

Introdução às Técnicas de Demonstração

QXD0008 – Matemática Discreta



**UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ**
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2025





Tópicos desta aula

- Enunciados de generalização e de existência
- Provas de Generalização
- Provas de Existência
- Técnicas de Provas de Condicionais



Referências para esta aula

- **Seção 1.7** do livro: Kenneth H. Rosen. *Matemática Discreta e suas Aplicações*. (Sexta Edição).



Introdução



Demonstração de Teoremas

Demonstrar um teorema (geralmente) envolve:

1. analisar a estrutura da sua proposição,
2. identificar técnicas adequadas para provar a afirmação e escolher uma,
3. levantar **hipóteses** de acordo com a técnica escolhida,
4. * provar uma nova proposição (objetivo), criada pela técnica,
5. concluir que a **proposição-objetivo** segue das hipóteses.

Os Items 3 a 5 serão a prova do teorema, da proposição original. O * no Item 4 aponta uma abertura na prova. Esta parte é contextual, dependente do assunto do teorema. É nosso trabalho completá-la, re-aplicando o roteiro acima recursivamente.

Tipos de Enunciados de Teoremas

Há principalmente dois tipos de enunciados:

- **Universais (ou Generalizações)**
- **Existenciais**

Algumas técnicas são orientadas ao tipo de enunciado:

- Prova de Generalização
- Prova Existencial
- Prova por Contraexemplo
- Prova de Unicidade

Enunciados de Generalização

- **Universais (ou Generalizações)**

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

“Todos os elementos do domínio que satisfazem à propriedade $P(x)$ devem satisfazer também à propriedade $Q(x)$ ”

- É o formato mais comum que teoremas assumem.
- A fim de provar um teorema da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, nosso objetivo é mostrar que $P(c) \rightarrow Q(c)$ é verdadeiro, onde c é um elemento arbitrário do domínio.
 - Uma vez provado isso, aplicamos a regra de inferência **generalização universal**.

Enunciados de Generalização – Exemplo

- **Universais (ou Generalizações)**

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$P(x)$ = “ x é par” e $Q(x)$ = “ x^2 é par”

Variações:

- “Para todo número, se este é par, então seu quadrado é par.”
- “Para todo número par, seu quadrado é par.”
- “Se um número é par, seu quadrado é par.”
- “Para qualquer número par, seu quadrado é par.”
- “Dado um número par, seu quadrado será par.”
- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Enunciados de Generalização

Como interpretar?

- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Procure os seguintes elementos:

1. Sempre há um condicional (\rightarrow) ou um bicondicional (\leftrightarrow)
2. O restante do texto é composto por afirmações menores.
 - Que partes do enunciado caracterizam objetos?
 - Que tipos de objetos são esses?
3. Algumas afirmações são **condições** (à priori) e outros são **conclusões** (à posteriori).

Observação: É possível ter outros elementos no texto, mas estes da lista acima sempre existirão.

Enunciados de Generalização

Como interpretar?

- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Procure os seguintes elementos:

1. Sempre há um condicional (\rightarrow) ou um bicondicional (\leftrightarrow)
 - **Se não estiver explícito, assuma que é um condicional simples. Quando tiver os outros elementos da lista, re-avalie este item.**

Resposta: Condicional \rightarrow

Enunciados de Generalização

Como interpretar?

- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Procure os seguintes elementos:

2. O restante do texto é composto por afirmações menores.
 - Que partes do enunciado caracterizam objetos?
 - Que tipos de objetos são esses?

Resposta: “um inteiro par”, “o quadrado desse inteiro é par”

Enunciados de Generalização

Como interpretar?

- “O quadrado de um inteiro par é par.”

Procure os seguintes elementos:

3. Algumas afirmações são **condições** (à priori) e outros são **conclusões** (à posteriori).

Resposta: Neste enunciado, a descrição “um inteiro par” condiciona a descrição “o quadrado desse um inteiro é par”. Então temos que **SE** “um inteiro é par”, **ENTÃO** “o quadrado desse inteiro é par”.

Enunciados Existenciais

- Existenciais

$$\exists x P(x)$$

"Alguns elementos do domínio satisfazem à propriedade $P(x)$."

- A propriedade $P(x)$ pode ser também uma fórmula com conectivos.
- O conectivo mais comum é a conjunção.
- Admitem exceções.

