置信区间与假设检验的区别与联系.

参数未知　：　用统计量估计　　（置信区间）

参数已知（或假设已知）：用统计量检验已知的参数是否靠谱　（假设检验）.　〉统计推断

区间估计可理解为正向求解问题.

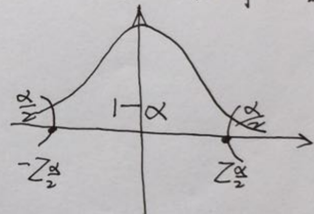
假设检验——逆向——————　〉两者可看成同一个问题的不同表述方式，可相互转化.

以 $X_1, \cdots, X_n$ 从 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2已知　对μ进行假设检验　显著性水平α（双边检测）与对μ进行区间估计　置信水平$1-\alpha$

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$$

$$P\{\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha$$



具体一组样本观测值，则所有在 $(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 里 μ_0 作为假设检验的 $H_0: \mu=\mu_0$　　$H_1: \mu \neq \mu_0$

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

拒绝域 $|Z| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

具体地同一组样本观测值，

$$P\{\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu_0 < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$P\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$$

落在接受域

即μ的$1-\alpha$置信区间里的所有μ_0作为假设检验的原假设，结论都是接受.

直觉：μ的$1-\alpha$置信区间里的每个值μ_0来估计μ都是高度可信的，因此做假设检验 $H_0: \mu=\mu_0$，没有充分证据推翻它，即认为估计靠谱。

或者说成所有落在接受域里的μ_0组成μ的$1-\alpha$置信区间.

数理统计期末复习 重点题型讲解

9. 设 $X \sim N(\mu, 2^2)$，从 X 中抽取容量为 n 的样本，其均值为 $\bar{X}$，样本容量为 n 至少取多少时，才能使样本均值 $\bar{X}$ 与总体均值 μ 之差的绝对值小于 0.1 的概率不小于 95%。

$$\because \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{4}{n}\right), \text{ 则 } \frac{\bar{X}-\mu}{2/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$P\{|\bar{X}-\mu| < 0.1\} \geq 0.95.$$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}\right| < \frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right\} \geq 0.95.$$

对于 $X \sim N(0,1)$

则 $P\{|X| < a\}$

$= 2\Phi(a) - 1$

$$2\Phi\left(\frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right) - 1 = 0.95 \text{（求临界值）}.$$

$$\Phi\left(\frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right) = 0.975$$

此题分布已知，不可使用 t 切比雪夫不等式放缩求解！

$$\frac{0.1}{2/\sqrt{n}} = 1.96$$

$$\sqrt{n} = 39.2 \qquad n = 1537$$

13. 设总体 X 的 $f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^{\alpha} & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{其他} \end{cases}$ 其中 $\alpha > -1$ 是未知参数.

$x_1, \cdots, x_n \swarrow X$

求(1) α 的矩估计量 (2) 求 α 的最大似然估计量.

(1) $$\bar{X} = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x(\alpha+1)x^{\alpha} dx$$

$$= (\alpha+1)\int_0^1 x^{\alpha+1} dx = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

$$(\bar{X}-1)\alpha = 1 - 2\bar{X} \quad \text{得} \quad \hat{\alpha} = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$$

(2) $$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \begin{cases} (\alpha+1)^n x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} \cdots x_n^{\alpha} & ; 0 \leq x_i \leq 1 \\ 0 & ; \text{其他} \end{cases}$$

$$l(\alpha) = \ln L(\alpha) = n\ln(\alpha+1) + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$$

$$\frac{d\,l(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \quad \text{得} \quad \hat{\alpha} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$$

8. $X \sim N(40, \sigma_1^2)$ 独立. n_1 S_1^2

$Y \sim N(50, \sigma_2^2)$ n_2 S_2^2

涉及到 F_{n_1-1, n_2-1} 应该是第8个公式.

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

要使 $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$

则 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 即 $\sigma_1 = \sigma_2$

可能有同学要问此题 μ_1, μ_2 已知，为什么不用第7个公式呀？

当然可以用第7个公式，只是与此题无关！出题人的意图是使用第8个公式.

此处 $F(n_1-1, n_2-1)$ 与 F_{n_1-1, n_2-1} 记号意思一样！

11. $X_1, \cdots, X_n \swarrow X \sim B(\underset{\text{已知}}{m}, p)$ 未知.

求 p 的矩估计 与最大似然估计.

① $\overline{X} = EX = mp$

$\therefore \hat{p} = \dfrac{\overline{X}}{m}$ 估计量. $\hat{p} = \dfrac{\bar{x}}{m}$ 估计值.

