Fecho de uma endorrelação

QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2025

Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Fecho reflexivo
- Fecho simétrico
- Fecho transitivo
    - Grafos direcionados e fechos transitivos
    - Caminhos em grafos e caminhos em relações
    - Caracterização do fecho transitivo de uma relação

Referências para esta aula

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Seção 9.4** do livro:
  Discrete Mathematics and Its Applications.
  Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**

- **Seção 8.4** do livro: Matemática Discreta e suas Aplicações.
  Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

Introdução

Motivação

- Frequentemente é desejável estender uma relação R de forma a garantir que ela satisfaz determinado conjuntos de propriedades.
  - por exemplo, garantir que R satisfaz a propriedade reflexiva

Motivação

- Frequentemente é desejável estender uma relação R de forma a garantir que ela satisfaz determinado conjuntos de propriedades.
  - por exemplo, garantir que R satisfaz a propriedade reflexiva
- Se uma relação binária R definida em um conjunto A não possui uma determinada propriedade P, podemos "estender" R e obter uma nova relação R^* em A que tenha essa propriedade.

Motivação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Frequentemente é desejável estender uma relação R de forma a garantir que ela satisfaz determinado conjuntos de propriedades.
    - por exemplo, garantir que R satisfaz a propriedade reflexiva

- Se uma relação binária R definida em um conjunto A não possui uma determinada propriedade P, podemos "estender" R e obter uma nova relação R^* em A que tenha essa propriedade.

- Estender significa que a nova relação R^* em A contém todos os pares de R e os pares adicionais necessários para que a propriedade P seja válida.

Fecho de uma endorrelação

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição: Seja R uma endorrelação num conjunto A e P uma propriedade. O fecho de R com relação à propriedade P é a endorrelação R^* no conjunto A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* satisfaz a propriedade P.
2. $R \subseteq R^*$.
3. Se S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade P, então $R^* \subseteq S$.
   - ou seja, R^* é a <u>menor</u> endorrelação em A que contém R e que satisfaz a propriedade P

Fecho de uma endorrelação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Definição: Seja R uma endorrelação num conjunto A e P uma propriedade. O fecho de R com relação à propriedade P é a endorrelação R^* no conjunto A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* satisfaz a propriedade P.
2. $R \subseteq R^*$.
3. Se S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade P, então $R^* \subseteq S$.
   - ou seja, R^* é a menor endorrelação em A que contém R e que satisfaz a propriedade P

- **Obs. 1:** O fecho de uma endorrelação R com relação a uma determinada propriedade P pode não existir.

Fecho de uma endorrelação

Definição: Seja R uma endorrelação num conjunto A e P uma propriedade. O fecho de R com relação à propriedade P é a endorrelação R^* no conjunto A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* satisfaz a propriedade P.
2. $R \subseteq R^*$.
3. Se S é uma outra relação qualquer que contém R e satisfaz a propriedade P, então $R^* \subseteq S$.
   - ou seja, R^* é a menor endorrelação em A que contém R e que satisfaz a propriedade P

- **Obs. 1:** O fecho de uma endorrelação R com relação a uma determinada propriedade P pode não existir.
- **Obs. 2:** Fechos de uma relação R com relação às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva podem ser encontrados.

Fecho reflexivo

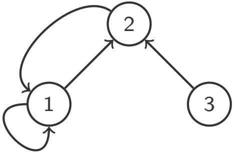
Definição: Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. O fecho reflexivo de R é a endorrelação R^* em A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* é reflexiva.
2. $R \subseteq R^*$
3. Se S é uma outra relação transitiva qualquer que contém R, então $R^* \subseteq S$.

Fecho Reflexivo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

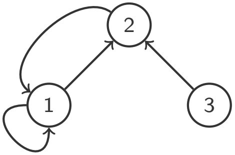
Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.
Como construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?



Fecho Reflexivo

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.

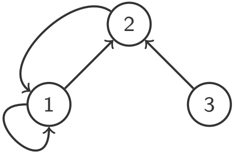
Como construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?

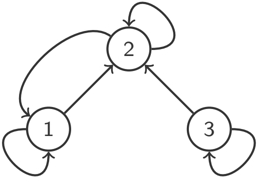


Resposta: Adicionando os pares $(2,2)$ e $(3,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (a,a) que não estão em R. Além disso, **toda** relação reflexiva que contém R deve conter também $(2,2)$ e $(3,3)$.

