第三章 连续时间信号与系统的频域分析

- ✓ *周期信号*的傅立叶级数、傅立叶频谱
- ✓ *非周期信号*的傅立叶变换、傅立叶频谱
- ✓ 傅立叶变换的性质

➢ 怎样用傅立叶变换求系统的响应

- 信号无失真传输的条件
- 什么是理想低通滤波器
- 连续信号转换成离散信号需要满足的*抽样定理*

傅里叶变换背景材料

傅立叶是一位法国数学家和物理学家，1807年完成一项研究，断言：

任何周期信号 都可以用成谐波关系的正弦函数级数来表示----傅里叶级数

这个论述是非常有意义的，但傅立叶对它的证明并不完善，1829年，狄里赫利给出了若干精确的条件，在这些条件下，一个周期信号才可以用一个傅立叶级数表示

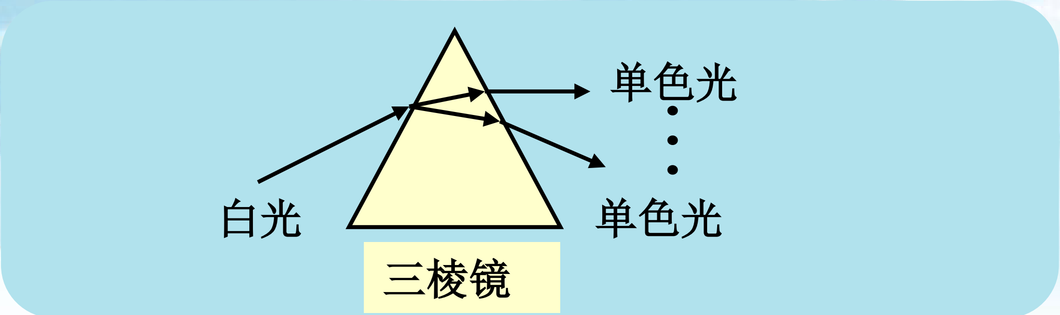
Jean Baptiste Joseph Fourier

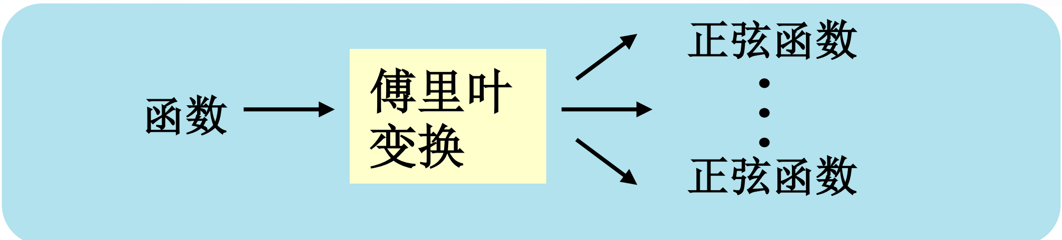
(1768—1830)

傅立叶还指出：

非周期信号 的表示：不全成谐波关系的正弦信号加权积分----傅里叶变换

从现代数学的眼光来看，傅里叶变换是一种特殊的积分变换。"任意"的函数通过一定的分解，都能够表示为正弦函数的线性组合的形式，而正弦函数在物理上是被充分研究而相对简单的函数



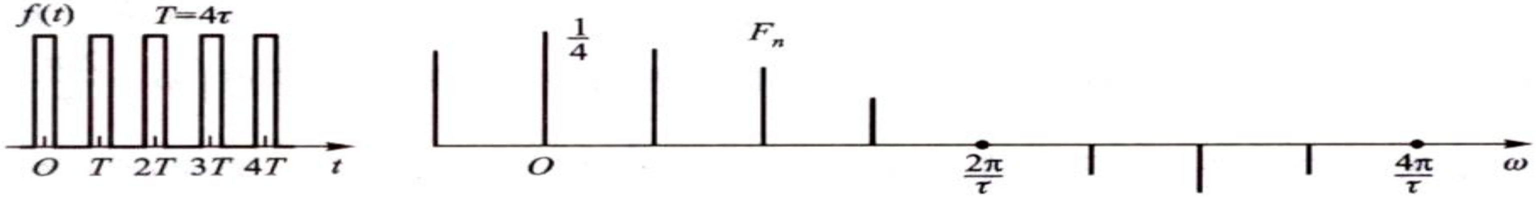


现代数学发现傅立叶变换具有非常好的性质:

1. 是线性算子,若赋予适当的范数,它还是酉算子;
2. 逆变换容易求出,而且形式与正变换非常类似;
3. 可将复杂的卷积运算转化为简单的乘积运算
4. 离散形式的傅立叶变换可以利用数字计算机快速的算出(FFT).

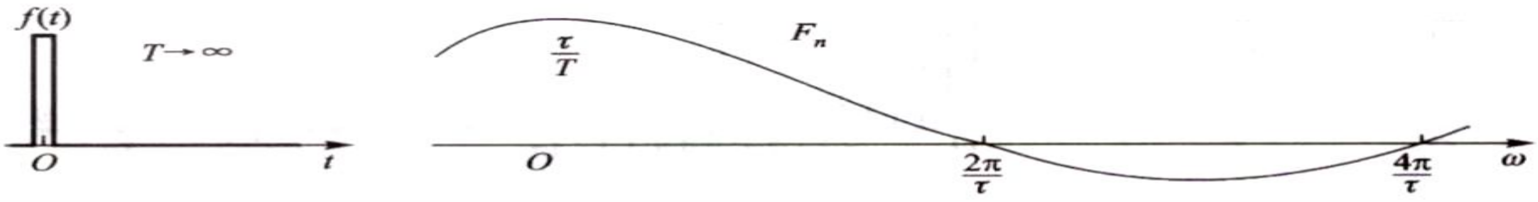
正是由于上述的良好性质,傅里叶变换在物理学、数论、组合数学、信号处理、概率、统计、密码学、声学、光学等领域都有着广泛的应用。

1 周期性连续信号-------傅立叶级数



$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

2 非周期性连续信号 ---傅立叶变换



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

§3.1 *周期信号*的傅立叶级数

在高等数学中，在满足一定的条件下，任何一个周期信号都可以分解为正弦信号的叠加,这种分解就叫*傅里叶级数*。

$f(t) = f(t+T)$

设 $f(t)$是基本周期为T的周期信号，则

$$f(t) = a_0 + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + \cdots + b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin 2\omega_0 t + \cdots$$

称为$f(t)$的傅立叶级数，或*三角函数形式*的傅立叶级数

式中 ω_0 是*基波角频率*， $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

a_0, a_n, b_n 都是傅立叶级数的系数，是实数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\underline{a_n \cos n\omega_0 t} + \underline{b_n \sin n\omega_0 t})$$

傅立叶级数的系数可由下列公式求得：

直流分量： $$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

余弦分量幅度：$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 tdt$$

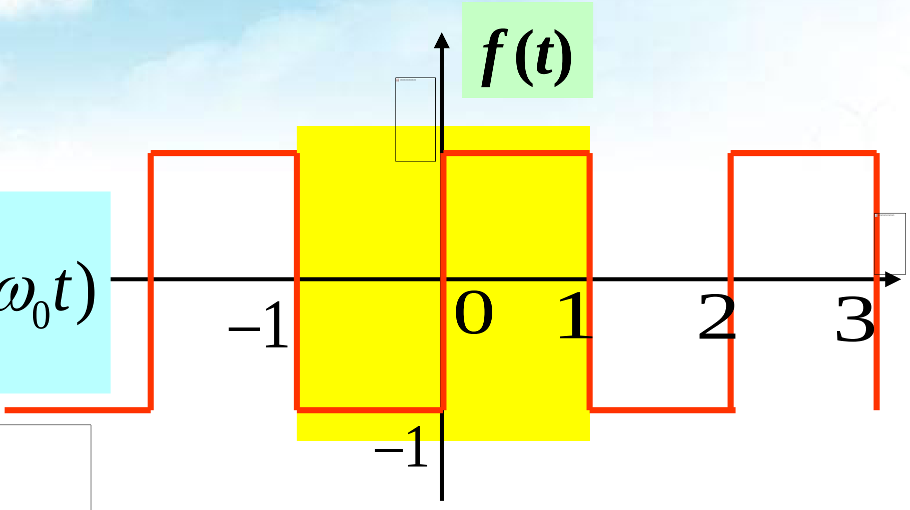
正弦分量幅度：$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 tdt$$

