# Sequências e Somatórios

## QXD0008 – Matemática Discreta

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Lucas Ismaily
ismailybf@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

# Tópicos desta aula

Nesta apresentação:

- Sequências: PA, PG, Relações de Recorrência
- Somatórios: Propriedades, Mudança de Índice

# Referências para esta aula

Esta aula foi baseada na seguinte seção:

- **Seção 2.4** do livro: Discrete Mathematics and Its Applications.
  Author: Kenneth H. Rosen. Seventh Edition. **(English version)**

Uma versão mais resumida do conteúdo pode ser encontrada também nesta seção:

- **Seção 2.4** do livro: Matemática Discreta e suas Aplicações.
  Autor: Kenneth H. Rosen. Sexta Edição.

# Introdução

# Sequência — Definição



- **Definição:** Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto $S$ qualquer.

# Sequência — Definição



- **Definição:** Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto $S$ qualquer.

Dada uma sequência...

- Seu **domínio** é um subconjunto dos inteiros
  - Comumente usa-se $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ou $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - O domínio de uma sequência também é chamado de índice

# Sequência — Definição

- **Definição:** Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto $S$ qualquer.

Dada uma sequência...

- Seu **domínio** é um subconjunto dos inteiros
  - Comumente usa-se $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ou $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - O domínio de uma sequência também é chamado de índice
- Seu contradomínio pode ser qualquer conjunto

# Sequência — Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto $S$ qualquer.

Dada uma sequência...

- Seu **domínio** é um subconjunto dos inteiros
  - Comumente usa-se $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ou $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - O domínio de uma sequência também é chamado de índice
- Seu contradomínio pode ser qualquer conjunto

**Constatação:** Toda função $f : D \to S$ tal que $D \subseteq \mathbb{Z}$ é uma sequência.

# Sequência — Exemplo

- **Definição:** Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto $S$ qualquer.

**Exemplo:**

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.

# Sequência — Exemplo



- **Definição:** Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto $S$ qualquer.

**Exemplo:**

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.

Neste caso, temos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $f(n) = 2^n$.

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8,\ f(4) = 16,$$
$$f(5) = 32,\ f(6) = 64,\ f(7) = 128,\ f(8) = 256,\ \ldots$$

# Sequência — Exemplo

- **Definição:** Uma sequência é uma função de um subconjunto dos inteiros para um conjunto $S$ qualquer.

**Exemplo:**

A função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais.

Neste caso, temos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $f(n) = 2^n$.

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8,\ f(4) = 16,$$
$$f(5) = 32,\ f(6) = 64,\ f(7) = 128,\ f(8) = 256,\ \ldots$$

Em algumas situações, falaremos simplesmente da sequência

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$$

# Sequência — Notação

## Notação (Opções)

- "a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais."
- "a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..."
- "a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$"

# Sequência — Notação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## Notação (Opções)

- "a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais."
- "a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..."
- "a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$"

## Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n}$

**Quem são os termos de $\{a_n\}$?**

# Sequência — Notação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Notação (Opções)**

- "a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais."
- "a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..."
- "a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$"

**Exemplo**

Considere a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n}$

**Quem são os termos de $\{a_n\}$?**

- Ou seja, quem são $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ ?

# Sequência — Notação

### Notação (Opções)

- "a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais."
- "a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..."
- "a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$"

### Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n}$

**Quem são os termos de $\{a_n\}$?**

- Ou seja, quem são $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ ?

  Resposta: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $\ldots$

# Sequência — Notação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## Notação (Opções)

- "a função $f(n) = 2^n$ com domínio restrito aos naturais."
- "a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..."
- "a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = 2^n$"

## Exemplo

Considere a sequência $\{a_n\}$, com $a_n = \frac{1}{n}$

**Quem são os termos de $\{a_n\}$?**

- Ou seja, quem são $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ ?

  Resposta: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $\ldots$

Alternativamente, a sequência é $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

# Progressão Aritmética

# Progressão Aritmética — Definição

- **Definição:** Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência da forma

$$a_0,\ a_0 + d,\ a_0 + 2d,\ a_0 + 3d,\ \ldots,\ a_0 + nd,\ \ldots$$

  onde $a_0$ e $d$ são números reais.

Dada uma PA...

- $a_0$ é o seu termo inicial
- $d$ é sua razão aritmética ou diferença comum

# Progressão Aritmética

## REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \dots$

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 + \mathbf{0}d, & a_0 + \mathbf{1}d, & a_0 + \mathbf{2}d, & a_0 + \mathbf{3}d, & \dots, & a_0 + \mathbf{n}d, & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\
a_{\mathbf{0}}, & a_{\mathbf{1}}, & a_{\mathbf{2}}, & a_{\mathbf{3}}, & \dots, & a_{\mathbf{n}}, & \dots
\end{array}$$

# Progressão Aritmética

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \ldots$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 + \mathbf{0}d, & a_0 + \mathbf{1}d, & a_0 + \mathbf{2}d, & a_0 + \mathbf{3}d, & \ldots, & a_0 + \mathbf{n}d, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ a_{\mathbf{0}}, & a_{\mathbf{1}}, & a_{\mathbf{2}}, & a_{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_{\mathbf{n}}, & \ldots \end{array}$$

**Constatação:**
Cada PA é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0 + dx$, onde $a_0$ e $d$ são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

# Progressão Aritmética



## REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \ldots$

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 + \mathbf{0}d, & a_0 + \mathbf{1}d, & a_0 + \mathbf{2}d, & a_0 + \mathbf{3}d, & \ldots, & a_0 + \mathbf{n}d, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\
a_{\mathbf{0}}, & a_{\mathbf{1}}, & a_{\mathbf{2}}, & a_{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_{\mathbf{n}}, & \ldots
\end{array}$$

**Constatação:**
Cada PA é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0 + dx$, onde $a_0$ e $d$ são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

Dizemos ainda que a PA $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \ldots, a_0 + nd, \ldots$ é a análoga discreta da função linear $f(x) = a_0 + dx$.

