

Relações e Suas Propriedades

QXD0008 – Matemática Discreta



**UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ**
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2025



Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Relação Binária
- Relações binárias e funções
- Propriedades da relação binária:
 - Reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva
- Relação Inversa
- Relação Composta



Referências para esta aula

- **Seções 9.1 e 9.3** do livro:
[Discrete Mathematics and Its Applications.](#)
Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. (**English version**)
- **Seção 8.1 e 8.3 (Relações e suas propriedades)** do livro: [Matemática Discreta e suas Aplicações.](#)
Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.



Introdução



Motivação

- O mundo está “povoado” por relações: família, emprego, governo, negócios, etc.
- Entidades em Matemática e Ciência da Computação também podem estar relacionadas entre si de diversas formas.
- Objetivo:
 - estudar relações em conjuntos;
 - estudar formas de representar relações;
 - estudar propriedades de relações.

Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B , denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B , denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B , denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?
 - **Resposta:** $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B , denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?
 - **Resposta:** $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
- Qual é o produto cartesiano de $B = \{a, b, c\}$ e $A = \{1, 2\}$?

Definição: Produto Cartesiano

- **Definição:** Sejam A e B dois conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B , denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , tal que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo:

- Qual é o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?
 - **Resposta:** $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
- Qual é o produto cartesiano de $B = \{a, b, c\}$ e $A = \{1, 2\}$?
 - **Resposta:** $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Relações

- Sejam os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$.
- Suponha que um elemento de $x \in A$ está relacionado com um elemento $y \in B$ se e somente se $x < y$.
- A notação xRy quer dizer “ x está relacionado com y ”, onde R é o nome da relação (neste caso, $x < y$).

Relações

- Sejam os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$.
- Suponha que um elemento de $x \in A$ está relacionado com um elemento $y \in B$ se e somente se $x < y$.
- A notação xRy quer dizer “ x está relacionado com y ”, onde R é o nome da relação (neste caso, $x < y$).
- Logo, temos que:

0R3 porque $0 < 3$

0R7 porque $0 < 7$

0R9 porque $0 < 9$

5R7 porque $5 < 7$

5R9 porque $5 < 9$

8R9 porque $8 < 9$

Relações

- Sejam os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$.
- Suponha que um elemento de $x \in A$ está relacionado com um elemento $y \in B$ se e somente se $x < y$.
- A notação xRy quer dizer “ x está relacionado com y ”, onde R é o nome da relação (neste caso, $x < y$).
- Logo, temos que:

0R3 porque $0 < 3$

0R7 porque $0 < 7$

0R9 porque $0 < 9$

5R7 porque $5 < 7$

5R9 porque $5 < 9$

8R9 porque $8 < 9$

- Por outro lado, a notação $x \not R y$ quer dizer que “ x não está relacionado com y ”

Relações

- Por outro lado, a notação $x \not R y$ quer dizer que “ x não está relacionado com y ”.

Relações

- Por outro lado, a notação $x \not R y$ quer dizer que “ x não está relacionado com y ”.
- Dados os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$
- Logo, temos que:

$5 \not R 3$ porque $5 > 3$

$8 \not R 3$ porque $8 > 3$

$8 \not R 7$ porque $8 > 7$

Relações

- Dados os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$ temos que
- O produto cartesiano de A e B é

$$A \times B = \{(0, 3), (0, 7), (0, 9), (5, 3), (5, 7), (5, 9), (8, 3), (8, 7), (8, 9)\}.$$

Relações

- Dados os conjuntos $A = \{0, 5, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$ temos que
- O produto cartesiano de A e B é

$$A \times B = \{(0, 3), (0, 7), (0, 9), (5, 3), (5, 7), (5, 9), (8, 3), (8, 7), (8, 9)\}.$$

- Os elementos que satisfazem à relação R (ou seja, $x < y$) são

$$R = \{(0, 3), (0, 7), (0, 9), (5, 7), (5, 9), (8, 9)\}$$

- **Observação:** R é um subconjunto de $A \times B$.



Relação Binária



Relação Binária — Definição

Definição (Relação binária):

- Dados os conjuntos A e B , uma **relação binária** de A para B é um subconjunto R de $A \times B$.
- Dado um par ordenado (x, y) em $A \times B$, x está relacionado com y por R , escrito xRy , se e somente se $(x, y) \in R$.

O termo “binário” é usado para indicar uma relação entre dois conjuntos.

Relação Binária — Definição

Definição (Relação binária):

- Dados os conjuntos A e B , uma **relação binária** de A para B é um subconjunto R de $A \times B$.
- Dado um par ordenado (x, y) em $A \times B$, x está relacionado com y por R , escrito xRy , se e somente se $(x, y) \in R$.

O termo “binário” é usado para indicar uma relação entre dois conjuntos.

Notação:

- “ x está relacionado com y ”:

$$xRy \iff (x, y) \in R$$

- “ x não está relacionado com y ”:

$$x \not R y \iff (x, y) \notin R$$

Relação binária num conjunto finito

- **Exemplo 1:** Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação binária de A para B definida como:

$$\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in R \iff x - y \text{ é par}$$

Relação binária num conjunto finito

- **Exemplo 1:** Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ e a relação binária de A para B definida como:

$$\forall (x, y) \in A \times B, (x, y) \in R \iff x - y \text{ é par}$$

- Logo, temos que:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$$

Relação binária num conjunto infinito: Relação de congruência módulo 2

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros \mathbb{Z} . Neste caso, a relação binária E de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} pode ser definida como:

$$\forall(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad mEn \iff m - n \text{ é par.}$$

Relação binária num conjunto infinito: Relação de congruência módulo 2

- A relação anterior pode ser generalizada para o conjunto de todos os inteiros \mathbb{Z} . Neste caso, a relação binária E de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} pode ser definida como:

$$\forall(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad mEn \iff m - n \text{ é par.}$$

- Os inteiros m e n são relacionados por E sse $m \bmod 2 = n \bmod 2$, ou seja, se os números m e n são pares ou ímpares.
- Quando essa relação é satisfeita, diz-se que m e n são congruentes módulo 2, ou seja, $m \equiv n \pmod{2}$.