Enunciados Existenciais

- Existenciais

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

$P(x)$ = “ x é primo” e $Q(x)$ = “ x é par”

Variações:

- “Existe um número primo par”
- “Algum número primo é par”
- “Existe um número que é primo e par”
- “Ao menos um número é simultaneamente primo e par”
- “Há números que são primos e pares”
- “Alguns números que são primos são pares”

Enunciados Existenciais

Como interpretar?

- “Algum número primo é par.”

Procure os mesmos elementos de antes:

1. Identifique partes do enunciado que descrevam objetos e que tipos de objetos são.
2. Quais deles são condições? Normalmente indicarão o domínio.

Procure também os seguintes elementos:

3. Quantificadores para cada variável.
 - Se o condicional do enunciado tiver exceções, ele se tornará verdadeiro ou falso? Caso permaneça verdadeiro, o enunciado é existencial; caso falso, é universal.

Observação: A palavra “**algum**” indica que basta um elemento do domínio satisfazer às propriedades. Isso significa que o enunciado admite exceções. A única variável existente é existencial.

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

- Universal, Verdadeiro: **Prova de Generalizações**
- Universal, Falso: **Prova por Contraexemplo**
- Existencial, Verdadeiro: **Prova de Existência**
 - Construtiva ou
 - Não-Construtiva
- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações**



Prova de Generalizações



Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

Exemplo: “Existe um número par cujo quadrado é ímpar.”

$$\exists x(x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar})$$

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

Exemplo: “Existe um número par cujo quadrado é ímpar.”

$$\exists x(x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar})$$

Parece falso, não é mesmo?

Lá atrás vimos que:

- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações**

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

Exemplo: “Existe um número par cujo quadrado é ímpar.”

$$\exists x(x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar})$$

Parece falso, não é mesmo?

Lá atrás vimos que:

- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações**

Vamos negar esta frase:

Não existe nenhum número par cujo quadrado seja ímpar

$$\neg \exists x(x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar})$$

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

Desenvolvimento completo a partir da negação:

P: Não existe nenhum número par cujo quadrado seja ímpar

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

Desenvolvimento completo a partir da negação:

P: Não existe nenhum número par cujo quadrado seja ímpar

- $\neg \exists x(x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar})$
 - $\equiv \forall x \neg(x \text{ é par} \wedge x^2 \text{ é ímpar})$ **(Lei da negação do quantificador)**
 - $\equiv \forall x(\neg x \text{ é par} \vee \neg x^2 \text{ é ímpar})$ **(DeMorgan)**
 - $\equiv \forall x(x \text{ é par} \rightarrow \neg x^2 \text{ é ímpar})$ **(Lei do condicional)**
 - $\equiv \forall x(x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$ **(Negação)**

$\neg P$: Para todo número par, seu quadrado é par.

$\neg P$: Se um número é par, então seu quadrado é par.

$\neg P$: O quadrado de um inteiro par é par.

Prova de generalizações

Por exemplo, no enunciado (decodificado anteriormente)

- **O quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x(\text{ } x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

temos o quantificador universal.

Portanto, para demonstrar que o enunciado é verdadeiro, precisaremos da **Prova de Generalizações**.

Prova de generalizações

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x(\text{ } x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

Prova de generalizações

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x(\text{ } x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja c um inteiro qualquer.

Prova de generalizações

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x(x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja c um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ c é par $\rightarrow c^2$ é par”
 - Este item é deixado em aberto pela generalização.
 - Demanda a aplicação de outra técnica.

Prova de generalizações

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x(\text{ } x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja c um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que " c é par $\rightarrow c^2$ é par"
 - Este item é deixado em aberto pela generalização.
 - Demanda a aplicação de outra técnica.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

Recapitulando...

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

- Universal, Verdadeiro: **Prova de Generalizações** 
- Universal, Falso: **Prova por Contraexemplo**
- Existencial, Verdadeiro: **Prova de Existência** 
 - Construtiva
 - Não-Construtiva
- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações** 

Prova de existência

Vimos, anteriormente, o seguinte enunciado:

- “Algum número primo é par.”

$$\exists x(x \text{ é primo} \wedge x \text{ é par})$$

Neste enunciado, temos um quantificador universal.

- Portanto, para demonstrar que o enunciado é verdadeiro, precisaremos da **Prova de Existência**.
 - Uma Prova de Existência pode ser construtiva ou não-construtiva.

