

# Introdução às Técnicas de Demonstração

QXD0008 – Matemática Discreta



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ  
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily  
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2025



# Tópicos desta aula

- Enunciados de generalização e de existência
- Provas de Generalização
- Provas de Existência
- Técnicas de Provas de Condicionais



## Referências para esta aula

- **Seção 1.7** do livro: Kenneth H. Rosen. *Matemática Discreta e suas Aplicações*. (Sexta Edição).

# Introdução



# Demonstração de Teoremas

Demonstrar um teorema (geralmente) envolve:

1. analisar a estrutura da sua proposição,
2. identificar técnicas adequadas para provar a afirmação e escolher uma,
3. levantar **hipóteses** de acordo com a técnica escolhida,
4. \* provar uma nova proposição (objetivo), criada pela técnica,
5. concluir que a **proposição-objetivo** segue das hipóteses.

Os Items 3 a 5 serão a prova do teorema, da proposição original. O \* no Item 4 aponta uma abertura na prova. Esta parte é contextual, dependente do assunto do teorema. É nosso trabalho completá-la, re-aplicando o roteiro acima recursivamente.

# Tipos de Enunciados de Teoremas

Há principalmente dois tipos de enunciados:

- **Universais (ou Generalizações)**
- **Existenciais**

Algumas técnicas são orientadas ao tipo de enunciado:

- Prova de Generalização
- Prova Existencial
- Prova por Contraexemplo
- Prova de Unicidade

# Enunciados de Generalização

- **Universais (ou Generalizações)**

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

“Todos os elementos do domínio que satisfazem à propriedade  $P(x)$  devem satisfazer também à propriedade  $Q(x)$ ”

- É o formato mais comum que teoremas assumem.
- A fim de provar um teorema da forma  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ , nosso objetivo é mostrar que  $P(c) \rightarrow Q(c)$  é verdadeiro, onde  $c$  é um elemento arbitrário do domínio.
  - Uma vez provado isso, aplicamos a regra de inferência **generalização universal**.

# Enunciados de Generalização – Exemplo

- **Universais (ou Generalizações)**

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$P(x) = \text{"x é par"} \text{ e } Q(x) = \text{"x}^2 \text{ é par"}$$

Variações:

- “Para todo número, se este é par, então seu quadrado é par.”
- “Para todo número par, seu quadrado é par.”
- “Se um número é par, seu quadrado é par.”
- “Para qualquer número par, seu quadrado é par.”
- “Dado um número par, seu quadrado será par.”
- “O quadrado de um inteiro par é par.”

# Enunciados de Generalização

Como interpretar?

- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Procure os seguintes elementos:

1. Sempre há um condicional ( $\rightarrow$ ) ou um bicondicional ( $\leftrightarrow$ )
2. O restante do texto é composto por afirmações menores.
  - Que partes do enunciado caracterizam objetos?
  - Que tipos de objetos são esses?
3. Algumas afirmações são **condições** (à priori) e outros são **conclusões** (à posteriori).

**Observação:** É possível ter outros elementos no texto, mas estes da lista acima sempre existirão.

# Enunciados de Generalização

Como interpretar?

- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Procure os seguintes elementos:

1. Sempre há um condicional ( $\rightarrow$ ) ou um bicondicional ( $\leftrightarrow$ )
  - **Se não estiver explícito, assuma que é um condicional simples. Quando tiver os outros elementos da lista, re-avalie este item.**

**Resposta:** Condicional  $\rightarrow$

# Enunciados de Generalização

Como interpretar?

- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Procure os seguintes elementos:

2. O restante do texto é composto por afirmações menores.
  - Que partes do enunciado caracterizam objetos?
  - Que tipos de objetos são esses?

**Resposta:** “um inteiro par”, “o quadrado desse inteiro é par”

# Enunciados de Generalização

Como interpretar?

- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Procure os seguintes elementos:

3. Algumas afirmações são **condições** (à priori) e outros são **conclusões** (à posteriori).

**Resposta:** Neste enunciado, a descrição “um inteiro par” condiciona a descrição “o quadrado desse um inteiro é par”. Então temos que **SE** “um inteiro é par”, **ENTÃO** “o quadrado desse inteiro é par”.

# Enunciados Existenciais

- Existenciais

$$\exists xP(x)$$

"Alguns elementos do domínio satisfazem à propriedade  $P(x)$ ."

- A propriedade  $P(x)$  pode ser também uma fórmula com conectivos.
- O conectivo mais comum é a conjunção.
- Admitem exceções.

# Enunciados Existenciais

- Existenciais

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

$P(x)$  = “ $x$  é primo” e  $Q(x)$  = “ $x$  é par”

Variações:

- “Existe um número primo par”
- “Algum número primo é par”
- “Existe um número que é primo e par”
- “Ao menos um número é simultaneamente primo e par”
- “Há números que são primos e pares”
- “Alguns números que são primos são pares”

# Enunciados Existenciais

Como interpretar?

