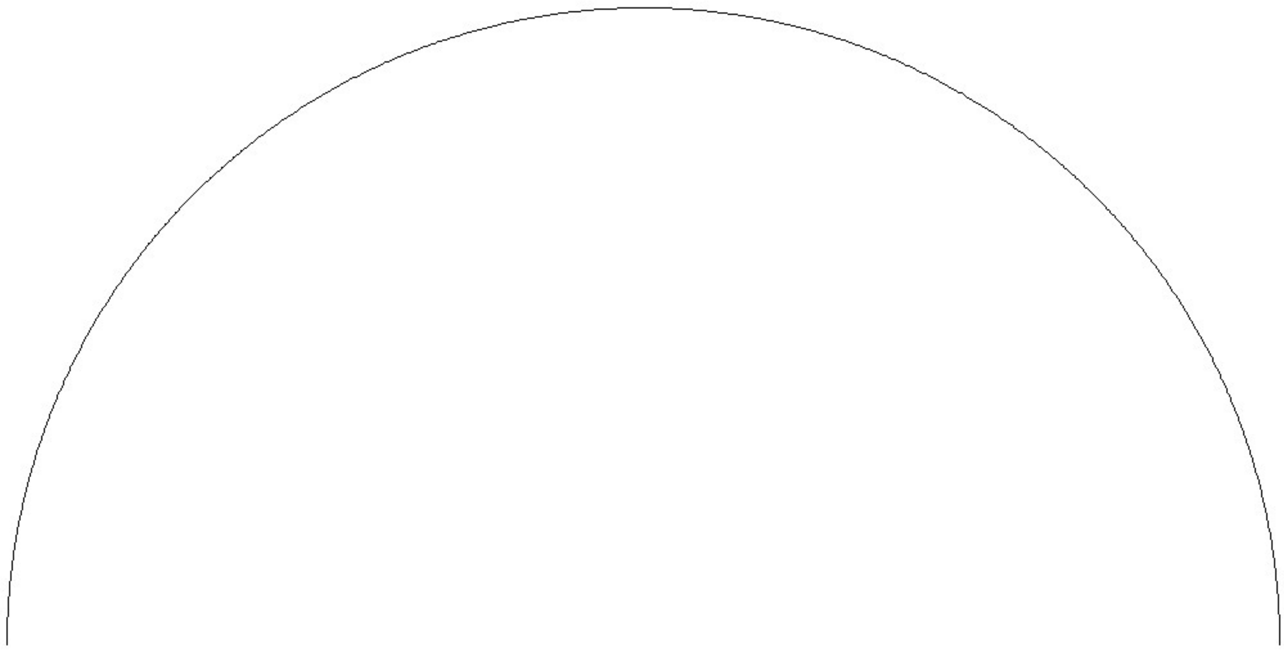
Cuadratura de un círculo de radio *r* en 9 imágenes.

Autor: David Fernández Roibás

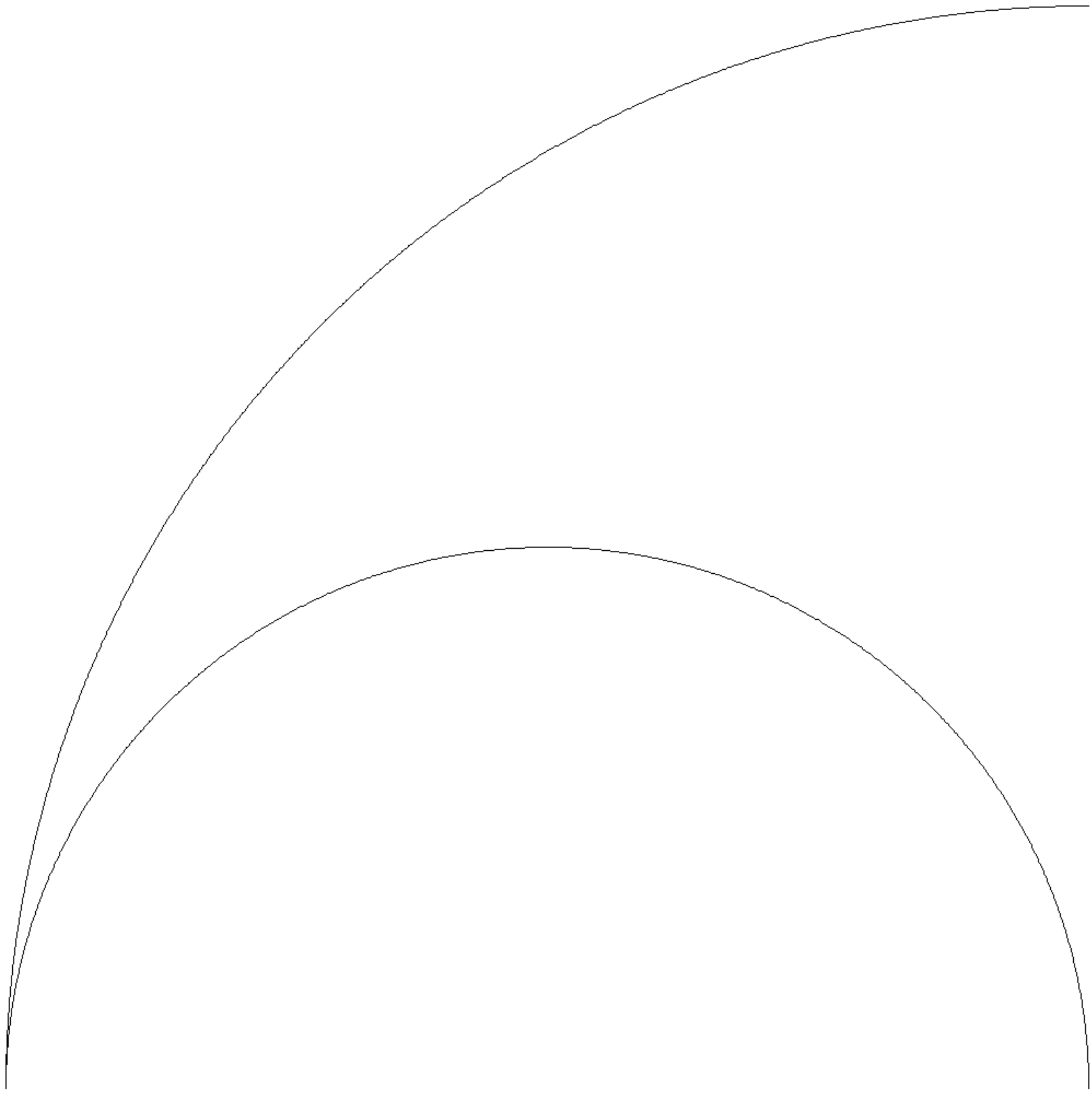
Para encontrar un cuadrado de igual superficie que un círculo dado, podemos realizar la siguiente aproximación.