Prova de existência – Construtiva

- **Definição:** Um inteiro n é **par** se existe um inteiro k tal que $n = 2k$.
- **Definição:** Um inteiro n é **ímpar** se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$.
- **Definição:** Um inteiro p é **primo** se $p > 1$ e se os únicos divisores positivos de p são 1 e p .
- **Definição:** Um inteiro positivo que é maior do que 1 e não é primo é chamado de **composto**.

Teorema. Algum número primo é par.

$$\exists x(x \text{ é primo} \wedge x \text{ é par})$$

Prova construtiva: O número 2 é primo e é par.

Prova de existência – Não-Construtiva

Teorema. Algum número primo é par.

$$\exists x(x \text{ é primo} \wedge x \text{ é par})$$

Prova não-construtiva:

- Por contradição, suponha que não existe nenhum número primo par. Isso significaria que todos os números primos são ímpares.
- Considere agora um número par como, por exemplo, o número 42.
- Pela nossa suposição, 42 não é primo, ou seja, 42 é composto (um produto de números primos).
- Como todos os primos são ímpares, temos um produto de números ímpares que resulta em um número par (Absurdo!).
- Logo, deve existir ao menos um número primo par.

Recapitulando...

Eu acho que o enunciado é falso ou verdadeiro?

- Universal, Verdadeiro: **Prova de Generalizações** 
- Universal, Falso: **Prova por Contraexemplo** 
- Existencial, Verdadeiro: **Prova de Existência** 
 - Construtiva
 - Não-Construtiva
- Existencial, Falso: **Prova de Generalizações** 

Prova por contraexemplo

- Universal, Falso: **Prova por Contraexemplo**
- O formato mais comum de enunciado é o de generalização
 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.
- Sempre há um condicional (**se-então**) numa generalização.
- Dada uma afirmação condicional, como provar que ela é falsa?
 - A maneira típica de refutar um condicional é criar um contraexemplo.
 - Um **contraexemplo** de uma afirmação “se P , então Q ” seria uma instância em que P é verdadeira, mas Q é falsa.
- $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
 - $\equiv \exists x\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ **(Lei da negação do quantificador)**
 - $\equiv \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$ **(Lei do condicional)**
 - $\equiv \exists x(\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ **(DeMorgan)**
 - $\equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ **(Negação dupla)**

Definições

- **Definição:** Sejam a e b inteiros. Dizemos que a é **divisível** por b se existir um inteiro c , de modo que $bc = a$.
- Alternativamente, podemos dizer que:
 - a é um **múltiplo** de b ,
 - b é um **fator** de a ,
 - b é um **divisor** de a , ou
 - b **divide** a .
- A notação correspondente é $b|a$ e deve ser lida como “ b divide a ”.
- Simbolicamente, se a e b são inteiros,

$$b|a \iff \exists \text{ um inteiro } k \text{ tal que } a = bk.$$

Prova por contraexemplo

Afirmção falsa: Sejam a e b inteiros. Se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$.

$$\forall a \forall b ((a|b \wedge b|a) \rightarrow (a = b))$$

Prova por contraexemplo

Afirmiação falsa: Sejam a e b inteiros. Se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$.

$$\forall a \forall b ((a|b \wedge b|a) \rightarrow (a = b))$$

- Parece que, se $a|b$, então $a \leq b$ e se $b|a$, então $b \leq a$, então $a = b$. Mas este raciocínio é incorreto.
- Para refutar a afirmação, precisamos achar inteiros a e b tais que, de uma lado, verifiquem $a|b$ e $b|a$, mas, de outro, não verifiquem $a = b$.
- Contraexemplo: $a = 5$ e $b = -5$.

Resumo — Tipos de Enunciados

Estas técnicas são as únicas associadas a quantificadores.

- Prova de Generalizações
- Prova de Existenciais
- Prova por Contra-Exemplo

Vimos que

- O enunciado mais comum é o de generalização $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.
- Sempre há um condicional numa generalização.
 - **Conclusão:** Precisamos de técnicas para provar condicionais.



Prova de Condicionais



Prova de Condicionais

Técnicas para provar $P(c) \rightarrow Q(c)$:

- **Prova direta**
- **Prova por Contraposição**
- **Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)**

Prova de Condicionais

Técnicas para provar $P(c) \rightarrow Q(c)$:

- **Prova direta**
 - suponha $P(C)$, alcance/conclua $Q(c)$.
- **Prova por Contraposição**
- **Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)**

Prova de Condicionais

Técnicas para provar $P(c) \rightarrow Q(c)$:

- **Prova direta**
 - suponha $P(C)$, alcance/conclua $Q(c)$.
- **Prova por Contraposição**
 - suponha $\neg Q(C)$, alcance/conclua $\neg P(c)$.
- **Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)**

Prova de Condicionais

Técnicas para provar $P(c) \rightarrow Q(c)$:

- **Prova direta**

- **suponha** $P(C)$, **alcance/conclua** $Q(c)$.

