Modellering en Simulatie

Oefenzitting 6: Markovketens

Academiejaar 2015–2016

In deze opgave zullen we een tennismatch modelleren door middel van een Markovketen. Hiermee kunnen we vervolgens verschillende tennismatchen simuleren.

1 Game

Een *game* in tennis tussen twee spelers A en B kan gemodelleerd worden met een Markovketen. De ietwat bijzondere puntentelling in tennis is *love* (0 punten), *fifteen* (1 punt), *thirty* (2 punten) en *forty* (3 punten). Van zodra beide spelers minstens 3 punten gescoord hebben en hun score gelijk is dan spreekt men van *deuce*. Als beide spelers minstens 3 punten gescoord hebben en een van de spelers één punt meer heeft dan de andere dan is er sprake van *advantage*. Een *game* eindigt wanneer een speler minstens 4 punten heeft en minstens 2 punten meer dan de tegenstander.

Opgave 1. Laat $\alpha \in (0,1)$ de kans aanduiden dat speler A een *game* wint. Modelleer een *game* met een minimaal aantal toestanden. Duid de absorberende toestanden aan.

Opgave 2. Hoeveel bedraagt de kans op de scores 0–30, 15–15 en 40–0?

Opgave 3. Schrijf een functie die de transitiematrix G_α van je Markovketen geeft waarbij α, de kans dat speler A wint, een invoerparameter is. Om consistent te zijn met deze opgave, is het aangeraden om $g_{i,j}$ te definiëren als de transitiekans van toestand i naar toestand j.

Opgave 4. Elk *game* begint uiteraard met de score 0–0. Pas vervolgens de transitiematrix $G_{0.6}$ achtereenvolgens 2 keer toe op je begintoestand $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$. Hoeveel bedraagt de kans na twee gespeelde punten op de scores 0–30, 15–15 en 30–0? Hoe kan je dit aflezen uit je vector?

We kunnen de stationaire kansverdeling $\mathbf{p}_\infty^T = \mathbf{p}_0^T G_\alpha^\infty$ op verschillende manieren berekenen of benaderen. De meest eenvoudige methode bestaat eruit om iteratief

$$\mathbf{p}_{k+1}^T = \mathbf{p}_k^T G_\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

te berekenen. Daar we weten dat er twee absorberende eindtoestanden zijn en deze ook bereikt kunnen worden vanuit elke andere toestand, volgt dat de stationaire kansverdeling $\mathbf{p}_\infty$ voor niet-absorberende toestanden convergeert naar 0. Bijgevolg kunnen we op triviale wijze de convergentie van deze methode nagaan.

Opgave 5. Bereken de stationaire kansverdeling over de toestanden van je Markovketen via bovenstaande methode van de machten. Stop het iteratieve proces wanneer de norm van de niet-absorberende toestanden kleiner wordt dan `eps`. Hoeveel bedraagt de kans dat speler A wint als $\alpha = 0.1$, 0.25, 0.45, 0.49 en 0.5?

Een alternatieve methode—die enkel praktisch is voor Markovketens met weinig toestanden—bestaat eruit om eerst de Markovketen te reduceren naar een gereduceerde Markovketen. Een gereduceerde Markovketen is een Markovketen waarbij elke toestand vanuit elke andere toestand bereikbaar is. Laat ons met $\widehat{G}_\alpha$ de transitiematrix van de gereduceerde Markovketen aanduiden.[1]

[*] Begeleider: Nick Vannieuwenhoven (`nick.vannieuwenhoven@cs.kuleuven.be`).

[†] Opgesteld door: L. Vanherpe (2005–2010), N. Achtsis (2010–2014) en N. Vannieuwenhoven (2014–2016)

[1] Merk op dat $\widehat{G}_\alpha$ kan gevonden worden door de gepaste rijen en kolommen uit de originele transitiematrix G_α te selecteren.

