

Relação de Ordem

QXD0008 – Matemática Discreta



**UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ**
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismaily@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2025



Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Relação de Ordem Parcial
- Ordem Total



Referências para esta aula

- **Seção 9.6** do livro:

Discrete Mathematics and Its Applications.

Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. (**English version**)

- **Seção 8.6** do livro: Matemática Discreta e suas Aplicações.

Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.



Introdução



Relação de Ordem Parcial

Definição: Uma relação R em um conjunto S é dita **relação de ordem parcial** se e somente se R é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Definição: Um conjunto S juntamente com uma relação de ordem parcial R é chamado **conjunto parcialmente ordenado (CPO)** e é denotado por (S, R) .

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 1:

Seja R a endorrelação “menor que ou igual” no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) : a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 1:

Seja R a endorrelação “menor que ou igual” no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) : a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto \mathbb{R} , vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 1:

Seja R a endorrelação “menor que ou igual” no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) : a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto \mathbb{R} , vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: R é reflexiva sobre \mathbb{R} pois para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $x \leq x$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos xRx .

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 1:

Seja R a endorrelação “menor que ou igual” no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) : a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto \mathbb{R} , vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: R é reflexiva sobre \mathbb{R} pois para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $x \leq x$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos xRx .

Anti-simétrica: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Suponha que $x \leq y$ e $y \leq x$.

Como $x \leq y$ e $y \leq x$, obtemos que $x = y$.

Portanto, xRy e yRx implica $x = y$.

Logo, R é anti-simétrica.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 1:

Seja R a endorrelação “menor que ou igual” no conjunto dos números reais, definida como $R = \{(a, b) : a \leq b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Continuação da Solução:

Transitiva: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Suponha que $x \leq y$ e $y \leq z$.

Como $x \leq y$ e $y \leq z$, obtemos que $x = z$.

Portanto, xRy e yRz implica xRz .

Logo, R é transitiva. □

- Como a relação R é uma ordem parcial no conjunto dos reais, temos que (\mathbb{R}, R) é um conjunto parcialmente ordenado.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 2:

Seja R a relação “divide” no conjunto dos inteiros positivos, \mathbb{Z}^+ , definida como $R = \{(a, b) : a \mid b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 2:

Seja R a relação “divide” no conjunto dos inteiros positivos, \mathbb{Z}^+ , definida como $R = \{(a, b) : a \mid b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto \mathbb{Z}^+ , vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 2:

Seja R a relação “divide” no conjunto dos inteiros positivos, \mathbb{Z}^+ , definida como $R = \{(a, b) : a \mid b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto \mathbb{Z}^+ , vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: Para todo $x \in \mathbb{Z}^+$, temos que $x \mid x$, pois $x = 1 \cdot x$. Portanto, R é reflexiva.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 2:

Seja R a relação “divide” no conjunto dos inteiros positivos, \mathbb{Z}^+ , definida como $R = \{(a, b) : a | b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Solução: A fim de provar que R é uma ordem parcial no conjunto \mathbb{Z}^+ , vamos provar que ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: Para todo $x \in \mathbb{Z}^+$, temos que $x | x$, pois $x = 1 \cdot x$. Portanto, R é reflexiva.

Anti-simétrica: Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

Suponha que $x | y$ e que $y | x$.

Então, existem $k, p \in \mathbb{Z}^+$ tais que $y = kx$ e $x = py$. $(*)$

Isso implica que $x = py = p(kx) = (pk)x$.

Disso, concluímos que $pk = 1$.

O único valor possível para p e k é $p = k = 1$.

Substituindo esses valores de p e k em $(*)$, obtemos $x = y$.

Portanto, R é anti-simétrica.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 2:

Seja R a relação “divide” no conjunto dos inteiros positivos, \mathbb{Z}^+ , definida como $R = \{(a, b) : a | b\}$. **Prove que R é uma ordem parcial.**

Continuação da Solução:

Transitiva: Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Suponha que $x | y$ e que $y | z$.

Então, existem inteiros k e p tais que $y = xk$ e $z = yp$.

Substituindo o valor de y na segunda igualdade, obtemos que $z = (xk)p = x(kp)$, onde kp é um inteiro.

Logo, pela def. de divisibilidade, $x | z$.

Portanto, R é transitiva. □

- Como a relação R é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros positivos, temos que (\mathbb{Z}^+, R) é um conjunto parcialmente ordenado.

Relação de Ordem Parcial

Definição: Seja S um conjunto. O **conjunto das partes** de S , denotado por $\mathcal{P}(S)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de S .

Exemplo: O conjunto das partes do conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Relação de Ordem Parcial

Definição: Seja S um conjunto. O **conjunto das partes** de S , denotado por $\mathcal{P}(S)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de S .

Exemplo: O conjunto das partes do conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Exemplo 3:

Mostre que a relação de inclusão \subseteq é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S .

Relação de Ordem Parcial

Definição: Seja S um conjunto. O **conjunto das partes** de S , denotado por $\mathcal{P}(S)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de S .

Exemplo: O conjunto das partes do conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Exemplo 3:

Mostre que a relação de inclusão \subseteq é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S .

Solução:

Seja S um conjunto. Vamos mostrar que a relação \subseteq no conjunto $\mathcal{P}(S)$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Reflexiva: Seja A um elemento pertencente ao conjunto $\mathcal{P}(S)$. Como $A \subseteq A$ para todo conjunto A em $\mathcal{P}(S)$, concluímos que \subseteq é reflexiva.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 3:

Mostre que a relação de inclusão \subseteq é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S .

Continuação da Solução:

Anti-simétrica: Sejam $A, B \in \mathcal{P}(S)$.

Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$.

Isso implica que $A = B$.

