Eksamen - Lineær Algebra

15. juni 2023

Aarhus Universitet

1 Opgave 1

1.1 Delopgave 1

Vi bemærker, at L's matrixrepræsentation L_A i standardbasen er similær til ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$. Det følger af, at:

$$L_A = {}_{\mathcal{E}}[L_A]_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}[\square]_{\mathcal{V}} \cdot {}_{\mathcal{V}}[L_A]_{\mathcal{V}} \cdot {}_{\mathcal{V}}[\square]_{\mathcal{E}}$$

Af lemma 12.20 har vi så, at L_A har samme karakteriske polynomium (og dermed også egenværdier) som ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$:

$$p_{L_A}(t) = p_{{}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}}(t) = \det({}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}} - t \cdot I) = \det(\begin{pmatrix} 1-t & 3 & 2 \\ 0 & 2-t & 3 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}) = (1-t)(2-t)^2$$

Her anvendes, at determinanten af en øvre triangulær matrix er lig produktet af diagonalindgangene. Så har vi fundet det karakteriske polynomium for L. Vi mangler nu blot at aflæse ud fra det karakteriske polynomium, egenværdierne for både L og ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ er 1 og 2 (da deres karakteriske polynomier er identiske).

1.2 Delopgave 2

For at finde de algebraiske multipliciteter, aflæser vi blot, at multipliciten af roden 2 i det karakteriske polynomium for ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ er 2, mens multipliciteten af roden 1 er 1 (jf. def 12.28/eks. 12.29). Da de karakteriske polynomier for ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ og L er identiske, gælder dette også for L (da de algebraiske multipliciteter alene afhænger af det karakteriske polynominum).

Nu vil vi beregne de geometriske multipliciteter vha. prop. 12.12, som siger, ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ og L har de samme geometriske multipliciteter. Vi regner, og anvender undervejs, at ERO ikke ændrer på nulrum (ERO-mellemregningerne udelades):

$$E_{{}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}}(1) = N({}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}} - 1 \cdot I) = N(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

Her aflæses for de tre ubekendte, at $\beta = 0, \gamma = 0$ og at α vælges frit. Dvs. egenrummet til egenværdi 1 har basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da basen består af et element, er den geometriske multiplicitet for egenværdi 1 lig 1. Vi har altså fundet at den geometriske multiplicitet for egenværdi 1 til ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ er lig 1, og af prop. 12.12 følger så, at dette også gælder for L.
Nu ser vi på egenværdi 2:

$$E_{{}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}}(2) = N({}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}} - 2 \cdot I) = N(\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

Her er β den eneste fri ubekendte. Vi aflæser, at $\alpha - 3\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta$, samt at $\gamma = 0$. Dvs. alle elementer i egenrummet har formen $\begin{pmatrix} 3\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$, hvilket giver os, at en basis for egenrummet til egenværdi 2 er $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da basen også her består af et element, er dimensionen af dette egenrum for ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ 1, og derfor er den geometriske multiplicitet også 1. Af 12.12 følger så, at den geometriske multiplictet for egenværdi 1 til L også er 1.

1.3 Delopgave 3

Af proposition 13.9 har vi, at L er diagnoliserbar hvis og kun hvis summen af de geometriske multipliciteter er lig 3. Men summen af de geometriske multipliciter har vi vist i opgave 2 er lig 2. Dvs. L er ikke diagonaliserbar.

2 Opgave 2

2.1 Delopgave 1

Vi får givet, at $\mathcal{V}$ udspænder V. Af eksempel 7.7(3) har vi, at $(1, X)$ er en lineært uafhængig mængde. Heraf følger det, at $\mathcal{V}$ er en basis for V.