Voor een *gereduceerde* Markovketen kan men $\widehat{\mathbf{p}}_\infty^T = \widehat{\mathbf{p}}_0^T \widehat{G}_\alpha^\infty$ onmiddelijk berekenen uit de eigenwaardenontbinding $\widehat{G}_\alpha = U_\alpha \Lambda_\alpha U_\alpha^{-1}$, met Λ_α een diagonaalmatrix wiens diagonaalelementen de eigenwaarden van $\widehat{G}_\alpha$ zijn en U_α een inverteerbare matrix, te berekenen. Hieruit volgt dan dat

$$\widehat{\mathbf{p}}_\infty^T = \widehat{\mathbf{p}}_0^T (U_\alpha \Lambda_\alpha U_\alpha^{-1}) \cdots (U_\alpha \Lambda_\alpha U_\alpha^{-1}) = \widehat{\mathbf{p}}_0^T U_\alpha \Lambda_\alpha^\infty U_\alpha^{-1}.$$

Aangezien het spectrum van een transitiematrix binnen de eenheidscirkel ligt, met minstens één eigenwaarde gelijk aan 1, volgt dat Λ_α^∞ op de diagonaal enkel nullen en enen zal bevatten. *Merk op dat de voorgaande iteratieve methode kan geïnterpreteerd worden als het toepassen van de welbekende methode van de machten in het specifieke geval waarbij de grootste eigenwaarde* 1 *is en waarbij men de startvector* $\widehat{\mathbf{p}}_0$ *koos.* Er rest ons enkel nog de initiële kansverdeling $\widehat{\mathbf{p}}_0$ te bepalen. Gezien je de voorgaande opgave hebt opgelost, is nu de meest economische manier om deze initiële kansverdeling te berekenen als volgt: pas eenvoudigweg de methode uit de vorige opgave toe totdat de kansverdeling in je iteratievectoren $\mathbf{p}_k$ zodanig is dat de kans 0 is om je in de reduceerbare toestanden te bevinden. Als alternatief kun je deze initiële verdeling ook analytisch bepalen.

Opgave 6. Bereken de stationaire kansverdeling over de toestanden van je Markovketen via een eigenwaardenontbinding van de gereduceerde Markovketen.

2 Set

Een *set* bestaat uit een serie van *games.* Om een set te winnen moet een speler zes *games* winnen en twee *games* meer gewonnen hebben dan de tegenspeler. Zo niet, dan worden er hoogstens twee extra *games* gespeeld totdat een van de spelers zeven *games* heeft gewonnen; deze speler wint de set.

Opgave 7. Modelleer een *set* met een minimaal aantal toestanden. Duid de absorberende toestanden aan. De kans dat speler A een *game* wint wordt bepaald zoals in de vorige sectie.

In de loop van een tennisspel kan elke speler van zijn tactische en technische fouten leren en past hij zich aan aan de stijl van zijn tegenstander waardoor de kans om een individueel punt te winnen kan wijzigen. Dit kan ook voorgesteld worden door een Markovketen. We zullen dit leerproces toepassen op een *tiebreak.* Een *tiebreak* is het laatste *game* van een set dat gespeeld wordt wanneer de score 6–6 is.

Opgave 8. Modelleer een *game* met een Markovketen waarbij de kans dat speler A een punt wint normaliter $\alpha \in (0,1)$ is; echter, wanneer speler A het laatste punt heeft verloren dan probeert hij extra hard en zal het volgende punt winnen met een kans $\beta \in (0,1)$.

Opgave 9. Schrijf een functie die de transitiematrix $G_{\alpha,\beta}$ van je Markovketen berekent. De kansen α en β zijn de invoerparameters.

Opgave 10. Simuleer vervolgens een set tennis waarbij je in elk *game* de transitiematrix G_α gebruikt, behalve bij een *tiebreak.* In dit laatste geval gebruik je de transitiematrix $G_{\alpha,\beta}$. Probeer $\alpha = 0.55$ en $\beta = 0.7$. Hoeveel bedraagt de kans dat speler A een *set* wint?

3 Match

Een *match* bestaande uit 3 sets wordt gewonnen wanneer een speler twee sets heeft gewonnen.

Opgave 11. Modelleer dit als een Markovketen en simuleer een volledige match. Toon tevens de eindscore, dit wil zeggen, het aantal gewonnen games voor iedere speler in elke set.