积分上下限为一个周期即可，如 $(0,T)$ $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ $(\frac{T}{2},\frac{3T}{2})$

信号与系统

SWJTU EE

例：已知波形，求三角函数形式傅里叶级数展开式

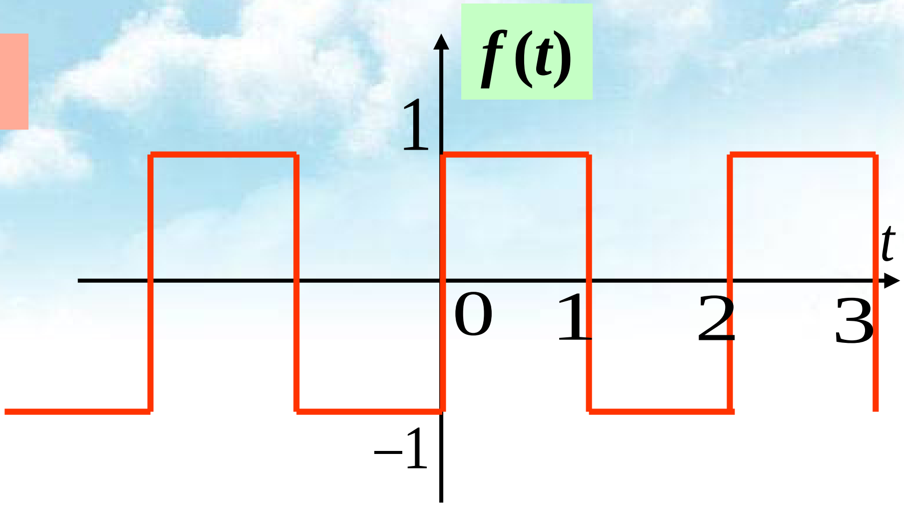


解：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

● 求傅里叶级数展开式系数

因为$f(t)$函数为奇函数



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt \quad = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\omega_0 t dt \quad = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t dt$$

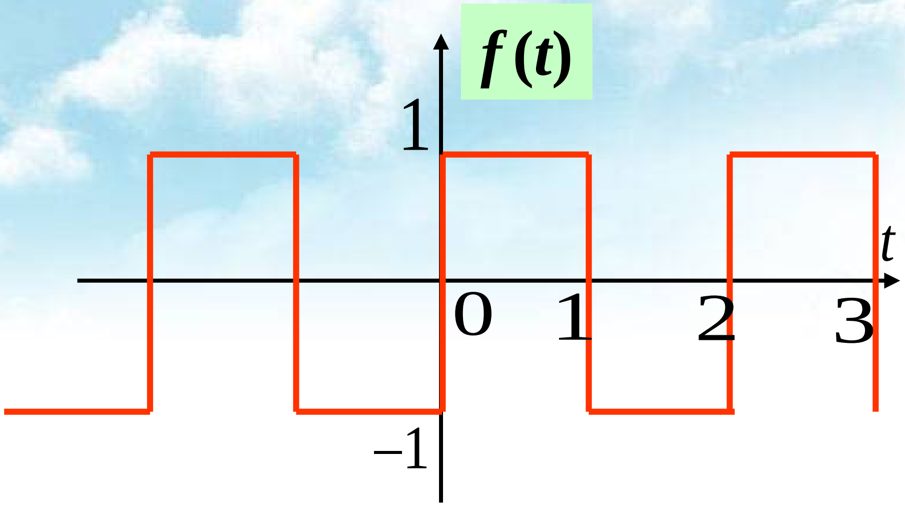
$$= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\omega_0 t dt$$

$$= \int_{-1}^{0} (-1)\sin n\omega_0 t dt + \int_{0}^{1} \sin n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\omega_0}\left[-\cos(n\omega_0 t)\right]\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2,4,6,\ldots \\ \dfrac{4}{n\pi} & n = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

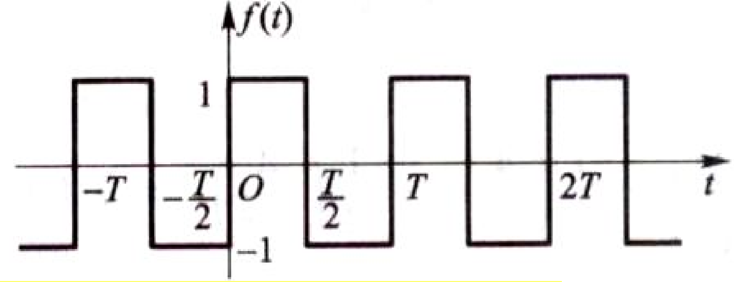


- $f(t)$傅里叶级数展开式为

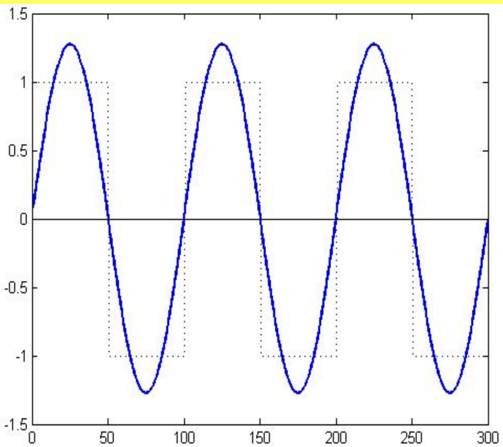
$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin n\omega t)$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots+\frac{1}{n}\sin n\omega t\cdots\right)$$

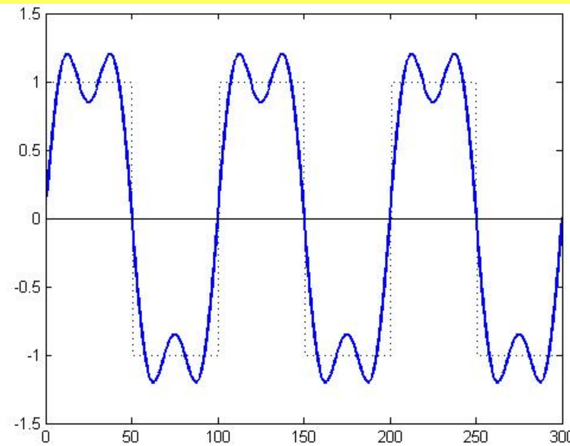
$$n=1,3,5,\ldots$$



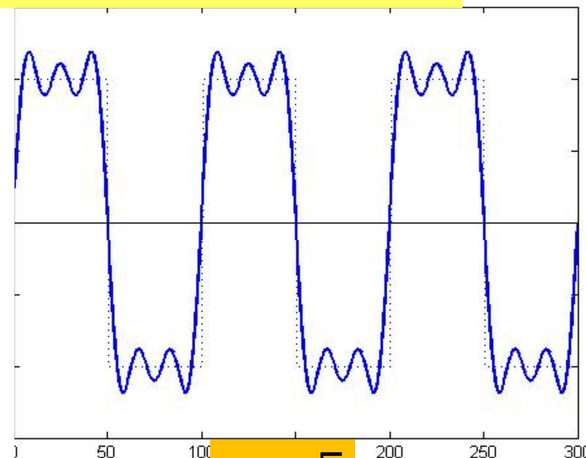
$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t)+\cdots+\frac{1}{n}\sin(n\omega_0 t)+\cdots\right]$$