Portanto, \subseteq é anti-simétrica.

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 3:

Mostre que a relação de inclusão \subseteq é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S .

Continuação da Solução:

Anti-simétrica: Sejam $A, B \in \mathcal{P}(S)$.

Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$.

Isso implica que $A = B$.

Portanto, \subseteq é anti-simétrica.

Transitiva: Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$.

Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq C$.

Isso implica que $A \subseteq C$.

Portanto, \subseteq é transitiva.

□

Relação de Ordem Parcial

Exemplo 3:

Mostre que a relação de inclusão \subseteq é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S .

Continuação da Solução:

Anti-simétrica: Sejam $A, B \in \mathcal{P}(S)$.

Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$.

Isso implica que $A = B$.

Portanto, \subseteq é anti-simétrica.

Transitiva: Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$.

Suponha que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq C$.

Isso implica que $A \subseteq C$.

Portanto, \subseteq é transitiva.

□

- Como a relação \subseteq é uma ordem parcial no conjunto das partes de um conjunto S , temos que $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Noção de ordem

Relações de ordem parcial são usadas para estabelecer uma ordem entre os elementos de um conjunto.

Noção de ordem

Relações de ordem parcial são usadas para estabelecer uma ordem entre os elementos de um conjunto.

- Por exemplo, no conjunto parcialmente ordenado (\mathbb{Z}, \leq) , temos que:

$$\cdots \leq -4 \leq -3 \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \cdots$$

Além disso, no CPO (\mathbb{Z}, \leq) temos a seguinte propriedade:

para quaisquer dois elementos $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Noção de ordem

Relações de ordem parcial são usadas para estabelecer uma ordem entre os elementos de um conjunto.

- Por exemplo, no conjunto parcialmente ordenado (\mathbb{Z}, \leq) , temos que:

$$\cdots \leq -4 \leq -3 \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \cdots$$

Além disso, no CPO (\mathbb{Z}, \leq) temos a seguinte propriedade:

para quaisquer dois elementos $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição: Sejam a e b elementos de um CPO (S, R) . Dizemos que a e b são **comparáveis** se e somente se aRb ou bRa .

Quando a e b são elementos de (S, R) tais que nem aRb nem bRa , a e b são ditos **incomparáveis**.

- **Obs.:** Quaisquer dois elementos do CPO (\mathbb{Z}, \leq) são comparáveis.

Relação de Ordem Total

Definição: Seja (S, R) um CPO tal que quaisquer dois elementos de S são comparáveis. S é dito um **conjunto totalmente ordenado** e a relação R é chamada uma **ordem total**.

- No exemplo anterior, vimos que o CPO (\mathbb{Z}, \leq) é totalmente ordenado porque $a \leq b$ ou $b \leq a$ sempre que a e b são inteiros.
- Outros exemplos de CPOs totalmente ordenados:
 - (\mathbb{Z}, \geq)
 - (\mathbb{R}, \leq)
 - (\mathbb{R}, \geq)
 - (A, R) , tal que $A = \{3, 9, 27, 81\}$ e $R = \{(a, b) \in A \times A : a | b\}$.

Relação de Ordem Total

Exemplo:

Seja $A = \{x : x \text{ é uma potência de } 3 \text{ e } x > 0\}$ e seja R uma relação em A definida como $R = \{(a, b) \in A \times A : a \mid b\}$.

Mostre que o CPO (A, R) é totalmente ordenado.

Relação de Ordem Total

Exemplo:

Seja $A = \{x : x \text{ é uma potência de } 3 \text{ e } x > 0\}$ e seja R uma relação em A definida como $R = \{(a, b) \in A \times A : a \mid b\}$.

Mostre que o CPO (A, R) é totalmente ordenado.

Solução:

Para mostrar que o CPO (A, R) é totalmente ordenado, devemos mostrar que quaisquer dois elementos a e b de A são comparáveis, ou seja, que $a \mid b$ ou $b \mid a$.

Relação de Ordem Total

Exemplo:

Seja $A = \{x : x \text{ é uma potência de } 3 \text{ e } x > 0\}$ e seja R uma relação em A definida como $R = \{(a, b) \in A \times A : a \mid b\}$.

Mostre que o CPO (A, R) é totalmente ordenado.

Solução:

Para mostrar que o CPO (A, R) é totalmente ordenado, devemos mostrar que quaisquer dois elementos a e b de A são comparáveis, ou seja, que $a \mid b$ ou $b \mid a$.

Sejam $a, b \in A$. Por definição, a e b são potências de 3 e $a, b > 0$.

Ou seja, $a = 3^i$ e $b = 3^j$, para $i, j \in \mathbb{Z}^+$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $i < j$.

Então, $3^i < 3^j$ e, portanto, $a < b$. Logo, $\frac{b}{a} = \frac{3^j}{3^i} = 3^{j-i}$, onde 3^{j-i} é um inteiro positivo. Portanto, $b = a \cdot 3^{j-i}$.

Pela definição de divisibilidade, temos que $a \mid b$, como queríamos demonstrar.

□

Relação de Ordem Total – Observações

- **Nem todos os CPOs são totalmente ordenados.**

Dois elementos de um certo conjunto podem não ser comparáveis, dependendo da relação empregada.

- Por exemplo, considere o CPO $(\mathbb{Z}^+, |)$ onde $|$ é a relação **divide**.

- Note que 2 não é comparável com 3 nem 3 é comparável com 2 porque $2 \nmid 3$ e $3 \nmid 2$.

- Similarmente, o CPO $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ não é totalmente ordenado.

- o conjunto $\{1, 2\}$ não é comparável com o conjunto $\{1, 3\}$ e vice versa porque nenhum desses conjuntos está contido no outro.



FIM