# Progressão Aritmética



**Exemplo**

A sequência $\{s_n\}$ com $s_n = -1 + 4n$ é uma progressão aritmética.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista?
2. Qual a razão aritmética da PA?
3. Quem são os primeiros cinco termos?

# Progressão Aritmética

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo**

A sequência $\{s_n\}$ com $s_n = -1 + 4n$ é uma progressão aritmética.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista? $s_0 = -1 + 4 \cdot 0 = -1$
2. Qual a razão aritmética da PA? $d = 4$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $-1, 3, 7, 11, 15, \ldots$

# Progressão Aritmética

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo**
A sequência $\{s_n\}$ com $s_n = -1 + 4n$ é uma progressão aritmética.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista? $s_0 = -1 + 4 \cdot 0 = -1$
2. Qual a razão aritmética da PA? $d = 4$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $-1, 3, 7, 11, 15, \ldots$

**Observação:** Dizemos que esta sequência é **infinita** e **crescente**.

# Progressão Aritmética

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exercício para casa:** Prove o seguinte teorema.

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, d \in \mathbb{R}$,

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + (n-1)d) = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}.$$

# Progressão Geométrica

# Progressão Geométrica — Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência da forma

$$a_0,\ a_0 r,\ a_0 r^2,\ a_0 r^3,\ \ldots,\ a_0 r^n,\ \ldots$$

onde $a_0$ e $r$ são números reais.

Dada uma PG...

- $a_0$ é o seu termo inicial
- $r$ é sua razão geométrica ou razão comum

# Progressão Geométrica



## REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 r, a_0 r^2, a_0 r^3, \ldots$

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_0 r^{\mathbf{0}}, & a_0 r^{\mathbf{1}}, & a_0 r^{\mathbf{2}}, & a_0 r^{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_0 r^{\mathbf{n}}, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\
a_{\mathbf{0}}, & a_{\mathbf{1}}, & a_{\mathbf{2}}, & a_{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_{\mathbf{n}}, & \ldots
\end{array}
$$

# Progressão Geométrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 r, a_0 r^2, a_0 r^3, \ldots$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 r^{\mathbf{0}}, & a_0 r^{\mathbf{1}}, & a_0 r^{\mathbf{2}}, & a_0 r^{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_0 r^{\mathbf{n}}, & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ a_{\mathbf{0}}, & a_{\mathbf{1}}, & a_{\mathbf{2}}, & a_{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_{\mathbf{n}}, & \ldots \end{array}$$

**Constatação:**
Cada PG é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0 r^x$, onde $a_0$ e $r$ são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

# Progressão Geométrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## REPARE

- Os termos de uma sequência comum seriam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Os termos descritos na PA são $a_0, a_0 r, a_0 r^2, a_0 r^3, \ldots$

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_0 r^{\mathbf{0}}, & a_0 r^{\mathbf{1}}, & a_0 r^{\mathbf{2}}, & a_0 r^{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_0 r^{\mathbf{n}}, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\
a_{\mathbf{0}}, & a_{\mathbf{1}}, & a_{\mathbf{2}}, & a_{\mathbf{3}}, & \ldots, & a_{\mathbf{n}}, & \ldots
\end{array}
$$

**Constatação:**
Cada PG é caracterizada por uma função da forma $f(x) = a_0 r^x$, onde $a_0$ e $r$ são números reais, mas com domínio restrito a um subconjunto dos inteiros.

Dizemos ainda que a PG $a_0, a_0 r, a_0 r^2, a_0 r^3, \ldots, a_0 r^n, \ldots$ é a análoga discreta da função exponencial $f(x) = a_0 r^x$.

# Progressão Geométrica

**Exemplo**

A sequência $\{c_n\}$ com $c_n = 2 \cdot 5^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista?
2. Qual a razão geométrica da PG?
3. Quem são os primeiros cinco termos?

# Progressão Geométrica



**Exemplo**

A sequência $\{c_n\}$ com $c_n = 2 \cdot 5^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista? $c_0 = 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = 5$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$

# Progressão Geométrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo**
A sequência $\{c_n\}$ com $c_n = 2 \cdot 5^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista? $c_0 = 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = 5$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$

**Observação:** Dizemos que esta sequência é **infinita** e **crescente**.

# Progressão Geométrica



**Exemplo**

A sequência $\{d_n\}$ com $d_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista?
2. Qual a razão geométrica da PG?
3. Quem são os primeiros cinco termos?

