

Ответы к вопросам по курсу “Квантовая теория”

4 января 2016 г.

1. Соотношения неопределенностей (для операторов координаты и импульса, для компонент вектора момента). Когерентные состояния гармонического осциллятора. (L5, L17, L38)

а) Рассмотрим дисперсию величины A : $\overline{\Delta A^2} = \langle \psi | (\hat{A} - \bar{A})^2 | \psi \rangle$

Дисперсия значений величин x и y связана с коммутатором операторов: $[\hat{x}, \hat{y}] = i\hat{A}$

Пусть оператор $\hat{L} = (\hat{x} - \bar{x}) + i\gamma(\hat{y} - \bar{y})$, $\gamma \in \mathbb{R}$, \hat{x}, \hat{y} – эрмитовы

Собственные значения оператора $\hat{L}^\dagger \hat{L}$ неотрицательны:

$$\langle \psi | \{(\hat{x} - \bar{x}) - i\gamma(\hat{y} - \bar{y})\} \{(\hat{x} - \bar{x}) + i\gamma(\hat{y} - \bar{y})\} | \psi \rangle \geq 0$$

$$\langle \psi | \overline{\Delta x^2} + \gamma^2 \overline{\Delta y^2} - \gamma \bar{A} | \psi \rangle \geq 0$$

Выполняется для $\forall \gamma \Rightarrow D \leq 0$: $\bar{A}^2 - 4\overline{\Delta x^2} \overline{\Delta y^2} \leq 0$

$$\boxed{\overline{\Delta x^2} \overline{\Delta y^2} \geq \frac{\bar{A}^2}{4}}$$

Таким образом $[\hat{p}_i, \hat{x}_i] = -i\hbar \Rightarrow \overline{\Delta p^2} \overline{\Delta x^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}$

Аналогично для векторного оператора момента:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_k] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_j \Rightarrow \Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{J}_z \rangle|$$

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \hat{J}_y = \frac{-i}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \hat{J}_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

ϵ_{ijk} – единичный антисимметричный тензор (Леви-Чивиты)

б) В классической механике p и x определены одновременно \Rightarrow состояния, наиболее близкие к классическим описываются минимальными неопределённостями, то есть

$$D = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\Delta p^2} \overline{\Delta x^2} = \frac{\hbar^2}{4}$$

Так как СЗ оператора $\hat{L}^+\hat{L}$ неотрицательны, то СФ оператора L^+ будут соответствовать СЗ = 0. Получаем:

$$\left(x + \gamma\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi = \lambda \psi, \quad \lambda = \bar{x} + i\gamma\bar{p}$$

Решение этого уравнения: $\psi(x) = (2\pi\Delta x^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\Delta x^2} + i\frac{\bar{p}x}{\hbar}\right]$

Если забыть на размерности, то это уравнение эквивалентно

$$\begin{aligned} \hat{a}\psi &= \lambda\psi; \quad \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle; \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \\ \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) - \text{оператор уничтожения} \end{aligned}$$

Последнему уравнению удовлетворяют ВФ, называемые **когерентными состояниями гармонического осциллятора**

2. Динамика квантовых систем в картине Гейзенберга. Теоремы Эренфеста. Эволюция волновых пакетов свободной частицы. (L7)

а) Матричные элементы операторов \hat{x}_i и \hat{p}_k , вычисленные между ВФ f и g удовлетворяют уравнениям Гамильтона классической механики:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f | \hat{p}_i | g \rangle &= - \left\langle f \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}_i} \right| g \right\rangle \\ \frac{d}{dt} \langle f | \hat{x}_i | g \rangle &= - \left\langle f \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i} \right| g \right\rangle \end{aligned}$$

Картина Гейзенберга: от времени зависят лишь операторы, то есть

$$\dot{\hat{p}}_i = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}_i} \quad \dot{\hat{x}}_i = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_i}$$

Учитывая, что $\hat{p}_i \hat{x}_i^n - \hat{x}_i^n \hat{p}_i = -i\hbar n \hat{x}_i^{n-1}$ для всех функций, разлагая в степенной ряд, получаем

$$\hat{p}_i f - f \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{p}}_i = -\frac{i}{\hbar} [\hat{p}_i, \hat{H}] \\ \dot{\hat{x}}_i = -\frac{i}{\hbar} [\hat{x}_i, \hat{H}] \end{cases} \leftarrow \text{уравнения Гейзенберга}$$

б) 1)

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle Hx - xH \rangle, \quad H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$$

Так как x и $V(x)$ коммутируют, то $\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{2m\hbar} \langle p_x^2 - x p_x^2 \rangle$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{2m\hbar} \langle p_x (p_x x - x p_x) + (p_x x - x p_x) p_x \rangle$$

Далее так как $p_x x - x p_x = -i\hbar$, то $\boxed{\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{1}{m} \langle p_x \rangle}$

2)

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle V p_x - p_x V \rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = \langle F(x) \rangle$$

Формулы в коробочках – теорема Эренфеста

в) Свободная частица $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. Решение:

$$\hat{p}(t) = \hat{p}_0; \quad \hat{r}(t) = \hat{r}_0 + \frac{1}{m} \hat{p}_0 t$$

3. Динамика квантовых систем в картине Шредингера. Эволюция фиделити. Теорема Крылова – Фока. (L8)

а) Пусть теперь от времени зависят ВФ f, g :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f | \hat{p}_i | g \rangle &= -\frac{i}{\hbar} \langle f | [\hat{p}_i, \hat{H}] | g \rangle \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \hat{p}_i g \right) + \left(\hat{p}_i f, \frac{\partial g}{\partial t} \right) &= \frac{i}{\hbar} (f, \hat{p}_i \hat{H} g) + \frac{i}{\hbar} (f, \hat{H} \hat{p}_i g) \\ \hat{H}, \hat{p} - \text{эрмитовы} &\Rightarrow \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \hat{p}_i g \right) + \left(\hat{p}_i f, \frac{\partial g}{\partial t} \right) &= -\frac{i}{\hbar} (\hat{p}_i f, \hat{H} g) + \frac{i}{\hbar} (\hat{H} f, \hat{p}_i g) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \hat{H} f, \hat{p}_i g \right) + \left(\hat{p}_i f, \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \hat{H} g \right) &= 0 \end{aligned}$$

Выполняется для ВФ, удовлетворяющих $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \leftarrow \text{УШ}$

б) Суперпозиция двух стационарных состояний:

$$\psi(t) = \alpha |\psi_k\rangle \exp(-i\omega_k t) + \beta |\psi_n\rangle \exp(-i\omega_n t)$$

Фиделити текущего и начального состояний:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= |\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle|^2 = |\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 |\beta|^2 \cos \omega_{nk} t + |\beta|^4 \\ \omega_{nk} &= \frac{E_n - E_k}{\hbar} = \omega_n - \omega_k \quad - \text{“частота перехода”} \end{aligned}$$

Для непрерывного спектра E суперпозиция состояний:

$$\psi(\xi, 0) = \int C(E) \psi_E(\xi) dE$$

Фиделити текущего и начального состояний:

$$\mathcal{F}(t) = |\langle \psi(\xi, 0) | \psi(\xi, t) \rangle|^2 = \left| \int |C(E)|^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) dE \right|^2 \leftarrow \text{теорема Крылова-Фока}$$