- **Prova por Contraposição**

- **suponha** $\neg Q(C)$, **alcance/conclua** $\neg P(c)$.

- **Prova por Contradição (ou Redução ao Absurdo)**

- **suponha** $p(C) \wedge \neg Q(c)$, **alcance/conclua** \perp .



Prova de Condicionais: Prova Direta



Prova Direta

- **Definição:** Uma **demonstração direta** de um condicional $p \rightarrow q$ é construída quando o primeiro passo é supor que p é verdadeira; os passos subsequentes são construídos utilizando-se axiomas, definições e teoremas previamente comprovados, junto com regras de inferência, com o passo final mostrando que q deve ser também verdadeira.

Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x(\text{ } x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x(\text{ } x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja c um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ c é par $\rightarrow c^2$ é par”

Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x(x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. (**Instanciação Universal**) Seja c um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que " c é par $\rightarrow c^2$ é par"
 - Este item é deixado em aberto pela generalização.
 - Demanda a aplicação de outra técnica.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x (\text{ } x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

Prova Direta — Exemplo 1

Demonstre que **o quadrado de um inteiro par é par.**

$$\forall x (x \text{ é par} \rightarrow x^2 \text{ é par})$$

1. **(Instanciação Universal)** Seja c um inteiro qualquer.
2. **(Desenvolvimento)** Provaremos que “ c é par $\rightarrow c^2$ é par”
 - 2.1 Por PROVA DIRETA, suponha que c é par.
 - 2.2 Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = 2k$ (definição).
 - 2.3 Logo, $c^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$ é um número par.
3. **(Generalização Universal)** Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

Prova Direta — Exemplo 2

Demonstre que **se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar..**

$$\forall x(x \text{ é ímpar} \rightarrow x^2 \text{ é ímpar})$$

Demonstração:

Prova Direta — Exemplo 2

Demonstre que **se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar..**

$$\forall x (x \text{ é ímpar} \rightarrow x^2 \text{ é ímpar})$$

Demonstração:

1. Seja n um número ímpar.
2. Pela definição de número ímpar, temos que $n = 2k + 1$, em que k é algum inteiro. Queremos demonstrar que n^2 é também ímpar.
3. Vamos elevar ao quadrado ambos os membros da equação $n = 2k + 1$.
(Para quê? Qual a finalidade?)
4. Assim, temos $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
5. Pela definição de ímpar, concluímos que n^2 é ímpar.
6. Consequentemente, provamos que se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.



Definição

Um inteiro a é um **quadrado perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^2$.

- **Exemplos:** 4, 9, 16, 25, 36, ...

Prova Direta — Exemplo 3

Demonstre que **se m e n são ambos quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ também é um quadrado perfeito.**

$$U = \mathbb{N}, \forall m \forall n (QP(m) \wedge QP(n) \rightarrow QP(mn))$$

Demonstração:

Prova Direta — Exemplo 3

Demonstre que **se m e n são ambos quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ também é um quadrado perfeito.**

$$U = \mathbb{N}, \forall m \forall n (QP(m) \wedge QP(n) \rightarrow QP(mn))$$

Demonstração:

1. Sejam m e n dois inteiros quadrados perfeitos.
2. Pela definição de quadrado perfeito, segue-se que existem inteiros s e t tal que $m = s^2$ e $n = t^2$.
3. Portanto, temos que $mn = s^2t^2 = stst = stst = (st)(st) = (st)^2$
 - o (usando comutatividade e associatividade da multiplicação).
4. Pela definição de quadrado perfeito, segue que mn também é um quadrado perfeito.

