Jordans kurvesætning

Lad $C \subset \mathbb{R}^2$ være en simpel lukket kurve.

Så har $\mathbb{R}^2 \setminus C$ to SH-komponenter:

↳ Ext C, som er ubegrænset

↳ Int C, som er begrænset

Desuden er $\partial \operatorname{Ext} C = \partial \operatorname{Int} C = C$.

Da C er simpel lukket, har $\mathbb{R}^2 \setminus C$

mindst to SH-komponenter.

AFM $\exists U_1, U_2, U_3$ 3 SH-komponenter.

Lad $q_i \in U_i$.

Lad Q_1, Q_2, Q_3 være 3 disjunkte,

åbne buestykker på C.

Da $C \setminus Q_i$ er en simpel kurve i $\mathbb{R}^2$,

er $V_i = \mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus Q_i)$ SH.

Og da $C \setminus Q_i$ er lukket jf. Heine-Borel,

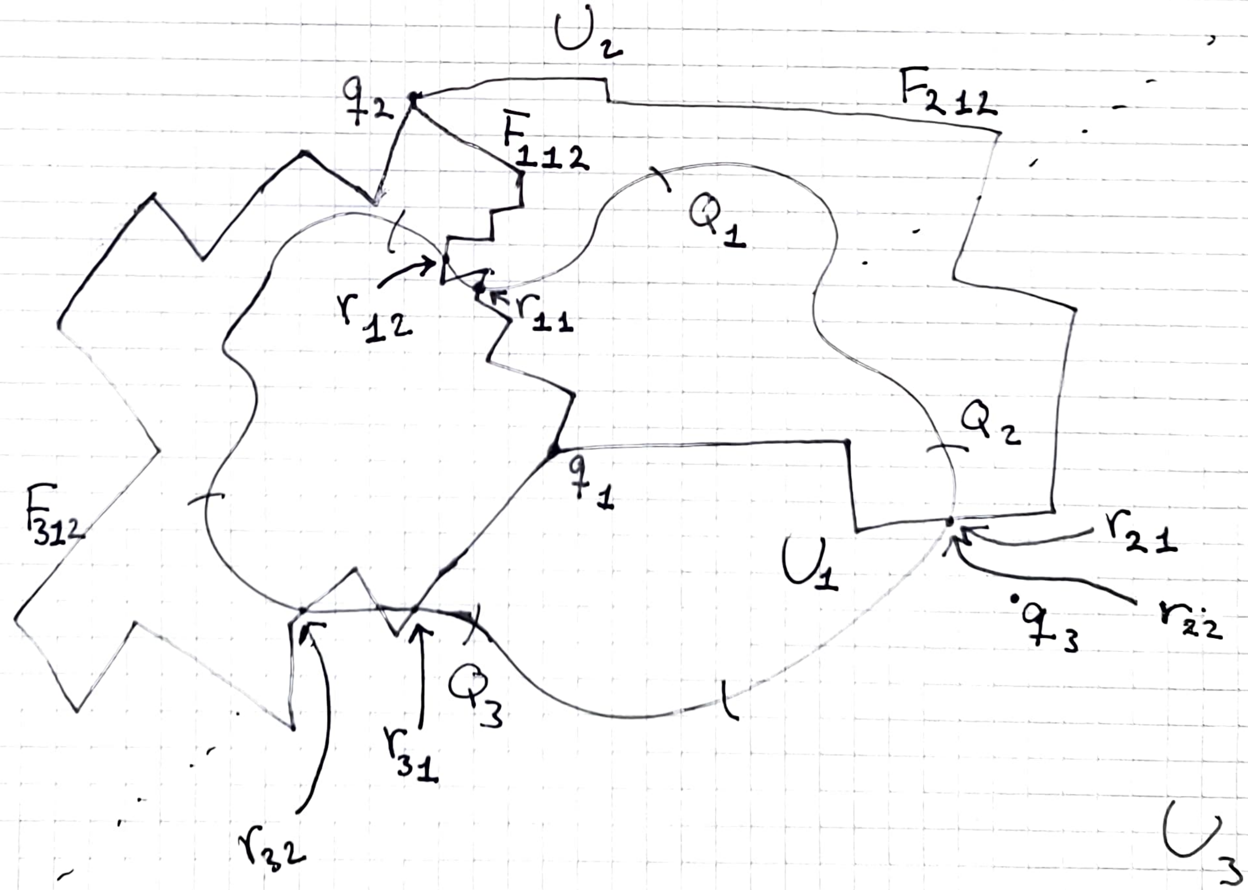
er V_i åben.