# Progressão Geométrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo**

A sequência $\{d_n\}$ com $d_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista? $d_0 = 6 \cdot (\frac{1}{3})^0 = 6 \cdot 1 = 6$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = \frac{1}{3}$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

# Progressão Geométrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo**
A sequência $\{d_n\}$ com $d_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista? $d_0 = 6 \cdot (\frac{1}{3})^0 = 6 \cdot 1 = 6$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = \frac{1}{3}$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

**Observação:** Dizemos que esta sequência é **infinita** e **decrescente**.

# Progressão Geométrica

**Exemplo**

A sequência $\{e_n\}$ com $e_n = (-1)^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista?
2. Qual a razão geométrica da PG?
3. Quem são os primeiros cinco termos?

# Progressão Geométrica

**Exemplo**

A sequência $\{e_n\}$ com $e_n = (-1)^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista? $e_0 = (-1)^0 = 1$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = -1$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

# Progressão Geométrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo**

A sequência $\{e_n\}$ com $e_n = (-1)^n$ é uma progressão geométrica.

**Perguntas**

1. Qual o primeiro termo da lista? $e_0 = (-1)^0 = 1$
2. Qual a razão geométrica da PG? $r = -1$
3. Quem são os primeiros cinco termos? $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Se uma sequência é sempre crescente ou sempre decrescente, ela é chamada de monótona.

**Observação:** Dizemos que esta sequência é **infinita** e **não monótona**.

# Somas de Progressões Geométricas

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Demonstração:

# Somas de Progressões Geométricas



**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n \;=\; \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Demonstração:

Seja $P(n)$ a afirmação de que a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma progressão geométrica é $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

# Somas de Progressões Geométricas



**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Demonstração:

Seja $P(n)$ a afirmação de que a soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica é $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

Vamos provar por indução em $n$.

# Somas de Progressões Geométricas

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n \; = \; \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Demonstração:

Seja $P(n)$ a afirmação de que a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma progressão geométrica é $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

Vamos provar por indução em $n$.

**Base:** $P(0)$ é verdadeiro, pois

$$\frac{ar^{0+1} - a}{r - 1} = \frac{ar - a}{r - 1} = \frac{a(r-1)}{r - 1} = a.$$

# Somas de Progressões Geométricas



**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n \; = \; \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

**Passo Indutivo:** A Hipótese de Indução é a afirmação de que $P(k)$ é verdadeiro para um natural $k$ arbitrário.

# Somas de Progressões Geométricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

**Passo Indutivo:** A Hipótese de Indução é a afirmação de que $P(k)$ é verdadeiro para um natural $k$ arbitrário. Ou seja, $P(k)$ é a afirmação

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}.$$

# Somas de Progressões Geométricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

**Passo Indutivo:** A Hipótese de Indução é a afirmação de que $P(k)$ é verdadeiro para um natural $k$ arbitrário. Ou seja, $P(k)$ é a afirmação

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}.$$

Devemos mostrar que, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

# Somas de Progressões Geométricas

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n \;=\; \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

**Passo Indutivo:** A Hipótese de Indução é a afirmação de que $P(k)$ é verdadeiro para um natural $k$ arbitrário. Ou seja, $P(k)$ é a afirmação

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k \;=\; \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1}.$$

Devemos mostrar que, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ é verdadeiro. Ou seja, devemos mostrar que:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + ar^{k+1} \;=\; \frac{ar^{k+2} - a}{r - 1}.$$

# Somas de Progressões Geométricas

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k}_{\text{Oportunidade de aplicar a HI}} + ar^{k+1}$$

$\square$

# Somas de Progressões Geométricas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k}_{\text{Oportunidade de aplicar a HI}} + ar^{k+1} \overset{HI}{=} \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1}$$

□

# Somas de Progressões Geométricas

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k}_{\text{Oportunidade de aplicar a HI}} + ar^{k+1} \overset{HI}{=} \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1}$$

$$= \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r - 1}$$

$\square$

# Somas de Progressões Geométricas

**Teorema.** Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$, tem-se que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Continuação da Demonstração:

$$\begin{aligned}
\underbrace{a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k}_{\text{Oportunidade de aplicar a HI}} + ar^{k+1} &\overset{HI}{=} \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1} \\
&= \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r - 1} \\
&= \frac{ar^{k+2} - a}{r - 1}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que se a hipótese de indução $P(k)$ for verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira. Isso completa a prova do passo indutivo. Como provamos a base e o passo indutivo, a prova por indução está completa. $\square$

# Relações de Recorrência

# Outras formas de especificar sequências

- Vimos que PAs e PGs podem ser especificadas fornecendo fórmulas explícitas para seus termos:
  - PA: $a_n = a_0 + n \cdot d$
  - PG: $c_n = c_0 \cdot r^n$

# Outras formas de especificar sequências

- Vimos que PAs e PGs podem ser especificadas fornecendo fórmulas explícitas para seus termos:
  - PA: $a_n = a_0 + n \cdot d$
  - PG: $c_n = c_0 \cdot r^n$
- Porém existem outros modos de especificar uma sequência.
- Uma outra forma consiste em fornecer um ou mais termos iniciais juntamente com uma regra de formação dos termos subsequentes.

# Relações de Recorrência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo $a_n$ em função de um ou mais termos que o antecedem.