□

Prova Direta: Transitividade da dividibilidade

Teorema. Para todos os inteiros a , b e c , se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

$$U = \mathbb{Z}, \quad \forall a \forall b \forall c (a|b \wedge b|c \longrightarrow a|c)$$

Demonstração:

Prova Direta: Transitividade da dividibilidade

Teorema. Para todos os inteiros a , b e c , se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

$$U = \mathbb{Z}, \quad \forall a \forall b \forall c (a|b \wedge b|c \longrightarrow a|c)$$

Demonstração:

1. Sejam a , b e c inteiros arbitrários, tais que a divide b e b divide c .
2. Vamos mostrar que a divide c .
3. Pela definição de dividibilidade, $b = ar$ e $c = bs$ para inteiros r e s .
4. Por substituição e associatividade da multiplicação, temos que:

$$\begin{aligned} c &= bs \\ &= (ar)s \\ &= a(rs) \end{aligned}$$

5. Seja $k = rs$, onde k é um número inteiro.
6. Logo, $c = ak$, ou seja, a divide c , pela definição de divisibilidade. □

Definição de racional e irracional

O número real r é **racional** se existem inteiros p e q com $q \neq 0$, tal que $r = p/q$.

Todo número racional pode ser escrito como uma fração irredutível (p e q não tem divisor comum).

Um número real que não é racional é chamado de **irracional**.

Definição de racional e irracional

Exemplos:

- (a) $10/3$ é racional?

Definição de racional e irracional

Exemplos:

- (a) $10/3$ é racional?

Sim, quociente de inteiros.

Definição de racional e irracional

Exemplos:

- (a) $10/3$ é racional?

Sim, quociente de inteiros.

- (b) $0,281$ é racional?

Definição de racional e irracional

Exemplos:

- (a) $10/3$ é racional?

Sim, quociente de inteiros.

- (b) $0,281$ é racional?

Sim. Número na notação decimal que representa $281/1000$.

Definição de racional e irracional

Exemplos:

- (a) $10/3$ é racional?

Sim, quociente de inteiros.

- (b) $0,281$ é racional?

Sim. Número na notação decimal que representa $281/1000$.

- (c) $0,121212\dots$ é racional?

Definição de racional e irracional

Exemplos:

(a) $10/3$ é racional?

Sim, quociente de inteiros.

(b) $0,281$ é racional?

Sim. Número na notação decimal que representa $281/1000$.

(c) $0,121212\dots$ é racional?

Sim.

Seja $x = 0,121212\dots$ e $100x = 12,121212\dots$

$$100x - x = 12,121212\dots - 0,121212\dots$$

$$99x = 12$$

$$x = 12/99$$

Prova Direta — Exemplo 5

Teorema. A soma de dois números racionais é um número racional.

$$U = \mathbb{Q}, \forall r \forall s (r \in \mathbb{Q} \wedge s \in \mathbb{Q} \longrightarrow r + s \in \mathbb{Q})$$

Demonstração:

Prova Direta — Exemplo 5

Teorema. A soma de dois números racionais é um número racional.

$$U = \mathbb{Q}, \forall r \forall s (r \in \mathbb{Q} \wedge s \in \mathbb{Q} \longrightarrow r + s \in \mathbb{Q})$$

Demonstração:

1. Sejam r e s dois números racionais.
2. Pela definição de número racional, existem inteiros p e q , com $q \neq 0$, tais que $r = p/q$, e inteiros t e u , com $u \neq 0$, tais que $s = t/u$.
 - o Podemos usar esta informação para mostrar que $r + s$ é racional?
3. Somando r e s , nós obtemos o seguinte número:

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}.$$

4. Como $q \neq 0$ e $u \neq 0$, segue que $qu \neq 0$. Assim, $r + s$ pode ser expresso como a razão de dois inteiros, $pu + qt$ e qu , com $qu \neq 0$. Isso implica que $r + s$ é racional. □



Prova de Condicionais: Prova por Contraposição



Prova por Contraposição: Princípios

1. Expressse a afirmação a ser provada na forma:

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

2. Reescreva a afirmação na forma contrapositiva:

$$\forall x \in U, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x)$$

3. Prove a contrapositiva por uma prova direta:

- Suponha x um elemento escolhido arbitrariamente de U tal que $\neg Q(x)$ seja V .
- Tomando $\neg Q(x)$ como premissa e usando axiomas, definições e teoremas previamente provados e regras de inferência, mostre que $\neg P(x)$ deve ser verdadeira.

Prova por Contraposição — Exemplo 1

Teorema. Dado qualquer inteiro n , se n^2 é par, então n é par.

Demonstração: (por contraposição)

Prova por Contraposição — Exemplo 1

Teorema. Dado qualquer inteiro n , se n^2 é par, então n é par.