- “Algum número primo é par.”

## Procure os mesmos elementos de antes:

1. Identifique partes do enunciado que descrevam objetos e que tipos de objetos são.
2. Quais deles são condições? Normalmente indicarão o domínio.

## Procure também os seguintes elementos:

3. Quantificadores para cada variável.
  - Se o condicional do enunciado tiver exceções, ele se tornará verdadeiro ou falso? Caso permaneça verdadeiro, o enunciado é existencial; caso falso, é universal.

**Observação:** A palavra “**algum**” indica que basta um elemento do domínio satisfazer às propriedades. Isso significa que o enunciado admite exceções. A única variável existente é existencial.

# Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

- Universal, Verdadeiro: **Prova de Generalizações**
- Universal, Falso: **Prova por Contraexemplo**
- Existencial, Verdadeiro: **Prova de Existência**
  - Construtiva ou
  - Não-Construtiva
- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações**

# Prova de Generalizações



# Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

**Exemplo:** “Existe um número par cujo quadrado é ímpar.”

$$\exists x( x \text{ é par } \wedge x^2 \text{ é ímpar } )$$

# Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

**Exemplo:** “Existe um número par cujo quadrado é ímpar.”

$$\exists x( x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar} )$$

Parece falso, não é mesmo?

Lá atrás vimos que:

- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações**

# Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

**Exemplo:** “Existe um número par cujo quadrado é ímpar.”

$$\exists x( x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar} )$$

Parece falso, não é mesmo?

Lá atrás vimos que:

- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações**

Vamos negar esta frase:

**Não existe nenhum número par cujo quadrado seja ímpar**

$$\neg \exists x( x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar} )$$

# Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

Desenvolvimento completo a partir da negação:

***P*: Não existe nenhum número par cujo quadrado seja ímpar**

# Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

Desenvolvimento completo a partir da negação:

**P: Não existe nenhum número par cujo quadrado seja ímpar**

- $\neg \exists x (x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar})$ 
  - $\equiv \forall x \neg (x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar})$  (Lei da negação do quantificador)
  - $\equiv \forall x (\neg x \text{ é par} \vee \neg x^2 \text{ é ímpar})$  (DeMorgan)
  - $\equiv \forall x (x \text{ é par} \rightarrow \neg x^2 \text{ é ímpar})$  (Lei do condicional)
  - $\equiv \forall x (x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$  (Negação)

**$\neg P$ : Para todo número par, seu quadrado é par.**

**$\neg P$ : Se um número é par, então seu quadrado é par.**

**$\neg P$ : O quadrado de um inteiro par é par.**

# Prova de generalizações

Por exemplo, no enunciado (decodificado anteriormente)

- **O quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x( x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par} )$$

temos o quantificador universal.

Portanto, para demonstrar que o enunciado é verdadeiro, precisaremos da

**Prova de Generalizações.**

# Prova de generalizações

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x ( x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par} )$$

# Prova de generalizações

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x (x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja  $c$  um inteiro qualquer.

# Prova de generalizações

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x (x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja  $c$  um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ $c$  é par  $\rightarrow c^2$  é par”
  - Este item é deixado em aberto pela generalização.
  - Demanda a aplicação de outra técnica.

# Prova de generalizações

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x (x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja  $c$  um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ $c$  é par  $\rightarrow c^2$  é par”
  - Este item é deixado em aberto pela generalização.
  - Demanda a aplicação de outra técnica.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

# Recapitulando...

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

- Universal, Verdadeiro: **Prova de Generalizações**  $\Leftarrow$
- Universal, Falso: **Prova por Contraexemplo**
- Existencial, Verdadeiro: **Prova de Existência**  $\Leftarrow$ 
  - Construtiva
  - Não-Construtiva
- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações**  $\Leftarrow$

# Prova de existência

Vimos, anteriormente, o seguinte enunciado:

- “Algum número primo é par.”

$$\exists x(x \text{ é primo} \wedge x \text{ é par})$$

Neste enunciado, temos um quantificador universal.

- Portanto, para demonstrar que o enunciado é verdadeiro, precisaremos da **Prova de Existência**.
  - Uma Prova de Existência pode ser construtiva ou não-construtiva.

# Prova de existência – Construtiva

- **Definição:** Um inteiro  $n$  é **par** se existe um inteiro  $k$  tal que  $n = 2k$ .
- **Definição:** Um inteiro  $n$  é **ímpar** se existe um inteiro  $k$  tal que  $n = 2k + 1$ .
- **Definição:** Um inteiro  $p$  é **primo** se  $p > 1$  e se os únicos divisores positivos de  $p$  são 1 e  $p$ .
- **Definição:** Um inteiro positivo que é maior do que 1 e não é primo é chamado de **composto**.