Da V_i er åben og SH, er V_i "polygonstisammenhængende", dvs. $\forall x, y \in V_i$ $\exists$ polygonsti fra x til y.

Så $\exists F_{i12}$ simpel polygonkurve fra q_1 til q_2 i V_i, da jf. opg ⓐ ugeseddel 7, medfører eksistensen af en polygonkurve eksistensen af en simpel polygonkurve.

Dette argument genbruges, hver gang vi siger noget er simpelt

Da q_1 og q_2 tilhører forskellige SH-komponenter af $\mathbb{R}^2 \setminus C$, må F_{i12} passere Q_i.



Lad nu r_{i1} være det første punkt af F_{i12} på Q_i.

Lad r_{i2} være det sidste.

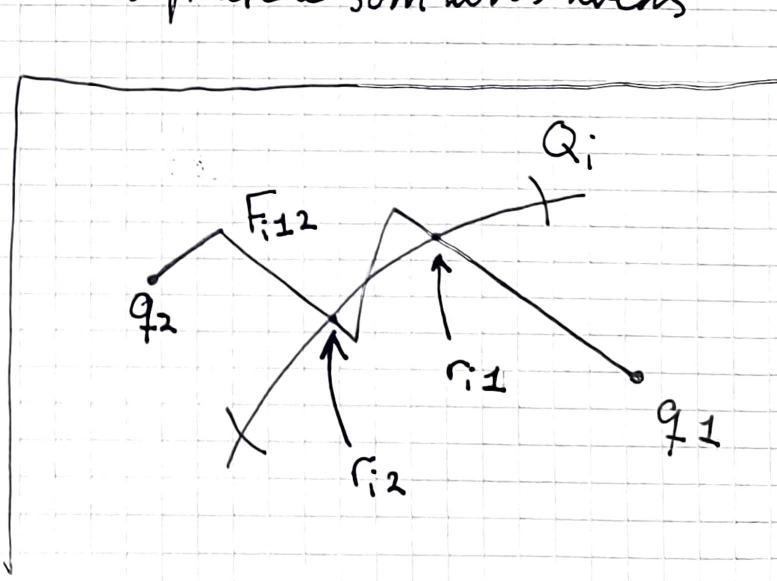
Vi ved, at disse r_{ij}'er findes i Q_i jf. lemma 3.4, da:

→ F_{i12} er en sti i $\mathbb{R}^2$

→ F_{i12} krydser Q_i, som er lukket, da det er en kurve, og kurver i $\mathbb{R}^2$ er lukkede jf. Heine-Borel.

→ F_{i12}'s endepunkter q_1, q_2 ligger uden for Q_i.