Exemplo de relação binária

- Seja a relação C de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- $(1, 0) \in C?$

Sim.

- $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in C?$

Sim.

- $(-2, 0) \in C?$

Não.

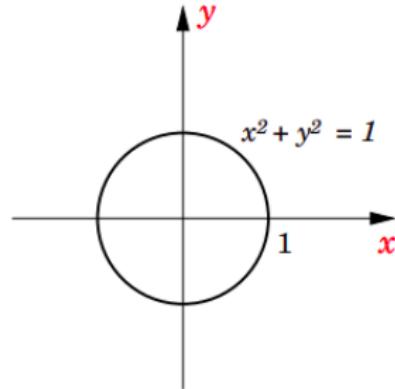


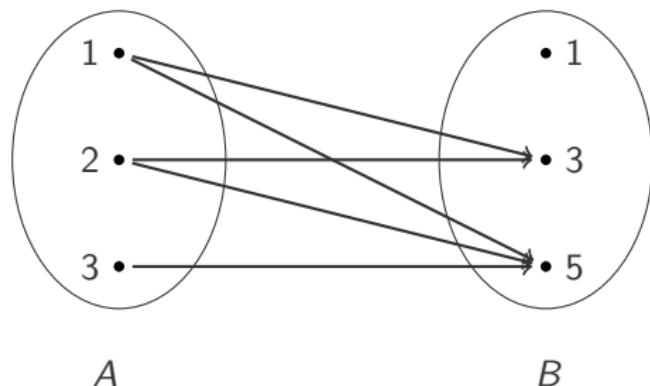
Diagrama de seta de uma relação

- Suponha que R é uma relação de um conjunto A para um conjunto B . O **diagrama de seta** para R é obtido da seguinte forma:
 - Represente os elementos de A numa região e os elementos de B como pontos em outra região.
 - Para cada x em A e y em B , desenhe uma seta de x para y sse x é relacionado com y por R .

Diagrama de seta de uma relação

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $\forall(x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \iff x < y$



Relações e Funções

- **Definição:** Uma função f de um conjunto A para um conjunto B é uma relação de A para B que satisfaz as duas propriedades abaixo:
 - (1) Para cada elemento $x \in A$, existe um elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Cada elemento de A é o primeiro elemento de um par ordenado de f .
 - (2) Para todos os elementos $x \in A$ e $y, z \in B$, se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, então $y = z$.
Ou seja, não existem dois pares ordenados distintos cujo primeiro elemento seja o mesmo.

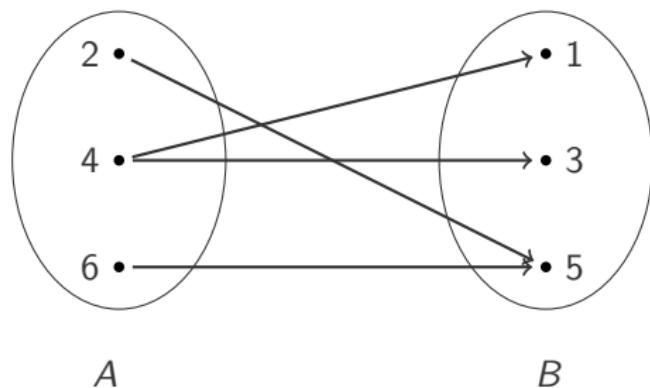
Se f é uma função de A para B , temos que:

$$y = f(x) \iff (x, y) \in f$$

Relações e Funções

Exemplo 1: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

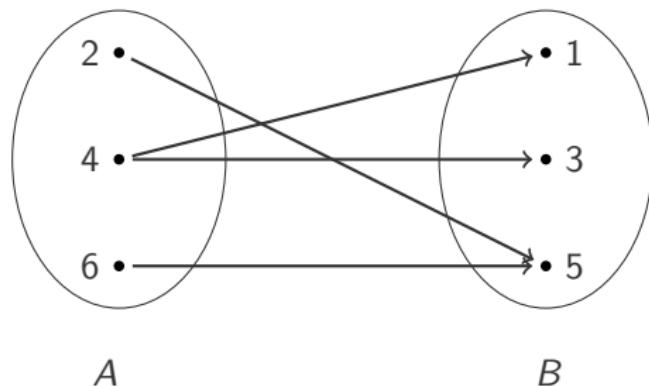
- $R = \{(2, 5), (4, 1), (4, 3), (6, 5)\}$.
- R é uma função?



Relações e Funções

Exemplo 1: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $R = \{(2, 5), (4, 1), (4, 3), (6, 5)\}$.
- R é uma função?