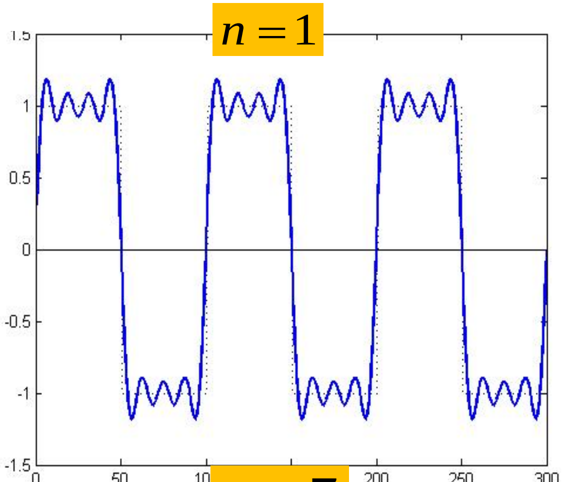
$n=1$



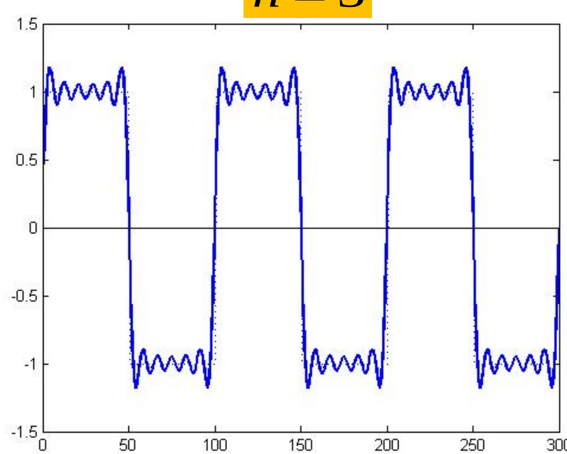
$n=3$



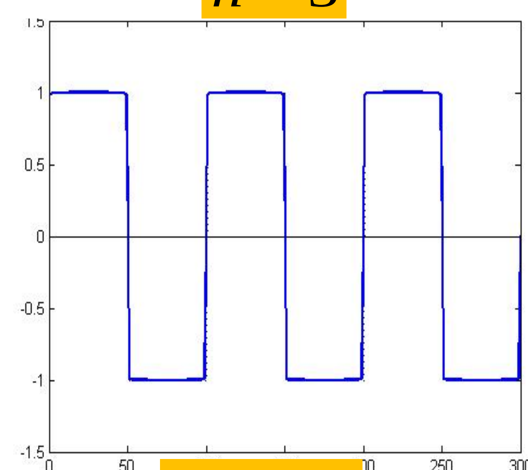
$n=5$



$n=7$



$n=11$



$n=1001$

*指数型*傅立叶级数

欧拉公式

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \underline{\cos n\omega_0 t} + b_n \underline{\sin n\omega_0 t})$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right]$$

$$= \underbrace{a_0}_{F_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{jn\omega_0 t} \underbrace{\frac{a_n - jb_n}{2}}_{F_n} + e^{-jn\omega_0 t} \underbrace{\frac{a_n + jb_n}{2}}_{F_{-n}} \right]$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{jn\omega_0 t}F_n + e^{-jn\omega_0 t}F_{-n}\right]$$

$$= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}F_n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-jn\omega_0 t}F_{-n}$$

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{jn\omega_0 t}F_n$$

$$\therefore\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

因此

只要确定了系数 F_n，就能得到信号的*指数型*傅立叶级数

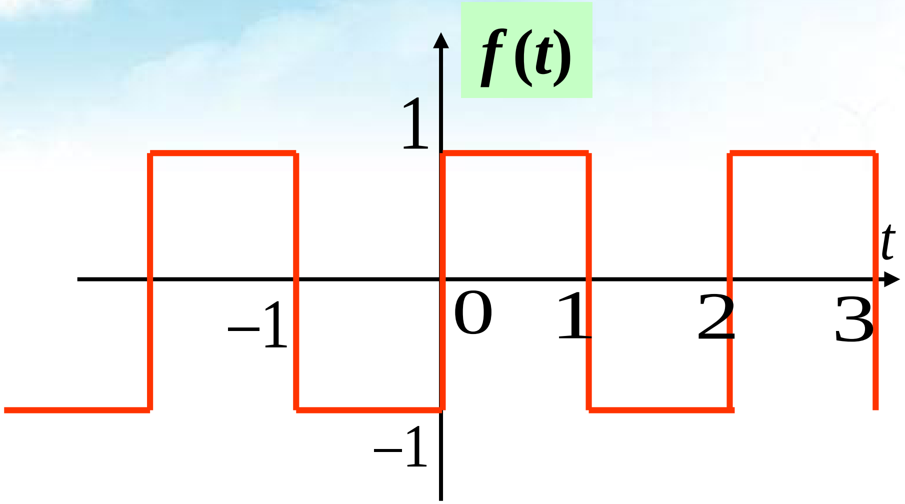
$$F_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$= [\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t dt - j\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t dt]/2$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)[\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t]dt$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$$

例：已知波形，求指数形式傅里叶级数展开式



解：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

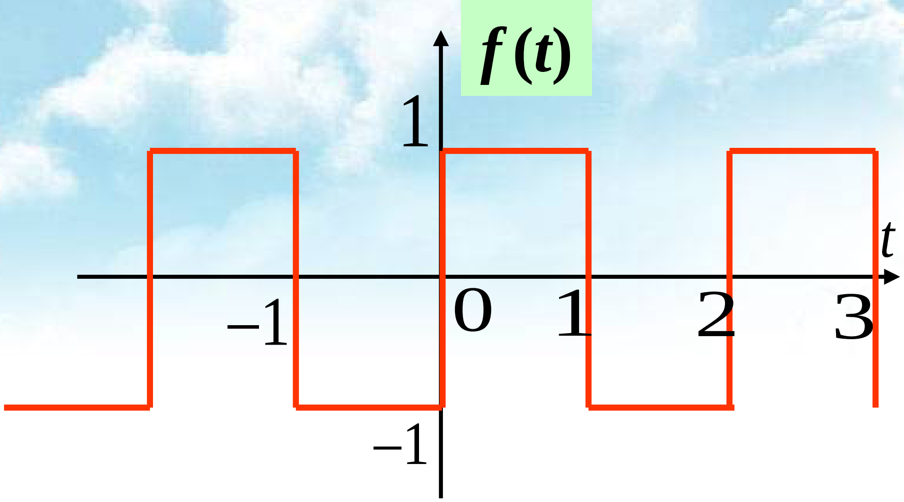
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\int_{-1}^{0}e^{-jn\omega_0 t}dt+\int_{0}^{1}e^{-jn\omega_0 t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2jn\pi}\left[2-e^{jn\omega_0}-e^{-jn\omega_0}\right]$$

$$=\begin{cases}0, & n=\ldots,-2,0,2,4,\ldots\\ \dfrac{2}{jn\pi} & n=\ldots,-3,1,3,\ldots\end{cases}$$

$$F_n = \begin{cases} 0, & n = \ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots \\ \dfrac{2}{jn\pi} & n = \ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots \end{cases}$$



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=2i+1}^{\infty} \frac{2}{jn\pi} e^{jn\omega_0 t} \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$= \ldots + \frac{2}{-3j\pi} e^{-3j\omega_0 t} + \frac{2}{-j\pi} e^{-j\omega_0 t} + \frac{2}{j\pi} e^{j\omega_0 t} + \frac{2}{3j\pi} e^{3j\omega_0 t} + \ldots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots + \frac{1}{n}\sin n\omega t \cdots \right)$$