**Teorema.** Algum número primo é par.

$$\exists x (x \text{ é primo} \wedge x \text{ é par})$$

**Prova construtiva:** O número 2 é primo e é par.

# Prova de existência – Não-Construtiva

**Teorema.** Algum número primo é par.

$$\exists x(x \text{ é primo} \wedge x \text{ é par})$$

## Prova não-construtiva:

- Por contradição, suponha que não existe nenhum número primo par. Isso significaria que todos os números primos são ímpares.
- Considere agora um número par como, por exemplo, o número 42.
- Pela nossa suposição, 42 não é primo, ou seja, 42 é composto (um produto de números primos).
- Como todos os primos são ímpares, temos um produto de números ímpares que resulta em um número par (Absurdo!).
- Logo, deve existir ao menos um número primo par.

# Recapitulando...

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

- Universal, Verdadeiro: **Prova de Generalizações**  $\Leftarrow$
- Universal, Falso: **Prova por Contraexemplo**  $\Leftarrow$
- Existencial, Verdadeiro: **Prova de Existência**  $\Leftarrow$ 
  - Construtiva
  - Não-Construtiva
- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações**  $\Leftarrow$

# Prova por contraexemplo

- Universal, Falso: **Prova por Contraexemplo**
- O formato mais comum de enunciado é o de generalização  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ .
- Sempre há um condicional (**se-então**) numa generalização.
- Dada uma afirmação condicional, como provar que ela é falsa?
  - A maneira típica de refutar um condicional é criar um contraexemplo.
  - Um **contraexemplo** de uma afirmação “se  $P$ , então  $Q$ ” seria uma instância em que  $P$  é verdadeira, mas  $Q$  é falsa.
- $\neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 
  - $\equiv \exists x \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - $\equiv \exists x \neg(\neg P(x) \vee Q(x))$
  - $\equiv \exists x(\neg \neg P(x) \wedge \neg Q(x))$
  - $\equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

(Lei da negação do quantificador)  
(Lei do condicional)  
(DeMorgan)  
(Negação dupla)

# Definições

- **Definição:** Sejam  $a$  e  $b$  inteiros. Dizemos que  $a$  é **divisível** por  $b$  se existir um inteiro  $c$ , de modo que  $bc = a$ .
- Alternativamente, podemos dizer que:
  - $a$  é um **múltiplo** de  $b$ ,
  - $b$  é um **fator** de  $a$ ,
  - $b$  é um **divisor** de  $a$ , ou
  - $b$  **divide**  $a$ .
- A notação correspondente é  $b|a$  e deve ser lida como “ $b$  divide  $a$ ”.
- Simbolicamente, se  $a$  e  $b$  são inteiros,

$$b|a \iff \exists \text{ um inteiro } k \text{ tal que } a = bk.$$

# Prova por contraexemplo

**Afirmção falsa:** Sejam  $a$  e  $b$  inteiros. Se  $a|b$  e  $b|a$ , então  $a = b$ .

$$\forall a \forall b ((a|b \wedge b|a) \rightarrow (a = b))$$

**Afirmção falsa:** Sejam  $a$  e  $b$  inteiros. Se  $a|b$  e  $b|a$ , então  $a = b$ .

$$\forall a \forall b ((a|b \wedge b|a) \rightarrow (a = b))$$

- Parece que, se  $a|b$ , então  $a \leq b$  e se  $b|a$ , então  $b \leq a$ , então  $a = b$ . Mas este raciocínio é incorreto.
- Para refutar a afirmação, precisamos achar inteiros  $a$  e  $b$  tais que, de uma lado, verifiquem  $a|b$  e  $b|a$ , mas, de outro, não verifiquem  $a = b$ .
- Contraexemplo:  $a = 5$  e  $b = -5$ .

# Resumo — Tipos de Enunciados

Estas técnicas são as únicas associadas a quantificadores.

- Prova de Generalizações
- Prova de Existenciais
- Prova por Contra-Exemplo

Vimos que

- O enunciado mais comum é o de generalização  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ .
- Sempre há um condicional numa generalização.
  - **Conclusão:** Precisamos de técnicas para provar condicionais.

# Prova de Condicionais



# Prova de Condicionais

Técnicas para provar  $P(c) \rightarrow Q(c)$ :

- **Prova direta**
- **Prova por Contraposição**
- **Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)**

# Prova de Condicionais

Técnicas para provar  $P(c) \rightarrow Q(c)$ :

- **Prova direta**
  - **suponha**  $P(C)$ , **alcance/conclua**  $Q(c)$ .
- **Prova por Contraposição**
- **Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)**

# Prova de Condicionais

Técnicas para provar  $P(c) \rightarrow Q(c)$ :

- **Prova direta**
  - **suponha**  $P(C)$ , **alcance/conclua**  $Q(c)$ .
- **Prova por Contraposição**
  - **suponha**  $\neg Q(C)$ , **alcance/conclua**  $\neg P(c)$ .
- **Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)**

# Prova de Condicionais

Técnicas para provar  $P(c) \rightarrow Q(c)$ :

- **Prova direta**
  - **suponha**  $P(C)$ , **alcance/conclua**  $Q(c)$ .
- **Prova por Contraposição**
  - **suponha**  $\neg Q(C)$ , **alcance/conclua**  $\neg P(c)$ .
- **Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)**
  - **suponha**  $p(C) \wedge \neg Q(c)$ , **alcance/conclua**  $\perp$ .