(注意：此题只有一个未知参数，列一个方程即可！)

② $L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; p)$ $\quad P\{X=x; p\} = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}$

$= \prod_{i=1}^{n} \left[C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i} \right]$. 此处 x_i 是已知，p 为未知

$= C_m^{x_1} C_m^{x_2} \cdots C_m^{x_n} \, p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n \cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i}$

$l(p) = \ln L(p) = \ln(C_m^{x_1} \cdots C_m^{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + (n \cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(1-p)$

$\dfrac{dl(p)}{dp} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} + \dfrac{n \cdot m - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} (-1) = 0$.

解得 $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i / n}{m} = \dfrac{\bar{x}}{m}$ 估计值 $\quad \hat{p} = \dfrac{\overline{X}}{m}$ 估计量

12.

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

$(0<\theta<1/2)$

一组样本观测值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3. 求θ的矩估计值与最大似然估计值.

首先看出 $\theta^2+2\theta(1-\theta)+\theta^2+(1-2\theta)\equiv 1$ （满足规范性，从规范性中求不出θ）.
（若能通过规范性求出θ的话，就是一道概率题了）.

① $\bar{X}=EX=0\cdot\theta^2+1\cdot 2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3(1-2\theta)$.

$= 3-4\theta$

$\hat{\theta}=\frac{3-\bar{X}}{4}$ 矩估计量.

具体地：$\bar{x}=2$ 代入$\hat{\theta}$.
得 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$ 矩估计值.

②

$L(\theta) = P\{X_1=3, X_2=1, X_3=3, X_4=0, X_5=3, X_6=1, X_7=2, X_8=3\}$

独立同X分布. $(1-2\theta)^4[2\theta(1-\theta)]^2\theta^2\cdot\theta^2$

$=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$

$l(\theta)=\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

$\frac{dl(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}+\frac{2}{1-\theta}(-1)+\frac{4}{1-2\theta}(-2)=0$

化简得 $12\theta^2-14\theta+3=0$

$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$ （$\frac{7+\sqrt{13}}{12}$ 舍去）.

最大似然估计值.

6. $X_1, X_2, X_3 \swarrow X \sim N(0,4)$

a. b为何值时，$Y = a(4X_1 - 3X_2)^2 + bX_3^2 \sim \chi^2_2$

$4X_1 - 3X_2 \sim N(0, 100)$

$X_3 \sim N(0, 4)$　　独立

$$\left(\frac{4X_1 - 3X_2 - 0}{\sqrt{100}}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - 0}{\sqrt{4}}\right)^2 \sim \chi^2_2$$

即 $\frac{1}{100}(4X_1 - 3X_2)^2 + \frac{1}{4}X_3^2 \sim \chi^2_2$

$\therefore a = \frac{1}{100} \quad b = \frac{1}{4}$

18. 总体均值μ的置信度为95%的置信区间为$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$
其含义是 ______

(A) 总体均值μ的真值以95%的概率落入区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$

(B) 样本均值$\bar{X}$以95%的概率落在区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$

(C)✓ 区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$含总体均值$\mu$的真值的概率为95%

(D) 区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$含样本均值$\bar{X}$的概率为95%

14. 设总体X的$EX=0$，$DX=\sigma^2$，$X_1,\cdots,X_n$来自X，其均值为$\bar{X}$，方差为S^2，则σ^2的无偏估计量是______

(A) $n\bar{X}^2+S^2$ (B) $\frac{1}{2}n\bar{X}^2+\frac{1}{2}S^2$

(C) $\frac{1}{3}n\bar{X}^2+S^2$ (D) $\frac{1}{4}n\bar{X}^2+\frac{1}{4}S^2$

知识点1： $E(S^2)=\sigma^2$

知识点2. $E(n\bar{X}^2)=nE(\bar{X}^2)=n((E\bar{X})^2+D\bar{X})$

$=n((EX)^2+\frac{DX}{n})$

$=n(0+\frac{\sigma^2}{n})=\sigma^2$

既然S^2与$n\bar{X}^2$都是σ^2的无偏估计，前面系数和为1，即为σ^2的无偏估计，故选(B)

16.17. 对于正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$其中σ^2未知，样本容量n和置信水平$1-\alpha$均不变，则对于不同的样本观察值，总体均值μ的置信区间长度L如何？

单正态总体，σ^2未知，μ的$1-\alpha$置信区间为$\left(\bar{X}\pm t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

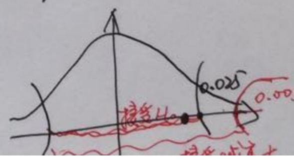
$$L=\underbrace{2t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2})}_{\text{不变}}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

所以L不能确定，当S较大时，区间长度也较大.

L与S成正比.