Demonstração: (por contraposição)

1. (**Instanciação**) Seja n um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que: “ n^2 é par $\rightarrow n$ é par”
 - 2.1 Por CONTRAPOSITION, suponha que n é ímpar.
 - 2.2 Devemos mostrar que n^2 não é par (ou seja, é ímpar).
 - 2.3 Por definição de um número ímpar, sabe-se que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k . Então, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
 - 2.4 Desta forma, n^2 é um número ímpar.
3. (**Generalização**) Como provamos a propriedade para um inteiro n qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.
Como a negação do consequente do enunciado condicional implica a negação do antecedente do enunciado condicional, temos que o enunciado condicional original é verdadeiro.

Prova por Contraposição — Exemplo 1

Teorema. Dado qualquer inteiro n , se n^2 é par, então n é par.

Demonstração:

Prova por Contraposição — Exemplo 1

Teorema. Dado qualquer inteiro n , se n^2 é par, então n é par.

Demonstração:

Vamos provar a afirmação por contraposição. Seja n um inteiro qualquer. Suponha que n é ímpar. Pela definição de número ímpar, temos que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k . Isso implica que

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Isto é, $n^2 = 2s + 1$ sendo $s = (2k^2 + 2k)$ é um inteiro. Pela definição de número ímpar, concluímos que n^2 é ímpar.

Como a negação do consequente do enunciado condicional implica a negação do antecedente do enunciado condicional, temos que o enunciado condicional original é verdadeiro. □

Prova por Contraposição — Exemplo 2

Teorema. Dados dois inteiros positivos a e b , se $n = ab$, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Demonstração:

Prova por Contraposição — Exemplo 2

Teorema. Dados dois inteiros positivos a e b , se $n = ab$, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Demonstração:

1. Vamos provar a contrapositiva. Dados dois inteiros positivos a e b , suponha que $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$ é falso.
2. Usando o significado da disjunção junto com a Lei de DeMorgan, isto implica que $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$.
3. Podemos multiplicar essas duas inequações juntas para obter $ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$.
 - o Aqui, usamos o fato de que se $0 < s < t$ e $0 < u < v$, então $su < tv$.
4. Assim, concluímos que $n \neq ab$.
5. Como a negação do consequente do enunciado condicional implica a negação do antecedente do enunciado condicional, temos que o enunciado condicional original é verdadeiro. □



Prova de Condicionais: Prova por Contradição (Redução ao Absurdo)



Prova por Contradição: Princípios

1. Expressse a afirmação a ser provada na forma:

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

2. Primeiro, suponha que $\neg Q(x)$ é verdadeira para x qualquer.
3. Então, use a premissa $P(x)$ e a negação da conclusão, $\neg Q(x)$, para chegar em uma contradição.

A razão pela qual essas demonstrações são válidas está na equivalência lógica:

$$p \rightarrow q \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{F}$$

Prova por Contradição — Exemplo 1

Teorema. O quadrado de um inteiro par é par.

Prova por Contradição — Exemplo 1

Teorema. O quadrado de um inteiro par é par.

1. (**Instanciação Universal**) Seja c um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ c é par $\rightarrow c^2$ é par”
 - Por CONTRADIÇÃO, suponha que c é par, mas c^2 é ímpar.
 - Então, existem $k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = 2k$ (definição de par) e $j \in \mathbb{Z}$ tal que $c^2 = 2j + 1$ (definição de ímpar).
 - Temos que $c^2 = c \cdot c = 2k \cdot 2k = 4k^2$. Logo, $4k^2 = 2j + 1$.
 - Isolando j , encontraremos que $j = \frac{4k^2 - 1}{2} = \frac{4k^2}{2} - \frac{1}{2} = 2k^2 - \frac{1}{2}$, que não é inteiro.
 - Absurdo, pois j deveria ser inteiro.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

Prova por Contradição — Exemplo 2

Teorema. A soma de dois inteiros ímpares é par.

Prova por Contradição — Exemplo 2

Teorema. A soma de dois inteiros ímpares é par.

1. (**Instanciação Universal**) Sejam p e q dois inteiros quaisquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “se p e q são ímpares $\rightarrow p + q$ é par”
 - Por CONTRADIÇÃO, suponha que p e q são ímpares, mas $p + q$ é ímpar.
 - Então, existem $\{k, j\} \subset \mathbb{Z}$ tais que $p = 2k + 1$ e $q = 2j + 1$ (definição de ímpar) e $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p + q = 2m + 1$ (definição de ímpar).
 - Temos que $p + q = 2k + 1 + 2j + 1 = 2m + 1$. Logo, $2(k + j + 1) = 2m + 1$.
 - Isolando m , encontraremos que $m = \frac{2(k+j+1)-1}{2} = \frac{2(k+j+1)}{2} - \frac{1}{2}$, que não é inteiro.
 - Absurdo, pois m deveria ser inteiro.