Vi anvender nu Gram-Schmidt (lemma 10.25). Lad $v_1 = 1, v_2 = X$:

$$u_1 = \frac{1}{\|1\|} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Så beregnes p_1:

$$p_1 =< X, \frac{1}{\sqrt{3}} > \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = (0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$$

Og nu beregnes u_2:

$$u_2 = \frac{1}{\|x-1\|}(x-1) = \frac{1}{\sqrt{(0-1)^2+(1-1)^2+(2-1)^2}}(X-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1).$$

Vi har så vist, at man ved at anvende Gram-Schmidt-processen på $\mathcal{V}$ opnår den ortonormale basis $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1))$ for V.

2.2 Delopgave 2

Vi anvender lemma 10.14. Til det skal vi bruge en ortogonal mængde, som udspænder V, og her anvender vi naturligvis den ortogonale basis for V, vi fandt i forrige delopgave. Lad $v = X^2 - X$
Af lemma 10.14 har vi så, at

$$\begin{aligned} p &= < v, u_1 > u_1 + < v, u_2 > u_2 && (1)\\ &= (0+0+(2^2-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}})\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} && (2)\\ +(0+0+(2^2-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}&\cdot(2-1))\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1) && (3)\\ &= \frac{2}{3}+X-1 = X-\frac{1}{3}. && (4)\end{aligned}$$

Dvs. den ortogonale projektion er $X - \frac{1}{3}$.

2.3 Delopgave 3

Jf. korollar 10.22 er dim($V^\perp$) =dim($P_3(\mathbb{R})$)$-$dim(V) $= 3-2 = 1$. Dimensionen af V er nemlig 2, da den har en basis bestående af to elementer, og det er alment kendt, at$P_3(\mathbb{R}$ har dimension 3. Dvs. vi leder efter en basis bestående af ét element.
Af def. 10.11 og forrige delopgave har vi, at $(X^2-X)-(X-\frac{1}{3}) \in V^\perp$, hvilket kan omskrives til $X^2-2X+\frac{1}{3}$. Da dette element ikke er 0, og det samtidig udgør ét element i det et-dimensionelle rum $V^\perp$, udgør det en basis for $V^\perp$.

3 Opgave 3

3.1 Delopgave 1

Ved at udvikle determinanten efter første søjle fås, at:

$$L\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = det(\begin{pmatrix} x & a & \alpha\\ y & b & \beta\\ z & c & \gamma\end{pmatrix}) = (-1)^2\cdot x\cdot det(\begin{pmatrix} b & \beta\\ c & \gamma\end{pmatrix})$$

$$+(-1)^3\cdot y\cdot det(\begin{pmatrix} a & \alpha\\ c & \gamma\end{pmatrix}) + (-1)^4\cdot z\cdot det(\begin{pmatrix} a & \alpha\\ b & \beta\end{pmatrix}) = x\cdot\lambda_1 + y\cdot\lambda_2 + z\cdot\lambda_3$$

som er det, vi skulle vise

3.2 Delopgave 2

Vi tjekker kriterierne i definition 6.1. Lad $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ og $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Så følger:

$$L(u+v) = (x_1+x_2)\lambda_1+(y_1+y_2)\lambda_2+(z_1+z_2)\lambda_3 = x_1\lambda_1+x_2\lambda_1+y_1\lambda_2+y_2\lambda_2+z_1\lambda_3+z_2\lambda_3$$
$$= L(u) + L(v)$$

som er det første kriterie, vi skal tjekke i definitionen. Derudover følger:

$$L(\alpha u) = (\alpha x_1)\lambda_1 + (\alpha y_1)\lambda_2 + (\alpha z_1)\lambda_3 = \alpha(x_1\lambda_1 + y_1\lambda_2 + z_1\lambda_3) = \alpha \cdot L(u)$$

som er andet kriterie, vi skulle vise jf. definition 6.1. Da $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, og både $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}$ er vektorrum, følger det heraf, at L er en lineær transformation, som vi skulle vise.

