

# Relações e Suas Propriedades

QXD0008 – Matemática Discreta



UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO CEARÁ  
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily  
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2025



# Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Relação Binária
- Relações binárias e funções
- Propriedades da relação binária:
  - Reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva
- Relação Inversa
- Relação Composta



# Referências para esta aula

- **Seções 9.1 e 9.3** do livro:  
[Discrete Mathematics and Its Applications.](#)  
Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**
- **Seção 8.1 e 8.3 (Relações e suas propriedades)** do livro: [Matemática Discreta e suas Aplicações.](#)  
Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

# Introdução



- O mundo está “povoado” por relações: família, emprego, governo, negócios, etc.
- Entidades em Matemática e Ciência da Computação também podem estar relacionadas entre si de diversas formas.
- Objetivo:
  - estudar relações em conjuntos;
  - estudar formas de representar relações;
  - estudar propriedades de relações.

## Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. O **produto cartesiano** de  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \times B$ , é o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$ , tal que  $a \in A$  e  $b \in B$ . Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

## Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. O **produto cartesiano** de  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \times B$ , é o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$ , tal que  $a \in A$  e  $b \in B$ . Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

### Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ?

## Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. O **produto cartesiano** de  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \times B$ , é o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$ , tal que  $a \in A$  e  $b \in B$ . Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

### Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ?
  - **Resposta:**  $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

## Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. O **produto cartesiano** de  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \times B$ , é o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$ , tal que  $a \in A$  e  $b \in B$ . Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

### Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ?
  - **Resposta:**  $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
- Qual é o produto cartesiano de  $B = \{a, b, c\}$  e  $A = \{1, 2\}$ ?

# Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. O **produto cartesiano** de  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \times B$ , é o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$ , tal que  $a \in A$  e  $b \in B$ . Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

## Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ?
  - **Resposta:**  $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
- Qual é o produto cartesiano de  $B = \{a, b, c\}$  e  $A = \{1, 2\}$ ?
  - **Resposta:**  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

# Relações

- Sejam os conjuntos  $A = \{0, 5, 8\}$  e  $B = \{3, 7, 9\}$ .
- Suponha que um elemento de  $x \in A$  está relacionado com um elemento  $y \in B$  se e somente se  $x < y$ .
- A notação  $xRy$  quer dizer “ $x$  está relacionado com  $y$ ”, onde  $R$  é o nome da relação (neste caso,  $x < y$ ).

# Relações

- Sejam os conjuntos  $A = \{0, 5, 8\}$  e  $B = \{3, 7, 9\}$ .
- Suponha que um elemento de  $x \in A$  está relacionado com um elemento  $y \in B$  se e somente se  $x < y$ .
- A notação  $xRy$  quer dizer “ $x$  está relacionado com  $y$ ”, onde  $R$  é o nome da relação (neste caso,  $x < y$ ).
- Logo, temos que:

0R3 porque  $0 < 3$

0R7 porque  $0 < 7$

0R9 porque  $0 < 9$

5R7 porque  $5 < 7$

5R9 porque  $5 < 9$

8R9 porque  $8 < 9$

# Relações

- Sejam os conjuntos  $A = \{0, 5, 8\}$  e  $B = \{3, 7, 9\}$ .
- Suponha que um elemento de  $x \in A$  está relacionado com um elemento  $y \in B$  se e somente se  $x < y$ .
- A notação  $xRy$  quer dizer “ $x$  está relacionado com  $y$ ”, onde  $R$  é o nome da relação (neste caso,  $x < y$ ).
- Logo, temos que:

0R3 porque  $0 < 3$

0R7 porque  $0 < 7$

0R9 porque  $0 < 9$

5R7 porque  $5 < 7$

5R9 porque  $5 < 9$

8R9 porque  $8 < 9$

- Por outro lado, a notação  $x \not R y$  quer dizer que “ $x$  não está relacionado com  $y$ ”

- Por outro lado, a notação  $x \not R y$  quer dizer que “ $x$  não está relacionado com  $y$ ”.

- Por outro lado, a notação  $x \not R y$  quer dizer que “ $x$  não está relacionado com  $y$ ”.
- Dados os conjuntos  $A = \{0, 5, 8\}$  e  $B = \{3, 7, 9\}$
- Logo, temos que:

$5 \not R 3$  porque  $5 > 3$

$8 \not R 3$  porque  $8 > 3$

$8 \not R 7$  porque  $8 > 7$

- Dados os conjuntos  $A = \{0, 5, 8\}$  e  $B = \{3, 7, 9\}$  temos que
- O produto cartesiano de  $A$  e  $B$  é

$$A \times B = \{(0, 3), (0, 7), (0, 9), (5, 3), (5, 7), (5, 9), (8, 3), (8, 7), (8, 9)\}.$$

- Dados os conjuntos  $A = \{0, 5, 8\}$  e  $B = \{3, 7, 9\}$  temos que
- O produto cartesiano de  $A$  e  $B$  é

$$A \times B = \{(0, 3), (0, 7), (0, 9), (5, 3), (5, 7), (5, 9), (8, 3), (8, 7), (8, 9)\}.$$

- Os elementos que satisfazem à relação  $R$  (ou seja,  $x < y$ ) são

$$R = \{(0, 3), (0, 7), (0, 9), (5, 7), (5, 9), (8, 9)\}$$

- **Observação:**  $R$  é um subconjunto de  $A \times B$ .

# Relação Binária



# Relação Binária — Definição

## Definição (Relação binária):

- Dados os conjuntos  $A$  e  $B$ , uma **relação binária** de  $A$  para  $B$  é um subconjunto  $R$  de  $A \times B$ .
- Dado um par ordenado  $(x, y)$  em  $A \times B$ ,  $x$  está relacionado com  $y$  por  $R$ , escrito  $xRy$ , se e somente se  $(x, y) \in R$ .

O termo “binário” é usado para indicar uma relação entre dois conjuntos.

# Relação Binária — Definição

## Definição (Relação binária):

- Dados os conjuntos  $A$  e  $B$ , uma **relação binária** de  $A$  para  $B$  é um subconjunto  $R$  de  $A \times B$ .
- Dado um par ordenado  $(x, y)$  em  $A \times B$ ,  $x$  está relacionado com  $y$  por  $R$ , escrito  $xRy$ , se e somente se  $(x, y) \in R$ .

O termo “binário” é usado para indicar uma relação entre dois conjuntos.