23. 对正态总体均值μ进行假设检验. 如果在显著水平0.05下接受$H_0:\mu=\mu_0$，那么，对于同一个样本观测值，在显著水平0.01下，下列结论正确的是______

(A) 必接受H_0 (B) 可能接受也可能拒绝H_0 (C) 必拒绝H_0 (D) 不接受也不拒绝H_0



选(A)

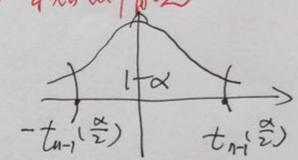
19. 设某种木材横纹抗压力的实验值服从正态分布.
对10个试件作横纹抗压力的实验数据如下:

482, 493, 457, 471, 510, 496, 435, 418, 394, 496

(单位: kg/cm). 试以95%的可靠性估计该木材的平均横纹抗压力的置信区间.

此题为单正态总体对μ的置信区间, σ^2 未知的情况)

$$P\{-t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2}) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2})\} = 1-\alpha$$



$$P\{\bar{X}-t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha.$$

即μ的$1-\alpha$置信区间为 $(\bar{X}\pm t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}})$

具体地: $\bar{x} = 465.2$ $\quad S^2 = \frac{1}{9}(282.24+772.84+67.24+33.64+2007.04+948.64+912.04+2227.84+5069.44+948.64) = 1474.4$

$n = 10 \quad \sqrt{n} \approx 3.2$

$t_9(0.025) = 2.26 \quad S \approx 38.4$

$$\bar{X}+t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}} = 465.2 + \underbrace{2.26\,\frac{38.4}{3.2}}_{=27.1} \approx 492$$

$$\bar{X}-t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}} = 465.2 - 27.1 \approx 438$$

$\therefore$ (438, 492)

具体考试时不会要求同学算S^2及S的, 若涉及到会直接给S^2及S的数据

概率论期末复习重点题型讲解.

1. 如果 $p(A)>0$，$p(B)>0$，$p(A)=p(A|B)$，则（　　）不成立.

(A) $p(B|A)=p(B)$　　(B) $p(\bar{A})=p(\bar{A}|\bar{B})$

(C) A、B 相容.　　(D) A、B 不相容.

此题考 独立、 互不相容 等 相关概念

① 独立 $\overset{\text{概率定义}}{\Longleftrightarrow}$ $p(AB)=p(A)p(B)$. $\overset{p(A)>0}{\Longrightarrow}$ $p(B)=p(B|A)$

$\overset{0<p(A)<1}{\Longrightarrow}$ $p(B|A)=p(B|\bar{A})$

A、B 独立 $\Leftrightarrow$ A、$\bar{B}$ 独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$、B 独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$、$\bar{B}$ 独立.

若 $p(A)=0$，则 A 与 $\forall B$ 独立；（零概率事件与任意事件独立）

若 $p(A)=1$，则 A 与 $\forall B$ 独立.（1 概率事件与任意事件独立）.

② 互不相容 $\overset{\text{事件定义}}{\Longleftrightarrow}$ $AB=\phi$. $\Longrightarrow$ $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$，反之未必！

③ 一般地，独立与互不相容没有必然联系.

但在 $p(A)>0$ 且 $p(B)>0$ 的前提下：

互不相容与独立不能同时并存. $\begin{cases} \text{独立} \Rightarrow p(AB)>0 \Rightarrow \text{相容}. \\ \text{互不相容} \Rightarrow p(AB)=0 \neq p(A)p(B)\ \text{不独立} \end{cases}$

此选择题已知 $p(A)>0$ 且 $p(B)>0$ 的大前提，且独立，可推 A、B 相容.

故 A、B、C 均正确，D 错误.　故选 D.

4. A、B、C两两相互独立，满足 $ABC=\Phi$

且 $p(A)=p(B)=p(C)<1/2$，且已知 $p(A\cup B\cup C)=\frac{12}{25}$

则 $p(A)=$ ____ .

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-\underset{\overset{\because}{p(A)p(B)}}{p(AB)}-p(AC)-p(BC)$$

$$+\underset{\overset{\because}{0}}{p(ABC)}$$

设 $p(A)=x$.

则 $3x-3x^2=\frac{12}{25}$

$3x^2-3x+\frac{12}{25}=0$

解得：$x=\frac{1}{5}$ 或 $x=\frac{4}{5}$（舍去）

$\therefore p(A)=1/5$

9. 设随机变量X与Y同分布. X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2 \\ 0, & 其他\end{cases}$

已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 相互独立. 且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$.

试求常数a.

