Filtros de Kalman

Eddy Ronald Choque Condori
Univesidad Católica San Pablo
Arequipa, Perú
Email: eddy.choque.condori@ucsp.edu.pe

Jhorel Kevin Revilla Calderón
Univesidad Católica San Pablo
Arequipa, Perú
Email: jhorel.revilla@ucsp.edu.pe

Abstract—En 1960, R.E Kalman publica el paper describiendo una solución recursiva al problema del filtrado lineal de datos discretos. Desde entonces el filtro de Kalman ha sido objeto de una amplia investigación y aplicación, remarcando la navegación autónoma o asistida. El filtro de Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas que proporciona un solución computacional recursiva eficiente, el filtro es muy poderoso en varios aspectos: soporta estimaciones de estados pasados, presentes e incluso futuros, y puede hacerlo incluso cuando se desconoce la naturaleza precisa del sistema modelado. El propósito de este documento es proveer una introducción practica al filtro de kalman discreto.

I. Introducción

Imagínese que estamos fabricando un carro autónomo y estamos tratando de localizar su posición en un entorno. Los sensores del coche pueden detectar coches, peatones y ciclistas. Conocer la ubicación de estos objetos puede ayudar al coche a tomar decisiones, evitando colisiones. Pero además de conocer la ubicación de los objetos, el coche necesita predecir su ubicación futura para poder planificar qué hacer con antelación. Por ejemplo, si detectara a un niño corriendo hacia la carretera, debería esperar que el niño no se detenga. El filtro Kalman puede ayudar con este problema, ya que se utiliza para ayudar a rastrear y hacer una predicción informada de lo que el sistema hará a continuación, ideal para sistemas que cambian continuamente. Tienen la ventaja de ser ligeros en memoria, no necesitan mantener ningún otro historial que no sea el estado anterior, y son muy rápidos, lo que los hace muy adecuados para problemas en tiempo real.

II. Probabilidades y variables aleatorias

Introducción básica a variables aleatorias

II-A. Probabilidades

La probabilidad de que el resultado de un evento discreto favorezca un evento particular.

$$p(A) = \frac{Posibles\ resultados\ que\ favorecen\ el\ evento\ A}{Número\ total\ de\ posibles\ resultados} \tag{1}$$

La probabilidad que un resultado favorezca a A o B

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \tag{2}$$

Si la probabilidad de dos resultados es independiente entonces la probabilidad de que ambos ocurran es el producto de sus probabilidades.

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \tag{3}$$

Finalmente, la probabilidad de evento A, dada la ocurrencia de un evento B

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \tag{4}$$

II-B. Variables aleatorias

Una variable aleatoria o variable estocástica es una función que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio. Una función común que representa la probabilidad de variables aleatorias se define como la función de distribución acumulativa:

$$F(x) = P([-\infty, x]) \tag{5}$$

Incluso mas usada que la ecuación (5) es su derivada, conocida como función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \tag{6}$$

Finalmente la probabilidad de sobre cualquier intervalo [a,b] se define como

$$P_X[a, b] = \int_a^b f_X(x)dx \tag{7}$$

Entonces en lugar de sumar probabilidades de eventos discretos como en (2) para variables aleatorias continuas se integra la función densidad sobre el intervalo que necesitemos.

II-C. Promedio y varianza

La notación más familiar de promedio de una secuencia de números es

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N}$$

Como en el filtro tratamos con señales continuas (con un incontable espacio muestral) el valor esperado de la variable aleatoria discreta podría aproximarse promediando el valor de la probabilidad ponderada

$$\frac{(p_1 N)x_1 + (p_2 N)x_2 + ... + (p_n N)x_N}{N}$$

Esta noción de ensayos infinitos(muestras) nos lleva al valor esperado para la variable aleatoria discreta

$$\text{valor esperado E(X)=}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{8}$$

Para los posibles n resultados $X_1...X_n$ y las probabilidades correspondientes $p_1...p_n$. Del mismo modo que se realizó para la variable aleatoria continua se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \tag{9}$$

Finalmente, las ecuaciones (8) y (9) pueden ser aplicadas a las funciones de la variable aleatoria x X

$$E(g(x))\text{=}\sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i) \tag{10}$$

y

$$E(g(x))\text{=}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \tag{11}$$

El valor esperado para variables aleatorias es conocido como Primer momento estadístico y si este es aplicado a la ecuación (10) y (11) donde $g(X)$=X^k obtendremos el k^{th} momento estadístico, esta dado por

$$E(X^k)\text{=}\int_{-\infty}^{\infty} X^k f_X(x) dx \tag{12}$$

Nuestro interés es el segundo momento el cual seria

$$E(X^2)\text{=}\int_{-\infty}^{\infty} X^2 f_X(x) dx \tag{13}$$

Si $g(X)$=$X - E(x)$ y lo aplicamos en la ecuación(13) obtendremos la varianza de la señal

$$\text{Varianza X=}E[(X - E(X))^2] \tag{14}$$

$$\text{=}E(X^2) - E(X)^2$$

Esta varianza es útil en las señales aleatorias ya que nos da la idea de cuanto ruido hay en una señal.