## Notação:

- “ $x$  está relacionado com  $y$ ”:

$$xRy \iff (x, y) \in R$$

- “ $x$  não está relacionado com  $y$ ”:

$$x \not R y \iff (x, y) \notin R$$

# Relação binária num conjunto finito

- **Exemplo 1:** Sejam os conjuntos  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$  e a relação binária de  $A$  para  $B$  definida como:

$$\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in R \iff x - y \text{ é par}$$

# Relação binária num conjunto finito

- **Exemplo 1:** Sejam os conjuntos  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$  e a relação binária de  $A$  para  $B$  definida como:

$$\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in R \iff x - y \text{ é par}$$

- Logo, temos que:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$$

# Relação binária num conjunto infinito:

## Relação de congruência módulo 2

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros  $\mathbb{Z}$ . Neste caso, a relação binária  $E$  de  $\mathbb{Z}$  para  $\mathbb{Z}$  pode ser definida como:

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, mEn \iff m - n \text{ é par.}$$

# Relação binária num conjunto infinito:

## Relação de congruência módulo 2

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros  $\mathbb{Z}$ . Neste caso, a relação binária  $E$  de  $\mathbb{Z}$  para  $\mathbb{Z}$  pode ser definida como:

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, mEn \iff m - n \text{ é par.}$$

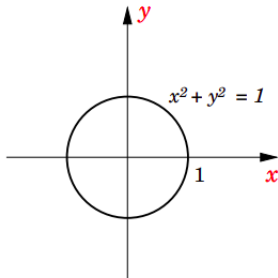
- Os inteiros  $m$  e  $n$  são relacionados por  $E$  sse  $m \bmod 2 = n \bmod 2$ , ou seja, se os números  $m$  e  $n$  são pares ou ímpares.
- Quando essa relação é satisfeita, diz-se que  $m$  e  $n$  são congruentes módulo 2, ou seja,  $m \equiv n \pmod{2}$ .

## Exemplo de relação binária

- Seja a relação  $C$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- $(1, 0) \in C?$   
Sim.
- $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in C?$   
Sim.
- $(-2, 0) \in C?$   
Não.



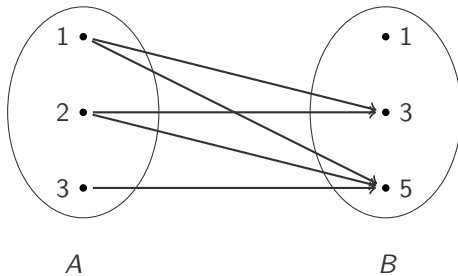
# Diagrama de seta de uma relação

- Suponha que  $R$  é uma relação de um conjunto  $A$  para um conjunto  $B$ . O **diagrama de seta** para  $R$  é obtido da seguinte forma:
  - Represente os elementos de  $A$  numa região e os elementos de  $B$  como pontos em outra região.
  - Para cada  $x$  em  $A$  e  $y$  em  $B$ , desenhe uma seta de  $x$  para  $y$  sse  $x$  é relacionado com  $y$  por  $R$ .

# Diagrama de seta de uma relação

**Exemplo:** Sejam os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{1, 3, 5\}$  e a relação:

- $\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \iff x < y$



- **Definição:** Uma função  $f$  de um conjunto  $A$  para um conjunto  $B$  é uma relação de  $A$  para  $B$  que satisfaz as duas propriedades abaixo:
  - (1) Para cada elemento  $x \in A$ , existe um elemento  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in f$ . Cada elemento de  $A$  é o primeiro elemento de um par ordenado de  $f$ .
  - (2) Para todos os elementos  $x \in A$  e  $y, z \in B$ , se  $(x, y) \in f$  e  $(x, z) \in f$ , então  $y = z$ .  
Ou seja, não existem dois pares ordenados distintos cujo primeiro elemento seja o mesmo.

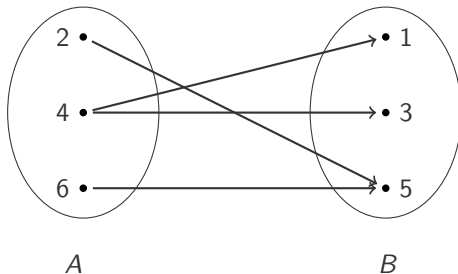
Se  $f$  é uma função de  $A$  para  $B$ , temos que:

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f$$

# Relações e Funções

**Exemplo 1:** Sejam os conjuntos  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \{1, 3, 5\}$  e a relação:

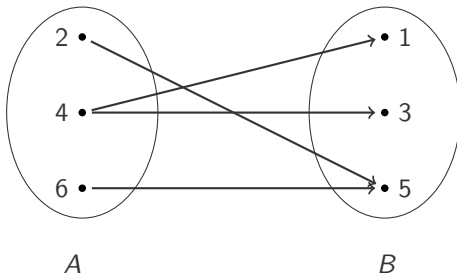
- $R = \{(2, 5), (4, 1), (4, 3), (6, 5)\}$ .
- $R$  é uma função?



# Relações e Funções

**Exemplo 1:** Sejam os conjuntos  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \{1, 3, 5\}$  e a relação:

- $R = \{(2, 5), (4, 1), (4, 3), (6, 5)\}$ .
- $R$  é uma função?

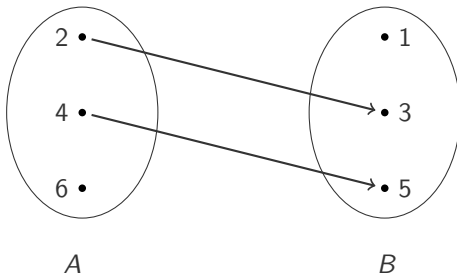


- Não, por causa dos pares  $(4, 1)$  e  $(4, 3)$ .  
Condição (2) não foi satisfeita

# Relações e Funções

**Exemplo 2:** Sejam os conjuntos  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \{1, 3, 5\}$  e a relação:

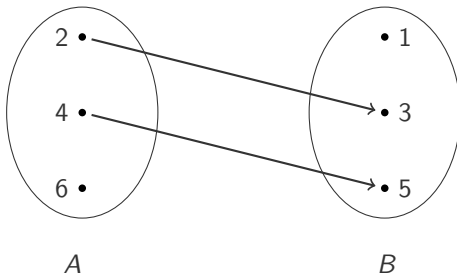
- $S = \{(x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \iff y = x + 1\}$ .
- $S$  é uma função?



# Relações e Funções

**Exemplo 2:** Sejam os conjuntos  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \{1, 3, 5\}$  e a relação:

- $S = \{(x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \iff y = x + 1\}$ .
- $S$  é uma função?