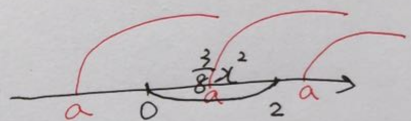
此题考分布函数的定义

已知A、B独立，却要计算 $P(A\cup B)$，两种方法：

(加法公式) ① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

只需求出 $P(A)$ 即可！

$P(A)=P\{X>a\}=\int_a^{+\infty}f(x)dx$



$$=\begin{cases}0 & ;\ a>2 \\ 1 & ;\ a<0 \\ \int_a^2 \frac{3}{8}x^2 dx = 1-\left(\frac{a}{2}\right)^3 & ;\ 0\le a\le 2\end{cases}$$

$$P(A\cup B)=2\left[1-\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]-\left[1-\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]^2=\frac{3}{4}$$

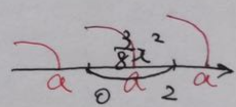
令 $1-\left(\frac{a}{2}\right)^3=t$. 即 $t^2-2t+\frac{3}{4}=0$ 解得 $t=\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{2}$舍去)

$$1-\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{1}{2} \Rightarrow a^3=4 \Rightarrow a=\sqrt[3]{4}$$

求 $P(\overline{A\cup B})$ ② $P(\overline{A\cup B})=P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{4} \Rightarrow P(\bar{A})=\frac{1}{2}$

求X的F(x)

$$P(\bar{A})=P\{X\le a\}=F_X(a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\begin{cases}0 & ;\ a<0 \\ \int_0^a \frac{3}{8}x^2 dx=\left(\frac{a}{2}\right)^3 & ;\ 0\le a<2 \\ 1 & ;\ a\ge 2\end{cases}$$



$$P(\bar{A})=\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\sqrt[3]{4}$$

10. 设10件产品中恰有2件次品，现在接连进行非还原抽样，每次抽一件直到取到正品为止。求 (1) 抽取次数 X 的概率分布律；

(2) X 的分布函数.

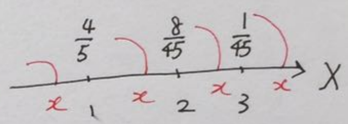
(3) $P\{X=3.5\}$ $P\{X>-2\}$ $P\{1<X<3\}$.

$P\{X=1\}=\frac{4}{5}$ $P\{X=2\}=\frac{C_2^1C_8^1}{C_{10}^1C_9^1}=\frac{8}{45}$ $P\{X=3\}=\frac{C_2^1C_1^1C_8^1}{C_{10}^1C_9^1C_8^1}=\frac{1}{45}$

实际问题转成理论上X的分布律.

X	1	2	3
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

验证满足规范性



已知X的分布律求 $F_X(x)$

$$F_X(x)\triangleq P\{X\le x\}=\begin{cases}0 & ; x<1\\ \frac{4}{5} & ; 1\le x<2\\ \frac{44}{45} & ; 2\le x<3\\ 1 & ; x\ge 3\end{cases}$$

$P\{X=3.5\}=0$ $P\{X>-2\}=1$ $P\{1<X<3\}=\frac{8}{45}$

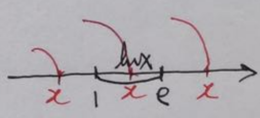
11. 设 X 的 $f(x)=\begin{cases}\ln x & ; 1\le x\le a\\ 0 & ; 其它\end{cases}$ 求 a，并求 X 的分布函数.

考 $f(x)$ 的规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，即 $\int_1^a \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^a-\int_1^a x\cdot\frac{1}{x}dx$

$= a\ln a-a+1=1$

得 $a(\ln a-1)=0$ 得 $a=e$

即 $f(x)=\begin{cases}\ln x & ; 1\le x\le e\\ 0 & ; 其它\end{cases}$



已知X的 $f(x)$ 求 $F_X(x)$

$$F_X(x)\triangleq P\{X\le x\}=\begin{cases}0 & ; x<1\\ \int_1^x \ln x\,dx = x\ln x - x + 1 & ; 1\le x<e\\ 1 & ; x\ge e\end{cases}$$

14. $X \sim N(0,1)$ $Y=e^X$ 的概密.

① 定义法. $Y=e^x \uparrow$. $x=\ln y$ $x'=\frac{1}{y}$

当 $y>0$ 时.

$$f_Y(y)= f_X(x)\, x' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} 0 & ; \ y\le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} & ; \ y>0 \end{cases}$$

② 分布函数法.

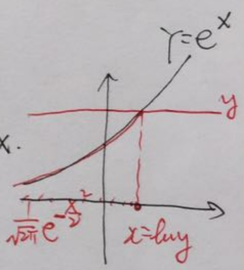
$$F_Y(y) \triangleq P\{Y\le y\} = P\{e^X \le y\}$$

当 $y<0$ 时, $F_Y(y)=0$ $\overset{②}{=} \int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx$.