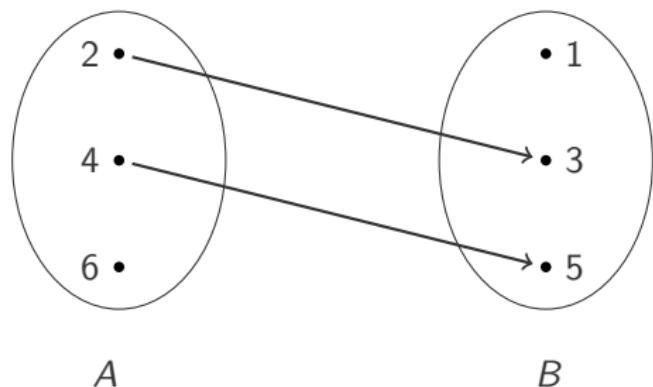


- Não, por causa dos pares $(4, 1)$ e $(4, 3)$.
Condição (2) não foi satisfeita

Relações e Funções

Exemplo 2: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

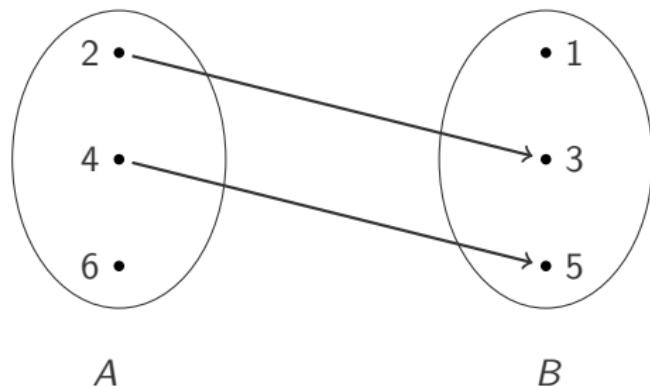
- $S = \forall(x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \iff y = x + 1$.
- S é uma função?



Relações e Funções

Exemplo 2: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$ e a relação:

- $S = \forall(x, y) \in A \times B, (x, y) \in S \iff y = x + 1$.
- S é uma função?



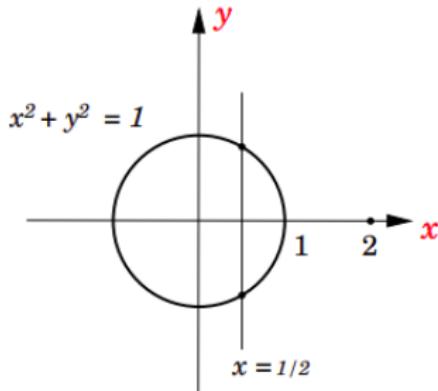
- Não, já que $6 \in A$ mas não existe $y \in B$ tal que $y = 6 + 1 = 7$.
Condição (1) não foi satisfeita

Relações e Funções

Exemplo 3: Sejam a relação C de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- C é uma função?

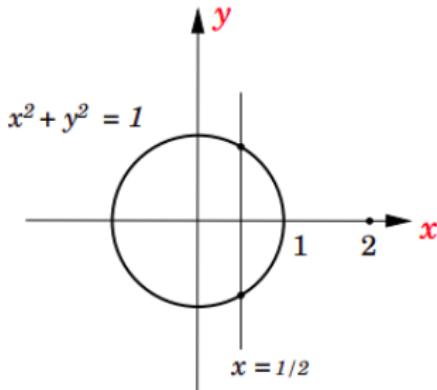


Relações e Funções

Exemplo 3: Sejam a relação C de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in C \iff x^2 + y^2 = 1$$

- C é uma função?



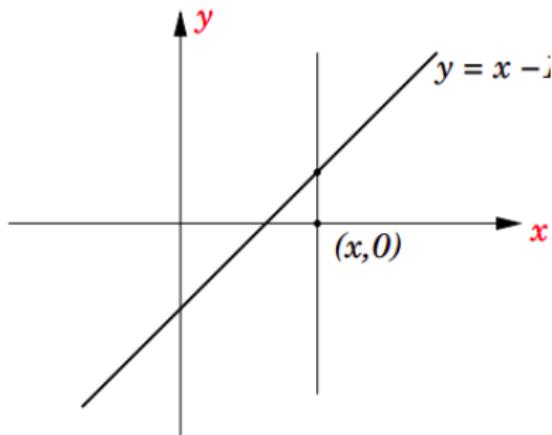
- Não, já que existem números reais x tais que $(x, y) \notin C$, para todo y . Por exemplo, $x = 2$. **Condição (1) não foi satisfeita**
- **Condição (2)** também não é satisfeita

Relações e Funções

Exemplo 4: Sejam a relação L de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in L \iff y = x - 1$$

- L é uma função?

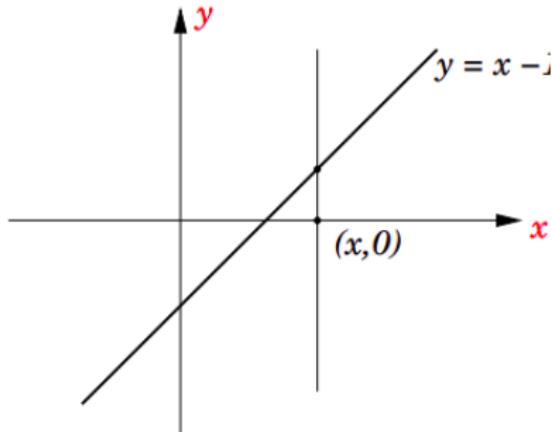


Relações e Funções

Exemplo 4: Sejam a relação L de \mathbb{R} para \mathbb{R} definida como:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \in L \iff y = x - 1$$

- L é uma função?



- Sim.



Domínio e Imagem



Domínio e Imagem

Seja R uma relação de A para B .

- O **domínio** da relação R é o conjunto

$$Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B((a, b) \in R)\}$$

- A **imagem** ou **contradomínio** da relação R é o conjunto

$$Img(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A((a, b) \in R)\}$$

Obs.: O conjunto de pares ordenados R é uma relação de A para B se e somente se $Dom(R) \subseteq A$ e $Img(R) \subseteq B$.

Domínio e Imagem — Exemplos

- Seja R a relação $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$.
 - Temos que $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$ e $Img(R) = \{4, 5\}$.
- Seja R a relação $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?