# Prova de Condicionais: Prova Direta



- **Definição:** Uma **demonstração direta** de um condicional  $p \rightarrow q$  é construída quando o primeiro passo é supor que  $p$  é verdadeira; os passos subsequentes são construídos utilizando-se axiomas, definições e teoremas previamente comprovados, junto com regras de inferência, com o passo final mostrando que  $q$  deve ser também verdadeira.

# Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x ( x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par} )$$

# Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x (x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja  $c$  um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ $c$  é par  $\rightarrow c^2$  é par”

# Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x (x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja  $c$  um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ $c$  é par  $\rightarrow c^2$  é par”
  - Este item é deixado em aberto pela generalização.
  - Demanda a aplicação de outra técnica.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

# Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x( x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par} )$$

# Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par**.

$$\forall x (x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja  $c$  um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ $c$  é par  $\rightarrow c^2$  é par”
  - 2.1 Por PROVA DIRETA, suponha que  $c$  é par.
  - 2.2 Então, existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = 2k$  (definição).
  - 2.3 Logo,  $c^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$  é um número par.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

## Prova Direta — Exemplo 2

Demonstre que **se  $n$  é um inteiro ímpar, então  $n^2$  é ímpar..**

$$\forall x (x \text{ é ímpar} \rightarrow x^2 \text{ é ímpar})$$

**Demonstração:**

## Prova Direta — Exemplo 2

Demonstre que **se  $n$  é um inteiro ímpar, então  $n^2$  é ímpar..**

$$\forall x (x \text{ é ímpar} \rightarrow x^2 \text{ é ímpar})$$

### Demonstração:

1. Seja  $n$  um número inteiro ímpar.
2. Pela definição de número ímpar, temos que  $n = 2k + 1$ , em que  $k$  é algum inteiro. Queremos demonstrar que  $n^2$  é também ímpar.
3. Vamos elevar ao quadrado ambos os membros da equação  $n = 2k + 1$ .  
(Para quê? Qual a finalidade?)
4. Assim, temos  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ .
5. Pela definição de inteiro ímpar, concluímos que  $n^2$  é ímpar.
6. Consequentemente, provamos que se  $n$  é um inteiro ímpar, então  $n^2$  é ímpar. □

# Definição

Um inteiro  $a$  é um **quadrado perfeito** se existe um inteiro  $b$  tal que  $a = b^2$ .

- **Exemplos:** 4, 9, 16, 25, 36, ...

## Prova Direta — Exemplo 3

Demonstre que **se  $m$  e  $n$  são ambos quadrados perfeitos, então  $m \cdot n$  também é um quadrado perfeito.**

$$U = \mathbb{N}, \forall m \forall n (QP(m) \wedge QP(n) \longrightarrow QP(mn))$$

**Demonstração:**

## Prova Direta — Exemplo 3

Demonstre que **se  $m$  e  $n$  são ambos quadrados perfeitos, então  $m \cdot n$  também é um quadrado perfeito.**

$$U = \mathbb{N}, \forall m \forall n (QP(m) \wedge QP(n) \longrightarrow QP(mn))$$

### Demonstração:

1. Sejam  $m$  e  $n$  dois inteiros quadrados perfeitos.
2. Pela definição de quadrado perfeito, segue-se que existem inteiros  $s$  e  $t$  tal que  $m = s^2$  e  $n = t^2$ .
3. Portanto, temos que  $mn = s^2 t^2 = sstt = stst = (st)(st) = (st)^2$ 
  - (usando comutatividade e associatividade da multiplicação).
4. Pela definição de quadrado perfeito, segue que  $mn$  também é um quadrado perfeito. □

# Prova Direta: Transitividade da divisibilidade

**Teorema.** Para todos os inteiros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , se  $a|b$  e  $b|c$ , então  $a|c$ .

$$U = \mathbb{Z}, \quad \forall a \forall b \forall c (a|b \wedge b|c \longrightarrow a|c)$$

**Demonstração:**

# Prova Direta: Transitividade da divisibilidade

**Teorema.** Para todos os inteiros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , se  $a|b$  e  $b|c$ , então  $a|c$ .

$$U = \mathbb{Z}, \quad \forall a \forall b \forall c (a|b \wedge b|c \longrightarrow a|c)$$

## Demonstração:

1. Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  inteiros arbitrários, tais que  $a$  divide  $b$  e  $b$  divide  $c$ .
2. Vamos mostrar que  $a$  divide  $c$ .
3. Pela definição de divisibilidade,  $b = ar$  e  $c = bs$  para inteiros  $r$  e  $s$ .
4. Por substituição e associatividade da multiplicação, temos que:

$$\begin{aligned} c &= bs \\ &= (ar)s \\ &= a(rs) \end{aligned}$$

5. Seja  $k = rs$ , onde  $k$  é um número inteiro.
6. Logo,  $c = ak$ , ou seja,  $a$  divide  $c$ , pela definição de divisibilidade. □

# Definição de racional e irracional

O número real  $r$  é **racional** se existem inteiros  $p$  e  $q$  com  $q \neq 0$ , tal que  $r = p/q$ .