当 $y\ge 0$ 时, $F_Y(y)= P\{X\le \ln y\} \overset{①}{=} F_X(\ln y)$

则 $f_Y(y)= F_Y'(y) = F_X'(\ln y)(\ln y)'$

$$= f_X(\ln y)\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \cdot \frac{1}{y}$$



$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} & ; \ y>0 \\ 0 & ; \ y\le 0 \end{cases}$$

12. 某人上班有两条路可走. 第一条路所需时间(min) $X \sim N(40, 10^2)$, 第二条路所需时间 $Y \sim N(50, 4^2)$. 求若他提前1小时去上班, 走哪条路迟到的可能性小?

考正态分布的计算.

$$P\{X > 60\} = 1 - F(60) = 1 - \Phi\left(\frac{60-40}{10}\right) = 1 - \Phi(2)$$

$$P\{Y > 60\} = 1 - F(60) = 1 - \Phi\left(\frac{60-50}{4}\right) = 1 - \Phi(2.5)$$

$\because \Phi(2.5) > \Phi(2)$

$\therefore 1 - \Phi(2.5) < 1 - \Phi(2)$

即第2条路迟到的可能性小.

15. 随机变量 $X \sim Exp(2)$. 求 $Y = 1 - e^{-2X}$ 的分布函数.

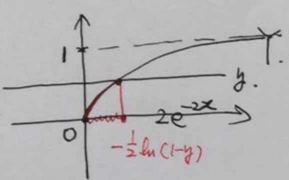
考一元函数的分布.

$\because Y \in [0, 1]$ $\quad \therefore F_Y \triangleq P\{Y \le y\} = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ ? & ; 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$

方法一 (分布函数法) $0 \le y < 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\}$

$$= P\{X \le -\tfrac{1}{2}\ln(1-y)\}$$

$$\overset{①}{=} \int_0^{-\frac{1}{2}\ln(1-y)} 2e^{-2x}\,dx$$



$\therefore F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ y & ; 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$

$$\overset{②}{=} F_X(-\tfrac{1}{2}\ln(1-y))$$

$$= 1 - e^{-2(-\frac{1}{2}\ln(1-y))} = 1 - (1-y) = y$$

方法二 (公式法) $Y = 1 - e^{-2X}$ $\uparrow$ $\quad x = -\frac{1}{2}\ln(1-y) \quad x' = \frac{1}{2}\frac{1}{1-y}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(x)x' = 2e^{-2(-\frac{1}{2}\ln(1-y))} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{1-y} = 2(1-y)\frac{1}{2}\frac{1}{1-y} = 1, & 0 < y < 1 \\ 0 & ; 其他 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ y & ; 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

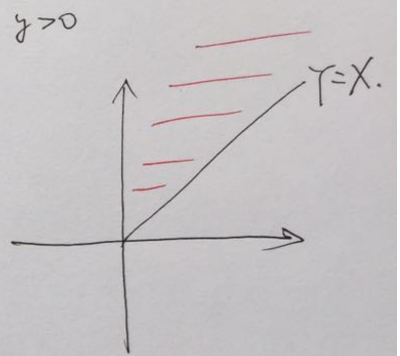
事实上, 此题是书上P54例2.24的具体例子.
求随机变量的分布函数的分布函数
$Y \sim U(0,1)$

22. 设 X, Y 独立且都服从指数分布. $X \sim Exp(\lambda)$ $Y \sim Exp(\mu)$

(1) 求 $P\{X \le Y\}$ (2) 引入 $Z = \begin{cases} 1; & X \le Y \\ 0; & X > Y \end{cases}$ 求Z的分布律.

(1)

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} & ; x>0, y>0 \\ 0 & ; 其他 \end{cases}$$



$$P\{X \le Y\} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda+\mu)x} dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

(2) $P\{Z=1\} = P\{X \le Y\} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

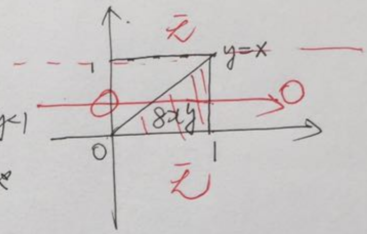
$P\{Z=0\} = 1 - P\{Z=1\} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

25. $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} 8xy; & y\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0; & 其他. \end{cases}$

(1) 求 $f_{X|Y}(x|y)$　　(2) $Z=X+Y$ 的概率密度.

(1) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$= \begin{cases}\int_y^1 8xy\,dx = 4y(1-y^2); & 0<y<1\\ 0; & 其他\end{cases}$

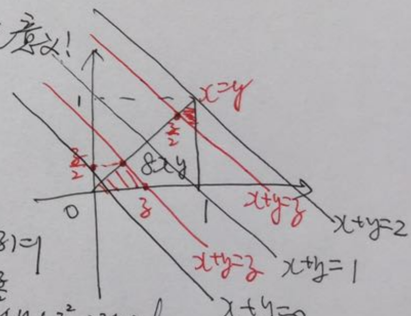


$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

当 $Y=y$ $(0<y<1)$ 时,

$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{4y(1-y^2)} = \begin{cases}\frac{8xy}{4y(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2}; & y<x<1\\ 0; & 其他\end{cases}$

当 $Y=y$（y取其他值）时，$f_{X|Y}(x|y)$ 无意义!