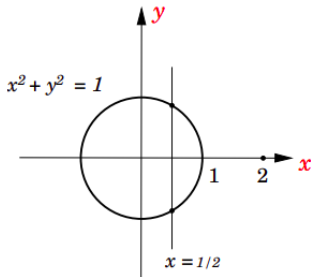
- Não, já que  $6 \in A$  mas não existe  $y \in B$  tal que  $y = 6 + 1 = 7$ .  
Condição (1) não foi satisfeita

# Relações e Funções

**Exemplo 3:** Sejam a relação  $C$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- $C$  é uma função?

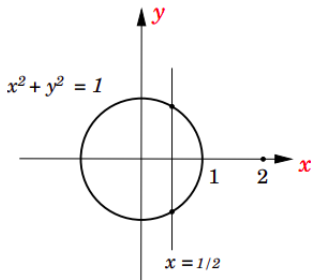


# Relações e Funções

**Exemplo 3:** Sejam a relação  $C$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- $C$  é uma função?



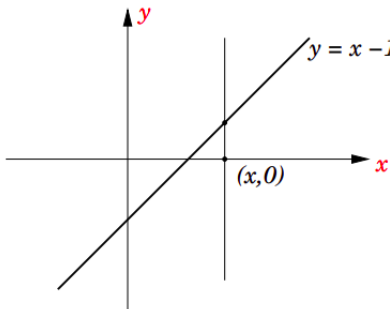
- Não, já que existem números reais  $x$  tais que  $(x, y) \notin C$ , para todo  $y$ . Por exemplo,  $x = 2$ . **Condição (1) não foi satisfeita**
- **Condição (2) também não é satisfeita**

# Relações e Funções

**Exemplo 4:** Sejam a relação  $L$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in L \iff y = x - 1$$

- $L$  é uma função?

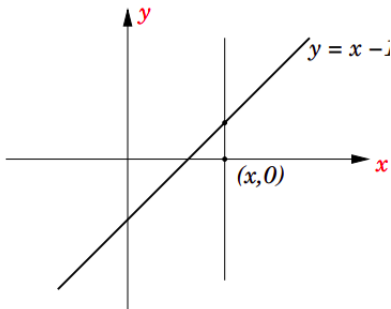


# Relações e Funções

**Exemplo 4:** Sejam a relação  $L$  de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$  definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in L \iff y = x - 1$$

- $L$  é uma função?



- Sim.

# Domínio e Imagem



# Domínio e Imagem

Seja  $R$  uma relação de  $A$  para  $B$ .

- O **domínio** da relação  $R$  é o conjunto

$$Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B((a, b) \in R)\}$$

- A **imagem** ou **contradomínio** da relação  $R$  é o conjunto

$$Img(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A((a, b) \in R)\}$$

**Obs.:** O conjunto de pares ordenados  $R$  é uma relação de  $A$  para  $B$  se e somente se  $Dom(R) \subseteq A$  e  $Img(R) \subseteq B$ .

## Domínio e Imagem — Exemplos

- Seja  $R$  a relação  $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$ .
  - Temos que  $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$  e  $Img(R) = \{4, 5\}$ .
- Seja  $R$  a relação  $\{(x, x^2): x \in \mathbb{Z}\}$ . Quem é  $Dom(R)$  e  $Img(R)$ ?

## Domínio e Imagem — Exemplos

- Seja  $R$  a relação  $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$ .
  - Temos que  $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$  e  $Img(R) = \{4, 5\}$ .
- Seja  $R$  a relação  $\{(x, x^2): x \in \mathbb{Z}\}$ . Quem é  $Dom(R)$  e  $Img(R)$ ?
  - Temos que  $Dom(R) = \mathbb{Z}$  e  $Img(R)$  é o conjunto dos quadrados perfeitos  $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$ .
- Seja  $A = \mathbb{Z}$  e  $R = \{(a, b): aRb \Leftrightarrow a = 2b\}$ . Quem é  $Dom(R)$  e  $Img(R)$ ?

## Domínio e Imagem — Exemplos

- Seja  $R$  a relação  $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$ .
  - Temos que  $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$  e  $Img(R) = \{4, 5\}$ .
- Seja  $R$  a relação  $\{(x, x^2): x \in \mathbb{Z}\}$ . Quem é  $Dom(R)$  e  $Img(R)$ ?
  - Temos que  $Dom(R) = \mathbb{Z}$  e  $Img(R)$  é o conjunto dos quadrados perfeitos  $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$ .
- Seja  $A = \mathbb{Z}$  e  $R = \{(a, b): aRb \Leftrightarrow a = 2b\}$ . Quem é  $Dom(R)$  e  $Img(R)$ ?
  - Temos que  $Dom(R)$  é o conjunto dos inteiros pares e  $Img(R) = \mathbb{Z}$ .

# Endorrelações: Relações binárias em um conjunto



## Relações binárias em um conjunto

Em casos de  $R \subseteq A \times B$  com  $B = A$ , relacionamos elementos de  $A$  entre eles.

Relações de um conjunto  $A$  em si próprio são de especial interesse.

## Relações binárias em um conjunto

Em casos de  $R \subseteq A \times B$  com  $B = A$ , relacionamos elementos de  $A$  entre eles.

Relações de um conjunto  $A$  em si próprio são de especial interesse.

**Definição:** Seja  $A$  um conjunto. Então, uma relação  $R: A \rightarrow A$  é dita uma **endorrelação**.

Neste caso, afirma-se que  $R$  é uma **relação binária em  $A$** .

# Relações binárias em um conjunto

Em casos de  $R \subseteq A \times B$  com  $B = A$ , relacionamos elementos de  $A$  entre eles.

Relações de um conjunto  $A$  em si próprio são de especial interesse.

**Definição:** Seja  $A$  um conjunto. Então, uma relação  $R: A \rightarrow A$  é dita uma **endorrelação**.

Neste caso, afirma-se que  $R$  é uma **relação binária em  $A$** .

**Exemplos** de relações no conjunto dos inteiros:

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$

**Obs.: Também pode-se anotar “ $R \subseteq A \times A$ ” como “ $R \subseteq A^2$ ”.**

# Propriedades de Endorrelações



# Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo  $R \subseteq A \times A$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

# Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo  $R \subseteq A \times A$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Exemplo 1

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_1 \subseteq A^2$  tal que  $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$ .

