Kvotientrum

Benjamin Waziri - Mat S

Januar 2024 - Geotop

1 Kvotientrum

Definition 1 Givet en surjektiv funktion $q : (X, T) \to Y$ gående fra et topologisk rum til en vilkårlig mængde, definer kvotienttopologien til at være:

$$T_{kvot} = \{V \subseteq Y | q^{-1}(V) \in T\}$$

Som resultat af definitionen er q kontinuert. Vi kalder så $q : (X, T) \to (Y, T_{kvot})$ for en *kvotientafbildning*.

Proposition 1 Lad $q : (X, T) \to (Y, T_{kvot})$ være en kvotientafbildning, $g : Y \to Z$ er vilkårlig funktion. Så er:

$g : Y \to Z$ kontinuert $\iff$ $g \circ q : X \to Z$ er kontinuert.

Bevis 1
$\Rightarrow$: Antag g er kontinuert. Så er $g \circ q$ en sammensætning af kontinuerte funktioner, og dermed kontinuert.

$\Leftarrow$: Antag $g \circ q$ er kontinuert. Lad $U \subseteq Z$ være åben i Z.

Så er $(g \circ q)^{-1}(U)$ åben i X.

Dvs. $q^{-1}(g^{-1}(U))$ er åben i X.

Det betyder, at $g^{-1}(U) \in T_{kvot}$ jf. definitionen på T_{kvot}. Dvs $g^{-1}(U)$ er åben i Y.

Så har vi vist, at g er kontinuert.

Eksempel 1 En torus T er homeomorf til kvadratet $S = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ udstyret med ækvivalensrelationen fra figur 15.2.

Bevis 2

Note, der ikke skrives op på tavlen: En torus med centrum $(a, 0, 0)$ og radius r består af punkter på formen:

$$((a + r\,cos\,\theta)\,cos\,\psi, (a + r\,cos\,\theta)\,sin\,\psi, r\,sin\,\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

Vi definerer derfor $f : S \to T$:

$$f(s, t) = ((a + r\,cos\,t)\,cos\,s, (a + r\,cos\,t)\,sin\,s, r\,sin\,t).$$

Vi bemærker, at vores ækvivalensrelation $\sim$ er givet ved, at $(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$ hvis og kun hvis en af følgende gældende:

(1) $s_1 = s_2, \quad t_1 = t_2$

(2) $\{s_1, s_2\} = \{0, 2\pi\}, \quad t_1 = t_2$

(3) $\{t_1, t_2\} = \{0, 2\pi\}, \quad s_1 = s_2$

(4) $\{s_1, s_2\} = \{0, 2\pi\}, \quad \{t_1, t_2\} = \{0, 2\pi\}$

Vi bemærker, at hvis $x \sim y$, implicerer dette, at $f(x) = f(y)$. Det skyldes, at $f(0, t) = f(2\pi, t)$, samt at $f(s, 0) = f(s, 2\pi)$ og $f(0, 0) = f(0, 2\pi) = f(2\pi, 0) = f(2\pi, 2\pi)$.

Så inducerer f en veldefineret afbildning $g : S/\sim \to T$.

Vi vil anvende proposition 13.26. Det kræver, at vi viser, (1) g er bijektiv, (2) g er kontinuert, (3) $S/\sim$ er kompakt, (4) T er Hausdorff.

(1) f er defineret ud fra, hvordan punkter på en torus T er givet. Derfor er f surjektiv. Da g respekterer identifikationerne på S, er g også surjektiv.

For at vise injektiviteten, skal vi vise, at:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim y.$$

Antag $f(x) = f(y)$. Så har vi, at:

$$(i) \quad (a + r\ \cos t_1)\ \cos s_1 = (a + r\ \cos t_2)\ \cos s_2$$

$$(ii) \quad (a + r\ \cos t_1)\ \sin s_1 = (a + r\ \cos t_2)\ \sin s_2$$

$$(iii) \quad r\ \sin t_1 = r\ \sin t_2$$

Fra (iii) fås åbenlyst, at $\sin t_1 = \sin t_2$.

Summer vi $(i)^2 + (ii)^2$ får vi jf. idiotformlen:

$$(a + r\cos t_1)^2 + (a + r\cos t_2)^2.$$

Ud fra dette må vi konkludere, at $\cos t_1 = \cos t_2$, da $a + r\cos t_1$ er positiv. Så er enten $t_1 = t_2$ eller så er $\{t_1, t_2\} = \{0, 2\pi\}$.

Da $t_1 = t_2$ kan vi så direkte ud fra (i) og (ii) konkludere, at $\cos s_1 = \cos s_2$ og $\sin s_1 = \sin s_2$. Så er enten $s_1 = s_2$ eller $\{s_1, s_2\} = \{0, 2\pi\}$.

I alle de tilfælde er $(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$. (2) $i \circ f : S \to \mathbb{R}^3$ er kontinuert, da hver koordinatafbildning er kontinuert. $i \circ f$ er kontinuert hvis og kun hvis f er kontinuert, så f er kontinuert. Derfor er g også kontinuert.

(3) S er lukket og begrænset i $\mathbb{R}^2$, så kompakt. Kvotientafbildninger bevarer kompakthed, så $S/\sim$ er også kompakt.

(4) T er Hausdorff, da det er et delrum af $\mathbb{R}^3$.

Så er $g : S/\sim \to T$ en homeomorfi.

Eksempel 2 (ikke del af præsentationen) Vis at S^1 (randen af en cirkel) ikke er homeomorf til S^2 (randen af en kugle).

AFM $f : S^1 \to S^2$ er en homeomorfi. Lad $a, b \in S^1, a \neq b$.

Så er

$$f : S^1 \backslash \{a, b\} - > S^2 \backslash \{f(a), f(b)\}$$

også en homeomorfi.

Men: $S^1 \backslash \{a, b\}$ er ikke sammenhængende.
$S^2 \backslash \{f(a), f(b)\}$ er sammenhængende.

Det er i modstrid med, at det at være sammenhængende er en topologisk egenskab.

Proposition 1 Lad X, Y være mængder, $\sim$ en ækvivalensrelation på X. Lad $f : X \to Y$ opfylde, at:

$$x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

Så er $g : X/\sim \to Y$, hvor vi sætter:

$$g([x]) = f(x)$$

en veldefineret funktion. Vi siger, at g er induceret af f.

Bevis 1 Vi skal vise, at $x \in [x'] \Rightarrow f(x) = f(x')$.

Lad $x' \in [x]$. Det betyder, at:

$$x \sim x'.$$

Hvilket medfører jf. vores antagelse, at:

$$f(x) = f(x')$$