Domínio e Imagem — Exemplos

- Seja R a relação $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$.
 - Temos que $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$ e $Img(R) = \{4, 5\}$.
- Seja R a relação $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?
 - Temos que $Dom(R) = \mathbb{Z}$ e $Img(R)$ é o conjunto dos quadrados perfeitos $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$.
- Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) : aRb \Leftrightarrow a = 2b\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?

Domínio e Imagem — Exemplos

- Seja R a relação $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$.
 - Temos que $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$ e $Img(R) = \{4, 5\}$.
- Seja R a relação $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?
 - Temos que $Dom(R) = \mathbb{Z}$ e $Img(R)$ é o conjunto dos quadrados perfeitos $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$.
- Seja $A = \mathbb{Z}$ e $R = \{(a, b) : aRb \Leftrightarrow a = 2b\}$. Quem é $Dom(R)$ e $Img(R)$?
 - Temos que $Dom(R)$ é o conjunto dos inteiros pares e $Img(R) = \mathbb{Z}$.



Endorrelações: Relações binárias em um conjunto



Relações binárias em um conjunto

Em casos de $R \subseteq A \times B$ com $B = A$, relacionamos elementos de A entre eles.

Relações de um conjunto A em si próprio são de especial interesse.

Relações binárias em um conjunto

Em casos de $R \subseteq A \times B$ com $B = A$, relacionamos elementos de A entre eles.

Relações de um conjunto A em si próprio são de especial interesse.

Definição: Seja A um conjunto. Então, uma relação $R: A \rightarrow A$ é dita uma **endorrelação**.

Neste caso, afirma-se que R é uma **relação binária em A** .

Relações binárias em um conjunto

Em casos de $R \subseteq A \times B$ com $B = A$, relacionamos elementos de A entre eles.

Relações de um conjunto A em si próprio são de especial interesse.

Definição: Seja A um conjunto. Então, uma relação $R: A \rightarrow A$ é dita uma **endorrelação**.

Neste caso, afirma-se que R é uma **relação binária em A** .

Exemplos de relações no conjunto dos inteiros:

- $R_1 = \{(a, b) : a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b) : a > b\}$
- $R_4 = \{(a, b) : a = b\}$

Obs.: Também pode-se anotar “ $R \subseteq A \times A$ ” como “ $R \subseteq A^2$ ”.



Propriedades de Endorrelações



Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 1

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_1 \subseteq A^2$ tal que
 $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$.

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_1 é reflexiva **por exaustão**

- Como $1 \in A$, precisamos ter $(1, 1) \in R_1$.
- Como $2 \in A$, precisamos ter $(2, 2) \in R_1$.
- Como $3 \in A$, precisamos ter $(3, 3) \in R_1$.

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 1

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_1 \subseteq A^2$ tal que
 $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$.

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_1 é reflexiva **por exaustão**

- Como $1 \in A$, precisamos ter $(1, 1) \in R_1$.
- Como $2 \in A$, precisamos ter $(2, 2) \in R_1$.
- Como $3 \in A$, precisamos ter $(3, 3) \in R_1$.

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 1

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_1 \subseteq A^2$ tal que
 $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$.

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_1 é reflexiva **por exaustão**

- Como $1 \in A$, precisamos ter $(1, 1) \in R_1$. ✓
- Como $2 \in A$, precisamos ter $(2, 2) \in R_1$. ✓
- Como $3 \in A$, precisamos ter $(3, 3) \in R_1$. ✓

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2

Considere $R_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_2 = \{(a, b) : a \text{ divide } b\}$. R_2 é reflexiva?

Relações Reflexivas

Estas propriedades são exclusivas às relações binárias do tipo $R \subseteq A \times A$.

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2

Considere $R_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_2 = \{(a, b) : a \text{ divide } b\}$. R_2 é reflexiva?

Como \mathbb{Z} é infinito, garantir que R_2 é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

Neste caso, porém, temos um contra-exemplo: como $0 \in \mathbb{Z}$, precisaríamos ter $(0, 0) \in R_2$, mas este não é o caso, pois uma das condições para que a divida b é termos $a \neq 0$.

Resumidamente, $0 \in \mathbb{Z}$, mas $(0, 0) \notin R_2$. Portanto, R_2 não é reflexiva.

Relações Reflexivas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Relações Reflexivas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2

Considere $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que $R_3 = \{(a, b) : a \text{ divide } b\}$. R_3 é reflexiva?

Relações Reflexivas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2

Considere $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que $R_3 = \{(a, b) : a \text{ divide } b\}$. R_3 é reflexiva?

Como \mathbb{Z}^+ é infinito, garantir que R_3 é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

Relações Reflexivas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Exemplo 2

Considere $R_3 \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que $R_3 = \{(a, b) : a \text{ divide } b\}$. R_3 é reflexiva?

Como \mathbb{Z}^+ é infinito, garantir que R_3 é reflexiva exige uma **prova de generalização**.

Prova

Seja k um elemento qualquer de \mathbb{Z}^+ , precisamos provar que $(k, k) \in R_3$. Como $k \cdot 1 = k$ e $k \neq 0$, podemos aplicar a definição de divisibilidade para concluir que k divide k . Portanto, $(k, k) \in R_3$. Como provamos que $(k, k) \in R_3$ para um elemento qualquer de \mathbb{Z}^+ , isto vale para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Portanto, R_3 é reflexiva.

Relações Reflexivas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Relações Reflexivas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Quais das relações abaixo são reflexivas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$

Relações Reflexivas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **reflexiva** se e somente se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$.