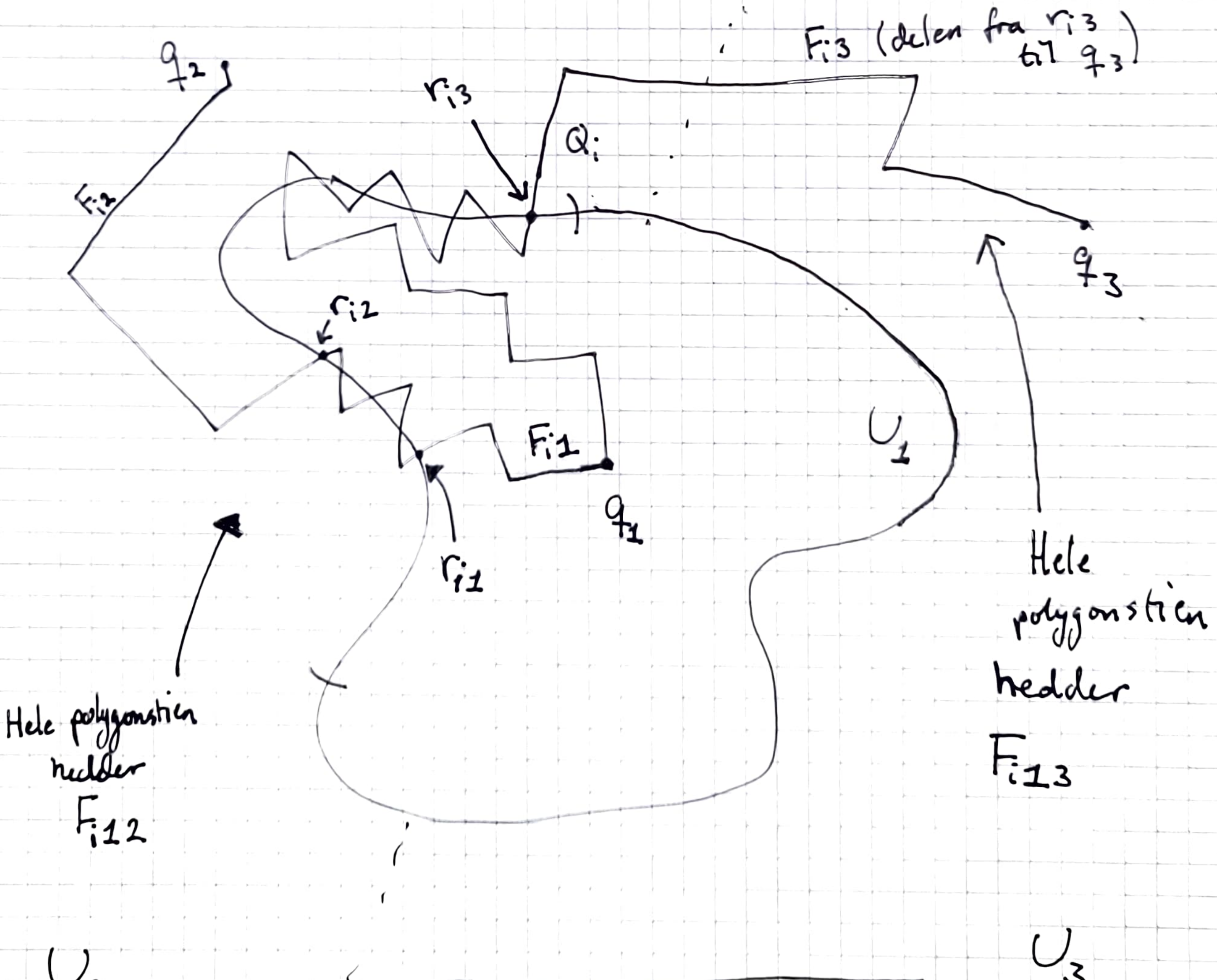
Mere formelt opskrevet, er $\min f^{-1}(Q_i)$ og $\max f^{-1}(Q_i)$ veldefinerede som konsekvens af lemma 3.2, og vi definerer r_{i1}, r_{i2} ud fra disse.



Lad nu F_{i1} være delen af F_{i12}, der forbinder q_1 til r_{i1}.

Lad F_{i2} være delen af F_{i12}, der forbinder q_2 til r_{i3}.

F_{i1}, F_{i2} er så simple polygonkurver.



Husk:
$V_i = \mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus Q_i)$

Af samme årsag som at F_{i12} eksisterer, eksisterer også en simpel polygonkurve F_{i13}, i V_i, som forbinder q_1 til q_3.

Lad r_{i3} være det sidste punkt på F_{i13}, som ligger i Q_i.

Lad F_{i3} være den del af F_{i13}, der forbinder q_3 til r_{i3}.

Problem: F_{ij}'erne overlapper måske.

Løsning: Juster F_{ij}'erne og q_j'erne.