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_1$  é reflexiva **por exaustão**

- Como  $1 \in A$ , precisamos ter  $(1, 1) \in R_1$ .
- Como  $2 \in A$ , precisamos ter  $(2, 2) \in R_1$ .
- Como  $3 \in A$ , precisamos ter  $(3, 3) \in R_1$ .

# Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo  $R \subseteq A \times A$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Exemplo 1

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_1 \subseteq A^2$  tal que  $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$ .

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_1$  é reflexiva **por exaustão**

- Como  $1 \in A$ , precisamos ter  $(1, 1) \in R_1$ .
- Como  $2 \in A$ , precisamos ter  $(2, 2) \in R_1$ .
- Como  $3 \in A$ , precisamos ter  $(3, 3) \in R_1$ .

# Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo  $R \subseteq A \times A$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Exemplo 1

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_1 \subseteq A^2$  tal que  $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$ .

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_1$  é reflexiva **por exaustão**

- Como  $1 \in A$ , precisamos ter  $(1, 1) \in R_1$ . ✓
- Como  $2 \in A$ , precisamos ter  $(2, 2) \in R_1$ . ✓
- Como  $3 \in A$ , precisamos ter  $(3, 3) \in R_1$ . ✓

# Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo  $R \subseteq A \times A$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

# Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo  $R \subseteq A \times A$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Exemplo 2

Considere  $R_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_2 = \{(a, b) : a \text{ divide } b\}$ .  **$R_2$  é reflexiva?**

# Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo  $R \subseteq A \times A$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Exemplo 2

Considere  $R_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_2 = \{(a, b) : a \text{ divide } b\}$ .  **$R_2$  é reflexiva?**

Como  $\mathbb{Z}$  é infinito, garantir que  $R_2$  é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

Neste caso, porém, temos um contra-exemplo: como  $0 \in \mathbb{Z}$ , precisaríamos ter  $(0, 0) \in R_2$ , mas este não é o caso, pois uma das condições para que  $a$  divida  $b$  é termos  $a \neq 0$ .

Resumidamente,  $0 \in \mathbb{Z}$ , mas  $(0, 0) \notin R_2$ . Portanto,  $R_2$  não é reflexiva.

# Relações Reflexivas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

# Relações Reflexivas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Exemplo 2

Considere  $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$  tal que  $R_3 = \{(a, b): a \text{ divide } b\}$ .  **$R_3$  é reflexiva?**

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Exemplo 2

Considere  $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$  tal que  $R_3 = \{(a, b): a \text{ divide } b\}$ .  **$R_3$  é reflexiva?**

Como  $\mathbb{Z}^+$  é infinito, garantir que  $R_3$  é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Exemplo 2

Considere  $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$  tal que  $R_3 = \{(a, b): a \text{ divide } b\}$ .  **$R_3$  é reflexiva?**

Como  $\mathbb{Z}^+$  é infinito, garantir que  $R_3$  é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

### Prova

Seja  $k$  um elemento qualquer de  $\mathbb{Z}^+$ , precisamos provar que  $(k, k) \in R_3$ . Como  $k \cdot 1 = k$  e  $k \neq 0$ , podemos aplicar a definição de divisibilidade para concluir que  $k$  divide  $k$ . Portanto,  $(k, k) \in R_3$ . Como provamos que  $(k, k) \in R_3$  para um elemento qualquer de  $\mathbb{Z}^+$ , isto vale para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Portanto,  $R_3$  é reflexiva.

# Relações Reflexivas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Quais das relações abaixo são reflexivas?

Considere  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **reflexiva** se e somente se  $(a, a) \in R$  para todo elemento  $a \in A$ .

## Quais das relações abaixo são reflexivas?

Considere  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$  ✓
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$  ✗
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$  ✓
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$  ✓
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$  ✗
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$  ✗

# Relações Simétricas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

# Relações Simétricas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$   
 $R_5$  é simétrica?

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$   
 **$R_5$  é simétrica?**

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_5$  é simétrica **por exaustão**

- Como  $(1, 1) \in R_5$ , precisamos ter  $(1, 1) \in R_5$ .
- Como  $(1, 2) \in R_5$ , precisamos ter  $(2, 1) \in R_5$ .
- Como  $(2, 1) \in R_5$ , precisamos ter  $(1, 2) \in R_5$ .
- Como  $(1, 3) \in R_5$ , precisamos ter  $(3, 1) \in R_5$ .

# Relações Simétricas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$   
 **$R_5$  é simétrica?**

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_5$  é simétrica **por exaustão**

- Como  $(1, 1) \in R_5$ , precisamos ter  $(1, 1) \in R_5$ . ✓
- Como  $(1, 2) \in R_5$ , precisamos ter  $(2, 1) \in R_5$ . ✓
- Como  $(2, 1) \in R_5$ , precisamos ter  $(1, 2) \in R_5$ . ✓
- Como  $(1, 3) \in R_5$ , precisamos ter  $(3, 1) \in R_5$ . ✗

Portanto,  $R_3$  não é simétrica.

# Relações Simétricas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

# Relações Simétricas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

Considere  $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$ .  $R_6$  é simétrica?

# Relações Simétricas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

Considere  $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$ .  $R_6$  é simétrica?

Como  $\mathbb{Z}$  é infinito, garantir que  $R_6$  é simétrica exige uma **prova de generalização**.

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

Considere  $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$ .  **$R_6$  é simétrica?**

Como  $\mathbb{Z}$  é infinito, garantir que  $R_6$  é simétrica exige uma **prova de generalização**.

## Prova

Sejam  $c, d$  dois inteiros quaisquer (Instanciação),  
suponha que  $(c, d) \in R_6$  (Hipótese da Prova Direta).

Pela definição de  $R_6$ ,  $c + d$  é par.

Como  $c + d = d + c$  (Comutatividade da Soma),  $d + c$  também é par.

Pela definição de  $R_6$ , temos que  $(d, c) \in R_6$ .

Portanto,  $R_6$  é simétrica.

# Relações Simétricas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

## Quais das relações abaixo são simétricas?

Considere  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$

# Relações Simétricas

**Definição:** Uma relação  $R$  no conjunto  $A$  é **simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  também temos que  $(b, a) \in R$ .