(2). $F_Z(z) \triangleq P\{Z\le z\} = P\{X+Y\le z\}$.

方法一
分布函数法.

如图 z 有 0, 1, 2 三个重要节点.

当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=0$；当 $z\ge 2$ 时, $F_Z(z)=1$

当 $0\le z<1$ 时, $F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} 4y\,dy \int_y^{z-y} 2x\,dx = \int_0^{\frac{z}{2}} 4y(z^2-2zy)\,dy$

$= 2z^2 y^2\Big|_0^{\frac{z}{2}} - \frac{8}{3}z y^3\Big|_0^{\frac{z}{2}} = \frac{z^4}{6}$

当 $1\le z<2$ 时, $F_Z(z) = 1-\int_{\frac{z}{2}}^1 4x\,dx\int_{z-x}^x 2y\,dy = 1-\int_{\frac{z}{2}}^1 4x(2zx - z^2)\,dx$

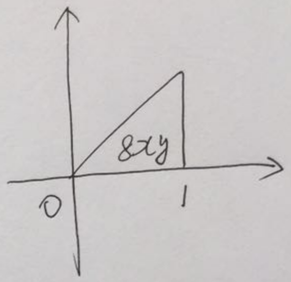
$= 1-\left(8z\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{z}{2}}^1 - 2z^2x^2\Big|_{\frac{z}{2}}^1\right) = 1-\frac{8}{3}z+2z^2-\frac{1}{6}z^4$

$\boxed{\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{2}{3}z^3; & 0<z<1\\ -\frac{8}{3}+4z-\frac{2}{3}z^3; & 1<z<2\\ 0; & 其他\end{cases}}$

(2) 利用公式 . $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$.

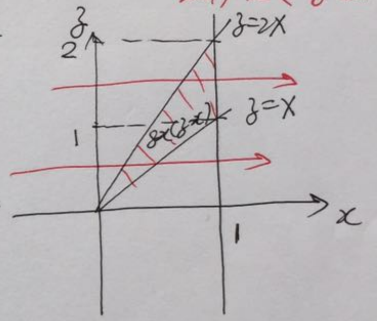
方法二.

其中 $f(x,y)=\begin{cases} 8xy; & y\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0 & ;\text{其他} \end{cases}$



则 $f(x,z-x)=\begin{cases} 8x(z-x); & z-x\le x\le 1,\ 0\le z-x\le 1 \\ 0 & ;\text{其他} \end{cases}$

$\Downarrow$ $x\le 1,\ x\le z\le 2x$



当 $z\le 0$ 或 $z\ge 2$ 时，$f_Z(z)=0$

当 $0<z<1$ 时 $f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z} 8x(z-x)dx=3z^3-\frac{7}{3}z^3$

$=\frac{2}{3}z^3$

当 $1<z<2$ 时 . $f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1} 8x(z-x)dx = z(4-z^2)-\frac{8}{3}(1-\frac{z^3}{8})=-\frac{8}{3}+4z-\frac{2}{3}z^3$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases} \frac{2}{3}z^3 & ;0<z<1 \\ -\frac{8}{3}+4z-\frac{2}{3}z^3 & ;\ 1<z<2 \\ 0 & ;\ \text{其他} \end{cases}$

26. (X,Y)的 $f(x,y)=\begin{cases} ax^3 & ; 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 & ; 其他. \end{cases}$

(1) 求 a　　(2) $f_X(x)$, $f_Y(y)$　判定是否独立. $f_{Y|X}(y|x)$

(3) 求 EX、EY. 并判定是否相关

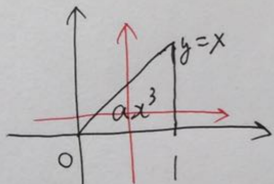
(4) $P\{Y>\frac{X}{2}\}$　　(5) 求 $Z=X+Y$ 的 $f_Z(z)$.

考二元函数的分布. 二维随机变量已知 $f(x,y)$, 求 $f_X(x)$. $f_Y(y)$ 是基础题.

(1) 考规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x ax^3dy$

$=\int_0^1 ax^4dx=a\cdot\frac{1}{5}=1$

得 $a=5$.



$\therefore f(x,y)=\begin{cases} 5x^3 & ; 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 & ; 其他 \end{cases}$

(2)

已知 $f(x,y)$ 求 $f_X(x)$, $f_Y(y)$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^x 5x^3dy=5x^4 & ; 0<x<1 \\ 0 & ; 其他. \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_y^1 5x^3dx=\frac{5}{4}(1-y^4) & ; 0<y<1 \\ 0 & ; 其他 \end{cases}$

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$　不独立.

