Técnicas de Demonstração (Parte I)

Matemática Discreta

Prof. Lucas Ismaily

2º Semestre de 2025

Aluno: [ ] Matrícula: [ ]

Questões:

1. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.

2. Mostre que o quadrado de um número par é um número par, usando a demonstração direta.

3. Demonstre que se $m + n$ e $n + p$ são números inteiros pares, em que m, n e p são números inteiros, então $m + p$ é par. Que tipo de demonstração você utilizou?

4. Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.

5. Use uma demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.

6. Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.

7. Demonstre que se x é irracional, então $1/x$ é irracional.

8. Use uma demonstração por contraposição para mostrar que se $x + y \geq 2$, em que x e y são números reais, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.

9. Mostre que se n é um número inteiro e $n^3 + 5$ é impar, então n é par, usando:

   (a) uma demonstração por contraposição.

   (b) uma demonstração por contradição.

10. Demonstre a proposição $P(0)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo maior que 1, então $n^2 > n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?

11. Assuma $P(n)$ como a proposição "Se a e b são números reais positivos, então $(a+b)^n \geq a^n + b^n$". Comprove que $P(1)$ é verdadeira. Qual tipo de demonstração você utilizou?

12. Mostre que pelo menos 10 de quaisquer 64 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.

13. Use uma demonstração por contradição para mostrar que não há um número racional r para que $r^3 + r + 1 = 0$. [Dica: Assuma que $r = a/b$ seja uma raiz, em que a e b são números inteiros e a/b é o menor termo. Obtenha uma equação que envolva números inteiros, multiplicando-os por b^3. Então, veja se a e b são pares ou ímpares.]

14. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se $5n + 6$ for ímpar.

15. Demonstre ou contrarie que se m e n são números inteiros, tal que $mn = 1$, então ou $m = 1$ e $n = 1$ ou $m = -1$ e $n = -1$.

16. Mostre que essas proposições sobre o número inteiro x são equivalentes: (i) $3x + 2$ é par, (ii) $x + 5$ é ímpar, (iii) x^2 é par.

17. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (i) x é irracional, (ii) $3x + 2$ é irracional, e (iii) $x/2$ é irracional.

18. Os passos abaixo para encontrar as soluções de $\sqrt{x+3}$ = 3 - x são corretos?

    (1) $\sqrt{x+3}$ = 3 - x é dado;

    (2) x + 3 = x^2 - 6x + 9, obtido tirando a raiz quadrada dos dois lados de (1);

    (3) 0=x^2-7x+6, obtido pela subtração de $x + 3$ dos dois lados de (2);

    (4) $0 = (x-1)(x-6)$, obtido pela fatoração do lado direito de (3);

    (5) x = 1 ou x = 6, tirado de (4) porque ab=0 implica que a=0 ou b=0.

19. Comprove que pelo menos um dos números reais a_1, a_2,..., a_n é maior que ou igual ao valor da média desses números. Que tipo de demonstração você utilizou?

20. Comprove que se n é um número inteiro, estas quatro proposições são equivalentes: (i) n é par, (ii) $n + 1$ é ímpar, (iii) $3n + 1$ é ímpar, (iv) $3n$ é par.