周期信号$f(t)$的*三角函数形傅立叶级数*是

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

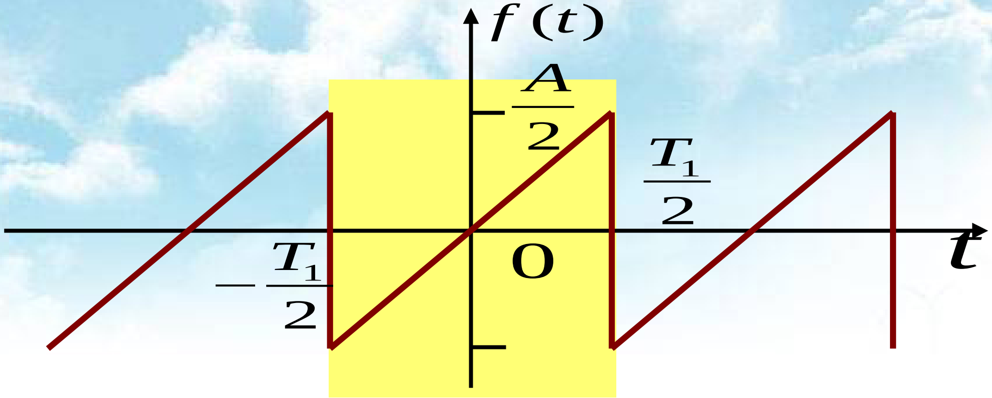
周期信号$f(t)$的*指数形傅立叶级数*是

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$$

*三角函数形式*和*指数形式*的傅立叶级数虽然形式不同，但都属于同一性质的级数，都是将信号表示为直流分量和谐波分量之和

实际应用中，*指数形式的傅立叶级数*更为方便

例　求周期锯齿波的三角形式的傅里叶级数展开式。



解：

$$f(t)=\frac{A}{T_1}t \quad \left(-\frac{T_1}{2}\le t\le\frac{T_1}{2}\right)$$

函数为奇函数　　$\therefore a_k=0$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\left(\frac{A}{T_1}t\right)dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\left(\frac{A}{T_1}t\right)\underline{\cos n\omega_1 tdt}$$

$$=0$$

偶函数

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\left(\frac{A}{T_1}t\right)\sin n\omega_1 tdt$$

分部积分　$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$

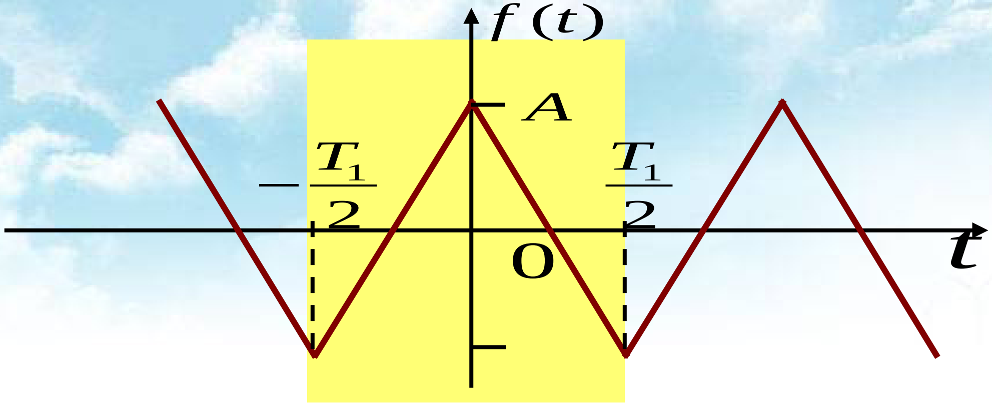
$$=\frac{4}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}}\left(\frac{A}{T_1}t\right)\sin n\omega_1 tdt$$

$$=\frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1}\qquad n=1,2,3$$

周期锯齿波的傅里叶级数展开式为

$$f(t)=0+\frac{A}{\pi}\sin\omega_1 t-\frac{A}{2\pi}\sin 2\omega_1 t+\cdots$$

例　波形如图所示，求指数函数形式的傅立叶级数展开式。



分析

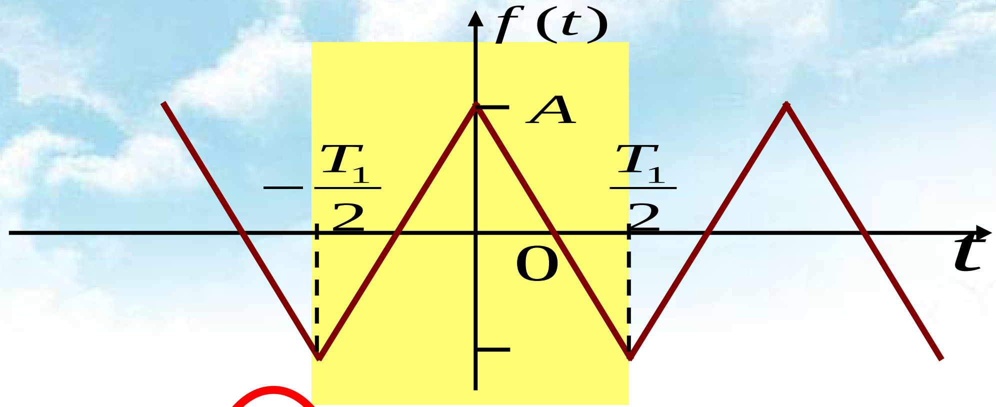
指数型傅立叶级数是 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$

其中系数 $F_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$　基波角频率 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$

解

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$



$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(\frac{4A}{T}\left(t+\frac{T}{4}\right)\right)e^{-jn\omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{4A}{T}\left(t-\frac{T}{4}\right)\right)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4A}{n^2\pi^2} & \text{n为奇数} \\ 0 & \text{n为偶数} \end{cases}$$

所以

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=2i+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{jn\omega_0 t}$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

§ 3-2　周期信号的频谱---*傅立叶级数*

周期信号*f*(*t*)的*三角函数形傅立叶级数*是

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\underline{a_n\cos n\omega_0 t}+\underline{b_n\sin n\omega_0 t})$$

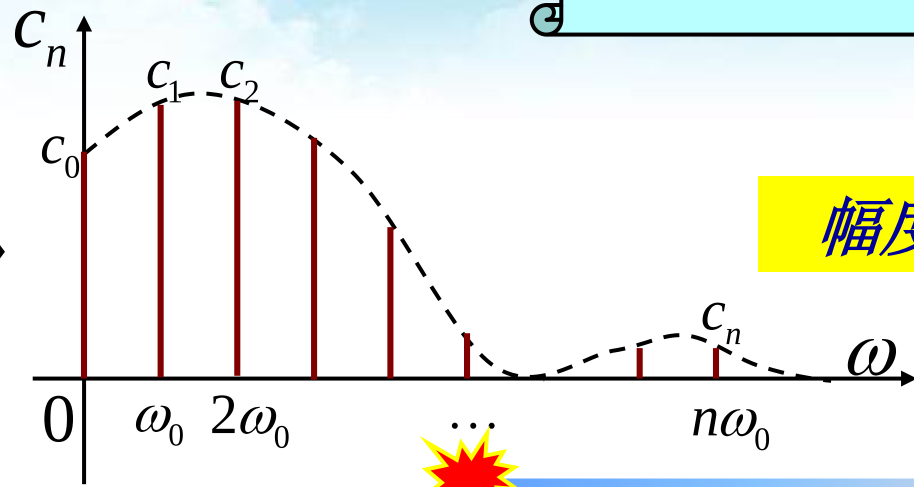
$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\underline{c_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)}$$