已知 $f(x,y)$, $f_X(x)$ 求 $f_{Y|X}(y|x)$

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

当 $0<x<1$ 时. $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{5x^4}=\begin{cases} \frac{5x^3}{5x^4}=\frac{1}{x} & ; 0<y<x \\ 0 & ; 其他 \end{cases}$

当 x 取其他值时, $f_{Y|X}(y|x)$ 无意义!

(3) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x\cdot 5x^4 dx = 5\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

求其期望及相关性判定

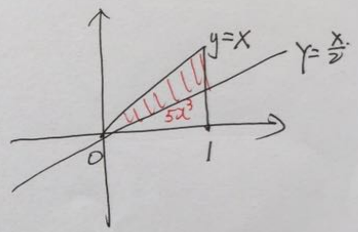
$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^1 y\cdot\frac{5}{4}(1-y^4)dy = \frac{5}{4}\left[\int_0^1 y dy - \int_0^1 y^5 dy\right]$

$= \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x xy\cdot 5x^3 dy$

$= \int_0^1 5x^4 \int_0^x y dy = \int_0^1 \frac{5}{2}x^6 dx = \frac{5}{2}\times\frac{1}{7} = \frac{5}{14}$

$E(XY) \neq EXEY$，相关。

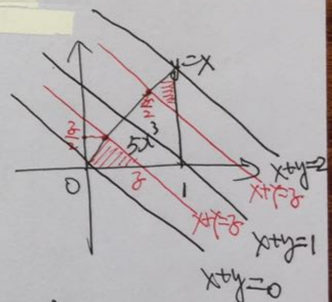


(4) $P\{Y>\frac{X}{2}\} = \iint_{Y>\frac{X}{2}} f(x,y)dxdy$

已知f(x,y)求P{(X,Y)∈D}.

$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} 5x^3 dy$

$= \int_0^1 \frac{5}{2}x^4 dx = \frac{5}{2}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{2}$



(5) ①分布函数法) $F_Z(z) \triangleq P\{Z\le z\} = P\{X+Y\le z\}$

已知f(x,y)求二元函数的分布

$= \iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z) = \int_0^{\frac{z}{2}}dy\int_y^{z-y} 5x^3 dx = \frac{5}{4}\int_0^{\frac{z}{2}}[(z-y)^4 - y^4]dy$

$= \frac{5}{4}\left[\frac{1}{5}\left(z^5-\left(\frac{z}{2}\right)^5\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2}\right)^5\right] = \frac{1}{4}\left(z^5 - \frac{z^5}{16}\right) = \frac{15}{64}z^5$

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z) = 1-\int_{\frac{z}{2}}^1 dx\int_{z-x}^{x} 5x^3 dy = 1-\int_{\frac{z}{2}}^1 5x^3(2x-z)dx$

$= 1-\left(2-\frac{z^5}{16}-\frac{5z}{4}+\frac{5z^5}{64}\right) = \frac{5z}{4} - \frac{1}{64}z^5 - 1$

$\therefore f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \frac{75}{64}z^4 & ; 0<z<1 \\ \frac{5}{4}-\frac{5}{64}z^4 & ; 1<z<2 \\ 0 & ; 其他 \end{cases}$

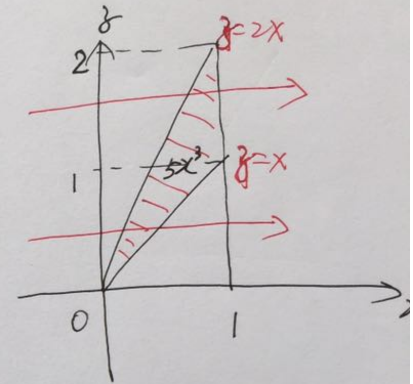
② 利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$

其中 $f(x,z-x)=\begin{cases}5x^3 & ;0\le x\le 1,\ 0\le z-x\le x \\ 0 & ;其他\end{cases}$

$\Downarrow$

$x\le z\le 2x$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{z} 5x^3\,dx=\frac{75}{64}z^4; & 0<x<1\\ \int_{\frac{z}{2}}^{1} 5x^3\,dx=\frac{5}{4}\left(1-\frac{z^4}{16}\right); & 1<x<2\\ 0 & ;其他\end{cases}$$



28. $X \sim Exp(\frac{1}{3})$. 求 $E[X+e^{-X}]$

① $EX = 3$.