Todo número racional pode ser escrito como uma fração irredutível ( $p$  e  $q$  não tem divisor comum).

Um número real que não é racional é chamado de **irracional**.

# Definição de racional e irracional

Exemplos:

(a)  $10/3$  é racional?

# Definição de racional e irracional

Exemplos:

(a)  $10/3$  é racional?

Sim, quociente de inteiros.

# Definição de racional e irracional

Exemplos:

- (a)  $10/3$  é racional?  
Sim, quociente de inteiros.
- (b)  $0,281$  é racional?

# Definição de racional e irracional

Exemplos:

(a)  $10/3$  é racional?

Sim, quociente de inteiros.

(b)  $0,281$  é racional?

Sim. Número na notação decimal que representa  $281/1000$ .

# Definição de racional e irracional

Exemplos:

(a)  $10/3$  é racional?

Sim, quociente de inteiros.

(b)  $0,281$  é racional?

Sim. Número na notação decimal que representa  $281/1000$ .

(c)  $0,121212\dots$  é racional?

# Definição de racional e irracional

Exemplos:

(a)  $10/3$  é racional?

Sim, quociente de inteiros.

(b)  $0,281$  é racional?

Sim. Número na notação decimal que representa  $281/1000$ .

(c)  $0,121212\dots$  é racional?

Sim.

Seja  $x = 0,121212\dots$  e  $100x = 12,121212\dots$

$$100x - x = 12,121212\dots - 0,121212\dots$$

$$99x = 12$$

$$x = 12/99$$

## Prova Direta — Exemplo 5

**Teorema.** A soma de dois números racionais é um número racional.

$$U = \mathbb{Q}, \forall r \forall s (r \in \mathbb{Q} \wedge s \in \mathbb{Q} \longrightarrow r + s \in \mathbb{Q})$$

**Demonstração:**

## Prova Direta — Exemplo 5

**Teorema.** A soma de dois números racionais é um número racional.

$$U = \mathbb{Q}, \forall r \forall s (r \in \mathbb{Q} \wedge s \in \mathbb{Q} \rightarrow r + s \in \mathbb{Q})$$

### Demonstração:

1. Sejam  $r$  e  $s$  dois números racionais.
2. Pela definição de número racional, existem inteiros  $p$  e  $q$ , com  $q \neq 0$ , tais que  $r = p/q$ , e inteiros  $t$  e  $u$ , com  $u \neq 0$ , tais que  $s = t/u$ .
  - Podemos usar esta informação para mostrar que  $r + s$  é racional?
3. Somando  $r$  e  $s$ , nós obtemos o seguinte número:

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}.$$

4. Como  $q \neq 0$  e  $u \neq 0$ , segue que  $qu \neq 0$ . Assim,  $r + s$  pode ser expresso como a razão de dois inteiros,  $pu + qt$  e  $qu$ , com  $qu \neq 0$ . Isso implica que  $r + s$  é racional. □

# Prova de Condicionais: Prova por Contraposição



# Prova por Contraposição: Princípios

1. Expresse a afirmação a ser provada na forma:

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

2. Reescreva a afirmação na forma contrapositiva:

$$\forall x \in U, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x)$$

3. Prove a contrapositiva por uma prova direta:

- (a) Suponha  $x$  um elemento escolhido arbitrariamente de  $U$  tal que  $\neg Q(x)$  seja  $V$ .
- (b) Tomando  $\neg Q(x)$  como premissa e usando axiomas, definições e teoremas previamente provados e regras de inferência, mostre que  $\neg P(x)$  deve ser verdadeira.

## Prova por Contraposição — Exemplo 1

**Teorema.** Dado qualquer inteiro  $n$ , se  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

**Demonstração:** (por contraposição)

# Prova por Contraposição — Exemplo 1

**Teorema.** Dado qualquer inteiro  $n$ , se  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

**Demonstração:** (por contraposição)

1. (**Instanciação**) Seja  $n$  um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que: “ $n^2$  é par  $\rightarrow n$  é par”
  - 2.1 Por CONTRAPOSIÇÃO, suponha que  $n$  é ímpar.
  - 2.2 Devemos mostrar que  $n^2$  não é par (ou seja, é ímpar).
  - 2.3 Por definição de um número ímpar, sabe-se que  $n = 2k + 1$  para algum inteiro  $k$ . Então,  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ .
  - 2.4 Desta forma,  $n^2$  é um número ímpar.
3. (**Generalização**) Como provamos a propriedade para um inteiro  $n$  qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.  
Como a negação do conseqüente do enunciado condicional implica a negação do antecedente do enunciado condicional, temos que o enunciado condicional original é verdadeiro.