振幅	角频率	相位	角频率
c_0	$\rightarrow 0$	φ_0	$\rightarrow 0$
c_1	$\rightarrow \omega_0$	φ_1	$\rightarrow \omega_0$
c_2	$\rightarrow 2\omega_0$	φ_2	$\rightarrow 2\omega_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_n	$\rightarrow n\omega_0$	φ_n	$\rightarrow n\omega_0$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

频谱是描述信号 $f(t)$ 的另一种方式

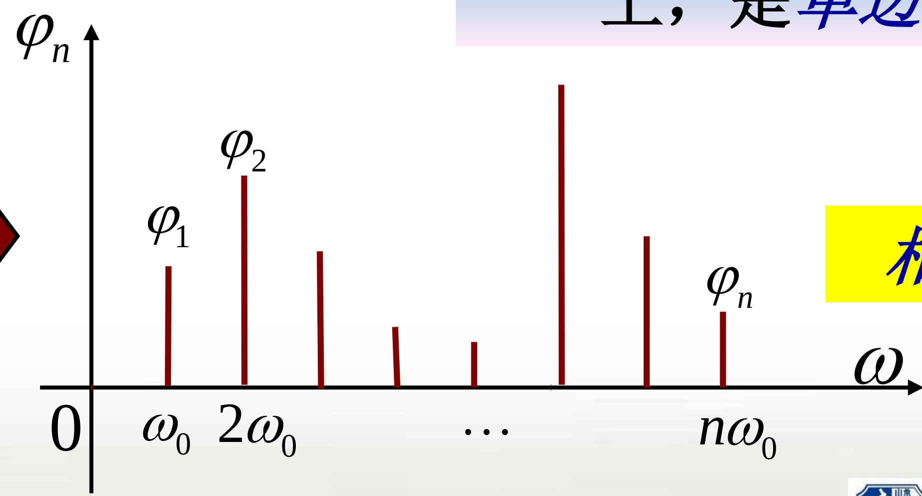
振幅		角频率
c_0	$\rightarrow$	0
c_1	$\rightarrow$	ω_0
c_2	$\rightarrow$	$2\omega_0$
$\vdots$		
c_n	$\rightarrow$	$n\omega_0$



幅度 频谱图

频谱在 $\omega\geq 0$的半个平面上，是*单边 频谱*

相位		角频率
φ_0	$\rightarrow$	0
φ_1	$\rightarrow$	ω_1
φ_2	$\rightarrow$	ω_2
$\vdots$		
φ_n	$\rightarrow$	ω_n



相位 频谱图

周期信号$f(t)$的*指数形傅立叶级数*是

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boxed{F_n}e^{jn\omega_0 t}$$

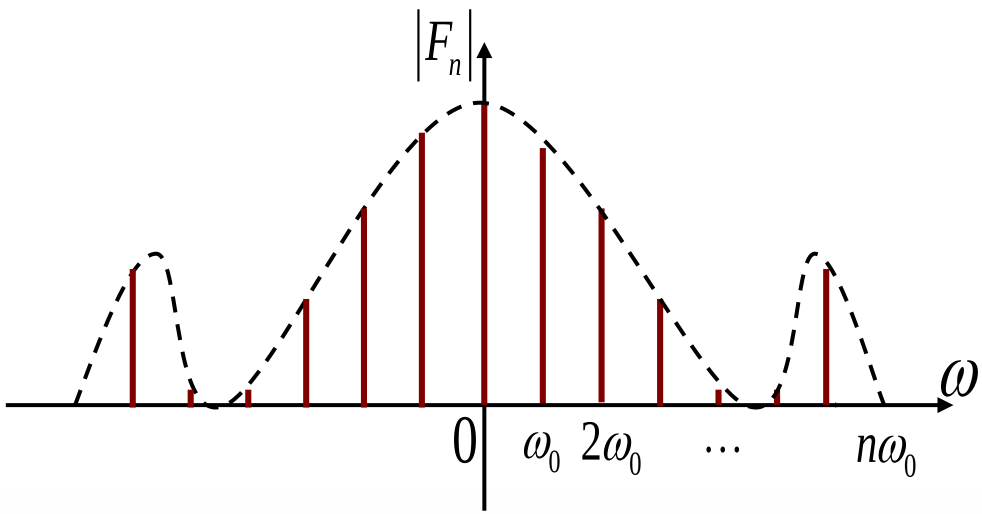
频谱函数

反应信号的各次谐波的幅度和相位随频率变化的规律

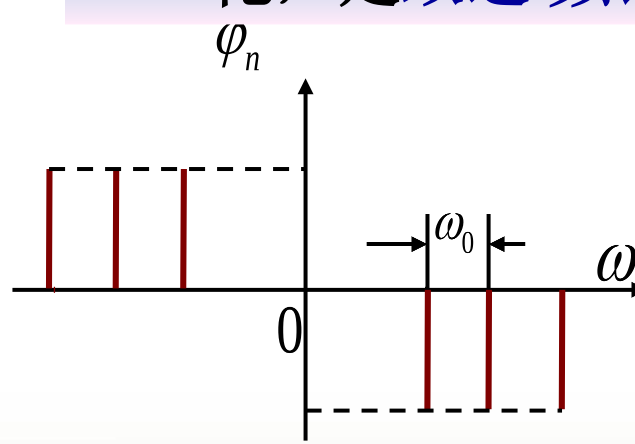
F_n 一般为复数，通常表示为：

$|F_n|e^{j\varphi_n}$　　$|F_n|$为*振幅*，φ_n 为*相位*

频谱在整个 ω 轴上变化，是*双边 频谱*



幅度 频谱图



相位 频谱图

例 :画出连续时间信号 f(t)=sinω_1t的频谱图

分析: （1）对*三角函数形傅立叶级数*，需要先将函数表示为

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

然后分别画出对应的**幅度(c_n)频谱图**和**相位(φ_n)频谱图**

（2）对*指数形傅立叶级数*，需要先将函数表示为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

F_n表示为: $\left|F_n\right| e^{j\varphi_n}$

然后分别画出对应的**幅度($\left|F_n\right|$)频谱图**和**相位(φ_n)频谱图**

信号与系统

SWJTU EE

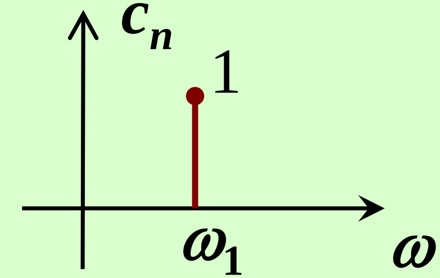
例 :画出连续时间信号f(t)=sinω_1t的频谱图

解:

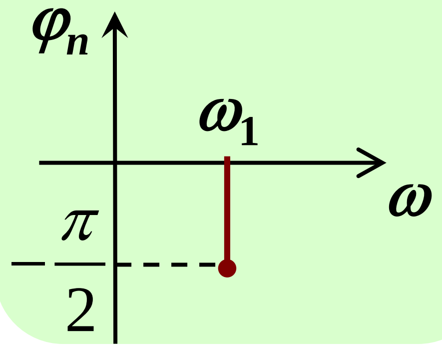
(1) $f(t)=\sin\omega_1 t=\cos(\omega_1 t-\frac{\pi}{2})$

$$c_1=1 \qquad \phi_1=-\frac{\pi}{2}$$

幅度频谱图



相位频谱图



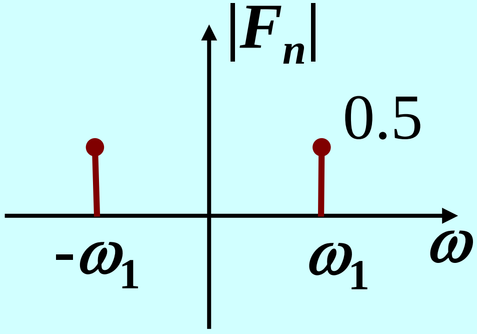
(2) $f(t)=\sin\omega_1 t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_1 t}-e^{-j\omega_1 t})$