# Relações de Recorrência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo $a_n$ em função de um ou mais termos que o antecedem.

  Dizemos que uma sequência resolve uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

# Relações de Recorrência

- **Definição:** Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo $a_n$ em função de um ou mais termos que o antecedem.

  Dizemos que uma sequência resolve uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

**Exemplo:**
Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 1$, em que $a_0 = 2$. Também é comum especificar uma relação de recorrência utilizando a letra $T$, nesse caso, tem-se que $T(n) = T(n-1) + 3$, sendo $T(0) = 2$.

# Relações de Recorrência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo $a_n$ em função de um ou mais termos que o antecedem.

  Dizemos que uma sequência resolve uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

**Exemplo:**
Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 1$, em que $a_0 = 2$. Também é comum especificar uma relação de recorrência utilizando a letra $T$, nesse caso, tem-se que $T(n) = T(n-1) + 3$, sendo $T(0) = 2$.

**Pergunta:** Quais são os termos $T(1)$, $T(2)$ e $T(3)$?

# Relações de Recorrência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo $a_n$ em função de um ou mais termos que o antecedem.

  Dizemos que uma sequência resolve uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

**Exemplo:**
Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 1$, em que $a_0 = 2$. Também é comum especificar uma relação de recorrência utilizando a letra $T$, nesse caso, tem-se que $T(n) = T(n-1) + 3$, sendo $T(0) = 2$.

**Pergunta:** Quais são os termos $T(1)$, $T(2)$ e $T(3)$?

- $T(1) = T(0) + 3 = 2 + 3 = 5$
- $T(2) = T(1) + 3 = 5 + 3 = 8$
- $T(3) = T(2) + 3 = 8 + 3 = 11$

# Relações de Recorrência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- **Definição:** Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo $a_n$ em função de um ou mais termos que o antecedem.

  Dizemos que uma sequência resolve uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

**Exemplo:**
Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 1$, em que $a_0 = 2$. Também é comum especificar uma relação de recorrência utilizando a letra $T$, nesse caso, tem-se que $T(n) = T(n-1) + 3$, sendo $T(0) = 2$.

**Pergunta:** Quais são os termos $T(1)$, $T(2)$ e $T(3)$?

- $T(1) = T(0) + 3 = 2 + 3 = 5$
- $T(2) = T(1) + 3 = 5 + 3 = 8$
- $T(3) = T(2) + 3 = 8 + 3 = 11$

Veja que foi necessário calcular algum termo novo antes de cada $T(n)$.

# Relações de Recorrência — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo:**
Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0; \\ 5 & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

# Relações de Recorrência — Exemplo

**Exemplo:**
Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0; \\ 5 & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

**Pergunta:** Quais são os termos $a_2, a_3, a_4$?

# Relações de Recorrência — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo:**
Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0; \\ 5 & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

**Pergunta:** Quais são os termos $a_2, a_3, a_4$?

- $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
- $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$
- $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$

# Relações de Recorrência — Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo:**
Seja $\{a_n\}$ a sequência que satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0; \\ 5 & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} - a_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

**Pergunta:** Quais são os termos $a_2, a_3, a_4$?

- $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
- $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$
- $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$

$\{a_n\}$ é a sequência $3, 5, 2, -3, -5, -2, 3, 5, \ldots$

# Exemplo: Sequência de Fibonacci

**Definição:** A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0; \\ 1 & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Leonardo Fibonacci

# Exemplo: Sequência de Fibonacci

**Definição:** A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0; \\ 1 & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Leonardo Fibonacci

**Pergunta:** Quais são os números $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$?

# Exemplo: Sequência de Fibonacci

**Definição:** A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0; \\ 1 & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Leonardo Fibonacci

**Pergunta:** Quais são os números $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$?

- $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
- $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
- $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$
- $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$
- $f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$

# Exemplo: Sequência de Fibonacci

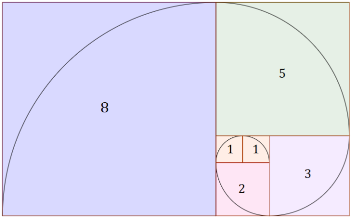
**Definição:** A sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0; \\ 1 & \text{se } n = 1; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Leonardo Fibonacci

**Pergunta:** Quais são os números $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$?

- $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$
- $f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
- $f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$
- $f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$
- $f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$



# Resolvendo relações de recorrência

# Resolvendo Relações de Recorrência

- **Definição:** Dizemos que resolvemos uma relação de recorrência quando encontramos uma fórmula explícita para os termos da sequência.

  Essa fórmula explícita é chamada fórmula fechada.

# Resolvendo Relações de Recorrência

- **Definição:** Dizemos que resolvemos uma relação de recorrência quando encontramos uma fórmula explícita para os termos da sequência.

  Essa fórmula explícita é chamada fórmula fechada.

**Exemplo:**
Anteriormente, vimos a sequência de fibonacci $\{f_n\}$, definida recursivamente por $f_0 = 0, f_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

# Resolvendo Relações de Recorrência

- **Definição:** Dizemos que resolvemos uma relação de recorrência quando encontramos uma fórmula explícita para os termos da sequência.

  Essa fórmula explícita é chamada fórmula fechada.

