Banachs Fikspunktsætning

Benjamin Waziri - Mat S

December Januar 2024 - Geotop

1 Banachs fikspunktsætning

Definition 1 (ikke del af præsentationen) En funktion $f : (X, d) \to (X, d)$ kaldes en kontraktion, hvis

$$\exists K < 1 : \quad d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Lemma 1 (ikke del af præsentationen) Lad $f : (X, d) \to (X, d)$ være en kontraktion. Så er f uniformt kontinuert.

Bevis 1 (ikke del af præsentationen) Givet $\epsilon > 0$, vælg $\delta = \epsilon$. Heraf følger det, at:

$$d(x, y) < \delta = \epsilon \Rightarrow$$

$$d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y) \leq d(x, y) < \epsilon$$

Proposition 1 Lad $f : (X, d) \to (X, d)$ være en kontraktion i et fuldstændigt metrisk rum. Så har f et unikt fikspunkt.

Bevis 2 Lad $x_0 \in X$. Definer x_n ved:

$$x_0 = x_0, \quad x_n = f(x_{n-1})$$

Lemma 2 $d(x_{n+1}, x_n) \leq K^n \cdot d(x_1, x_0)$.

Bevis 3 Bevises ved induktion.

Start: n=0. $d(x_1, x_0) \leq K^0 \cdot d(x_1, x_0)$

Skridt:

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq K \cdot d(x_{n+1}, x_n) \leq K \cdot K^n \cdot d(x_1, x_0)$$

Lemma 3 $\{x_n\}$ er Cauchy.

Bevis 3 Antag uden tab af generalitet $m > n$.

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq K^{m-1} d(x_1, x_0) + K^{m-2} d(x_1, x_0) + ... + K^n d(x_1, x_0) \\
&= K^n d(x_1, x_0)(1 + K + ...K^{m-n-1}) \\
&< \frac{K^N}{1-K} d(x_1, x_0)
\end{aligned}
$$

som konvergerer mod 0. Givet $\epsilon > 0$, eksisterer så et N så for $m, n \geq N$, at

$$d(x_m, x_n) < \frac{K^N}{1-K} d(x_1, x_0) < \epsilon.$$

Så er $\{x_n\}$ Cauchy.

Resten af beviset for proposition 1 Da $\{x_n\}$ er Cauchy og X er fuldstændigt, er $\{x_n\}$ konvergent. Af dette, samt kontinuiteten af f følger:

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(p)$$

Så $p \in X$ er et fikspunkt.

Entydighed Antag $f(p) = p$, $f(q) = q$. Så gælder:

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq K \cdot d(p, q)$$

Da $K < 1$ ville dette medføre modstrid, ved mindre $d(p, q) = 0$ (eller $K = 0$. Men så er $p = q$, da hvis $K = 0$, er $d(f(p), f(q)) = 0$, så $p = f(p) = f(q) = q$). Så er $p = q$.

Definition 2 (ikke del af præsentationen) Rummet af reelle, begrænsede funktioner på intervallet $[a, b]$ er givet ved:

$$\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ er begrænset}\}$$

Supremumsmetrikken er givet ved:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Proposition 2 $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ er fuldstændig, da det er (følge)lukket i $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$.

Bevis 4 Lad $\{f_n\}$ være en følge af kontinuerte funktioner, som konvergerer mod $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$.

Givet $\epsilon > 0$, eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, så $d_\infty(f_N, f) < \frac{\epsilon}{3}$ (da det jo gælder for alle $n \geq N$, inklusiv N).

Så er $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ for alle $x \in [a,b]$.

Da f_N er kontinuert i x, eksisterer et $\delta > 0$, så $|x - y| < \delta$ medfører, at $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Så er

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| && (1)\\
&< \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon && (2)\\
&= \epsilon. && (3)
\end{aligned}$$

Så f er kontinuert, dvs. $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Proposition 3 (ikke del af præsentationen) $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ er fuldstændig.

Bevis 5 (ikke del af præsentationen) Lad $\{f_n\}$ være en Cauchyfølge. Givet et $\epsilon > 0$, gælder for alle $x \in [a,b]$, at der eksisterer et $N \in \mathbb{N}$ så der for alle $m, n \geq N$ gælder, at

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon.$$

Så $\{f_n(x)\}$ er Cauchy i $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ er fuldstændig, eksisterer et $f(x) \in \mathbb{R}$, som følgen konverger imod. Dvs. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Vi viser nu, at f er begrænset. For alle $n \geq N$ har vi, at $f(x) \in \overline{B_\epsilon(f_N(x))}$, da $f_n(x) \in B_\epsilon(f_N(x))$.

f_N er begrænset, så der findes $x_0 \in [a,b]$ og $K \geq 0$, således at

$$|f_N(x_0) - f_N(x_0)| \leq K \text{ for alle } x \in [a,b].$$

Det giver, at

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x_0) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| && (4)\\
&\leq \epsilon + K + \epsilon && (5)\\
&= 2\epsilon + K && (6)
\end{aligned}$$

Så f er begrænset, dvs. $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$.

Bemærk desuden, at der gælder for $n \geq N$, at

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

så $f_n \to f$ i d_∞.

Proposition 4 (ikke del af præsentationen) Antag at $f : D = [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, er kontinuert i (x, y), og er Lipschitz i y. Givet $x_0 \in [a, b]$ og $y_0 \in \mathbb{R}$, har begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dx}(x))f(x, y(x)) \quad og \quad y(x_0) = y_0$$

en entydig løsning $x \to y(x)$ defineret for alle $x \in [a, b]$.

Beviset kører ved at definere en ny metrik d, og vise at den er Lipschitz ækvivalent med d_∞, så rummet af kontinuerte funktioner udstyret med d er fuldstændig ligesom rummet af kontinuerte funktioner udstyret med d_∞ er det.

Vi indfører en funktion, der har en løsning hvis og kun hvis begyndelsesværdiproblemet har en løsning.

Hererfter vises, at vores funktion er en kontraktion. Så giver Banach, at den har et entydigt fikspunkt. Dvs. begyndelsesværdiproblemet får en entydig løsning. $\square$