Ответы к вопросам по курсу "Квантовая теория"

3 января 2016 г.

1. **Соотношения неопределенностей (для операторов координаты и импульса, для компонент вектора момента). Когерентные состояния гармонического осциллятора. (L5, L17, L38)**

   а) Рассмотрим дисперсию величины A : $\overline{\Delta A^2} = \langle\psi|\left(\hat{A} - \bar{A}\right)^2|\psi\rangle$
   Дисперсия значений величин x и y связана с коммутатором операторов: $[\hat{x}, \hat{y}] = i\hat{A}$
   Пусть оператор $\hat{L} = (\hat{x} - \bar{x}) + i\gamma(\hat{y} - \bar{y})$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $!\hat{x}, \hat{y}$ – эрмитовы
   Собственные значения оператора $\hat{L}^+\hat{L}$ неотрицательны:

   $$\langle\psi|\left\{(\hat{x} - \bar{x}) - i\gamma(\hat{y} - \bar{y})\right\}\left\{(\hat{x} - \bar{x}) + i\gamma(\hat{y} - \bar{y})\right\}|\psi\rangle \geq 0$$
   $$\langle\psi|\,\overline{\Delta x^2} + \gamma^2\overline{\Delta y^2} - \gamma\bar{A}\,|\psi\rangle \geq 0$$

   Выполняется для $\forall\gamma \Rightarrow D \leq 0$: $\bar{A}^2 - 4\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta y^2} \leq 0$

   $$\boxed{\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta y^2} \geq \frac{\bar{A}^2}{4}}$$

   Таким образом $[\hat{p}_i, \hat{x}_i] = -i\hbar \quad \Rightarrow \quad \underline{\overline{\Delta p^2}\,\overline{\Delta x^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}}$
   Аналогично для векторного оператора момента:

   $$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_k\right] = i\mathcal{E}_{ijk}\hat{J}_j \Rightarrow \Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\hat{J}_z\right\rangle\right|$$
   $$\hat{J}_x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \hat{J}_y = \frac{-i}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \hat{J}_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

   $\mathcal{E}_{ijk}$ – единичный антисимметричный тензор (Леви-Чивиты)

   б) В классической механике p и x определены одновременно $\Rightarrow$ состояния, наиболее близкие к классическим описываются минимальными неопределённостями, то есть

   $$D = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\Delta p^2}\,\overline{\Delta x^2} = \frac{\hbar^2}{4}$$

Так как СЗ оператора $\hat{L}^{+}\hat{L}$ неотрицательны, то СФ оператора L^{+} будут соответствовать СЗ $= 0$. Получаем:

$$\left(x + \gamma\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = \lambda\psi, \quad \lambda = \bar{x} + i\gamma\bar{p}$$

Решение этого уравнения: $\psi(x) = \left(2\pi\overline{\Delta x^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\overline{\Delta x^2}} + i\frac{\bar{p}x}{\hbar}\right]$
Если забить на размерности, то это уравнение эквивалентно

$$\hat{a}\psi = \lambda\psi; \quad \hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,; \quad \langle\alpha\,|\,\alpha\rangle = 1$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} + i\hat{p}\right) \text{ – оператор уничтожения}$$

Последнему уравнению удовлетворяют ВФ, называющиеся **когерентными состояниями гармонического осциллятора**