Relação entre prova por contradição e prova por contraposição

- Na prova por contraposição a afirmação

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

é provada apresentando uma prova direta da afirmação equivalente

$$\forall x \in U, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x)$$

Relação entre prova por contradição e prova por contraposição

- Na prova por contraposição a afirmação

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

é provada apresentando uma prova direta da afirmação equivalente

$$\forall x \in U, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x)$$

- Este tipo de prova segue os seguintes passos:
 - (a) Suponha que x é um elemento arbitrário de U tal que $\neg Q(x)$
 - (b) Através do raciocínio dedutivo isto leva a $\neg P(x)$

Relação entre prova por contradição e prova por contraposição

- Na prova por contraposição a afirmação

$$\forall x \in U, \text{ se } P(x) \text{ então } Q(x)$$

é provada apresentando uma prova direta da afirmação equivalente

$$\forall x \in U, \text{ se } \neg Q(x) \text{ então } \neg P(x)$$

- Este tipo de prova segue os seguintes passos:
 - (a) Suponha que x é um elemento arbitrário de U tal que $\neg Q(x)$
 - (b) Através do raciocínio dedutivo isto leva a $\neg P(x)$
- A prova por contradição é baseada nos seguintes passos:
 - (a) Suponha que existe um elemento $x \in U$ tal que $P(x) \wedge \neg Q(x)$
 - (b) Usando o mesmo raciocínio dedutivo isto leva a contradição $P(x) \wedge \neg P(x)$

Relação entre prova por contradição e prova por contraposição: Exemplo

Teorema. Para todo inteiro n , se n^2 é par, então n é par.

Demonstração: (por contradição)

- Suponha, por contradição, que exista um inteiro n tal que n^2 é par e n é ímpar. (Deve-se chegar a uma contradição)
- Já que n é ímpar, n^2 que é o produto $n \cdot n$ é também ímpar.
- Isto contradiz a suposição que n^2 é par. (Logo, as proposições $P(n) = n^2$ é par e $\neg P(n) = n^2$ é ímpar são verdadeiras ao mesmo tempo, o que é uma contradição.)

Relação entre prova por contradição e prova por contraposição: Exemplo

- Prova por contraposição:
 - ☺ É fácil saber que conclusão deve ser provada: negação da hipótese.
 - ☺ Não é necessário obter a negação da afirmação.
 - ☹ **Só pode ser usado para afirmações com quantificadores existencial ou universal.**
- Prova por contradição:
 - ☺ A prova termina assim que é achada uma contradição.
 - ☺ Esta técnica aplica-se a declarações gerais, sejam elas quantificadas ou não-quantificadas.
 - ☹ **A negação da afirmação é mais complexa.**
 - ☹ **Pode ser mais difícil achar o caminho da prova.**

Provas de condicionais

Estas técnicas são as mais comumente usadas para condicionais.

- Prova Direta
- Prova por Contraposição
- Prova por Contradição



Sentenças Não-Quantificadas: Prova por Contradição (Redução ao Absurdo)



Demonstração de Proposições Não-Quantificadas por Contradição: Princípios

1. Suponha que a afirmação a ser provada é falsa.
2. Mostre que essa suposição leva logicamente a uma contradição.
3. Conclua que a afirmação a ser provada é verdadeira.

A razão pela qual esta técnica de demonstração é válida deve-se à seguinte equivalência:

$$P \equiv P \vee F \equiv \neg(\neg P) \vee F \equiv \neg P \rightarrow F$$

- Suponha que podemos encontrar uma contradição q tal que $\neg p \rightarrow q$ é verdadeira. Como q é falsa, mas $\neg p \rightarrow q$ é verdadeira, podemos concluir que $\neg p$ é falsa, o que significa que p é verdadeira.
- A dificuldade nesta técnica pode ser expressa nesta pergunta: Como podemos encontrar uma contradição q que possa nos ajudar a provar que p é verdadeira?