**Exemplo:**
Anteriormente, vimos a sequência de fibonacci $\{f_n\}$, definida recursivamente por $f_0 = 0, f_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

**Problema:** Para $n$ grande, o cálculo de $f_n$ pode ser muito tedioso.
Seria bom se existisse uma fórmula fechada para os termos dessa sequência.

# Resolvendo Relações de Recorrência

- **Definição:** Dizemos que resolvemos uma relação de recorrência quando encontramos uma fórmula explícita para os termos da sequência.

  Essa fórmula explícita é chamada fórmula fechada.

**Exemplo:**
Anteriormente, vimos a sequência de fibonacci $\{f_n\}$, definida recursivamente por $f_0 = 0, f_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

**Problema:** Para $n$ grande, o cálculo de $f_n$ pode ser muito tedioso.
Seria bom se existisse uma fórmula fechada para os termos dessa sequência.

Felizmente, existe uma fórmula fechada para esta sequência!
Para $n \geq 1$, temos que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

# Método da substituição iterativo

- Existem diversos métodos para resolver relações de recorrência.
- Um método simples é o método da substituição iterativo.
  - Nesta técnica, usamos repetidamente a relação de recorrência para expandir a expressão para o n-ésimo termo até poder ter uma "ideia" da forma geral (uma conjectura).
  - Logo após, esta conjectura é verificada por indução matemática.

# Método da substituição iterativo

**Problema**

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

# Método da substituição iterativo



**Problema**

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

**Solução**

Começamos com a condição inicial $a_0 = 2$ e vamos aplicando sucessivamente a relação de recorrência até que seja possível deduzir uma fórmula fechada para o termo geral $a_n$.

# Método da substituição iterativo



**Problema**

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

**Solução**

Começamos com a condição inicial $a_0 = 2$ e vamos aplicando sucessivamente a relação de recorrência até que seja possível deduzir uma fórmula fechada para o termo geral $a_n$.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + 3 = 2 + 3 = 2 + 3 \cdot 1 \\
a_2 &= a_1 + 3 = (2 + 3 \cdot 1) + 3 = 2 + 3 \cdot 2 \\
a_3 &= a_2 + 3 = (2 + 3 \cdot 2) + 3 = 2 + 3 \cdot 3 \\
a_4 &= a_3 + 3 = (2 + 3 \cdot 3) + 3 = 2 + 3 \cdot 4 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 3 = (2 + 3 \cdot (n-1)) + 3 = 2 + 3n.
\end{aligned}
$$

# Método da substituição iterativo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

**Problema**

Resolva a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

**Solução**

Começamos com a condição inicial $a_0 = 2$ e vamos aplicando sucessivamente a relação de recorrência até que seja possível deduzir uma fórmula fechada para o termo geral $a_n$.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + 3 = 2 + 3 = 2 + 3 \cdot 1 \\
a_2 &= a_1 + 3 = (2 + 3 \cdot 1) + 3 = 2 + 3 \cdot 2 \\
a_3 &= a_2 + 3 = (2 + 3 \cdot 2) + 3 = 2 + 3 \cdot 3 \\
a_4 &= a_3 + 3 = (2 + 3 \cdot 3) + 3 = 2 + 3 \cdot 4 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 3 = (2 + 3 \cdot (n-1)) + 3 = 2 + 3n.
\end{aligned}
$$

Portanto, **conjecturamos** que $a_n = 2 + 3n$ é uma fórmula fechada para a recorrência acima. **Temos que provar essa conjectura.**

# Método da substituição iterativo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em $n$ que $a_n = 2 + 3n$.

# Método da substituição iterativo



## Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em $n$ que $a_n = 2 + 3n$.

**Base:** Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial $(a_0 = 2)$.

# Método da substituição iterativo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em $n$ que $a_n = 2 + 3n$.

**Base:** Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial $(a_0 = 2)$.

**Hipótese de Indução:** Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um $k$ arbitrário, onde $k \geq 0$.

# Método da substituição iterativo



## Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em $n$ que $a_n = 2 + 3n$.

**Base:** Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

**Hipótese de Indução:** Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um $k$ arbitrário, onde $k \geq 0$.

**Passo Indutivo:** Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

# Método da substituição iterativo



## Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em $n$ que $a_n = 2 + 3n$.

**Base:** Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

**Hipótese de Indução:** Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um $k$ arbitrário, onde $k \geq 0$.

**Passo Indutivo:** Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Pela **definição da relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$, temos que

$$a_{k+1} = a_k + 3$$

# Método da substituição iterativo

## Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em $n$ que $a_n = 2 + 3n$.

**Base:** Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

**Hipótese de Indução:** Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um $k$ arbitrário, onde $k \geq 0$.

**Passo Indutivo:** Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Pela **definição da relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$, temos que

$$a_{k+1} = a_k + 3 \stackrel{HI}{=}$$

# Método da substituição iterativo



## Continuação da Solução

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em $n$ que $a_n = 2 + 3n$.

**Base:** Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial $(a_0 = 2)$.

**Hipótese de Indução:** Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um $k$ arbitrário, onde $k \geq 0$.

**Passo Indutivo:** Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Pela **definição da relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$, temos que

$$a_{k+1} = a_k + 3 \overset{HI}{=} (2 + 3k) + 3 =$$

# Método da substituição iterativo

**Continuação da Solução**

Vamos agora provar que $a_n = 2 + 3n$ é uma solução para a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $a_0 = 2$.