② $E(e^{-X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} f(x) dx$

$= \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx$

$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{4}{3}x} dx$

$= -\frac{1}{4} e^{-\frac{4}{3}x} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{4}$

$\because E(X+e^{-X}) = EX + E(e^{-X}) = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布随机变量序列，且服从参数为 $\theta\,(\theta>0)$ 的指数分布．则下列不正确的是______

A. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\theta\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n\theta}{\sqrt{n}\,\theta} \le x\right\} = \Phi(x)$

C. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta}} \le x\right\} = \Phi(x)$

D. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - \theta}{\sqrt{n\theta}} \le x\right\} = \Phi(x)$

此题一看选项知道考的是中心极限定理．

$\because X_i \sim Exp(\theta)$．$\therefore$ $E(X_i) = \dfrac{1}{\theta}$ $D(X_i) = \dfrac{1}{\theta^2}$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \overset{\cdot}{\sim} N\left(\dfrac{n}{\theta}, \dfrac{n}{\theta^2}\right)$

标准化

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - \frac{n}{\theta}}{\sqrt{n}/\theta} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1).$$

$$\| $$

$$\frac{\theta\sum\limits_{i=1}^{n}X_i - n}{\sqrt{n}}$$

$\therefore$ A 对，其他错．

设A、B、C为三个独立的随机事件. $0<p(C)<1$，则下列选项中独立的是 ______

A. $A-B$与C　　B. $\overline{A\cup B}$与C　　C. $\overline{AB}$与$\bar{C}$

D. AC与$\bar{C}$

若A、B、C相互独立，则分组交、并、补与其它的只要不重也相互独立.

具体地：

A: $$p[(A-B)C] = p(A\bar{B}C) = p(A)p(\bar{B})p(C)$$
$$= p(A)(1-p(B))p(C)$$
$$= [p(A)-p(A)p(B)]p(C)$$
$$= [p(A)-p(AB)]p(C)$$
$$= p(A-B)p(C) \quad \checkmark$$

B: $$p(\overline{A\cup B}C) = \cancel{p(\overline{A\cup B})}\,p(\bar{A}\bar{B}C) = p(\bar{A})p(\bar{B})p(C)$$
$$= (1-p(A))(1-p(B))p(C)$$
$$= [1-p(A)-p(B)+p(A)p(B)]p(C)$$
$$= [1-p(A)-p(B)+p(AB)]p(C)$$
$$= (1-p(A\cup B))p(C)$$
$$= p(\overline{A\cup B})p(C) \quad \checkmark$$

此题为什么需要$0<p(C)<1$

∵ 0概率事件与1概率事件与任意事件独立.

C: $$p(\overline{AB}\,\bar{C}) = p(\overline{AB\cup C}) = 1-p(AB\cup C) = 1-p(AB)-p(C)+p(ABC)$$
$$= 1-p(AB)-p(C)+p(A)p(C)p(B) = 1-p(AB)-p(C)+p(C)p(AB)$$
$$= 1-p(AB)-p(C)(1-p(AB))$$
$$= (1-p(AB))(1-p(C))$$
$$= p(\overline{AB})p(\bar{C}) \quad \checkmark$$

D: $p(AC\bar{C})=0$　　$p(AC)=p(A)p(C)$　　$p(\bar{C})=1-p(C)$　　×

一仪器同时收到50个信号U_i，$i=1,2,\cdots,50$. 设U_i独立且都服从$(0,10)$内的均匀分布，则 $P\{\sum_{i=1}^{50}U_i>300\}\approx$ ______

A. 0.0071　　B. 0.0093　　C. 0.0710　　D. 0.0082.

此题中心极限定理

$\because U_i\sim U(0,10)$　$\therefore E(U_i)=5$　$D(U_i)=\frac{25}{3}$

$\sum_{i=1}^{50}U_i \sim N(250,\ \frac{50\times 25}{3})$

$P(\sum_{i=1}^{50}U_i>300)=1-F(300)=1-\Phi\left(\frac{300-250}{\frac{25}{3}\sqrt{6}}\right)$

$=1-\Phi(\sqrt{6})=1-\Phi(2.45)=1-0.9929=0.0071$

此题需要查表，一般考试会只用写到Φ的形式！

X 的 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ ，$x\in\mathbb{R}$ ，则 $D(X)=$ ____

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\frac{1}{2}e^{-|x|}dx \xlongequal[\text{关于原点对称.}]{\text{奇函数}} 0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^2de^{-x}$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} -x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx^2$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot 2x\,dx.$$

$$=-\int_0^{+\infty}2x\,de^{-x}$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}} -2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}d2x$$

$$=2\,e^{-x}\Big|_{+\infty}^{0}=2$$

$$\therefore\ D(X)=E(X^2)-(EX)^2=2$$

事实上，此题积分是 Γ 函数 $\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}dx.$

$$\Gamma(p+1)=p!$$

此处 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=\Gamma(3)=2!=2$