3.3 Delopgave 3

Her følger et kort bevis:

$$L(w) \neq 0 \Leftrightarrow det(\begin{pmatrix} x & a & \alpha \\ y & b & \beta \\ z & c & \gamma \end{pmatrix}) \neq 0 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & a & \alpha \\ y & b & \beta \\ z & c & \gamma \end{pmatrix} \text{ er en invertibel matrix} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \text{rangen af } \begin{pmatrix} x & a & \alpha \\ y & b & \beta \\ z & c & \gamma \end{pmatrix} \text{ er } 3 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \text{søjlerne i } \begin{pmatrix} x & a & \alpha \\ y & b & \beta \\ z & c & \gamma \end{pmatrix} \text{ er lineært uafhængige} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \text{Søjlerne i matricen udgør en basis for } \mathbb{R}^3 \tag{9}$$

Den sidste biimplikation følger af, at 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$ er lineært uafhængige hvis og kun hvis de udgør en basis for $\mathbb{R}^3$ (det antages, at det er er alment kendt). Så har vi vist det, vi skulle.

3.4 Delopgave 4

For at vise at L er surjektiv, skal vi vise, at L udspænder $\mathbb{R}$. Da (u, v) er lineært uafhængige, kan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ikke alle være 0. Lad λ_n være et λ forskelligt fra 0, og lad p være den værdi af x, y eller z, der er ganget på λ_n. Givet et $q \in \mathbb{R}$, sæt de to værdier af x,y og z forskellige fram p til at være 0. Lad $p = \frac{q}{\lambda_n}$. Så følger det, at vores funktionsværdi $q = p \cdot lambda_n = \frac{p}{\lambda_n} \cdot \lambda_n = p$. Dvs elementet q

tilhører billedet af L, og da q er fuldstændig vilkårligt valgt, følger det heraf, at L er surjektiv.

Til del 2 af spørgsmålet (om kernen) bemærker vi, at:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = det(\begin{pmatrix} x & a & \alpha \\ y & b & \beta \\ z & c & \gamma \end{pmatrix}) = 0 \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \text{Rangen af matricen er ikke 3} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \text{Søjlerne i matricen er ikke lineært uafhængige} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in span(u, v) \tag{13}$$

At et element tilhører urbilledet til 0 hvis og kun hvis det tilhører $span(u, v)$ er ækvivalent med, at kernen til L er lig $span(u, v)$. Vi anvender forresten i sidste bimplikation antagelsen om, at (u,v) er en lineært uafhængig mængde.

4 Opgave 4

4.1 Delopgave 1

Vi skal vise at (v_1, v_2) er en ortogonal mængde og en basis for $\mathbb{R}^2$, samt at normen af v_1, v_2 er 1:

$$< v_1, v_2 >= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + 9 \cdot + \cdot \frac{1}{3} = 0$$

Da det indre produkt af v_1, v_2 er 0, er de en ortogonal mængde.

$$\sqrt{< v_1, v_1 >} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

$$\sqrt{< v_2, v_2 >} = 4 \cdot 0 \cdot 0 + 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Så har vi vist, at begge vektorer også har norm 1. Så mangler vi at vise, at de er en basis for $\mathbb{R}^2$.

Af prop. 10.4 har vi, at (v_1, v_2) må være en lineært ufhængig mængde. Da de er to lineært afhængige vektorer i $\mathbb{R}^2$, udgør de så også en basis for $\mathbb{R}^2$ (dette antages at være alment kendt).

Af alle disse argumenter følger det så, at (v_1, v_2) er en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^2$.

4.2 Delopgave 2

Vi beregner ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ direkte ud fra def. 8.14: (visse mellemregninger håndteres af CAS)

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}} &= \begin{pmatrix} [L(v_1)]_{\mathcal{V}} & [L(v_2)]_{\mathcal{V}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [A \cdot v_1]_{\mathcal{V}} & [A \cdot v_2]_{\mathcal{V}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}]_{\mathcal{V}} & [\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}]_{\mathcal{V}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Den sidste udregninger følger af def. 8.3 (herunder bemærkningerne lige under definitionen), samt at følgende oplagt er sandt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 6v_1 + 12v_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 12v_1 + 12v_2$$

Så har vi fundet ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$, som vi skulle.