## Quais das relações abaixo são simétricas?

Considere  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$  **Não**
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$  **Não**
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$  **Sim**
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$  **Sim**
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$  **Não**
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$  **Sim**

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 1):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  com  $a \neq b$ , tem-se que  $(b, a) \notin R$ .

$$\forall a \in A, \forall b \in A [(a, b) \in R \wedge a \neq b] \implies (b, a) \notin R$$

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 1):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  com  $a \neq b$ , tem-se que  $(b, a) \notin R$ .

$$\forall a \in A, \forall b \in A [((a, b) \in R \wedge a \neq b) \implies (b, a) \notin R]$$

## Observações:

- A anti-simetria é **independente** da simetria. Estas propriedades não contrariam nem impedem uma à outra.
- Intuitivamente, a anti-simetria é um tipo de **simetria restrita** que admite exclusivamente a simetria de pares do tipo  $(x, x)$  na relação.

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 1):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  com  $a \neq b$ , tem-se que  $(b, a) \notin R$ .

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 1):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  com  $a \neq b$ , tem-se que  $(b, a) \notin R$ .

## Exemplo 1

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_5 \subseteq A^2$  tal que  
 $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_5$  é anti-simétrica **por exaustão**

- Como  $(1, 1) \in R_5$ , mas  $1 = 1$ , não há o que verificar neste caso.
- Como  $(1, 2) \in R_5$  e  $1 \neq 2$ , precisamos ter  $(2, 1) \notin R_5$ .
- Como  $(2, 1) \in R_5$  e  $2 \neq 1$ , precisamos ter  $(1, 2) \notin R_5$ .
- Como  $(1, 3) \in R_5$  e  $1 \neq 3$ , precisamos ter  $(3, 1) \notin R_5$ .

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 1):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  com  $a \neq b$ , tem-se que  $(b, a) \notin R$ .

## Exemplo 1

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_5 \subseteq A^2$  tal que  
 $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_5$  é anti-simétrica **por exaustão**

- Como  $(1, 1) \in R_5$ , mas  $1 = 1$ , não há o que verificar neste caso. ✓
- Como  $(1, 2) \in R_5$  e  $1 \neq 2$ , precisamos ter  $(2, 1) \notin R_5$ . ✗
- Como  $(2, 1) \in R_5$  e  $2 \neq 1$ , precisamos ter  $(1, 2) \notin R_5$ . ✗
- Como  $(1, 3) \in R_5$  e  $1 \neq 3$ , precisamos ter  $(3, 1) \notin R_5$ . ✓

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 1):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  com  $a \neq b$ , tem-se que  $(b, a) \notin R$ .

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 1):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  com  $a \neq b$ , tem-se que  $(b, a) \notin R$ .

## Exemplo 2

Considere  $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$   **$R_6$  é anti-simétrica?**

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 1):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se para cada par  $(a, b) \in R$  com  $a \neq b$ , tem-se que  $(b, a) \notin R$ .

## Exemplo 2

Considere  $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$   **$R_6$  é anti-simétrica?**

Como  $\mathbb{Z}$  é infinito, garantir que  $R_6$  é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

Neste caso, porém, temos um contra-exemplo:

$(1, 3) \in R_6$  e  $1 \neq 3$ , mas  $(3, 1) \in R_6$ .

Portanto,  $R_6$  não é anti-simétrica.

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 2):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se, para todo  $a, b \in A$ , se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ .

$$\forall a \forall b [((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \implies (a = b)]$$

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 2):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se, para todo  $a, b \in A$ , se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ .

$$\forall a \forall b [((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \implies (a = b)]$$

## Qual definição usar?

- A que você preferir entre estas. Elas são equivalentes.

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 2):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se, para todo  $a, b \in A$ , se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ .

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 2):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se, para todo  $a, b \in A$ , se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ .

## Exemplo

Considere  $R_8 \subseteq \mathbb{N}^2$  tal que  $R_8 = \{(a, b) : a \leq b\}$

Como  $\mathbb{N}$  é infinito, garantir que  $R_8$  é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 2):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se, para todo  $a, b \in A$ , se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ .

## Exemplo

Considere  $R_8 \subseteq \mathbb{N}^2$  tal que  $R_8 = \{(a, b) : a \leq b\}$

Como  $\mathbb{N}$  é infinito, garantir que  $R_8$  é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

## Prova

- Sejam  $c, d$  naturais quaisquer. (Instanciação)
- Por prova direta, suponha que  $(c, d) \in R_8$  e  $(d, c) \in R_8$ .
- Pela definição de  $R_8$ , isso significa que  $c \leq d$  e  $d \leq c$ .
- Isso nos permite concluir que  $c = d$ .
- Portanto,  $R_8$  é anti-simétrica.

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 2):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se, para todo  $a, b \in A$ , se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ .

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 2):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se, para todo  $a, b \in A$ , se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ .

## Quais das relações abaixo são anti-simétricas?

Considere  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$

# Relações Anti-Simétricas

**Definição (Alternativa 2):** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **anti-simétrica** se e somente se, para todo  $a, b \in A$ , se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ .

## Quais das relações abaixo são anti-simétricas?

Considere  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$  **Sim**
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$  **Sim**
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$  **Não**
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$  **Sim**
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$  **Sim**
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$  **Não**

# Relações Transitivas

**Definição:** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **transitiva** se e somente se, para todo  $a, b, c \in A$ , sempre que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ .

$$\forall a \in A, \forall b \in A, \forall c \in A, [((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \implies (a, c) \in R]$$

# Relações Transitivas

**Definição:** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **transitiva** se e somente se, para todo  $a, b, c \in A$ , sempre que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ .

# Relações Transitivas

**Definição:** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **transitiva** se e somente se, para todo  $a, b, c \in A$ , sempre que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ .

## Exemplo

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_9 = A^2$  tal que  $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_9$  é transitiva **por exaustão**

# Relações Transitivas

**Definição:** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **transitiva** se e somente se, para todo  $a, b, c \in A$ , sempre que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ .

## Exemplo

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_9 = A^2$  tal que  $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_9$  é transitiva **por exaustão**

- Como  $(1, 1) \in R_9$  e  $(1, 3) \in R_9$ , precisamos ter  $(1, 3) \in R_9$
- Como  $(1, 3) \in R_9$  e  $(3, 1) \in R_9$ , precisamos ter  $(1, 1) \in R_9$
- Como  $(3, 1) \in R_9$  e  $(1, 1) \in R_9$ , precisamos ter  $(3, 1) \in R_9$
- Como  $(3, 1) \in R_9$  e  $(1, 3) \in R_9$ , precisamos ter  $(3, 3) \in R_9$

# Relações Transitivas

**Definição:** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **transitiva** se e somente se, para todo  $a, b, c \in A$ , sempre que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ .

## Exemplo

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ , considere  $R_9 = A^2$  tal que  $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como  $A$  é finito e pequeno, podemos verificar se  $R_9$  é transitiva **por exaustão**

- Como  $(1, 1) \in R_9$  e  $(1, 3) \in R_9$ , precisamos ter  $(1, 3) \in R_9$  ✓
- Como  $(1, 3) \in R_9$  e  $(3, 1) \in R_9$ , precisamos ter  $(1, 1) \in R_9$  ✓
- Como  $(3, 1) \in R_9$  e  $(1, 1) \in R_9$ , precisamos ter  $(3, 1) \in R_9$  ✓
- Como  $(3, 1) \in R_9$  e  $(1, 3) \in R_9$ , precisamos ter  $(3, 3) \in R_9$  ✗

# Relações Transitivas

## Exemplo

Considere  $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$   **$R_6$  é transitiva?**

Como  $\mathbb{Z}$  é infinito, garantir que  $R_6$  é transitiva exige uma **prova de generalização**.

# Relações Transitivas

## Exemplo

Considere  $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$  tal que  $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$   **$R_6$  é transitiva?**

Como  $\mathbb{Z}$  é infinito, garantir que  $R_6$  é transitiva exige uma **prova de generalização**.

## Prova

- (1) Sejam  $c, d, e$  inteiros quaisquer (Instanciação).
- (2) Por prova direta, suponha que  $(c, d) \in R_6$  e  $(d, e) \in R_6$ .
- (3) Pela definição de  $R_6$ , isso significa que  $c + d$  é par e  $d + e$  é par.
- (4) Portanto, existem inteiros  $k, l$  tais que  $c + d = 2k$  e  $d + e = 2l$ .
- (5) Então  $(c + d) + (d + e) = 2k + 2l \implies c + 2d + e = 2k + 2l$ ,
- (6) o que implica  $c + e = 2k + 2l - 2d = 2(k + l - d)$ .
- (7) Como  $k, l, d$  são inteiros,  $k + l - d$  é um número inteiro.
- (8) Logo,  $c + e$  é um número par, o que significa que  $(c, e) \in R_6$ .
- (9) Portanto,  $R_6$  é transitiva.

# Relações Transitivas

**Definição:** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **transitiva** se e somente se, para todo  $a, b, c \in A$ , sempre que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ .

# Relações Transitivas

**Definição:** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **transitiva** se e somente se, para todo  $a, b, c \in A$ , sempre que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ .

## Quais das relações abaixo são transitivas?

Considere  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$

# Relações Transitivas

**Definição:** Uma relação binária  $R$  no conjunto  $A$  é **transitiva** se e somente se, para todo  $a, b, c \in A$ , sempre que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ .

## Quais das relações abaixo são transitivas?

Considere  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$  **Sim**
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$  **Sim**
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$  **Sim**
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$  **Sim**
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$  **Não**
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$  **Não**

## Grafo de uma endorrelação



# Representação gráfica de uma endorrelação

- Toda endorrelação  $R: A \rightarrow A$  pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.

# Representação gráfica de uma endorrelação

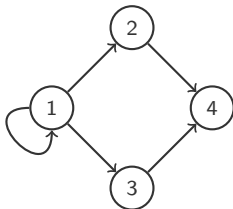
- Toda endorrelação  $R: A \rightarrow A$  pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.
- A representação de uma endorrelação  $R: A \rightarrow A$  como **grafo direcionado** é como segue:
  - cada elemento do conjunto  $A$  é representado como um ponto e é denominado **vértice**.
  - cada par  $(a, b) \in R$  é representado por uma seta, com origem em  $a$  e destino em  $b$ , denominada **aresta**.

# Representação gráfica de uma endorrelação

- Toda endorrelação  $R: A \rightarrow A$  pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.
- A representação de uma endorrelação  $R: A \rightarrow A$  como **grafo direcionado** é como segue:
  - cada elemento do conjunto  $A$  é representado como um ponto e é denominado **vértice**.
  - cada par  $(a, b) \in R$  é representado por uma seta, com origem em  $a$  e destino em  $b$ , denominada **aresta**.

## Exemplo:

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e a relação binária  $R$  em  $A$  definida como  
 $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (1, 3)\}$ .



# Grafo direcionado de uma endorrelação

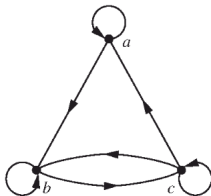
- O grafo direcionado de uma endorrelação pode ser usado para determinar se a relação tem as seguintes propriedades:
  - reflexiva
  - simétrica
  - anti-simétrica
  - transitiva

# Grafo direcionado de uma endorrelação

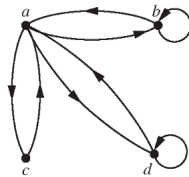
- O grafo direcionado de uma endorrelação pode ser usado para determinar se a relação tem as seguintes propriedades:
  - reflexiva
  - simétrica
  - anti-simétrica
  - transitiva

## Exercício:

Determine se as relações para os grafos direcionados ao lado são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas.



(a) Directed graph of  $R$



(b) Directed graph of  $S$

## Matriz booleana de uma relação



## Matriz booleana de uma relação

- Sejam  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  conjuntos.
- Seja  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$ .
- $R$  pode ser representada por uma matriz booleana  $M_R = [m_{i,j}]$  em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

## Matriz booleana de uma relação

- Sejam  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  conjuntos.
- Seja  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$ .
- $R$  pode ser representada por uma matriz booleana  $M_R = [m_{i,j}]$  em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

### Exemplo:

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2\}$   
e  $R_1: A \rightarrow B$  tal que  
 $R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ .

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matriz booleana de uma relação

- Sejam  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  conjuntos.
- Seja  $R$  uma relação binária de  $A$  em  $B$ .
- $R$  pode ser representada por uma matriz booleana  $M_R = [m_{i,j}]$  em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

## Exemplo:

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2\}$   
e  $R_1: A \rightarrow B$  tal que  
 $R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ .

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Obs.:** matrizes booleanas são geralmente usadas para representação de relações em programas de computador.

# Matriz booleana de uma endorrelação

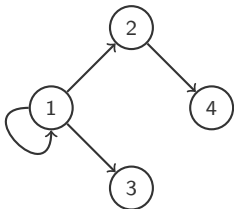
- Seja  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em um conjunto  $A$  com  $n$  elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação  $R$  é uma matriz quadrada.