$$F_1=\frac{1}{2j}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

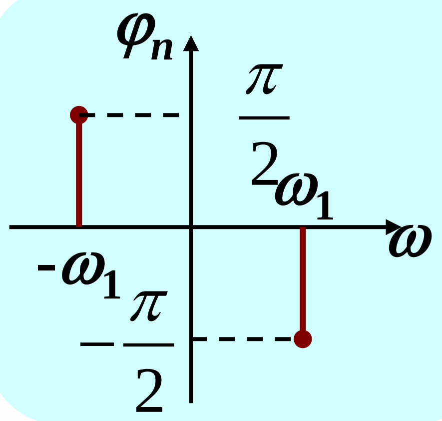
$$F_{-1}=-\frac{1}{2j}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$|F_1|=0.5, \qquad \varphi_1=-\frac{\pi}{2}$$

$$|F_{-1}|=0.5, \qquad \varphi_{-1}=\frac{\pi}{2}$$



幅度频谱图



相位频谱图

例 已知某周期信号f(t)的三角型傅立叶级数展开式为:

$$f(t)=1+2\sin\omega_1 t+\cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)$$

试画出f(t)的三角形式频谱和指数形式频谱

解:

（1）根据 $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$

将f(t)化为余弦形式的傅里叶级数

$$f(t)=1+2\cos\left(\omega_1 t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)$$

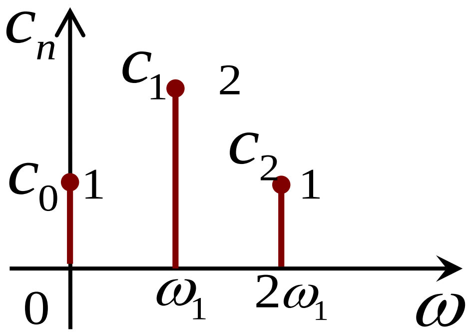
得三角函数形式的傅里叶级数系数为

$$c_0=1,\qquad \varphi_0=0$$

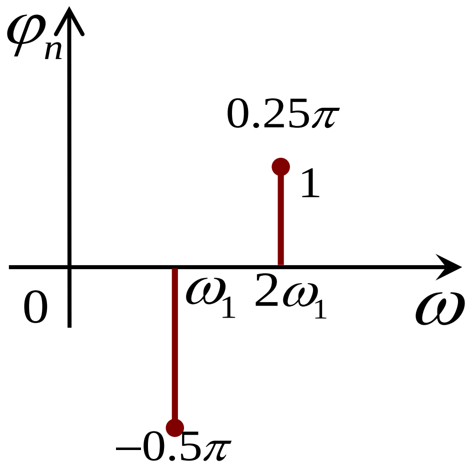
$$c_1=2,\qquad \varphi_1=-0.5\pi$$

$$c_2=1,\qquad \varphi_2=0.25\pi$$

$$c_0 = 1, \qquad \varphi_0 = 0$$
$$c_1 = 2, \qquad \varphi_1 = -0.5\pi$$
$$c_2 = 1, \qquad \varphi_2 = 0.25\pi$$



幅度频谱图



相位频谱图

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

（2）根据 $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad -\infty \le t \le \infty$$

将f(t)化为指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = 1 + 2\sin\omega_1 t + \cos\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{2j}\left(e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= \underbrace{1}_{F_0} + \underbrace{\frac{1}{j}}_{F_1} e^{j\omega_1 t} \underbrace{- \frac{1}{j}}_{F_{-1}} e^{-j\omega_1 t} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}}_{F_2} e^{j2\omega_1 t} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}_{F_{-2}} e^{-j2\omega_1 t}$$

$$F_0 = 1, \qquad \varphi_0 = 0$$

$$|F_1| = 1 \qquad \varphi_1 = -0.5\pi$$

$$|F_{-1}| = 1 \qquad \varphi_{-1} = 0.5\pi$$

$$|F_2| = 0.5 \qquad \varphi_2 = 0.25\pi$$

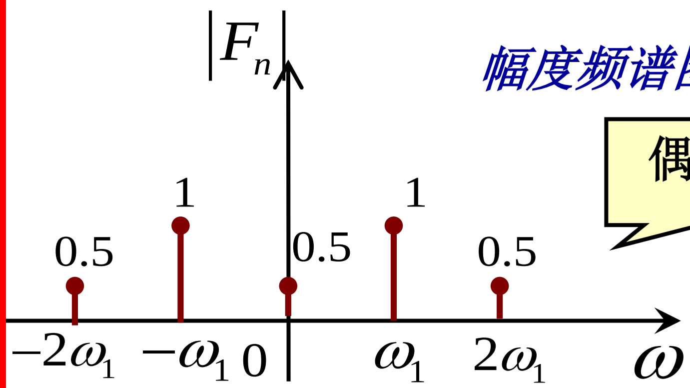
$$|F_{-2}| = 0.5 \qquad \varphi_{-2} = -0.25\pi$$