II-D. Distribución gaussiana

Dado un proceso aleatorio la función de densidad de probabilidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \epsilon^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \tag{15}$$

III. Estimación estocástica

III-A. Modelos de espacio de estado

Son una notación para la estimación y el control de problemas, desarrollados para que el análisis sea manejable. Si consideramos un proceso dinámico descrito por una ecuación de diferencia de orden n de la forma

$$y_{i+1}\text{=}a_{0,i}yi + ... + a_{n-1,i}y_{i-n+1} + u_i, i \geq 0$$

donde u_i es ruido aleatorio con autocorrelación

$$E(u_i, u_j)\text{=}R_u\text{=}Q_i\delta_{ij}$$

y los valores iniciales $y_0, y\text{-}_1, ..., y\text{-}_{n+1}$ son variables aleatorias con una conocida nXnmatriz de covarianza. P_0=$E(y\text{-}_j, y\text{-}_k), j, k \in \{0, n-1\}$ Suponiendo también $E(u_i, y_i)$=$0, i \geq j \geq 0$ Entonces como el ruido es estadísticamente independiente del proceso a estimar esta ecuación se puede reescribir como

$$X_{i+1} = AX_i + Gu_i \tag{16}$$

$$Y_i = H_i X_i \tag{17}$$

La ecuación (16) representa el nuevo estado, como una combinación lineal del estado anterior como ruido u_i. La ecuación(17) es la forma de procesar mediciones derivadas de x_i.

III-B. El problema del diseño del observador

El problema básico es determinar los estados internos de un sistema lineal, dado acceso solo a las salidas del sistema. Normalmente hay un modelo de proceso que modela el transformación del estado del proceso basándose en las ecuaciones (16) y (17)

$$X_k\text{=}Ax_{k\text{-}1} + Bu_k + w_{k\text{-}1} \tag{18}$$

Además, hay alguna forma de modelo de medición que describe la relación. entre el estado del proceso y las mediciones.

$$Z_k\text{=}Hx_k + v_k \tag{19}$$

IV. Filtro de Kalman

IV-A. Origen Computacional

Si $\overline{x}_k$ es una estimación de estado priori en un paso k y X_k es nuestro estado posteriori se puede estimar los errores como

$$e_k\text{=}X_k\text{-}\overline{X}_k$$

La covarianza de error de estimación a posteriori es

$$P_k\text{=}E[e_k e_k^T] \tag{20}$$

Al derivar las ecuaciones del filtro de Kalman el objetivo es encontrar una ecuación que calcula una estimación del estado a posterioriX_k como una combinación lineal de estado priori $\overline{X}_k$ y una diferencia entre la medición real Z_k y una predicción de medición $H\overline{x}_k$

$$X_k\text{=}\overline{X}_k + K(Z_k\text{-}H\overline{x}_k) \tag{21}$$

La matriz K en la ecuación (21) puede minimizar la ecuación de covarianza por error de la ecuación (20) sustituyendo la ecuación(21) por la ecuación(20) quedando como resultado

$$K_k\text{=}\overline{P}_k H^T (H\overline{P}_k H^T + R)^{\text{-}1} \tag{22}$$

IV-B. Filtro de Kalman Discreto

El filtro estima el estado del proceso en algún momento y luego obtiene comentarios en forma de ruidos, Las ecuación del filtro de Kalman se dividen en dos grupos:

- Ecuaciones de actualización de tiempo: Son las responsables de proyectar hacia adelante (en el tiempo) el estado actual y las estimaciones de la covarianza por error para obtener las estimaciones a priori. Se consideran como ecuaciones predictoras.

  Ecuaciones de actualización de tiempo

  $$\overline{X_k} = AX_{k\text{-}1} + Bu_k (23)$$

  $$\overline{P_k} = AP_{k\text{-}1}A^T + Q (24)$$

- Ecuaciones de actualización de medidas: Son las responsables de incorporar una nueva medición en la estimación a priori para obtener una estimación mejorada. Se consideran como ecuaciones correctoras

  Ecuaciones de actualización de tiempo

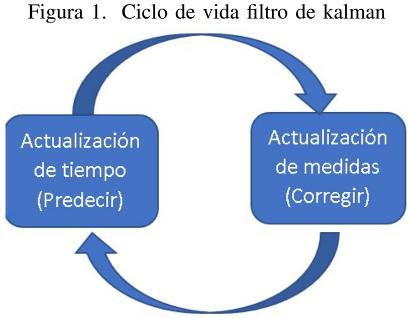
  $$\mathrm{K}_k = \overline{P}_k H^T (H\overline{P}_k H^T + R)^{\text{-}1}$$

  $$\mathrm{X}_k = \overline{X}_k + K(Z_k\text{-}H\overline{x}_k)$$

  $$\mathrm{P}_k = (I - K_k H)\overline{P}_k (25)$$

La ecuación (25) obtiene una estimación de covarianza de error a posteriori. por lo tanto el ciclo de vida del filtro de Kalman seria como la fig 1.

Figura 1. Ciclo de vida filtro de kalman



Referencias

[1] https://www.bzarg.com/p/how-a-kalman-filter-works-in-pictures/

[2] https://medium.com/@jaems33/understanding-kalman-filters-with-python-2310e87b8f48

[3] http://bilgin.esme.org/BitsAndBytes/KalmanFilterforDummies