4.3 Delopgave 3

Jf. lemma 14.15 er L selvadjungeret hvis og kun hvis ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ er symmetrisk. ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}$ er symmetrisk, da ${}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} = ({}_{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}})^T$.

4.4 Delopgave 4

At L er ortonormalt diagonaliserbar følger direkte af, at L er en selvadjungeret operator jf. spektralsætningen (14.18).

5 Opgave 5

5.1 Delopgave 1

Vi regner vha. basale regneregler for matricer og de givne oplysninger i opgaven (primært at $Av = \lambda v$, eftersom at λ er en egenværdi for v):

$$\begin{aligned}(A^2 - 2A + I)v &= A^2v - 2Av + v && (14)\\ &= A(Av) - 2Av + v && (15)\\ &= A(\lambda v) - 2\lambda v + v && (16)\\ &= \lambda(Av) - 2\lambda v + v && (17)\\ &= \lambda(\lambda v) - 2\lambda v + v && (18)\\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)v && (19)\end{aligned}$$

Så har vi vist det, vi skulle.

5.2 Delopgave 2

Af delopgave 1 følger det, at:

$$\begin{aligned}&(\lambda - 1)^2 v && (20)\\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)v && (21)\\ &= (A^2 - 2A + I)v && (22)\\ &= O \cdot v && (23)\\ &= O' && (24)\end{aligned}$$

hvor $O \in Mat_n(\mathbb{R})$ er nulmatricen, og $O' \in Mat_{n,1}(\mathbb{R})$ er en nulvektor med n indgange. Da en egenvektor per definition ikke kan være en nulvektor, er ovenstående sandt hvis og kun hvis skalaren $(\lambda - 1)^2 = 0$. Dette er åbenlyst sandt hvis og kun hvis $\lambda = 1$.

5.3 Delopgave 3

Vi skal tjekke de tre betingelser i def. 15.4. Først betingelse 1:

$$F(0) = 0e^0 \cdot (A - I) + e^0 \cdot I = O + 1 \cdot I = I$$

hvor O er nulmatricen. Første betingelse er således opfyldt. Anden betingelse:

$$
\begin{aligned}
A \cdot F(t) &= A(te^t \cdot (A - I) + e^t \cdot I) && (25)\\
&= te^t(A(A-I)) + e^t A && (26)\\
&= te^t(A^2 - A) + e^t A && (27)\\
&= te^t(A^2 - A) + e^t \cdot (A^2 - A + I) && (28)\\
&= te^t(A^2 - A) + e^t \cdot (A^2 - A) + e^t \cdot I && (29)\\
&= (te^t + e^t)(A^2 - A) + e^t \cdot I && (30)\\
&= (te^t + e^t)(A - I) + e^t \cdot I && (31)\\
&= F'(t) && (32)
\end{aligned}
$$

Her anvendes flere gange som omskrivning, at $A^2 - 2A + I = O \Leftrightarrow A^2 - A = A - I \Leftrightarrow A = A^2 - A + I$. Så har vi vist betingelse 2. Af en opgave på ugesedlen i uge 15 følger det så per automatik, at betingelse 3 også er opfyldt.
Så har vi vist, at F er en eksponentialfunktion for A.

5.4 Delopgave 4

Vi indsætter A i vores definition af F:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= te^t(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - I) + e^t \cdot I && (33)\\
&= te^t(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} && (34)\\
&= \begin{pmatrix} -2te^t + e^t & 2te^t \\ -2te^t & 2te^t + e^t \end{pmatrix} && (35)
\end{aligned}
$$

herfra aflæses basen for løsningsmængden til at være $(\begin{pmatrix} -2te^t + e^t \\ -2te^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2te^t \\ 2te^t + e^t \end{pmatrix})$.