Quais das relações abaixo são reflexivas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$ ✓
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$ ✗
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$ ✓
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$ ✓
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$ ✗
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$ ✗

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$
 R_5 é **simétrica**?

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$
 R_5 é simétrica?

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_5 é simétrica **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_5$, precisamos ter $(1, 1) \in R_5$.
- Como $(1, 2) \in R_5$, precisamos ter $(2, 1) \in R_5$.
- Como $(2, 1) \in R_5$, precisamos ter $(1, 2) \in R_5$.
- Como $(1, 3) \in R_5$, precisamos ter $(3, 1) \in R_5$.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$
 R_5 é simétrica?

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_5 é simétrica **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_5$, precisamos ter $(1, 1) \in R_5$. ✓
- Como $(1, 2) \in R_5$, precisamos ter $(2, 1) \in R_5$. ✓
- Como $(2, 1) \in R_5$, precisamos ter $(1, 2) \in R_5$. ✓
- Como $(1, 3) \in R_5$, precisamos ter $(3, 1) \in R_5$. ✗

Portanto, R_3 não é simétrica.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$. **R_6 é simétrica?**

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$. **R_6 é simétrica?**

Como \mathbb{Z} é infinito, garantir que R_6 é simétrica exige uma **prova de generalização**.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$. **R_6 é simétrica?**

Como \mathbb{Z} é infinito, garantir que R_6 é simétrica exige uma **prova de generalização**.

Prova

Sejam c, d dois inteiros quaisquer (Instanciação),
suponha que $(c, d) \in R_6$ (Hipótese da Prova Direta).

Pela definição de R_6 , $c + d$ é par.

Como $c + d = d + c$ (Comutatividade da Soma), $d + c$ também é par.

Pela definição de R_6 , temos que $(d, c) \in R_6$.

Portanto, R_6 é simétrica.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Quais das relações abaixo são simétricas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$

Relações Simétricas

Definição: Uma relação R no conjunto A é **simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ também temos que $(b, a) \in R$.

Quais das relações abaixo são simétricas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$ **Não**
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$ **Não**
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$ **Sim**
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$ **Sim**
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$ **Não**
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$ **Sim**

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

$$\forall a \in A, \forall b \in A [((a, b) \in R \wedge a \neq b) \implies (b, a) \notin R]$$

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

$$\forall a \in A, \forall b \in A [((a, b) \in R \wedge a \neq b) \implies (b, a) \notin R]$$

Observações:

- A anti-simetria é **independente** da simetria. Estas propriedades não contrariam nem impedem uma à outra.
- Intuitivamente, a anti-simetria é um tipo de **simetria restrita** que admite exclusivamente a simetria de pares do tipo (x, x) na relação.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Exemplo 1

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 \subseteq A^2$ tal que

$$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_5 é anti-simétrica **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_5$, mas $1 = 1$, não há o que verificar neste caso.
- Como $(1, 2) \in R_5$ e $1 \neq 2$, precisamos ter $(2, 1) \notin R_5$.
- Como $(2, 1) \in R_5$ e $2 \neq 1$, precisamos ter $(1, 2) \notin R_5$.
- Como $(1, 3) \in R_5$ e $1 \neq 3$, precisamos ter $(3, 1) \notin R_5$.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Exemplo 1

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_5 \subseteq A^2$ tal que

$$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_5 é anti-simétrica **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_5$, mas $1 = 1$, não há o que verificar neste caso. ✓
- Como $(1, 2) \in R_5$ e $1 \neq 2$, precisamos ter $(2, 1) \notin R_5$. ✗
- Como $(2, 1) \in R_5$ e $2 \neq 1$, precisamos ter $(1, 2) \notin R_5$. ✗
- Como $(1, 3) \in R_5$ e $1 \neq 3$, precisamos ter $(3, 1) \notin R_5$. ✓

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Exemplo 2

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$ R_6 é **anti-simétrica**?

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 1): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se para cada par $(a, b) \in R$ com $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin R$.

Exemplo 2

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$ **R_6 é anti-simétrica?**

Como \mathbb{Z} é infinito, garantir que R_6 é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

Neste caso, porém, temos um contra-exemplo:

$(1, 3) \in R_6$ e $1 \neq 3$, mas $(3, 1) \in R_6$.

Portanto, R_6 não é anti-simétrica.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

$$\forall a \forall b [(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \implies (a = b)]$$

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

$$\forall a \forall b [(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \implies (a = b)]$$

Qual definição usar?

- A que você preferir entre estas. Elas são equivalentes.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Exemplo

Considere $R_8 \subseteq \mathbb{N}^2$ tal que $R_8 = \{(a, b) : a \leq b\}$

Como \mathbb{N} é infinito, garantir que R_8 é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Exemplo

Considere $R_8 \subseteq \mathbb{N}^2$ tal que $R_8 = \{(a, b) : a \leq b\}$

Como \mathbb{N} é infinito, garantir que R_8 é anti-simétrica exige uma **prova de generalização**.