Fecho Reflexivo

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.
Como construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?

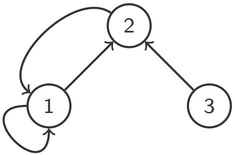


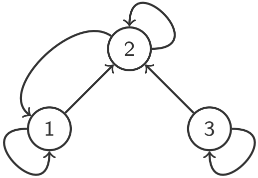


Resposta: Adicionando os pares $(2,2)$ e $(3,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (a,a) que não estão em R. Além disso, **toda** relação reflexiva que contém R deve conter também $(2,2)$ e $(3,3)$.

Fecho Reflexivo

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.
Como construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?





Resposta: Adicionando os pares $(2,2)$ e $(3,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (a,a) que não estão em R. Além disso, **toda** relação reflexiva que contém R deve conter também $(2,2)$ e $(3,3)$.

- Como essa nova relação contém R, é reflexiva e está contida em toda relação reflexiva que contém R, ela é chamada de fecho reflexivo de R.

Fecho Reflexivo

Exercício para casa: Seja R uma endorrelação num conjunto A. Prove que o fecho reflexivo de R é a relação $R \cup \Delta$ tal que $\Delta = \{(a, a) \colon a \in R\}$.

Obs.: A endorrelação Δ é chamada relação diagonal em A.

Fecho Reflexivo

Exercício para casa: Seja R uma endorrelação num conjunto A. Prove que o fecho reflexivo de R é a relação $R \cup \Delta$ tal que $\Delta = \{(a, a) \colon a \in R\}$.

Obs.: A endorrelação Δ é chamada relação diagonal em A.

Exemplo:

Qual é o fecho reflexivo da endorelação $R = \{(a, b) \colon a < b\}$ no conjunto dos inteiros?

Fecho Reflexivo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exercício para casa: Seja R uma endorrelação num conjunto A. Prove que o fecho reflexivo de R é a relação $R \cup \Delta$ tal que $\Delta = \{(a, a) \colon a \in R\}$.

Obs.: A endorrelação Δ é chamada relação diagonal em A.

Exemplo:
Qual é o fecho reflexivo da endorelação $R = \{(a, b) \colon a < b\}$ no conjunto dos inteiros?

Solução:

- De acordo com a definição acima, o fecho reflexivo de R é

$$R \cup \Delta = \{(a, b) \colon a < b\} \cup \underbrace{\{(a, a) \colon a \in \mathbb{Z}\}}_{\text{relação diagonal } \Delta} = \{(a, b) \colon a \leq b\}.$$

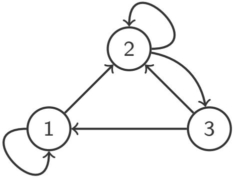
Fecho simétrico

Definição: Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. O fecho simétrico de R é a endorrelação R^* em A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* é simétrica.
2. $R \subseteq R^*$
3. Se S é uma outra relação simétrica qualquer que contém R, então $R^* \subseteq S$.

Fecho simétrico

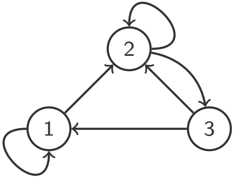
Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica. Como construir uma relação simétrica contendo R que seja a menor possível?



Fecho simétrico

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica. Como construir uma relação simétrica contendo R que seja a menor possível?

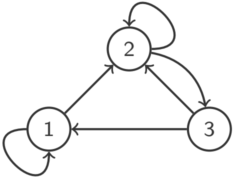


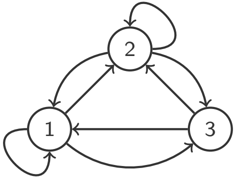
Resposta: Adicionando os pares $(2,1)$ e $(1,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (b,a) com $(a,b) \in R$ que não estão em R. Esta nova relação é simétrica e contém R. Além disso, **toda** relação simétrica que contém R deve conter também $(2,1)$ e $(1,3)$.

Fecho simétrico

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica. Como construir uma relação simétrica contendo R que seja a menor possível?

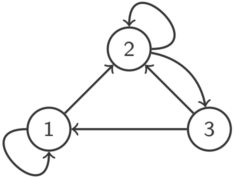


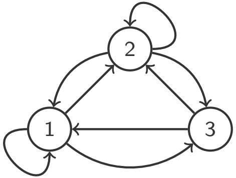


Resposta: Adicionando os pares $(2,1)$ e $(1,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (b,a) com $(a,b) \in R$ que não estão em R. Esta nova relação é simétrica e contém R. Além disso, **toda** relação simétrica que contém R deve conter também $(2,1)$ e $(1,3)$.