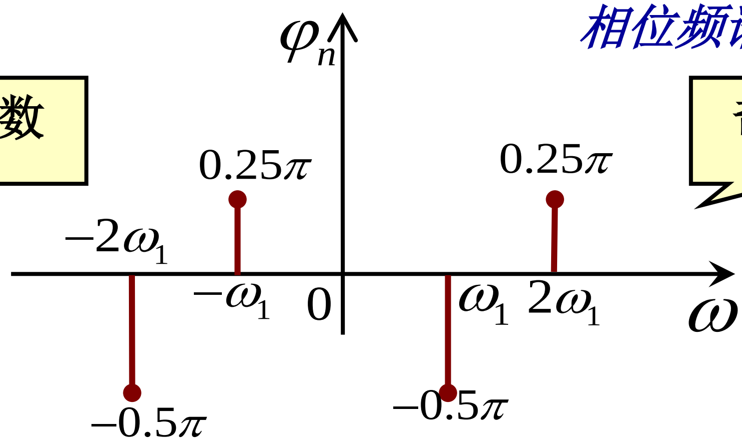
单边频谱与双边频谱比较：

单边：每一谱线代表某一分量的幅度

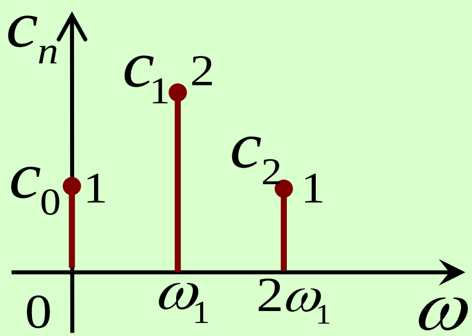
双边：谱线在原点两侧对称分布，且谱线长度减小一半，（每一频率谱线正负各一半）

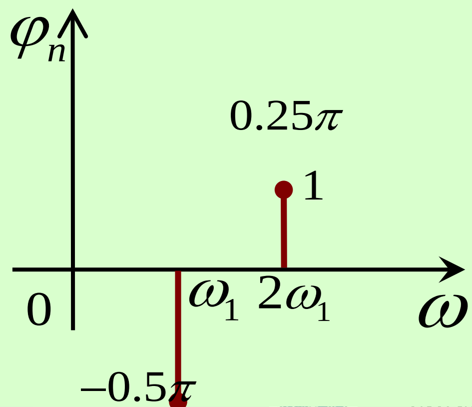
指数形式频谱





三角形式频谱



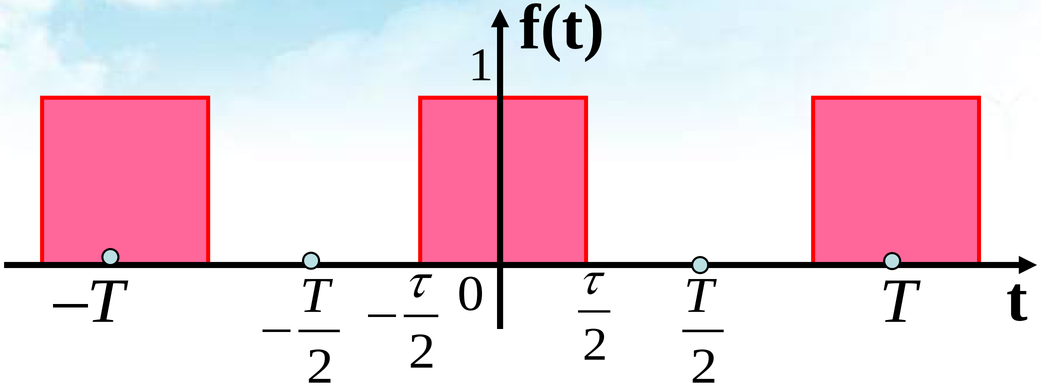


☆ 周期矩形脉冲信号的频谱 脉冲宽度为τ，周期为T

解：

在第一个周期内的表达式为：

$$f(t)=\begin{cases}1 & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\[2mm] 0 & other\end{cases}$$



抽样函数定义为：$Sa(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

则傅里叶级数的频谱为：

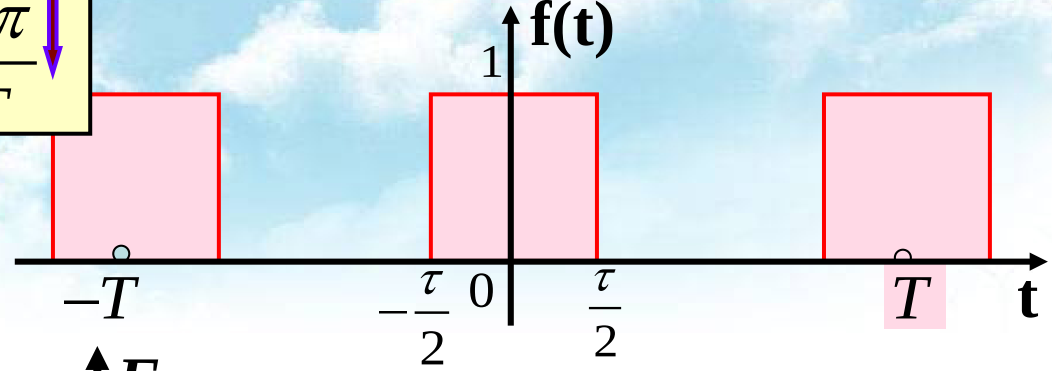
$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{\tau}{T}\cdot\frac{\sin\dfrac{n\omega_0\tau}{2}}{\dfrac{n\omega_0\tau}{2}}=\frac{\tau}{T}\cdot Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

$$F_n = \frac{\tau}{T}\cdot Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

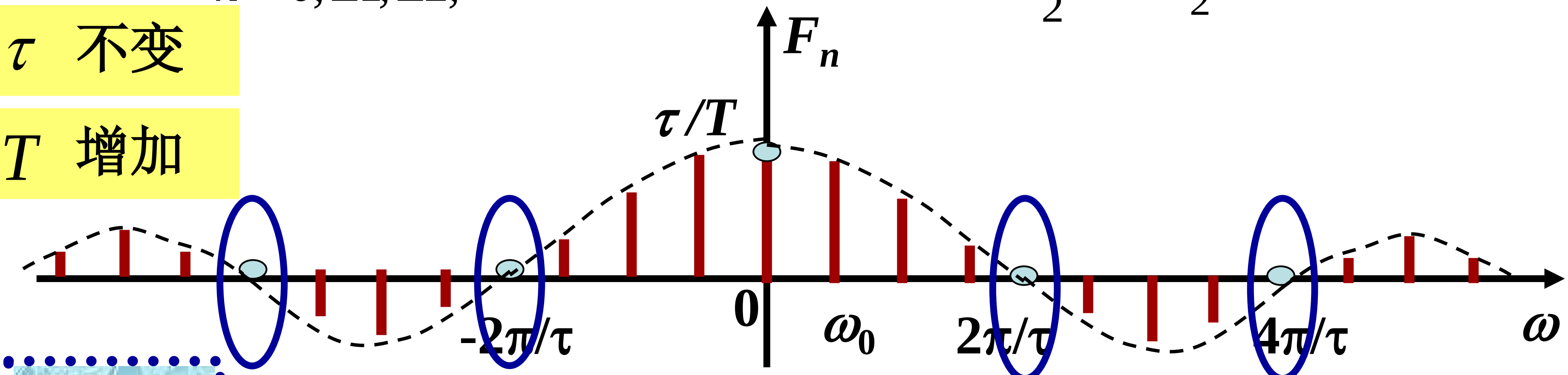
$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