Prova

- Sejam c, d naturais quaisquer. (Instanciação)
- Por prova direta, suponha que $(c, d) \in R_8$ e $(d, c) \in R_8$.
- Pela definição de R_8 , isso significa que $c \leq d$ e $d \leq c$.
- Isso nos permite concluir que $c = d$.
- Portanto, R_8 é anti-simétrica.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Quais das relações abaixo são anti-simétricas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$

Relações Anti-Simétricas

Definição (Alternativa 2): Uma relação binária R no conjunto A é **anti-simétrica** se e somente se, para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Quais das relações abaixo são anti-simétricas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$ **Sim**
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$ **Sim**
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$ **Não**
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$ **Sim**
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$ **Sim**
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$ **Não**

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é **transitiva** se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

$$\forall a \in A, \forall b \in A, \forall c \in A, [((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \implies (a, c) \in R]$$

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é **transitiva** se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é **transitiva** se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_9 = A^2$ tal que $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_9 é transitiva **por exaustão**

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é **transitiva** se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_9 = A^2$ tal que $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_9 é transitiva **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_9$ e $(1, 3) \in R_9$, precisamos ter $(1, 3) \in R_9$
- Como $(1, 3) \in R_9$ e $(3, 1) \in R_9$, precisamos ter $(1, 1) \in R_9$
- Como $(3, 1) \in R_9$ e $(1, 1) \in R_9$, precisamos ter $(3, 1) \in R_9$
- Como $(3, 1) \in R_9$ e $(1, 3) \in R_9$, precisamos ter $(3, 3) \in R_9$

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é **transitiva** se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, considere $R_9 = A^2$ tal que $R_9 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

Como A é finito e pequeno, podemos verificar se R_9 é transitiva **por exaustão**

- Como $(1, 1) \in R_9$ e $(1, 3) \in R_9$, precisamos ter $(1, 3) \in R_9$ ✓
- Como $(1, 3) \in R_9$ e $(3, 1) \in R_9$, precisamos ter $(1, 1) \in R_9$ ✓
- Como $(3, 1) \in R_9$ e $(1, 1) \in R_9$, precisamos ter $(3, 1) \in R_9$ ✓
- Como $(3, 1) \in R_9$ e $(1, 3) \in R_9$, precisamos ter $(3, 3) \in R_9$ ✗

Relações Transitivas

Exemplo

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$ **R_6 é transitiva?**

Como \mathbb{Z} é infinito, garantir que R_6 é transitiva exige uma **prova de generalização**.

Relações Transitivas

Exemplo

Considere $R_6 \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que $R_6 = \{(a, b) : a + b \text{ é par}\}$ R_6 é transitiva?

Como \mathbb{Z} é infinito, garantir que R_6 é transitiva exige uma **prova de generalização**.

Prova

- (1) Sejam c, d, e inteiros quaisquer (Instanciação).
- (2) Por prova direta, suponha que $(c, d) \in R_6$ e $(d, e) \in R_6$.
- (3) Pela definição de R_6 , isso significa que $c + d$ é par e $d + e$ é par.
- (4) Portanto, existem inteiros k, l tais que $c + d = 2k$ e $d + e = 2l$.
- (5) Então $(c + d) + (d + e) = 2k + 2l \implies c + 2d + e = 2k + 2l$,
- (6) o que implica $c + e = 2k + 2l - 2d = 2(k + l - d)$.
- (7) Como k, l, d são inteiros, $k + l - d$ é um número inteiro.
- (8) Logo, $c + e$ é um número par, o que significa que $(c, e) \in R_6$.
- (9) Portanto, R_6 é transitiva.

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é **transitiva** se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é **transitiva** se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Quais das relações abaixo são transitivas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$

Relações Transitivas

Definição: Uma relação binária R no conjunto A é **transitiva** se e somente se, para todo $a, b, c \in A$, sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Quais das relações abaixo são transitivas?

Considere $a, b \in \mathbb{R}$.

- $R_1 = \{(a, b): a \leq b\}$ **Sim**
- $R_2 = \{(a, b): a > b\}$ **Sim**
- $R_3 = \{(a, b): a = b \text{ or } a = -b\}$ **Sim**
- $R_4 = \{(a, b): a = b\}$ **Sim**
- $R_5 = \{(a, b): a = b + 1\}$ **Não**
- $R_6 = \{(a, b): a + b \leq 3\}$ **Não**



Grafo de uma endorrelação



Representação gráfica de uma endorrelação

- Toda endorrelação $R: A \rightarrow A$ pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.

Representação gráfica de uma endorrelação

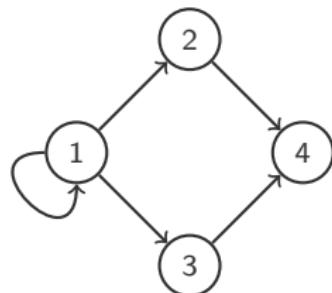
- Toda endorrelação $R: A \rightarrow A$ pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.
- A representação de uma endorrelação $R: A \rightarrow A$ como **grafo direcionado** é como segue:
 - cada elemento do conjunto A é representado como um ponto e é denominado **vértice**.
 - cada par $(a, b) \in R$ é representado por uma seta, com origem em a e destino em b , denominada **aresta**.

Representação gráfica de uma endorrelação

- Toda endorrelação $R: A \rightarrow A$ pode ser representada como uma estrutura matemática chamada grafo direcionado.
- A representação de uma endorrelação $R: A \rightarrow A$ como **grafo direcionado** é como segue:
 - cada elemento do conjunto A é representado como um ponto e é denominado **vértice**.
 - cada par $(a, b) \in R$ é representado por uma seta, com origem em a e destino em b , denominada **aresta**.

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação binária R em A definida como
 $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (1, 3)\}$.



Grafo direcionado de uma endorrelação

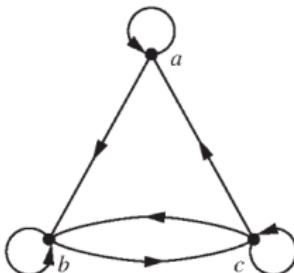
- O grafo direcionado de uma endorrelação pode ser usado para determinar se a relação tem as seguintes propriedades:
 - reflexiva
 - simétrica
 - anti-simétrica
 - transitiva

Grafo direcionado de uma endorrelação

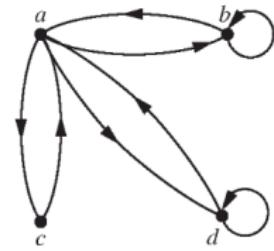
- O grafo direcionado de uma endorrelação pode ser usado para determinar se a relação tem as seguintes propriedades:
 - reflexiva
 - simétrica
 - anti-simétrica
 - transitiva

Exercício:

Determine se as relações para os grafos direcionados ao lado são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas.