Vamos provar por indução em $n$ que $a_n = 2 + 3n$.

**Base:** Suponha $n = 0$. Neste caso, temos que $a_0 = 2 + 3 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$, o que é verdade pela condição inicial ($a_0 = 2$).

**Hipótese de Indução:** Suponha que $a_k = 2 + 3k$ seja verdade para um $k$ arbitrário, onde $k \geq 0$.

**Passo Indutivo:** Prova-se, a seguir, que $a_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

Pela **definição da relação de recorrência** para a sequência $\{a_n\}$, temos que

$$a_{k+1} \; = \; a_k + 3 \; \overset{HI}{=} \; (2 + 3k) + 3 \; = \; 2 + 3(k + 1).$$

Isso conclui o passo indutivo.

Portanto, como a base e o passo indutivo foram provados, concluímos que $a_n = 2 + 3n$. $\square$

# Resolvendo Relações de Recorrência

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exercício para Casa:** Resolva a relação de recorrência $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$, onde $a_1 = 2$.

# Somatórios

# Somatórios

Intuitivamente, são somas dos termos de alguma sequência $\{a_n\}$

- A estrutura das sequências (domínio nos inteiros) favorece a resolução de somas longas dos seus termos em menos passos
- Nosso objetivo é utilizar as propriedades de somatórios para simplificar somas longas

# Somatórios – Notação



A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

# Somatórios – Notação



A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{m \le j \le n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: $j, m, n, a_j$

- $j$ é a variável de índice
  - a escolha da variável $j$ como índice é arbitrária.

# Somatórios – Notação

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: $j, m, n, a_j$

- $j$ é a variável de índice
    - a escolha da variável $j$ como índice é arbitrária.
- $m$ é o valor inicial (limite inferior) que $j$ assume

# Somatórios – Notação

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{m \le j \le n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: $j, m, n, a_j$

- $j$ é a variável de índice
  - a escolha da variável $j$ como índice é arbitrária.
- $m$ é o valor inicial (limite inferior) que $j$ assume
- $n$ é o valor final (limite superior) que $j$ assume

# Somatórios – Notação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

A soma dos termos $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ pode ser expressa como

$$\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j, \qquad \text{ou} \qquad \textstyle\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

Cada notação envolve quatro elementos: $j, m, n, a_j$

- $j$ é a variável de índice
  - a escolha da variável $j$ como índice é arbitrária.
- $m$ é o valor inicial (limite inferior) que $j$ assume
- $n$ é o valor final (limite superior) que $j$ assume
- $a_j$ é a sequência utilizada

# Somatórios – Exemplo 1

A expressão $\sum_{j=1}^{10} a_j$ codifica a soma dos termos de $a_j$ indo de $a_1$ até $a_{10}$

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

# Somatórios – Exemplo 1

A expressão $\sum_{j=1}^{10} a_j$ codifica a soma dos termos de $a_j$ indo de $a_1$ até $a_{10}$

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

Se fizermos $a_j = 2j$, então a expressão $\sum_{j=1}^{10} a_j$ codifica:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{10} a_j &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \\
&= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 10 \\
&= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 \\
&= 110
\end{aligned}$$

# Somatórios – Exemplo 2

**Exemplo**

O que significa:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

# Somatórios – Exemplo 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo**

O que significa:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

É a soma dos termos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ da sequência $\{a_j\}$ com $a_j = \frac{1}{j}$

# Somatórios – Exemplo 2

**Exemplo**

O que significa:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

É a soma dos termos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ da sequência $\{a_j\}$ com $a_j = \frac{1}{j}$

**Constatação:**

Teremos $\displaystyle\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$.

# Somatórios – Exemplo 3

**Exemplo**

O que significa:

$$\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$$

# Somatórios – Exemplo 3

**Exemplo**

O que significa:

$$\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$$

É a soma dos termos $a_4, a_5, \ldots, a_8$ da sequência $\{a_k\}$ com $a_k = (-1)^k$

**Constatação:**

Teremos
$(-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1 + -1 + 1 + -1 + 1 = 1.$

# Propriedades do Somatório

# Propriedades do Somatório

**Nosso objetivo**

- Somar números de uma sequência dois a dois é ineficiente.
- Podemos economizar trabalho e tempo usando propriedades das operações aritméticas adaptadas aos somatórios.