# Matriz booleana de uma endorrelação

- Seja  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em um conjunto  $A$  com  $n$  elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação  $R$  é uma matriz quadrada.

## Exemplo:

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $R: A \rightarrow A$  tal que  $R = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (1, 1)\}$ .



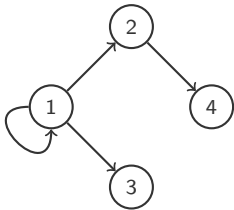
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Matriz booleana de uma endorrelação

- Seja  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação binária em um conjunto  $A$  com  $n$  elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação  $R$  é uma matriz quadrada.

## Exemplo:

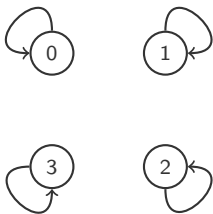
Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $R: A \rightarrow A$  tal que  $R = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (1, 1)\}$ .



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Obs.:** É possível verificar através de um programa se uma endorrelação  $R$  é reflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva.

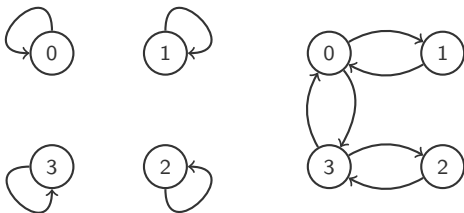
## Verificando propriedades de relações



$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

**reflexiva**

# Verificando propriedades de relações



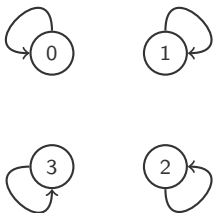
$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**reflexiva**

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

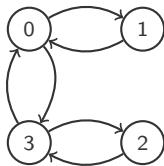
**simétrica**

# Verificando propriedades de relações



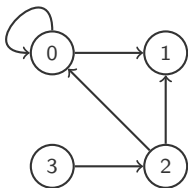
$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**reflexiva**



$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**simétrica**



$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**anti-simétrica**

## Inverso de uma relação



## O inverso de uma relação

- **Definição:** Seja  $R$  uma relação de  $A$  para  $B$ . A **relação inversa**  $R^{-1}$  de  $B$  para  $A$  é definida como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

# O inverso de uma relação

- **Definição:** Seja  $R$  uma relação de  $A$  para  $B$ . A **relação inversa**  $R^{-1}$  de  $B$  para  $A$  é definida como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

- Essa definição pode ser reescrita operacionalmente como

$$\forall a \in A, \forall b \in B, (b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

## O inverso de uma relação

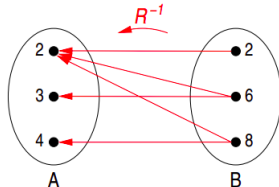
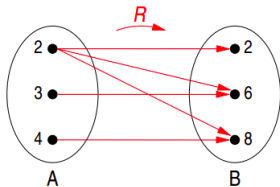
**Exemplo:** Sejam os conjuntos  $A = \{2, 3, 4\}$  e  $B = \{2, 6, 8\}$  e seja  $R$  a relação “divide” de  $A$  para  $B$ :  $\forall (x, y) \in A \times B, xRy \iff x \mid y$

- $R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$
- $R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4)\}$

# O inverso de uma relação

**Exemplo:** Sejam os conjuntos  $A = \{2, 3, 4\}$  e  $B = \{2, 6, 8\}$  e seja  $R$  a relação “divide” de  $A$  para  $B$ :  $\forall (x, y) \in A \times B, xRy \iff x \mid y$

- $R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$
- $R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4)\}$



$$R^{-1} : \forall (y, x) \in B \times A, yR^{-1}x \iff y \text{ é um múltiplo de } x.$$

## Composição de Relações



# Composição de Relações

**Definição (Relação composta):** Sejam  $A, B, C$  conjuntos. Seja  $R$  uma relação de  $A$  para  $B$  e  $S$  uma relação de  $B$  para  $C$ .

A relação **composta** de  $R$  e  $S$  é o conjunto dos pares ordenados  $(a, c)$ , onde  $a \in A$ ,  $c \in C$  e para o qual existe um elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in S$ .

Denotamos a composta de  $R$  e  $S$  por  $S \circ R$ .

# Composição de Relações

**Definição (Relação composta):** Sejam  $A, B, C$  conjuntos. Seja  $R$  uma relação de  $A$  para  $B$  e  $S$  uma relação de  $B$  para  $C$ .

A relação **composta** de  $R$  e  $S$  é o conjunto dos pares ordenados  $(a, c)$ , onde  $a \in A$ ,  $c \in C$  e para o qual existe um elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in S$ .

Denotamos a composta de  $R$  e  $S$  por  $S \circ R$ .

## Exemplo

Qual é a composta das relações  $R$  e  $S$ , em que  $R$  é a relação de  $\{1, 2, 3\}$  em  $\{1, 2, 3, 4\}$ , com  $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ , e  $S$  é a relação de  $\{1, 2, 3, 4\}$  em  $\{0, 1, 2\}$ , com  $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ ?

# Composição de Relações

**Definição (Relação composta):** Sejam  $A, B, C$  conjuntos. Seja  $R$  uma relação de  $A$  para  $B$  e  $S$  uma relação de  $B$  para  $C$ .

A relação **composta** de  $R$  e  $S$  é o conjunto dos pares ordenados  $(a, c)$ , onde  $a \in A$ ,  $c \in C$  e para o qual existe um elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in S$ .

Denotamos a composta de  $R$  e  $S$  por  $S \circ R$ .

## Exemplo

Qual é a composta das relações  $R$  e  $S$ , em que  $R$  é a relação de  $\{1, 2, 3\}$  em  $\{1, 2, 3, 4\}$ , com  $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ , e  $S$  é a relação de  $\{1, 2, 3, 4\}$  em  $\{0, 1, 2\}$ , com  $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ ?

**Resposta:**  $S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$

# Potências de uma relação

## Definição (Potência de uma relação):

Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

As **potências**  $R^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

# Potências de uma relação

## Definição (Potência de uma relação):

Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

As **potências**  $R^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

**Exercício:** Seja  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ .

Encontre as potências  $R^n$  com  $n \geq 2$ .

# Potências de uma relação

## Definição (Potência de uma relação):

Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

As **potências**  $R^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

**Exercício:** Seja  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ .

Encontre as potências  $R^n$  com  $n \geq 2$ .