(a) Directed graph of R



(b) Directed graph of S



Matriz booleana de uma relação



Matriz booleana de uma relação

- Sejam $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ conjuntos.
- Seja R uma relação binária de A em B .
- R pode ser representada por uma matriz booleana $M_R = [m_{i,j}]$ em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Matriz booleana de uma relação

- Sejam $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ conjuntos.
- Seja R uma relação binária de A em B .
- R pode ser representada por uma matriz booleana $M_R = [m_{i,j}]$ em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
e $R_1: A \rightarrow B$ tal que
 $R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz booleana de uma relação

- Sejam $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ conjuntos.
- Seja R uma relação binária de A em B .
- R pode ser representada por uma matriz booleana $M_R = [m_{i,j}]$ em que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
e $R_1: A \rightarrow B$ tal que
 $R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs.: matrizes booleanas são geralmente usadas para representação de relações em programas de computador.

Matriz booleana de uma endorrelação

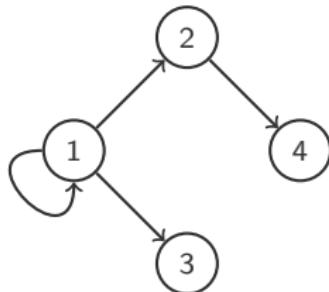
- Seja A um conjunto e R uma relação binária em um conjunto A com n elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação R é uma matriz quadrada.

Matriz booleana de uma endorrelação

- Seja A um conjunto e R uma relação binária em um conjunto A com n elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação R é uma matriz quadrada.

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R: A \rightarrow A$ tal que $R = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (1, 1)\}$.



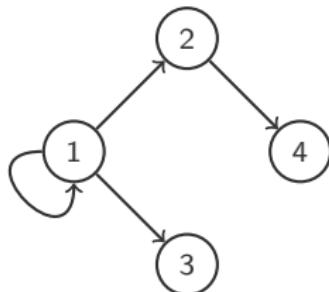
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz booleana de uma endorrelação

- Seja A um conjunto e R uma relação binária em um conjunto A com n elementos. A matriz booleana que representa a endorrelação R é uma matriz quadrada.

Exemplo:

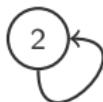
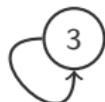
Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R: A \rightarrow A$ tal que $R = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (1, 1)\}$.



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Obs.: É possível verificar através de um programa se uma endorrelação R é reflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva.**

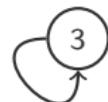
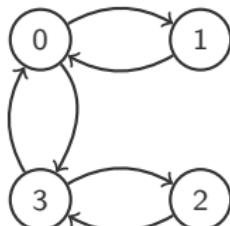
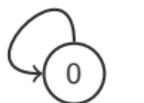
Verificando propriedades de relações



$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

reflexiva

Verificando propriedades de relações



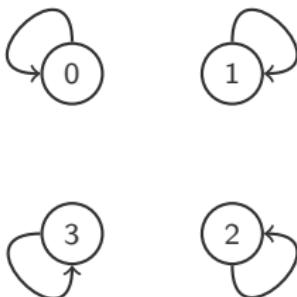
$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}$$

reflexiva

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}$$

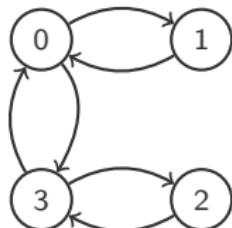
simétrica

Verificando propriedades de relações



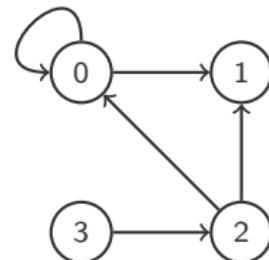
$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{matrix}$$

reflexiva



$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{matrix}$$

simétrica



$$\begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{matrix}$$

anti-simétrica



Inverso de uma relação



O inverso de uma relação

- **Definição:** Seja R uma relação de A para B . A **relação inversa** R^{-1} de B para A é definida como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

O inverso de uma relação

- **Definição:** Seja R uma relação de A para B . A **relação inversa** R^{-1} de B para A é definida como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

- Essa definição pode ser reescrita operacionalmente como

$$\forall a \in A, \forall b \in B, (b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

O inverso de uma relação

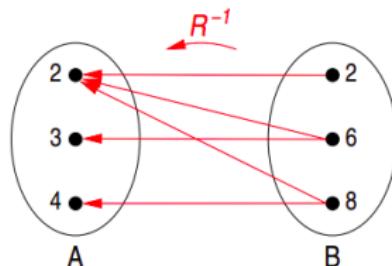
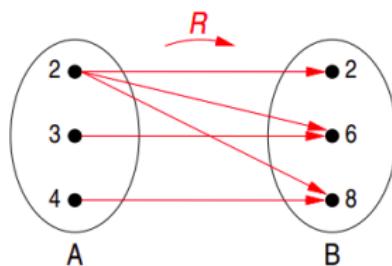
Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$ e seja R a relação “divide” de A para B : $\forall(x, y) \in A \times B, xRy \iff x | y$

- $R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$
- $R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4)\}$

O inverso de uma relação

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$ e seja R a relação “divide” de A para B : $\forall(x, y) \in A \times B, xRy \iff x | y$

- $R = \{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$
- $R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 3), (8, 4)\}$



$$R^{-1} : \forall(y, x) \in B \times A, yR^{-1}x \iff y \text{ é um múltiplo de } x.$$



Composição de Relações



Composição de Relações

Definição (Relação composta): Sejam A, B, C conjuntos. Seja R uma relação de A para B e S uma relação de B para C .

