Sammenhængende Rum

Benjamin Waziri - Mat S

Januar 2024 - Geotop

1 Sammenhængende Rum

Definition 1 Et topologisk rum X er sammenhængende, hvis enhver kontinuert funktion $f : X \to S$ er konstant. Her er $S = \{0, 1\}$ udstyret med den diskrete topologi.

Definition 2 (ikke del af præsentationen) En partition af et topologisk rum X er to åbne mængder $\{A, B\}$, så $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset \neq B$.

Proposition 1 (ikke del af præsentationen) Et topologisk rum X er sammenhængende $\iff$ X ikke tillader en partition.

Korollar 1 (ikke del af præsentationen) Et topologisk rum X er sammenhængende $\iff$ $X, \emptyset$ er de eneste mængder, der både er åbne og lukkede i X.

Bevis 1 (ikke del af præsentationen) Vi viser kontraponeringen. Antag A åben og lukket, $A \neq X, \emptyset$. Så er $\{A, X \backslash A\}$ en partition af X. Så er X ikke sammenhængende.

Den anden vej: Antag X ikke sammenhængende. Så eksisterer en partition A, B. A, B er åbne, så de er også lukkede. Så er $X, \emptyset$ ikke de eneste åbne og lukkede mængder.

Proposition 1 Ethvert stisammenhængende rum er sammenhængende.

Bevis 2 Antag, at X er stisammenhængende. Lad $g : X \to \{0, 1\}$ være kontinuert.

AFM at g ikke er konstant. Så:

$$\exists x, y \in X : \quad g(x) = 0 \quad g(y) = 1.$$

Lad $f : [0, 1] \to X$ være en sti i X fra x til y. Dvs. $f(0) = x, f(1) = y$.

Så er $g \circ f : [0,1] \to \{0,1\}$ kontinuert* og surjektiv**. Det er i modstrid med, at intervallet $[0,1]$ er sammenhængende.

*: Da det er en sammensætning af kontinuerte funktioner.

**: Da $g(f(0)) = g(x) = 0$ og $g(f(1)) = g(y) = 1$.

Proposition 2 Enhver sammenhængende åben delmængde U af $\mathbb{R}^n$ er stisammenhængende.

Bevis 3 Vi viser det ikke for tilfældet $U = \emptyset$.

Lad $x_0 \in U$. Lad $V = \{x \in U : \exists \text{ sti fra } x \text{ til } x_0 \text{ i } U\}$. Vi vil vise, at V og $U \backslash V$ er åbne i U.

V åben: Lad $x \in V$. Så må $x \in U$ (som er åben). Det betyder, at:

$$\exists \epsilon > 0 : \quad B_\epsilon(x) \subseteq U.$$

Hvis $y \in B_\epsilon(x)$, kan vi danne en sti fra y til x_0 gennem x. Så er $B_\epsilon(x) \subseteq V$. Dermed er V åben.

U\V åben: Lad $x \in U \backslash V$. Så kan vi ikke danne en sti fra x til x_0 i U, da $x \notin V$.

Vi bemærker, at

$$\exists \epsilon > 0 : \quad B_\epsilon(x) \subseteq U$$

da U er åben.

Lad $y \in B_\epsilon(x)$. Vi kan ikke danne en sti fra y til x_0, da hvis vi kunne, ville vi så kunne danne en sti fra x til x_0 gennem y. Så $y \in U \backslash V$.

Det betyder, at $B_\epsilon(x) \subseteq U \backslash V$. Det medfører, at $U \backslash V$ er åben.

Resten af beviset: Vi har vist, at V og $U \backslash V$ er åbne. Så ville de udgøre en partition af U, ved mindre enten V eller $U \backslash V$ er tomme. $x_0 \in V$ *, så $V \neq \emptyset$. Det betyder, at $U \backslash V = \emptyset$, så U er stisammenhængende.

*: Bemærk at det at være stisammenhængende er en ækvivalensrelation. □

Proposition 3 Lad $f : X \to Y$ være kontinuert, X sammenhængende. Så er $f(X)$ sammenhængende.

Bevis 4 Antag f er surjektiv*. AFM at der eksisterer en partition U, V af Y.

$f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ er åbne da f er kontinuert. De er også ikke-tomme, da f er surjektiv.

Bemærk, at:

$$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(Y) = X$$

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Vi har så vist, at $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ er en partition af X. Det er i modstrid med, at X er sammenhængende.

Det er således ikke muligt at danne en partition af X, og dermed er X sammenhængende.

*: Hvis f ikke er surjektiv, erstatter vi f med $i \circ f : X \to f(X)$ (i er inklusionsafbildningen). $i \circ f$ er en sammensætning af kontinuerte funktioner, og dermed kontinuert. Desuden er $f \circ i$ surjektiv. Så virker beviset, som det skal.

Korollar 1 At være sammenhængende er en topologisk egenskab.

Bevis 5 Lad $f : X \to Y$ være en homeomorfi. Det betyder, at f og f^{-1} er kontinuert og surjektiv. Jf. proposition 3 er Y så sammenhængende hvis X er det, og omvendt.