+0.8\times0.25} = \frac{1}{2}$$

精确写法．设 $A=\{\text{卷面答对}\}$
$B=\{\text{确实会做}\}$ 则 $P(B)=0.2$ $P(\bar{B})=0.8$
$P(A|B)=1$ $P(A|\bar{B})=0.25$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{0.2\times1}{0.2\times1+0.8\times0.25}=\frac{1}{2}$$

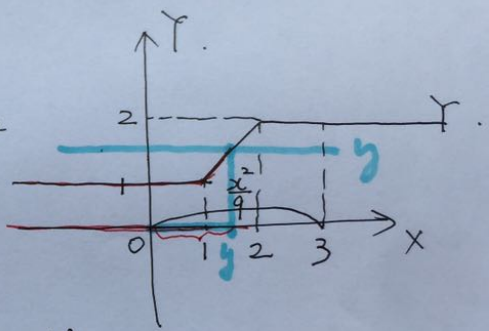
设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}, & 0<x<3 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

令 $Y=\begin{cases} 1, & X\le 1 \\ X, & 1<X<2 \\ 2, & X\ge 2 \end{cases}$ 求Y的分布函数.

此题最适合用数形结合法.

$\because Y\in[1,2]$

$\therefore F_Y(y)=\begin{cases} 0 & ;\ y<1 \\ ? & ;\ 1\le y<2 \\ 1 & \ y\ge 2 \end{cases}$



当 $1\le y<2$ 时,

$F_Y(y)\triangleq P\{Y\le y\}$

$=P\{X\le y\}=\int_0^y \frac{x^2}{9}dx=\frac{y^3}{27}$

$\therefore F_Y(y)=\begin{cases} 0 & ;\ y<1 \\ \dfrac{y^3}{27} & ;\ 1\le y<2 \\ 1 & ;\ y\ge 2 \end{cases}$

$P\{Y=2\}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$ $\quad P\{Y=1\}=\frac{1}{27}$

解析法 (需借助全概率公式)

$F_Y(y)\triangleq P\{Y\le y\}=P\{X\le 1, Y\le y\}+P\{1<X<2, Y\le y\}+P\{X\ge 2, Y\le y\}$

$=P\{X\le 1, 1\le y\}+P\{1<X<2, X\le y\}+P\{X\ge 2, 2\le y\}$.

为此分析得 y 的重要节点是1, 2. 当 $y<1$ 时, $F_Y(y)=0$ 当 $y\ge 2$ 时, $F_Y(y)=P\{$

当 $1\le y<2$ 时, $F_Y(y)=P\{X\le 1\}+P\{1<X\le y\}=\int_0^y \frac{x^2}{9}dx=\frac{y^3}{27}$ $=1$

若 $p(A|B)=1$，则下列答案正确的是____

A. $B\subset A$　B. $A\subset B$　C. $p(B-A)=0$.　D. $B-A=\phi$

$$p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=1 \Rightarrow p(AB)=p(B).$$

（需 $p(B)>0$ 这个条件）.

$$p(B-A)=p(B)-p(AB)=0$$

若 $p(B)=0 \Rightarrow p(AB)=0 \Rightarrow p(B-A)=0$.

此题给的是概率条件，得不到事件关系！　(C)

设随机变量 X 与 Y 的方差相等且大于零. 则 $\rho_{X,Y}=1$ 的充要条件为____

A. $cov(X+Y, X-Y)=0$　B. $cov(X+Y, X)=0$

C. $cov(X+Y, Y)=0$　D. $cov(X-Y, X)=0$.

利用协方差性质

A. $cov(X+Y, X-Y)=DX-DY+cov(X,Y)-cov(X,Y)=0$

B. $cov(X+Y, X)=DX+cov(X,Y)=0$

C. $cov(X+Y, Y)=DY+cov(X,Y)=0$

D. $cov(X-Y, X)=DX-cov(X,Y)=0$

又 $\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{cov(X,Y)}{DX}$ 或 $\frac{cov(X,Y)}{DY}=1$

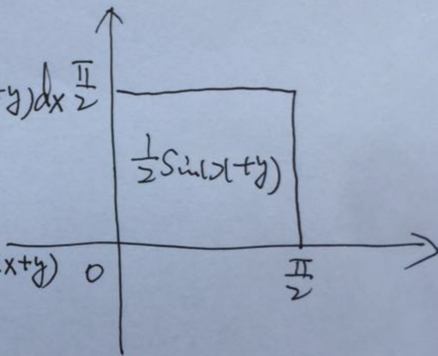
(D)

设 $(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y)\ ; & 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le \frac{\pi}{2} \\ 0\ ; & \text{其他}. \end{cases}$

$Z=\cos(X+Y)$ 则 $E(Z)=\underline{\ 0\ }$.