A relação **composta** de R e S é o conjunto dos pares ordenados (a, c) , onde $a \in A$, $c \in C$ e para o qual existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Denotamos a composta de R e S por $S \circ R$.

Composição de Relações

Definição (Relação composta): Sejam A, B, C conjuntos. Seja R uma relação de A para B e S uma relação de B para C .

A relação **composta** de R e S é o conjunto dos pares ordenados (a, c) , onde $a \in A$, $c \in C$ e para o qual existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Denotamos a composta de R e S por $S \circ R$.

Exemplo

Qual é a composta das relações R e S , em que R é a relação de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$, com $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$, e S é a relação de $\{1, 2, 3, 4\}$ em $\{0, 1, 2\}$, com $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$?

Composição de Relações

Definição (Relação composta): Sejam A, B, C conjuntos. Seja R uma relação de A para B e S uma relação de B para C .

A relação **composta** de R e S é o conjunto dos pares ordenados (a, c) , onde $a \in A$, $c \in C$ e para o qual existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.

Denotamos a composta de R e S por $S \circ R$.

Exemplo

Qual é a composta das relações R e S , em que R é a relação de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$, com $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$, e S é a relação de $\{1, 2, 3, 4\}$ em $\{0, 1, 2\}$, com $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$?

Resposta: $S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$

Potências de uma relação

Definição (Potência de uma relação):

Seja R uma relação no conjunto A .

As **potências** R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Potências de uma relação

Definição (Potência de uma relação):

Seja R uma relação no conjunto A .

As **potências** R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$.

Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Potências de uma relação

Definição (Potência de uma relação):

Seja R uma relação no conjunto A .

As **potências** R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$.

Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Solução Parcial: Como $R^2 = R \circ R$, encontramos

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Potências de uma relação

Definição (Potência de uma relação):

Seja R uma relação no conjunto A .

As **potências** R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$.

Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Solução Parcial: Como $R^2 = R \circ R$, encontramos

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Como $R^3 = R^2 \circ R$, temos $R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.

Potências de uma relação

Definição (Potência de uma relação):

Seja R uma relação no conjunto A .

As **potências** R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$.

Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Solução Parcial: Como $R^2 = R \circ R$, encontramos

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Como $R^3 = R^2 \circ R$, temos $R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.

Como $R^4 = R^3 \circ R$, temos $R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\} = R^3$.

Potências de uma relação

Definição (Potência de uma relação):

Seja R uma relação no conjunto A .

As **potências** R^n , $n = 1, 2, 3, \dots$ são definidas recursivamente por

$$R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Exercício: Seja $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$.

Encontre as potências R^n com $n \geq 2$.

Solução Parcial: Como $R^2 = R \circ R$, encontramos

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Como $R^3 = R^2 \circ R$, temos $R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.

Como $R^4 = R^3 \circ R$, temos $R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\} = R^3$.

Como $R^4 = R^3$, isso implica que $R^n = R^3$ para $n = 4, 5, 6, \dots$ (**provar isso**)

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração:

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração:

Seja A um conjunto e R uma relação em A .

(\leftarrow) Prova direta. Suponha que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Em particular, $R^2 \subseteq R$.

Queremos provar que R é transitivo.

Sejam então, $a, b, c \in A$ tais que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$.

Pela definição de composição, temos que $(a, c) \in R^2$.

Como $R^2 \subseteq R$, isso implica que $(a, c) \in R$.

Portanto, R é transitivo, como queríamos demonstrar.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

(\rightarrow) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

(\rightarrow) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

(\rightarrow) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n .

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

(\rightarrow) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n .

Passo Indutivo: Devemos provar que $R^{n+1} \subseteq R$.

Seja $(a, b) \in R^{n+1}$. Pela definição de R^{n+1} , temos que $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

(\rightarrow) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n .

Passo Indutivo: Devemos provar que $R^{n+1} \subseteq R$.

Seja $(a, b) \in R^{n+1}$. Pela definição de R^{n+1} , temos que $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Logo, existe um elemento $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R^n$.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

(\rightarrow) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n .

Passo Indutivo: Devemos provar que $R^{n+1} \subseteq R$.

Seja $(a, b) \in R^{n+1}$. Pela definição de R^{n+1} , temos que $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Logo, existe um elemento $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R^n$.

Pela HI, como $R^n \subseteq R$, obtemos que $(x, b) \in R$.

Potências de uma Relação Transitiva

Teorema: Seja R uma relação no conjunto A .

A relação R é transitiva **se e somente se** $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Continuação da Demonstração:

(\rightarrow) Suponha que R é transitiva. Vamos usar indução matemática em n para provar que $R^n \subseteq R$ para todo $n \geq 1$.

Caso Base: $n = 1$. Claramente verdadeiro, dado que $R^1 = R \subseteq R$.

Hipótese de Indução: Suponha que $R^n \subseteq R$, para um inteiro positivo n .

Passo Indutivo: Devemos provar que $R^{n+1} \subseteq R$.

Seja $(a, b) \in R^{n+1}$. Pela definição de R^{n+1} , temos que $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Logo, existe um elemento $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R^n$.

Pela HI, como $R^n \subseteq R$, obtemos que $(x, b) \in R$.

Como R é transitivo e $(a, x) \in R$ e $(x, b) \in R$, segue que $(a, b) \in R$.

Isso mostra que $R^{n+1} \subseteq R$, completando a prova. □



FIM