# Prova por Contraposição — Exemplo 1

**Teorema.** Dado qualquer inteiro  $n$ , se  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

**Demonstração:**

# Prova por Contraposição — Exemplo 1

**Teorema.** Dado qualquer inteiro  $n$ , se  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

## Demonstração:

Vamos provar a afirmação por contraposição. Seja  $n$  um inteiro qualquer. Suponha que  $n$  é ímpar. Pela definição de número ímpar, temos que  $n = 2k + 1$  para algum inteiro  $k$ . Isso implica que

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Isto é,  $n^2 = 2s + 1$  sendo  $s = (2k^2 + 2k)$  é um inteiro. Pela definição de número ímpar, concluímos que  $n^2$  é ímpar.

Como a negação do consequente do enunciado condicional implica a negação do antecedente do enunciado condicional, temos que o enunciado condicional original é verdadeiro. □

## Prova por Contraposição — Exemplo 2

**Teorema.** Dados dois inteiros positivos  $a$  e  $b$ , se  $n = ab$ , então  $a \leq \sqrt{n}$  ou  $b \leq \sqrt{n}$ .

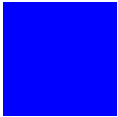
**Demonstração:**

## Prova por Contraposição — Exemplo 2

**Teorema.** Dados dois inteiros positivos  $a$  e  $b$ , se  $n = ab$ , então  $a \leq \sqrt{n}$  ou  $b \leq \sqrt{n}$ .

### Demonstração:

1. Vamos provar a contrapositiva. Dados dois inteiros positivos  $a$  e  $b$ , suponha que  $a \leq \sqrt{n}$  ou  $b \leq \sqrt{n}$  é falso.
2. Usando o significado da disjunção junto com a Lei de DeMorgan, isto implica que  $a > \sqrt{n}$  e  $b > \sqrt{n}$ .
3. Podemos multiplicar essas duas inequações juntas para obter  $ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ .
  - Aqui, usamos o fato de que se  $0 < s < t$  e  $0 < u < v$ , então  $su < tv$ .
4. Assim, concluímos que  $n \neq ab$ .
5. Como a negação do consequente do enunciado condicional implica a negação do antecedente do enunciado condicional, temos que o enunciado condicional original é verdadeiro. □



## Prova de Condicionais: Prova por Contradição (Redução ao Absurdo)



# Prova por Contradição: Princípios

1. Expresse a afirmação a ser provada na forma:

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

2. Primeiro, suponha que  $\neg Q(x)$  é verdadeira para  $x$  qualquer.
3. Então, use a premissa  $P(x)$  e a negação da conclusão,  $\neg Q(x)$ , para chegar em uma contradição.

A razão pela qual essas demonstrações são válidas está na equivalência lógica:

$$p \rightarrow q \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{F}$$

# Prova por Contradição — Exemplo 1

**Teorema.** O quadrado de um inteiro par é par.

# Prova por Contradição — Exemplo 1

**Teorema.** O quadrado de um inteiro par é par.

1. (**Instanciação Universal**) Seja  $c$  um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ $c$  é par  $\rightarrow c^2$  é par”
  - Por CONTRADIÇÃO, suponha que  $c$  é par, mas  $c^2$  é ímpar.
  - Então, existem  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = 2k$  (definição de par) e  $j \in \mathbb{Z}$  tal que  $c^2 = 2j + 1$  (definição de ímpar).
  - Temos que  $c^2 = c \cdot c = 2k \cdot 2k = 4k^2$ . Logo,  $4k^2 = 2j + 1$ .
  - Isolando  $j$ , encontraremos que  $j = \frac{4k^2 - 1}{2} = \frac{4k^2}{2} - \frac{1}{2} = 2k^2 - \frac{1}{2}$ , que não é inteiro.
  - Absurdo, pois  $j$  deveria ser inteiro.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

## Prova por Contradição — Exemplo 2

**Teorema.** A soma de dois inteiros ímpares é par.

## Prova por Contradição — Exemplo 2

**Teorema.** A soma de dois inteiros ímpares é par.

1. (**Instanciação Universal**) Sejam  $p$  e  $q$  dois inteiros quaisquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “se  $p$  e  $q$  são ímpares  $\rightarrow p + q$  é par”
  - Por CONTRADIÇÃO, suponha que  $p$  e  $q$  são ímpares, mas  $p + q$  é ímpar.
  - Então, existem  $\{k, j\} \subset \mathbb{Z}$  tais que  $p = 2k + 1$  e  $q = 2j + 1$  (definição de ímpar)  
e  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $p + q = 2m + 1$  (definição de ímpar).
  - Temos que  $p + q = 2k + 1 + 2j + 1 = 2m + 1$ . Logo,  
 $2(k + j + 1) = 2m + 1$ .
  - Isolando  $m$ , encontraremos que  $m = \frac{2(k+j+1)-1}{2} = \frac{2(k+j+1)}{2} - \frac{1}{2}$ , **que não é inteiro.**
  - Absurdo, pois  $m$  deveria ser inteiro.