Da aritmética, para $x, y, z$ números quaisquer, temos

- **Comutatividade:** $x + y = y + x$
- **Associatividade:** $(x + y) + z = x + (y + z)$
- **Distributividade:** $x(y + z) = xy + xz$

# Propriedades do Somatório

Em somatórios, temos:

- **Comutatividade:** $\displaystyle\sum_{j=m}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$

- **Associatividade:** $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{\ell} a_j + \sum_{j=\ell+1}^{n} a_j$

- **Distributividade:** $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} k \cdot a_j = k \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j$

# Comutatividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Comutatividade:** $\sum_{j=m}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$

# Comutatividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Comutatividade:** $\sum_{j=m}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$

Começando do lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{n}(a_j + b_j) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \ldots + (a_n + b_n) \\ &= (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n) \\ &= \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j\end{aligned}$$

# Associatividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Associatividade:** $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{\ell} a_j + \sum_{j=\ell+1}^{n} a_j$

# Associatividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Associatividade:** $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{\ell} a_j + \sum_{j=\ell+1}^{n} a_j$

Começando do lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{n} a_j &= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \\
&= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_\ell + a_{\ell+1} + \ldots + a_n \\
&= (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_\ell) + (a_{\ell+1} + \ldots + a_n) \\
&= \sum_{j=m}^{\ell} a_j + \sum_{j=\ell+1}^{n} a_j
\end{aligned}$$

# Distributividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Distributividade:** $\sum_{j=m}^{n} k \cdot a_j = k \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j$

# Distributividade

Vamos analisar a igualdade:

- **Distributividade:** $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} k \cdot a_j = k \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j$

Começando do lado esquerdo, temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{n} k \cdot a_j &= ka_m + ka_{m+1} + \ldots + ka_n \\
&= k \cdot (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) \\
&= k \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j
\end{aligned}
$$

# Como resolver somatórios?

# Como resolver Somatórios?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Ao encontrar somatórios complicados, nosso **primeiro** interesse é simplificar essas expressões.

**Exemplo 1**

Considere que desejamos calcular $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} 2j$.

# Como resolver Somatórios?

Ao encontrar somatórios complicados, nosso **primeiro** interesse é simplificar essas expressões.

**Exemplo 1**

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j$.

Pela distributividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10} 2j \;=\; 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j$$

# Como resolver Somatórios?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Ao encontrar somatórios complicados, nosso **primeiro** interesse é simplificar essas expressões.

**Exemplo 1**

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j$.

Pela distributividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10} 2j = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j$$

Observação: Note que houve uma troca. Ao invés de calcularmos $\sum_{j=1}^{10} 2j$, basta calcular $\sum_{j=1}^{10} j$ para multiplicar o resultado por dois.

# Como resolver Somatórios?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

**Exemplo 2**

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10}(2j + 3)$.

# Como resolver Somatórios?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## Exemplo 2

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10}(2j+3)$.

Pela comutatividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10}(2j+3) \;=\; 2\cdot\sum_{j=1}^{10} j+\sum_{j=1}^{10} 3$$

# Como resolver Somatórios?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

## Exemplo 2

Considere que desejamos calcular $\sum_{j=1}^{10}(2j+3)$.

Pela comutatividade, podemos simplificar a expressão para obter

$$\sum_{j=1}^{10}(2j+3) \;=\; 2\cdot\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} 3$$

Observação: Houve uma troca. Ao invés de calcularmos $\sum_{j=1}^{10}(2j+3j)$, basta calcular $\sum_{j=1}^{10} 2j$ e $\sum_{j=1}^{10} 3$ para então somá-las. Note que $\sum_{j=1}^{10} 2j$ é a expressão do exemplo anterior.

# Como resolver Somatórios?



Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

# Como resolver Somatórios?

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

# Como resolver Somatórios?

Nosso **segundo** interesse é encontrar somas conhecidas no processo.

Por exemplo, é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Exemplo 1 (Continuação)**

Pela fórmula, $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} j = \frac{10(10+1)}{2} = 110/2 = 55.$

Agora, podemos completar o primeiro exemplo, obtendo

$$\sum_{j=1}^{10} 2j = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j = 2 \cdot 55 = 110.$$

# Como resolver Somatórios?



Também é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} 1 = n$$

# Como resolver Somatórios?

Também é muito útil saber que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} 1 = n$$

**Exemplo 2 (Continuação)**

Temos $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} 2j + 3$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{10} 2j + 3 = \sum_{j=1}^{10} 2j + \sum_{j=1}^{10} 3 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{10} j + 3 \cdot \sum_{j=1}^{10} 1 \\ = 2 \cdot \frac{10(10+1)}{2} + 3 \cdot 10 = 2 \cdot 55 + 30 = 140.\end{aligned}$$

# Algumas somas importantes

**Exercício:** Usando indução matemática, prove as seguintes fórmulas:

| Soma | Fórmula Fechada |
|---|---|
| $\sum_{k=0}^{n} ar^k (r \neq 1)$ | $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$, $r \neq 1$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k$ | $\frac{n(n+1)}{2}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k^2$ | $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k^3$ | $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} k + dj$ | $\frac{(2k+dn)(n+1)}{2}$ |

Tabela: Algumas somas importantes

# Algumas somas importantes



A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

**Exemplo**

Considere que desejamos calcular $\sum_{i=30}^{60} i$

# Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

**Exemplo**

Considere que desejamos calcular $\sum_{i=30}^{60} i$

Observe que $\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i$ e utilize a fórmula geral $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

# Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

**Exemplo**

Considere que desejamos calcular $\displaystyle\sum_{i=30}^{60} i$

Observe que $\displaystyle\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i$ e utilize a fórmula geral $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{60} i = \frac{60(60+1)}{2} = 30 \cdot 61 = 1830$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{29} i = \frac{29(29+1)}{2} = 29 \cdot 15 = 435.$

# Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

**Exemplo**

Considere que desejamos calcular $\displaystyle\sum_{i=30}^{60} i$

Observe que $\displaystyle\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i$ e utilize a fórmula geral $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{60} i = \frac{60(60+1)}{2} = 30 \cdot 61 = 1830$ e

$$\sum_{i=1}^{29} i = \frac{29(29+1)}{2} = 29 \cdot 15 = 435.$$

Daí, $\displaystyle\sum_{i=30}^{60} i = \sum_{i=1}^{60} i - \sum_{i=1}^{29} i = 1830 - 435 = 1395.$

# Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No **caso geral**, para $\displaystyle\sum_{i=m}^{\ell} i$,

# Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No **caso geral**, para $\displaystyle\sum_{i=m}^{\ell} i$,

Observe que $\displaystyle\sum_{i=m}^{\ell} i = \sum_{i=1}^{\ell} i - \sum_{i=1}^{m-1} i$ e utilize a fórmula geral $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

# Algumas somas importantes

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No **caso geral**, para $\displaystyle\sum_{i=m}^{\ell} i$,

Observe que $\displaystyle\sum_{i=m}^{\ell} i = \sum_{i=1}^{\ell} i - \sum_{i=1}^{m-1} i$ e utilize a fórmula geral $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} i = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

# Algumas somas importantes

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

A partir destas somas conhecidas, podemos resolver muitos problemas.

Podemos também generalizar estas somas usando associatividade.

No **caso geral**, para $\displaystyle\sum_{i=m}^{\ell} i$,

Observe que $\displaystyle\sum_{i=m}^{\ell} i = \sum_{i=1}^{\ell} i - \sum_{i=1}^{m-1} i$ e utilize a fórmula geral $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ para calcular os termos da subtração.

Temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} i = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

Daí,

$$\sum_{i=m}^{\ell} i = \sum_{i=1}^{\ell} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{\ell(\ell+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = \ldots = \frac{(m+\ell)(\ell-m+1)}{2}.$$

# Mudanças de Índice

# Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

# Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

**Exemplo**

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1 - k)$

# Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

**Exemplo**

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1 - k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

# Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

**Exemplo**

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1-k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1-k) = \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} (1-j-2) = \sum_{j=1}^{10} j + (1-j-2)$$
$$= \sum_{j=1}^{10} -1 = (-1)\sum_{j=1}^{10} 1 = -10.$$

# Mudanças de Índice

Às vezes pode ser importante mudarmos o índice de um somatório.

**Exemplo**

Considere a soma $\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1-k)$

Podemos reescrever a soma mudando o índice de uma delas:

$$\sum_{j=1}^{10} j + \sum_{k=3}^{12} (1-k) = \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} (1-j-2) = \sum_{j=1}^{10} j + (1-j-2)$$
$$= \sum_{j=1}^{10} -1 = (-1)\sum_{j=1}^{10} 1 = -10.$$

A chave deste passo é o cálculo de que $\sum_{k=3}^{12} (1-k) = \sum_{j=1}^{10} (1-j-2)$.

# Como calcular a mudança de índice

Para realizar uma mudança do índice $k$ para um novo índice $j$:

1. Encontramos uma função $f(k) = j$
2. Isolamos $k$ na equação acima e obtemos uma função sobre $j$
3. Substituímos $k$ pela expressão obtida na soma original

# Como calcular a mudança de índice

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Para realizar uma mudança do índice $k$ para um novo índice $j$:

1. Encontramos uma função $f(k) = j$
2. Isolamos $k$ na equação acima e obtemos uma função sobre $j$
3. Substituímos $k$ pela expressão obtida na soma original

**Exemplo 1**

Seja a soma $\sum_{k=1}^{5} k^2$. Desejamos indexá-la com inteiros de 0 a 4.

Que expressão usaremos?

# Como calcular a mudança de índice

Para realizar uma mudança do índice $k$ para um novo índice $j$:

1. Encontramos uma função $f(k) = j$
2. Isolamos $k$ na equação acima e obtemos uma função sobre $j$
3. Substituímos $k$ pela expressão obtida na soma original

**Exemplo 1**

Seja a soma $\sum_{k=1}^{5} k^2$. Desejamos indexá-la com inteiros de 0 a 4.

Que expressão usaremos?

1. Encontramos uma função para mapear $k$ (de 1 até 5) para $j$ (de 0 até 4)
   - $f(k) = k - 1$
2. Agora, fazemos $k - 1 = j$ e isolamos $k$: $(k - 1 = j \implies k = j + 1)$
3. Para completar, substituimos $k$ por $j + 1$ na soma, obtendo
   $$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \sum_{j=0}^{4} (j+1)^2.$$

# Como calcular a mudança de índice

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

### Exemplo 2

Seja a soma $\sum_{k=3}^{12}(1-k)$. Desejamos indexá-la com inteiros de 1 a 10.

1. Encontramos uma função para mapear $k$ (de 3 até 12) para $j$ (de 1 até 10):
   - $f(k) = k - 2$

2. Agora, fazemos $k - 2 = j$ e isolamos $k$: $(k - 2 = j \implies k = j + 2)$

3. Para completar, substituimos $k$ por $j + 2$ na soma, obtendo
   $$\sum_{k=3}^{12}(1-k) = \sum_{j=1}^{10}(1-(j+2)) = \sum_{j=1}^{10}(1-j-2).$$

# FIM