Fecho simétrico

Exemplo: A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica. Como construir uma relação simétrica contendo R que seja a menor possível?





Resposta: Adicionando os pares $(2,1)$ e $(1,3)$ em R, porque estes são os únicos pares da forma (b,a) com $(a,b) \in R$ que não estão em R. Esta nova relação é simétrica e contém R. Além disso, **toda** relação simétrica que contém R deve conter também $(2,1)$ e $(1,3)$.

- Como essa nova relação contém R, é simétrica e está contida em toda relação simétrica que contém R, ela é chamada de fecho simétrico de R.

Fecho simétrico

- Como o exemplo anterior ilustrou, o fecho simétrico da endorrelação R em A pôde ser construído adicionando a R todos os pares (b, a) que não estão em R mas que $(a, b) \in R$.
- A adição desses pares produz uma relação que é simétrica, que contém R, e que está contida em qualquer relação simétrica que contém R.

Exercício para casa: Seja R uma endorrelação em um conjunto A. Prove que o fecho simétrico da relação R pode ser construído tomando a união da relação R com a sua inversa. Ou seja, prove que $R \cup R^{-1}$ é o fecho simétrico de R.

- Lembre-se que $R^{-1} = \{(b, a) \colon (a, b) \in R\}$.

Fecho transitivo

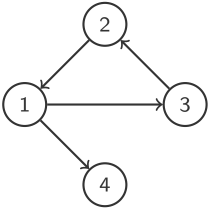
Definição: Seja A um conjunto e R uma endorrelação em A. O fecho transitivo de R é a endorrelação R^* em A que satisfaz as três condições abaixo:

1. R^* é transitiva.
2. $R \subseteq R^*$
3. Se S é uma outra relação transitiva qualquer que contém R, então $R^* \subseteq S$.

Fecho transitivo

Exemplo:

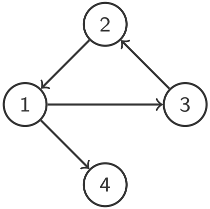
- Considere a relação $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Esta relação é transitiva?



Fecho transitivo

Exemplo:

- Considere a relação $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Esta relação é transitiva?
- **Resposta:** Não, pois ela não contém todos os pares da forma (a,c) tal que (a,b) e (b,c) estão em R. Os pares desta forma que não estão em R são $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$ e $(3,1)$.

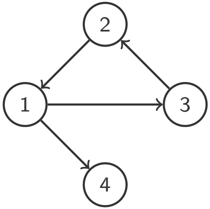


relação não transitiva

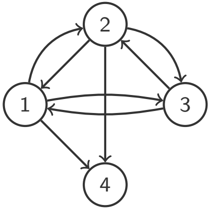
Fecho transitivo

Exemplo:

- Considere a relação $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Esta relação é transitiva?
- **Resposta:** Não, pois ela não contém todos os pares da forma (a, c) tal que (a, b) e (b, c) estão em R. Os pares desta forma que não estão em R são $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ e $(3, 1)$.
- A relação resultante da adição desses pares em R é transitiva?



relação não transitiva

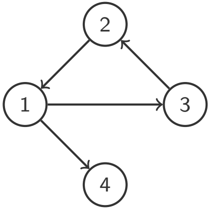


Fecho transitivo

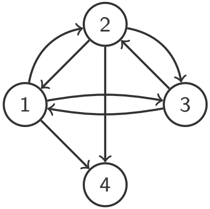
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Exemplo:

- Considere a relação $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ no conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Esta relação é transitiva?
- **Resposta:** Não, pois ela não contém todos os pares da forma (a,c) tal que (a,b) e (b,c) estão em R. Os pares desta forma que não estão em R são $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$ e $(3,1)$.
- A relação resultante da adição desses pares em R é transitiva?
  - Não, pois ela contém $(3,1)$ e $(1,4)$ mas não contém $(3,4)$.



relação não transitiva



relação não transitiva

Fecho transitivo

- O exemplo anterior mostra que construir o fecho transitivo de uma relação é mais complicado que construir os fechos reflexivo e simétrico.
- Veremos que a representação de uma relação como um grafo direcionado ajuda na construção do fecho transitivo.

FIM