## Relação entre prova por contradição e prova por contraposição

- Na prova por contraposição a afirmação

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

é provada apresentando uma prova direta da afirmação equivalente

$$\forall x \in U, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x)$$

# Relação entre prova por contradição e prova por contraposição

- Na prova por contraposição a afirmação

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

é provada apresentando uma prova direta da afirmação equivalente

$$\forall x \in U, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x)$$

- Este tipo de prova segue os seguintes passos:
  - (a) Suponha que  $x$  é um elemento arbitrário de  $U$  tal que  $\neg Q(x)$
  - (b) Através do raciocínio dedutivo isto leva a  $\neg P(x)$

# Relação entre prova por contradição e prova por contraposição

- Na prova por contraposição a afirmação

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

é provada apresentando uma prova direta da afirmação equivalente

$$\forall x \in U, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x)$$

- Este tipo de prova segue os seguintes passos:
  - (a) Suponha que  $x$  é um elemento arbitrário de  $U$  tal que  $\neg Q(x)$
  - (b) Através do raciocínio dedutivo isto leva a  $\neg P(x)$
- A prova por contradição é baseada nos seguintes passos:
  - (a) Suponha que existe um elemento  $x \in U$  tal que  $P(x) \wedge \neg Q(x)$
  - (b) Usando o mesmo raciocínio dedutivo isto leva a contradição  
 $P(x) \wedge \neg P(x)$

# Relação entre prova por contradição e prova por contraposição: Exemplo

**Teorema.** Para todo inteiro  $n$ , se  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

**Demonstração:** (por contradição)

- Suponha, por contradição, que exista um inteiro  $n$  tal que  $n^2$  é par e  $n$  é ímpar. (Deve-se chegar a uma contradição)
- Já que  $n$  é ímpar,  $n^2$  que é o produto  $n \cdot n$  é também ímpar.
- Isto contradiz a suposição que  $n^2$  é par. (Logo, as proposições  $P(n) = n^2$  é par e  $\neg P(n) = n^2$  é ímpar são verdadeiras ao mesmo tempo, o que é uma contradição.)

# Relação entre prova por contradição e prova por contraposição: Exemplo

- Prova por contraposição:
  - ☺ É fácil saber que conclusão deve ser provada: negação da hipótese.
  - ☺ Não é necessário obter a negação da afirmação.
  - ☹ **Só pode ser usado para afirmações com quantificadores existencial ou universal.**
- Prova por contradição:
  - ☺ A prova termina assim que é achada uma contradição.
  - ☺ Esta técnica aplica-se a declarações gerais, sejam elas quantificadas ou não-quantificadas.
  - ☹ **A negação da afirmação é mais complexa.**
  - ☹ **Pode ser mais difícil achar o caminho da prova.**

# Provas de condicionais

Estas técnicas são as mais comumente usadas para condicionais.

- Prova Direta
- Prova por Contraposição
- Prova por Contradição

## Sentenças Não-Quantificadas: Prova por Contradição (Redução ao Absurdo)



# Demonstração de Proposições Não-Quantificadas por Contradição: Princípios

1. Suponha que a afirmação a ser provada é falsa.
2. Mostre que essa suposição leva logicamente a uma contradição.
3. Conclua que a afirmação a ser provada é verdadeira.

A razão pela qual esta técnica de demonstração é válida deve-se à seguinte equivalência:

$$P \equiv P \vee \mathbf{F} \equiv \neg(\neg P) \vee \mathbf{F} \equiv \neg P \rightarrow \mathbf{F}$$

- Suponha que podemos encontrar uma contradição  $q$  tal que  $\neg p \rightarrow q$  é verdadeira. Como  $q$  é falsa, mas  $\neg p \rightarrow q$  é verdadeira, podemos concluir que  $\neg p$  é falsa, o que significa que  $p$  é verdadeira.
- A dificuldade nesta técnica pode ser expressa nesta pergunta: Como podemos encontrar uma contradição  $q$  que possa nos ajudar a provar que  $p$  é verdadeira?