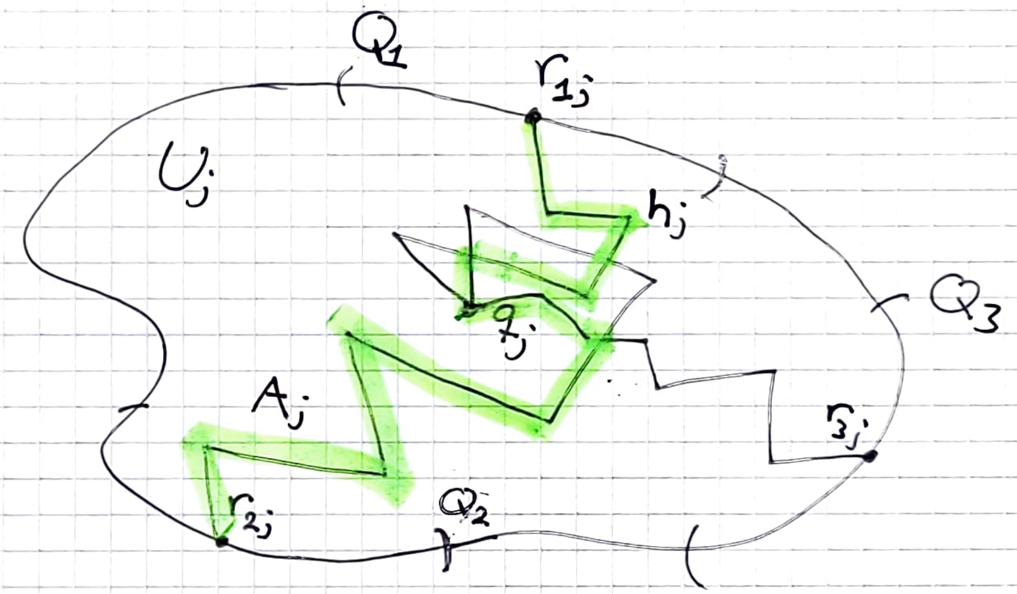
Obs: bliver du forvirret af j'erne, erstat j med 1 mentalt.

Fasthold et j (mentalt: 1).

Lad $\Gamma_j := F_{1j} \cup F_{2j} \cup F_{3j}$ være en graf.

Den indeholder en simpel polygonkurve A_j, som forbinder r_{1j} til r_{2j}

Da A_j ikke kan være en lige linje fra r_{1j} til r_{2j}, må der være mindst to kanter på A_j, og dermed mindst et hjørne h_j, som ikke er et endepunkt.



Der eksisterer tilsvarende en simpel polygonsti B_j r_{3j} til h_j i Γ_j.

Sæt q_j til at være det første punkt på B_j, som ligger på A_j.

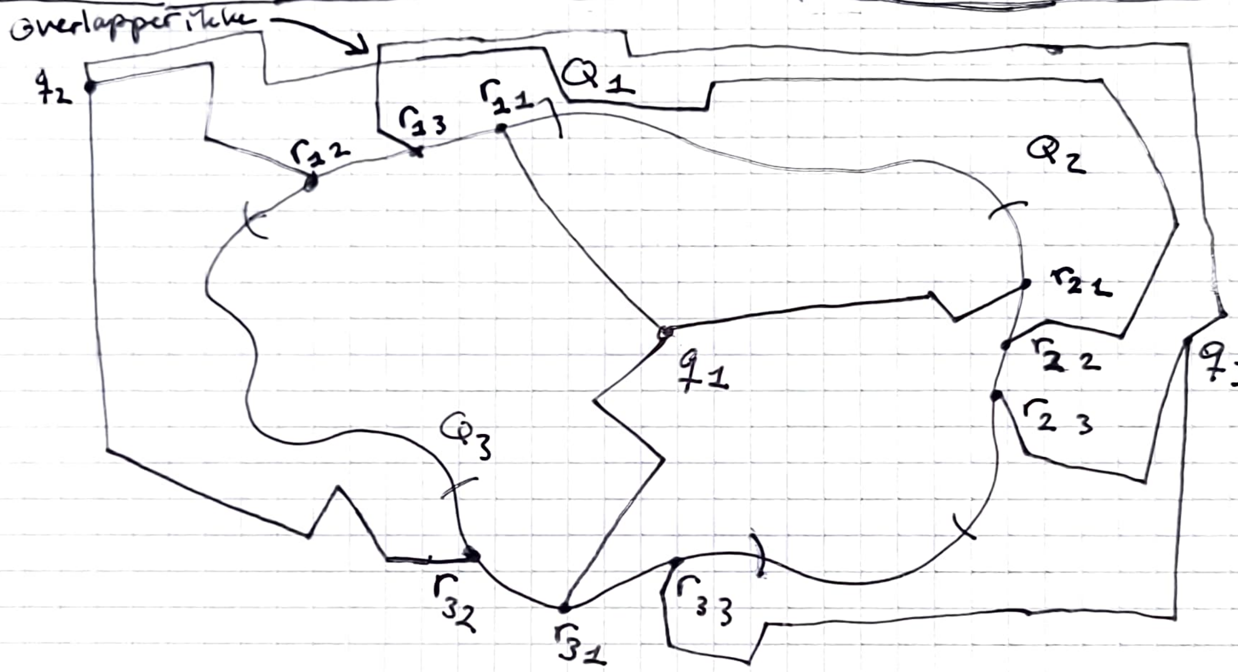
Lad F_{3j} være delen af B_j fra r_{3j} til det nye q_j.