Prova por Contradição

Teorema. $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração:

Prova por Contradição

Teorema. $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração:

- Suponha, por contradição, que $\sqrt{2}$ é um número racional.
- Pela definição de número racional, $\sqrt{2}$ pode ser escrito como uma fração de inteiros.
- Então, sejam a e b inteiros tais que $\sqrt{2} = a/b$, onde $b \neq 0$ e a e b não têm fator comum (a fração a/b é irreduzível). (Aqui, estamos usando o fato de que todo número racional pode ser escrito em uma fração irreduzível.)
- Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, segue-se que $2 = a^2/b^2$. Portanto, $2b^2 = a^2$.
- Pela definição de número par, a^2 é par. Podemos usar o fato de que se a^2 é par, então a é par, o qual segue do teorema anterior provado em aula.

Prova por Contradição

Continuação da Demonstração:

- Mas se a é par, pela definição de número par, $a = 2c$ para algum inteiro c . Então, $2b^2 = a^2$ implica que $2b^2 = 4c^2$.
- Dividindo ambos os membros dessa equação por 2, temos $b^2 = 2c^2$.
- Pela definição de par, isso significa que b^2 é par.
- Novamente usando o fato de que se o quadrado de um inteiro é par, então o inteiro também deve ser par, concluímos que b deve ser par também.
- Portanto, ter assumido que $\sqrt{2}$ é racional nos levou à equação $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum, mas a e b são pares.
- Isto é uma contradição.
- Como a afirmação “ $\sqrt{2}$ é racional” nos levou a uma contradição, então ela deve ser falsa. Ou seja a sentença “ $\sqrt{2}$ é irracional” é que é verdadeira.
- Portanto, provamos que $\sqrt{2}$ é irracional. □



Provas de Equivalência



Provas de Equivalência

- **Como provar sentenças da forma $p \leftrightarrow q$?**
- Para demonstrar um teorema que é uma sentença bicondicional, mostramos que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são ambas verdadeiras.
- A validade desse método segue da seguinte equivalência lógica:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Prova de Equivalências — Exemplo 1

Teorema. Se n é um inteiro, então n é par se e somente se n^2 é par.

Prova de Equivalências — Exemplo 1

Teorema. Se n é um inteiro, então n é par se e somente se n^2 é par.

1. (**Instanciação Universal**) Seja c um inteiro qualquer.
2. (**Desenvolvimento**) Provaremos que “ c é par $\leftrightarrow c^2$ é par”
 - A fim de provar esse bicondicional, devemos provar que “ c é par $\rightarrow c^2$ é par” e que “ c^2 é par $\rightarrow c$ é par”.
 - Ambas as implicações já foram provadas em slides anteriores.
 - Portanto, como provamos que ambas “ c é par $\rightarrow c^2$ é par” e “ c^2 é par $\rightarrow c$ é par” são verdadeiras, mostramos que “ c é par $\leftrightarrow c^2$ é par”.
3. (**Generalização Universal**) Como provamos a propriedade para um inteiro qualquer, a propriedade vale para todos os inteiros.

Prova de Equivalências — Exemplo 2

Teorema. As seguintes sentenças sobre o inteiro n são equivalentes:

- p_1 : n é par.
- p_2 : $n - 1$ é ímpar.
- p_3 : n^2 é par.

Prova de Equivalências — Exemplo 2

Teorema. As seguintes sentenças sobre o inteiro n são equivalentes:

- p_1 : n é par.
- p_2 : $n - 1$ é ímpar.
- p_3 : n^2 é par.

Demonstração:

- Note que basta mostrar que os condicionais $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$ e $p_3 \rightarrow p_1$ são verdadeiros.
- Para mostrar $p_1 \rightarrow p_2$ usamos demonstração direta. Suponha que n é par. Então, $n = 2k$ para algum inteiro k . Consequentemente,
$$n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1 + 1) - 1 = 2(k - 1) + 1.$$
Isso significa que $n - 1$ é ímpar, pois é da forma $2m + 1$, em que $m = k - 1$.

Prova de Equivalências — Exemplo 2

Continuação da Demonstração:

- Para mostrar $p_2 \rightarrow p_3$ usamos demonstração direta. Suponha que $n - 1$ é ímpar. Então $n - 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k . Portanto, $n = 2k + 2$, e isto implica que $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$. Logo, n^2 é par, pois é da forma $2m$, sendo $m = 2k^2 + 4k + 2$.
- Para mostrar $p_3 \rightarrow p_1$ usamos demonstração por contraposição. Ou seja, provamos que se n não é par, então n^2 não é par. Isso é o mesmo que demonstrar que se n é ímpar, então n^2 é ímpar, o que já demonstramos em slides anteriores. Isso completa a demonstração. □



FIM