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x+y)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos(x+y)\sin(x+y)\,dx$$



$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin(x+y)\,d\sin(x+y)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^2(x+y)}{4}\bigg|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2 y\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2 y)\,dy=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2y\,dy$$

$$=\frac{1}{8}\sin 2y\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}(\sin\pi-\sin 0)=0$$

已知 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，$P(A)=p$，求 $P(B)=$ ____

$$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$
$$=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

化简得 $P(A)+P(B)=1$

$\therefore P(B)=1-p$

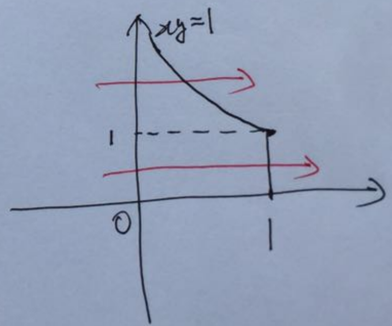
$X \sim U(0,1)$ 当给定 $X=x\in(0,1)$ 时

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} x & ; 0\le y\le \frac{1}{x} \\ 0 & ; 其他. \end{cases}$$

求 $f_Y(y)$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$$

$$=\begin{cases} x & ; 0\le y\le \frac{1}{x}, 0<x<1 \\ 0 & ; 其他. \end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$=\begin{cases} \int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2} & ; 0<y<1 \\ \int_0^{\frac{1}{y}} x\,dx=\frac{1}{2y^2} & ; y>1 \\ 0 & ; 其他 \end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n \ (n>2)$ 是 $X \sim N(0,1)$

$Y_i = X_i - \bar{X}$ $i=1,2,\cdots,n$，那么以下不正确的是 ______

A) $EY_i = EY_1 = 0$ B) $DY_1 = \frac{n-1}{n}$ C) $\mathrm{cov}(Y_1, Y_n) = \frac{1}{n}$

D) $\rho_{Y_1, Y_n} = \frac{1}{1-n}$

A) $EY_1 = E(X_1 - \bar{X}) = 0$ ✓

B) $DY_1 = D(X_1 - \bar{X}) = DX_1 + D\bar{X} - 2\mathrm{cov}(X_1, \bar{X})$

$$= 1 + \frac{1}{n} - 2\mathrm{cov}\left(X_1, \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n} - 2\mathrm{cov}\left(X_1, \frac{X_1}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$ ✓

C) $\mathrm{cov}(Y_1, Y_n) = \mathrm{cov}(X_1 - \bar{X}, X_n - \bar{X})$

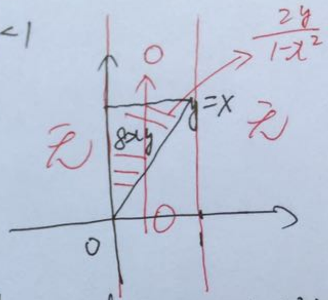
$$= \mathrm{cov}(X_1, X_n) + \mathrm{cov}(\bar{X}, \bar{X}) - \mathrm{cov}(X_1, \bar{X}) - \mathrm{cov}(X_n, \bar{X})$$

$$= D\bar{X} - \mathrm{cov}\left(X_1, \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) - \mathrm{cov}\left(X_n, \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$$ ×

D) $$\rho_{Y_1, Y_n} = \frac{\mathrm{cov}(Y_1, Y_n)}{\sqrt{DY_1}\sqrt{DY_n}} = \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}} = -\frac{1}{n-1} = \frac{1}{1-n}$$ ✓

设 $f(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0<x<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$



求 $f_{Y|X}(y|x)$

先求 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^1 8xy\,dy = 4x(1-x^2); & 0<x<1 \\ 0 & ;其他 \end{cases}$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

当 $X=x$ $(0<x<1)$ 时

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{4x(1-x^2)}=\begin{cases} \frac{8xy}{4x(1-x^2)}=\frac{2y}{1-x^2} & ;x<y<1 \\ 0 & ;其他 \end{cases}$$

当 $X=x$（x取其他值时）

$f_{Y|X}(y|x)$ 无意义！