A_j består så af nye simple polygonstier F_{1j} fra r_{1j} til q_j, samt F_{2j} fra r_{2j} til q_j.

Disse nye valg af F_{ij} mødes kun i q_j. Dvs:

$$F_{1j} \cap F_{2j} = F_{2j} \cap F_{3j} = F_{1j} \cap F_{3j} = \{q_j\}$$

For at opsummere, har vi nu:



Vi har nu 3 punkter r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} i Q_i. Et af dem er det midterste punkt, kald dette p_i.

Vi lader E_{ij} være F_{ij} forlænget med den del af Q_i, der går fra r_{ij} til p_i. For de midterste punkter sker der altså ikke noget.

Dette virker, da F_{ij}'erne kun rammer Q_i i ét punkt, nemlig r_{ij}-resten ligger i V_i.

Hvert par af E_{ij}, $E_{i'j'}$ mødes så kun i ét punkt: Enten et p_i eller et q_j.
Så udgør p_i'erne, q_j'erne og E_{ij}'erne en indlejret $K_{3,3}$ i $\mathbb{R}^2$, hvilket er en modstrid. $\lightning$

Så har $\mathbb{R}^2 \setminus C$ nøjagtigt to SH-komponenter.
Vi skal vise, at:

- → Den ene er begrænset, den anden ubegrænset.
- → Randene af de to er lig C.

Den ene begrænset, den anden ubegrænset.

C er lukket og begrænset pr Heine-Borel, så der eksisterer et $r > 0$, så $C \subset B_r(0)$.

$\mathbb{R}^2 \setminus B_r(0)$ er åbenlyst stiSH, så SH.

Så må $\mathbb{R}^2 \setminus B_r(0)$ ligge i én SH-komponent af $\mathbb{R}^2 \setminus C$, kald denne Ext C.

$\mathbb{R}^2 \setminus B_r(0)$ er ubegrænset, så $\mathbb{R}^2 \setminus C$ er det også.

Den anden komponent Int C må så ligge i $B_r(0)$, og er dermed begrænset.

Randen: Vis $\partial \text{Ext}\, C = \partial \text{Int}\, C = C$ maj

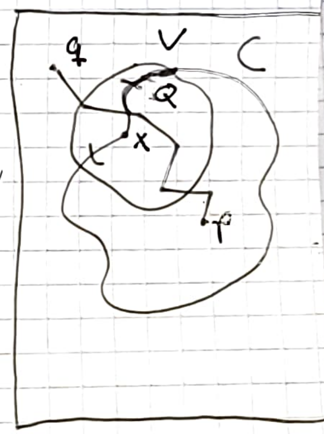
Husk: Randen $\bar{A} \setminus \text{int}(A)$ er afslutningen $\bar{A}$ fraregnet det indre af A, betegnet $\text{int}(A)$.

Bedre definition fra Martin/Wikipedia:

$$\partial \text{Ext}\, C = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \text{ åbne omegne } V \text{ af } x, \text{ er } V \cap \text{Ext}\, C \neq \emptyset, \text{ og } V \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \text{Ext}\, C) \neq \emptyset \}$$

tilsvarende for Int C.

Lad $x \in C$. Lad V være en åben omegn af x.



Så $\exists$ åbent buestykke $Q \subseteq V \cap C$, med $x \in Q$.

Lad $p \in \text{Int}\, C$, $q \in \text{Ext}\, C$.

Så $\exists$ polygonkurve fra p til q i $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus Q)$ pga. lemma 2.2 (åben + SH)

Den må krydse Q, så der eksisterer punkter på polygonkurven i både $V \cap \text{Ext}\, C$ samt $V \cap \text{Int}\, C$.

Dvs $V \cap \text{Int}\, C \neq \emptyset \neq V \cap \text{Ext}\, C$.

Så må $x \in \partial \text{Ext}\, C$ og $x \in \partial \text{Int}\, C$.

Vi har nu vist, at

$C \subseteq \partial \text{Int } C$, $C \subseteq \partial \text{Ext } C$.