**Solução Parcial:** Como  $R^2 = R \circ R$ , encontramos  
 $R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$ .

# Potências de uma relação

## Definição (Potência de uma relação):

Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

As **potências**  $R^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

**Exercício:** Seja  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ .

Encontre as potências  $R^n$  com  $n \geq 2$ .

**Solução Parcial:** Como  $R^2 = R \circ R$ , encontramos

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Como  $R^3 = R^2 \circ R$ , temos  $R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ .

# Potências de uma relação

## Definição (Potência de uma relação):

Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

As **potências**  $R^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

**Exercício:** Seja  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ .

Encontre as potências  $R^n$  com  $n \geq 2$ .

**Solução Parcial:** Como  $R^2 = R \circ R$ , encontramos  
 $R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$ .

Como  $R^3 = R^2 \circ R$ , temos  $R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ .

Como  $R^4 = R^3 \circ R$ , temos  $R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\} = R^3$ .

# Potências de uma relação

## Definição (Potência de uma relação):

Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

As **potências**  $R^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad e \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

**Exercício:** Seja  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ .

Encontre as potências  $R^n$  com  $n \geq 2$ .

**Solução Parcial:** Como  $R^2 = R \circ R$ , encontramos  
 $R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$ .

Como  $R^3 = R^2 \circ R$ , temos  $R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ .

Como  $R^4 = R^3 \circ R$ , temos  $R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\} = R^3$ .

Como  $R^4 = R^3$ , isso implica que  $R^n = R^3$  para  $n = 4, 5, 6, \dots$  (**provar isso**)

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

Demonstração:

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .  
A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

## Demonstração:

Seja  $A$  um conjunto e  $R$  uma relação em  $A$ .

( $\leftarrow$ ) Prova direta. Suponha que  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

Em particular,  $R^2 \subseteq R$ .

Queremos provar que  $R$  é transitivo.

Sejam então,  $a, b, c \in A$  tais que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ .

Pela definição de composição, temos que  $(a, c) \in R^2$ .

Como  $R^2 \subseteq R$ , isso implica que  $(a, c) \in R$ .

Portanto,  $R$  é transitivo, como queríamos demonstrar.

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

**Continuação da Demonstração:**

( $\rightarrow$ ) Suponha que  $R$  é transitiva. Vamos usar indução matemática em  $n$  para provar que  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

## Continuação da Demonstração:

( $\rightarrow$ ) Suponha que  $R$  é transitiva. Vamos usar indução matemática em  $n$  para provar que  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

**Caso Base:**  $n = 1$ . Claramente verdadeiro, dado que  $R^1 = R \subseteq R$ .

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

## Continuação da Demonstração:

( $\rightarrow$ ) Suponha que  $R$  é transitiva. Vamos usar indução matemática em  $n$  para provar que  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

**Caso Base:**  $n = 1$ . Claramente verdadeiro, dado que  $R^1 = R \subseteq R$ .

**Hipótese de Indução:** Suponha que  $R^n \subseteq R$ , para um inteiro positivo  $n$ .

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

## Continuação da Demonstração:

( $\rightarrow$ ) Suponha que  $R$  é transitiva. Vamos usar indução matemática em  $n$  para provar que  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

**Caso Base:**  $n = 1$ . Claramente verdadeiro, dado que  $R^1 = R \subseteq R$ .

**Hipótese de Indução:** Suponha que  $R^n \subseteq R$ , para um inteiro positivo  $n$ .

**Passo Indutivo:** Devemos provar que  $R^{n+1} \subseteq R$ .

Seja  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Pela definição de  $R^{n+1}$ , temos que  $R^{n+1} = R^n \circ R$ .

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

## Continuação da Demonstração:

( $\rightarrow$ ) Suponha que  $R$  é transitiva. Vamos usar indução matemática em  $n$  para provar que  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

**Caso Base:**  $n = 1$ . Claramente verdadeiro, dado que  $R^1 = R \subseteq R$ .

**Hipótese de Indução:** Suponha que  $R^n \subseteq R$ , para um inteiro positivo  $n$ .

**Passo Indutivo:** Devemos provar que  $R^{n+1} \subseteq R$ .

Seja  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Pela definição de  $R^{n+1}$ , temos que  $R^{n+1} = R^n \circ R$ .

Logo, existe um elemento  $x \in A$  tal que  $(a, x) \in R$  e  $(x, b) \in R^n$ .

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

## Continuação da Demonstração:

( $\rightarrow$ ) Suponha que  $R$  é transitiva. Vamos usar indução matemática em  $n$  para provar que  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

**Caso Base:**  $n = 1$ . Claramente verdadeiro, dado que  $R^1 = R \subseteq R$ .

**Hipótese de Indução:** Suponha que  $R^n \subseteq R$ , para um inteiro positivo  $n$ .

**Passo Indutivo:** Devemos provar que  $R^{n+1} \subseteq R$ .

Seja  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Pela definição de  $R^{n+1}$ , temos que  $R^{n+1} = R^n \circ R$ .

Logo, existe um elemento  $x \in A$  tal que  $(a, x) \in R$  e  $(x, b) \in R^n$ .

Pela HI, como  $R^n \subseteq R$ , obtemos que  $(x, b) \in R$ .

# Potências de uma Relação Transitiva

**Teorema:** Seja  $R$  uma relação no conjunto  $A$ .

A relação  $R$  é transitiva **se e somente se**  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

## Continuação da Demonstração:

( $\rightarrow$ ) Suponha que  $R$  é transitiva. Vamos usar indução matemática em  $n$  para provar que  $R^n \subseteq R$  para todo  $n \geq 1$ .

**Caso Base:**  $n = 1$ . Claramente verdadeiro, dado que  $R^1 = R \subseteq R$ .

**Hipótese de Indução:** Suponha que  $R^n \subseteq R$ , para um inteiro positivo  $n$ .

**Passo Indutivo:** Devemos provar que  $R^{n+1} \subseteq R$ .

Seja  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Pela definição de  $R^{n+1}$ , temos que  $R^{n+1} = R^n \circ R$ .

Logo, existe um elemento  $x \in A$  tal que  $(a, x) \in R$  e  $(x, b) \in R^n$ .

Pela HI, como  $R^n \subseteq R$ , obtemos que  $(x, b) \in R$ .

Como  $R$  é transitivo e  $(a, x) \in R$  e  $(x, b) \in R$ , segue que  $(a, b) \in R$ .

Isso mostra que  $R^{n+1} \subseteq R$ , completando a prova.



FIM

