Indução Matemática

Matemática Discreta

Prof. Lucas Ismaily

2º Semestre de 2025

Aluno: [ ] Matrícula: [ ]

Questões:

1. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo número inteiro positivo n.
   (a) Qual é a proposição $P(1)$?
   (b) Mostre que P(1) é verdadeira, completando o passo base da demonstração.
   (c) Qual é a hipótese indutiva?
   (d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?
   (e) Complete o passo de indução.
   (f) Explique por que esses passos mostram que esta fórmula é verdadeira sempre que n for um número inteiro positivo.
2. Demonstre que $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
3. Demonstre que $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + ... + 3 \cdot 5^n = 3(5^{n+1} - 1)/4$ sempre que n for um número inteiro não negativo.
4. (a) Encontre uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e pares.
   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
5. (a) Encontre uma fórmula para $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n.
   (b) Demonstre a fórmula que você conjecturou no item (a).
6. Demonstre que $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n+1)/2$ sempre que n for um número inteiro positivo.

7. Demonstre que, para todo número inteiro positivo n, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$.

8. Demonstre que $\sum_{j=1}^{n} j^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$ sempre que n for um número inteiro positivo.

9. Considere $P(n)$ como a proposição de que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, em que n é um número inteiro maior que 1.

   (a) Qual é a proposição $P(2)$?

   (b) Mostre que $P(2)$ é verdadeira, completando o passo base da demonstração.

   (c) Qual é a hipótese indutiva?

   (d) O que você precisa para demonstrar o passo de indução?

   (e) Complete o passo de indução.

   (f) Explique por que esses passos mostram que a inequação é verdadeira sempre que n for um número inteiro maior que 1.

10. Demonstre que $2^n > n^2$ se n for um número inteiro maior que 4.

11. Para quais números inteiros não negativos n é $2n + 3 \leq 2^n$? Demonstre sua resposta.

12. Seja $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ o n-ésimo número harmônico. Demonstre que $H_{2^n} \leq 1 + n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

13. Demonstre que 2 divide $n^2 + n$ sempre que n for um número inteiro positivo.

14. Demonstre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n for um número inteiro não negativo.

15. Demonstre que $n^2 - 1$ é divisível por 8 sempre que n for um número inteiro positivo e ímpar.

16. Demonstre que, se n for um número inteiro positivo, então 133 divide $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

17. Demonstre que, se $A_1, A_2, ..., A_n$ e $B_1, B_2, ..., B_n$ forem conjuntos, tal que $A_j \subseteq B_j$ para $j = 1, 2, ..., n$, então $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} B_j$.

18. Demonstre que, se A_1, A_2, ..., A_n e B forem conjuntos, então $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$.

19. Demonstre que, se $A_1, A_2, ..., A_n$ forem subconjuntos de um conjunto universo U, então $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$

20. Demonstre que um conjunto com n elementos tem $n\ (n-1)/2$ subconjuntos com dois elementos sempre que n for um número inteiro maior ou igual a 2.

21. O que está errado na “prova”abaixo de que todos os cavalos são da mesma cor? Considere $P(n)$ como a proposição de que todos os cavalos em um conjunto de n cavalos são da mesma cor.
    Passo Base: Certamente, $P(1)$ é verdadeira.
    Passo de Indução: Assuma que $P(k)$ seja verdadeira, assim, todos os cavalos em qualquer conjunto de k cavalos são da mesma cor. Considere quaisquer $k+1$ cavalos; numere-os como $1, 2, 3, ..., k, k+1$. Agora, os primeiros k desses cavalos devem ter a mesma cor, e os últimos k cavalos devem ser também da mesma cor. Como o conjunto dos primeiros k cavalos e o cojunto dos últimos k cavalos são sobrepostos (interseção não vazia), todos os $k+1$ cavalos devem ser da mesma cor. Isso mostra que $P(k+1)$ é verdadeira e termina a demonstração por indução.

22. O que está errado nesta “demonstração”?
    Teorema: Para todo número inteiro positivo n, se x e y forem números inteiros positivos com max$(x, y) = n$, então $x = y$.
    Passo base: Suponha que $n = 1$. Se max(x, y)=1 e x e y forem números inteiros positivos, temos x=1 e y=1.
    Passo de indução: Considere k como um número inteiro positivo. Assuma que sempre que max$(x, y) = k$ e x e y forem números inteiros positivos, então $x = y$. Agora considere max$(x, y) = k + 1$, em que x e y são números inteiros positivos. Então, max$(x - 1, y - 1) = k$, assim, pela hipótese indutiva, $x - 1 = y - 1$. Temos que $x = y$, completando o passo de indução .

23. Suponha que m seja um inteiro positivo. Use a indução matemática para demonstrar que se a e b forem números inteiros com $a \equiv b(\textbf{mod}\ m)$, então $a^k \equiv b^k(\textbf{mod}\ m)$ sempre que k for um número inteiro não negativo.