# Prova por Contradição

**Teorema.**  $\sqrt{2}$  é irracional.

**Demonstração:**

# Prova por Contradição

**Teorema.**  $\sqrt{2}$  é irracional.

## Demonstração:

- Suponha, por contradição, que  $\sqrt{2}$  é um número racional.
- Pela definição de número racional,  $\sqrt{2}$  pode ser escrito como uma fração de inteiros.
- Então, sejam  $a$  e  $b$  inteiros tais que  $\sqrt{2} = a/b$ , onde  $b \neq 0$  e  $a$  e  $b$  não têm fator comum (a fração  $a/b$  é irredutível). (Aqui, estamos usando o fato de que todo número racional pode ser escrito em uma fração irredutível.)
- Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, segue-se que  $2 = a^2/b^2$ . Portanto,  $2b^2 = a^2$ .
- Pela definição de número par,  $a^2$  é par. Podemos usar o fato de que se  $a^2$  é par, então  $a$  é par, o qual segue do teorema anterior provado em aula. 59

# Prova por Contradição

## Continuação da Demonstração:

- Mas se  $a$  é par, pela definição de número par,  $a = 2c$  para algum inteiro  $c$ . Então,  $2b^2 = a^2$  implica que  $2b^2 = 4c^2$ .
- Dividindo ambos os membros dessa equação por 2, temos  $b^2 = 2c^2$ .
- Pela definição de par, isso significa que  $b^2$  é par.
- Novamente usando o fato de que se o quadrado de um inteiro é par, então o inteiro também deve ser par, concluímos que  $b$  deve ser par também.
- Portanto, ter assumido que  $\sqrt{2}$  é racional nos levou à equação  $\sqrt{2} = a/b$ , em que  $a$  e  $b$  não têm fator comum, mas  $a$  e  $b$  são pares.
- Isto é uma contradição.
- Como a afirmação “ $\sqrt{2}$  é racional” nos levou a uma contradição, então ela deve ser falsa. Ou seja a sentença “ $\sqrt{2}$  é irracional” é que é verdadeira.
- Portanto, provamos que  $\sqrt{2}$  é irracional. □

# Provas de Equivalência



- **Como provar sentenças da forma  $p \leftrightarrow q$ ?**
- Para demonstrar um teorema que é uma sentença bicondicional, mostramos que  $p \rightarrow q$  e  $q \rightarrow p$  são ambas verdadeiras.
- A validade desse método segue da seguinte equivalência lógica:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

# Prova de Equivalências — Exemplo 1

**Teorema.** Se  $n$  é um inteiro, então  $n$  é par se e somente se  $n^2$  é par.

# Prova de Equivalências — Exemplo 1

**Teorema.** Se  $n$  é um inteiro, então  $n$  é par se e somente se  $n^2$  é par.

1. (**Instanciação Universal**) Seja  $c$  um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ $c$  é par  $\leftrightarrow c^2$  é par”
  - A fim de provar esse bicondicional, devemos provar que “ $c$  é par  $\rightarrow c^2$  é par” e que “ $c^2$  é par  $\rightarrow c$  é par”.
  - Ambas as implicações já foram provadas em slides anteriores.
  - Portanto, como provamos que ambas “ $c$  é par  $\rightarrow c^2$  é par” e “ $c^2$  é par  $\rightarrow c$  é par” são verdadeiras, mostramos que “ $c$  é par  $\leftrightarrow c^2$  é par”.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

# Prova de Equivalências — Exemplo 2

**Teorema.** As seguintes sentenças sobre o inteiro  $n$  são equivalentes:

- $p_1$ :  $n$  é par.
- $p_2$ :  $n - 1$  é ímpar.
- $p_3$ :  $n^2$  é par.

## Prova de Equivalências — Exemplo 2

**Teorema.** As seguintes sentenças sobre o inteiro  $n$  são equivalentes:

- $p_1$ :  $n$  é par.
- $p_2$ :  $n - 1$  é ímpar.
- $p_3$ :  $n^2$  é par.

### Demonstração:

- Note que basta mostrar que os condicionais  $p_1 \rightarrow p_2$ ,  $p_2 \rightarrow p_3$  e  $p_3 \rightarrow p_1$  são verdadeiros.
- Para mostrar  $p_1 \rightarrow p_2$  usamos demonstração direta. Suponha que  $n$  é par. Então,  $n = 2k$  para algum inteiro  $k$ . Consequentemente,  
$$n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1 + 1) - 1 = 2(k - 1) + 1.$$
Isso significa que  $n - 1$  é ímpar, pois é da forma  $2m + 1$ , em que  $m = k - 1$ .

# Prova de Equivalências — Exemplo 2

## Continuação da Demonstração:

- Para mostrar  $p_2 \rightarrow p_3$  usamos demonstração direta. Suponha que  $n - 1$  é ímpar. Então  $n - 1 = 2k + 1$  para algum inteiro  $k$ . Portanto,  $n = 2k + 2$ , e isto implica que  $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$ . Logo,  $n^2$  é par, pois é da forma  $2m$ , sendo  $m = 2k^2 + 4k + 2$ .
- Para mostrar  $p_3 \rightarrow p_1$  usamos demonstração por contraposição. Ou seja, provamos que se  $n$  não é par, então  $n^2$  não é par. Isso é o mesmo que demonstrar que se  $n$  é ímpar, então  $n^2$  é ímpar, o que já demonstramos em slides anteriores. Isso completa a demonstração.  $\square$

FIM