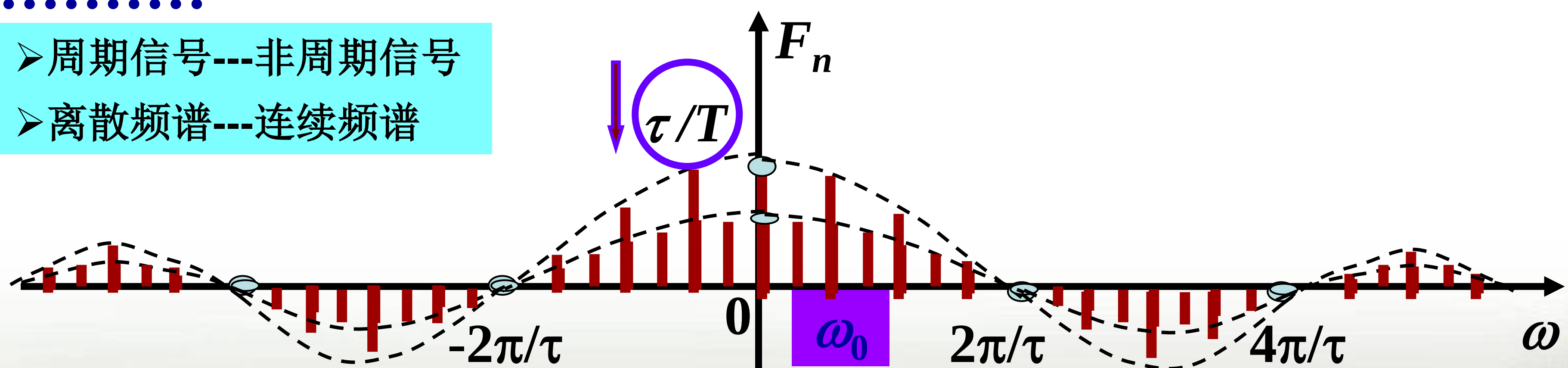
τ 不变

T 增加



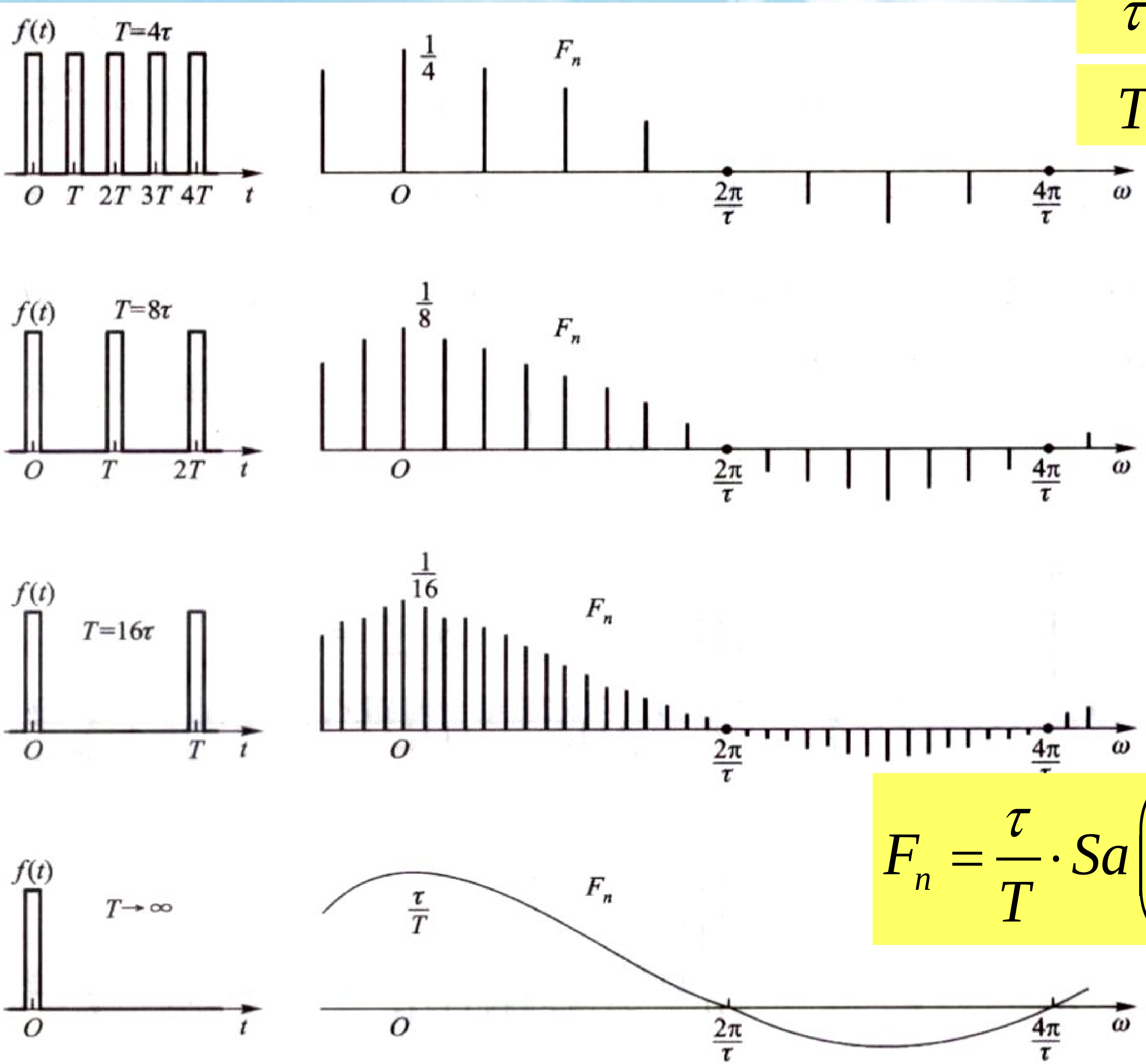
$T \to \infty$ 幅度无穷小

- 周期信号---非周期信号
- 离散频谱---连续频谱



τ 不变

T 增加



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

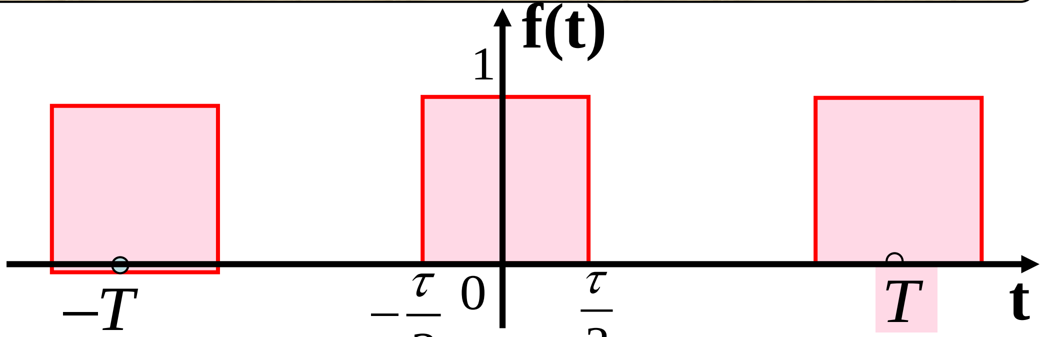
$$F_n = \frac{\tau}{T} \cdot Sa\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)$$

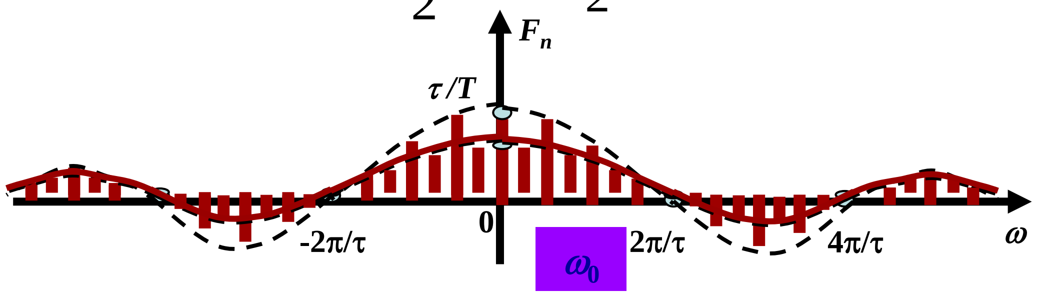
§ 3-3 非周期信号的频谱分析——*傅立叶变换*

一个非周期信号，可以看作是重复周期T为无穷大的周期信号

以周期矩形脉冲为例

当$T \to \infty$时





- 周期信号就转化为非周期信号
- 谱线间隔$\omega_1=2\pi/T$趋于无穷小。

这时，离散频谱就变成了连续频谱。$n\omega_1 \to \omega$

☆ 傅立叶变换推导

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$F_nT=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$\boxed{F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}F_nT}$$

当$T\to\infty$时 $\omega_1\to d\omega$ $n\omega_1\to\omega$ 则有:

$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}F_nT=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$F(j\omega)$——$f(t)$的频谱密度函数, 简称频谱函数，其意义为单位频率上的谐波幅度。是ω的连续复函数。

傅立叶正变换

$$\underline{F(j\omega)}=\int_{-\infty}^{\infty}\underline{f(t)}e^{-j\omega t}dt$$

傅立叶正变换将一个 <u>*时间信号*</u> 变为 <u>*频率信号*</u>

$F(j\omega)$与$f(t)$的关系记为：$F(j\omega)$＝$FT[f(t)]$

$$F(j\omega)=F\left[f(t)\right]$$

如何由 $F(j\omega)\rightarrow f(t)$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$\because F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}F_nT=\boxed{\lim_{T\to\infty}F_n}\frac{2\pi}{d\omega}$$

$$\therefore \lim_{T\to\infty}F_n=\frac{F(j\omega)}{2\pi}d\omega$$

有：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(j\omega)}{2\pi}e^{j\omega t}d\omega$$

反变换公式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅立叶反变换

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega)d\omega}{2\pi} e^{j\omega t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- 上式表明一个非周期信号可看作无限多个*复指数谐波*之和
- 而其中每个分量的复振幅为：$\dfrac{F(j\omega)d\omega}{2\pi}$

傅立叶反变换将一个频率信号变为时间信号，

$f(t)$与$F(j\omega)$ 的关系记为： $f(t) = F^{-1}[F(j\omega)]$

傅立叶正变换

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅立叶反变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

☆ 傅立叶变换存在条件(Dirichlet)

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

满足绝对可积条件，即：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty$$

注意：绝对可积是付氏变换存在的充分条件，

而非必要条件。

所有能量信号均满足此条件，一些不满足绝对可积条件的函数也可以有傅里叶变换，如阶跃函数，正弦函数等