For at vise $\partial \text{Int } C \subseteq C$, $\partial \text{Ext } C \subseteq C$

gør man følgende:

Bemærk, at $\text{Int } C \subseteq \overline{\text{Int } C}$ (gælder for alle mængder)

Int C er en komponent, så

maksimalt sammenhængende, så

$\text{Int } C = \overline{\text{Int } C}$, da $\overline{\text{Int } C}$ ellers ville

være en større sammenhængende mængde.

$\text{Int } C = \overline{\text{Int } C}$ hvis og kun hvis Int C

er lukket, så Int C er lukket i $\boxed{\mathbb{R}^2 \setminus C}$

vigtig

Tilsvarende for Ext C.

Så er Int C, Ext C åbne i $\mathbb{R}^2 \setminus C$,

da de er hinandens komplementer.

$\mathbb{R}^2 \setminus C$ er åben i $\mathbb{R}^2$, så Int C, Ext C

er også åbne i $\mathbb{R}^2$ (se sidste side for uddybning)

Så er $\overline{\text{Ext } C} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int } C$, hvilket medfører, at

$\partial \text{Ext } C = \overline{\text{Ext } C} \setminus \text{Int}(\text{Ext } C) \subseteq C$

Tilsvarende er $\partial \text{Int } C \subseteq C$.

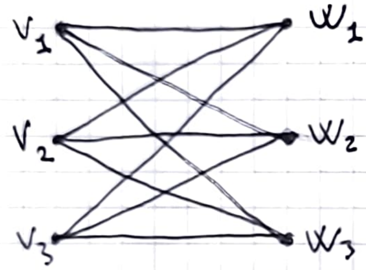
Så er $\partial \text{Ext } C = C = \partial \text{Int } C$

Obs:
int(Ext C)
= Ext C
da Ext C
åben

Vis at $K_{3,3}$ ikke kan indlejres i $\mathbb{R}^2$

En indlejring af en graf G i $\mathbb{R}^2$ er en kontinuert funktion $f: T_G \to \mathbb{R}^2$, så

$f: T_G \to f(T_G)$ er en homeomorfi.



$V(K_{3,3}) = 6$

$E(K_{3,3}) = 9.$

Bevis: AFM at $K_{3,3}$ kan indlejres.

Bemærk, at $\chi(K_{3,3}) = V(K_{3,3}) - E(K_{3,3}) = 6-9=-3$.

Da $K_{3,3}$ er en sammenhængende plangraf gælder, at $F(K_{3,3}) = 2-\chi(K_{3,3}) = 2-(-3) = 5$.

Hver kreds indeholder mindst 4 kanter.

Så rører hvert område ved mindst 4 kanter.

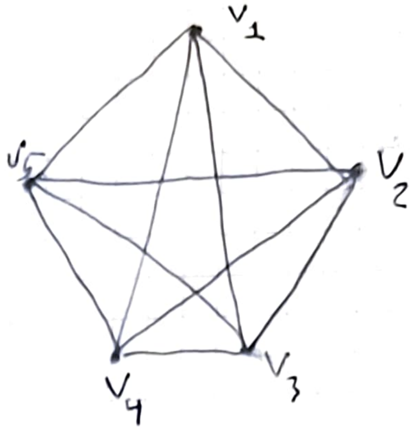
Hver kant rører ved to områder, så

$2 \cdot E(K_{3,3}) \geq 4 \cdot F(K_{3,3})$

Hvilket giver:

$9 \geq E(K_{3,3}) \geq \frac{4}{2} F(K_{3,3}) = 2 \cdot 5 = 10$ $\lightning$.

K_5 kan heller ikke indlejres i $\mathbb{R}^2$.



Beviset er identisk med $K_{3,3}$, dog rører hvert område kun 3 kanter, og

$V(K_5) = 5$, $E(K_5) = 10$.

Kuratowskis sætning:

En graf G kan indlejres i $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ G indeholder ikke grafer isomorf med hverken $K_{3,3}$ eller K_5.

Uddybning til side 11

Lad Int C være åben i $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Det betyder, at der eksisterer en mængde $U \subseteq \mathbb{R}^2$, som er åben i $\mathbb{R}^2$, så $\text{Int } C = U \cap (\mathbb{R}^2 \setminus C)$ jf definitionen på delrumstopologi.

U og $\mathbb{R}^2 \setminus C$ er åbne i $\mathbb{R}^2$, så Int C er det også. Tilsvarende for Ext C.