Sabiendo que un semicírculo mide $\pi \cdot r$:



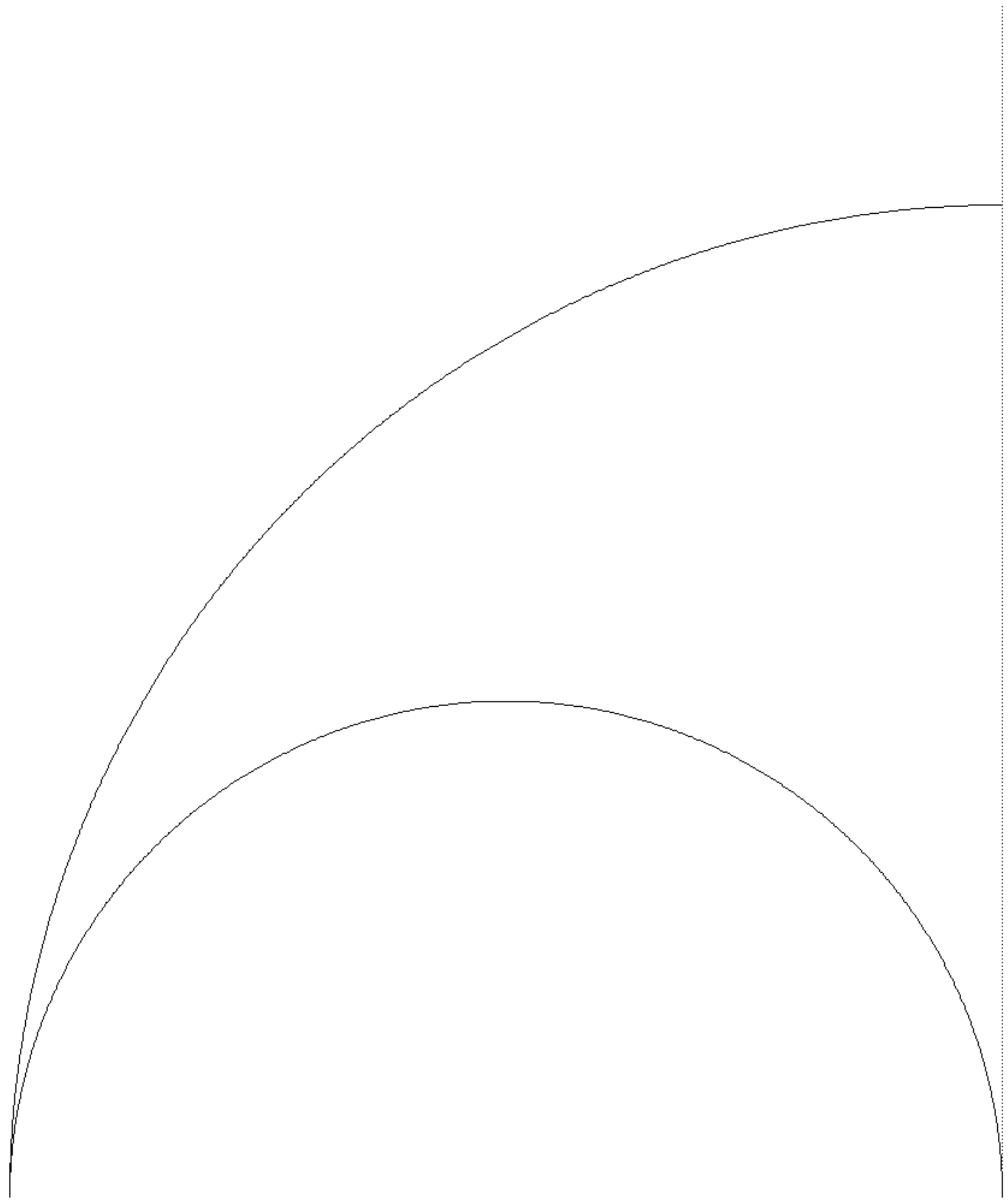
procedemos a ir “estirándolo” de forma gráfica.

Para ello, encontramos que la mitad de la semicircunferencia del doble del radio también mide $\pi \cdot r$, como se muestra gráficamente en la siguiente imagen.



Las dos curvas tienen la misma longitud: $\pi \cdot r$.

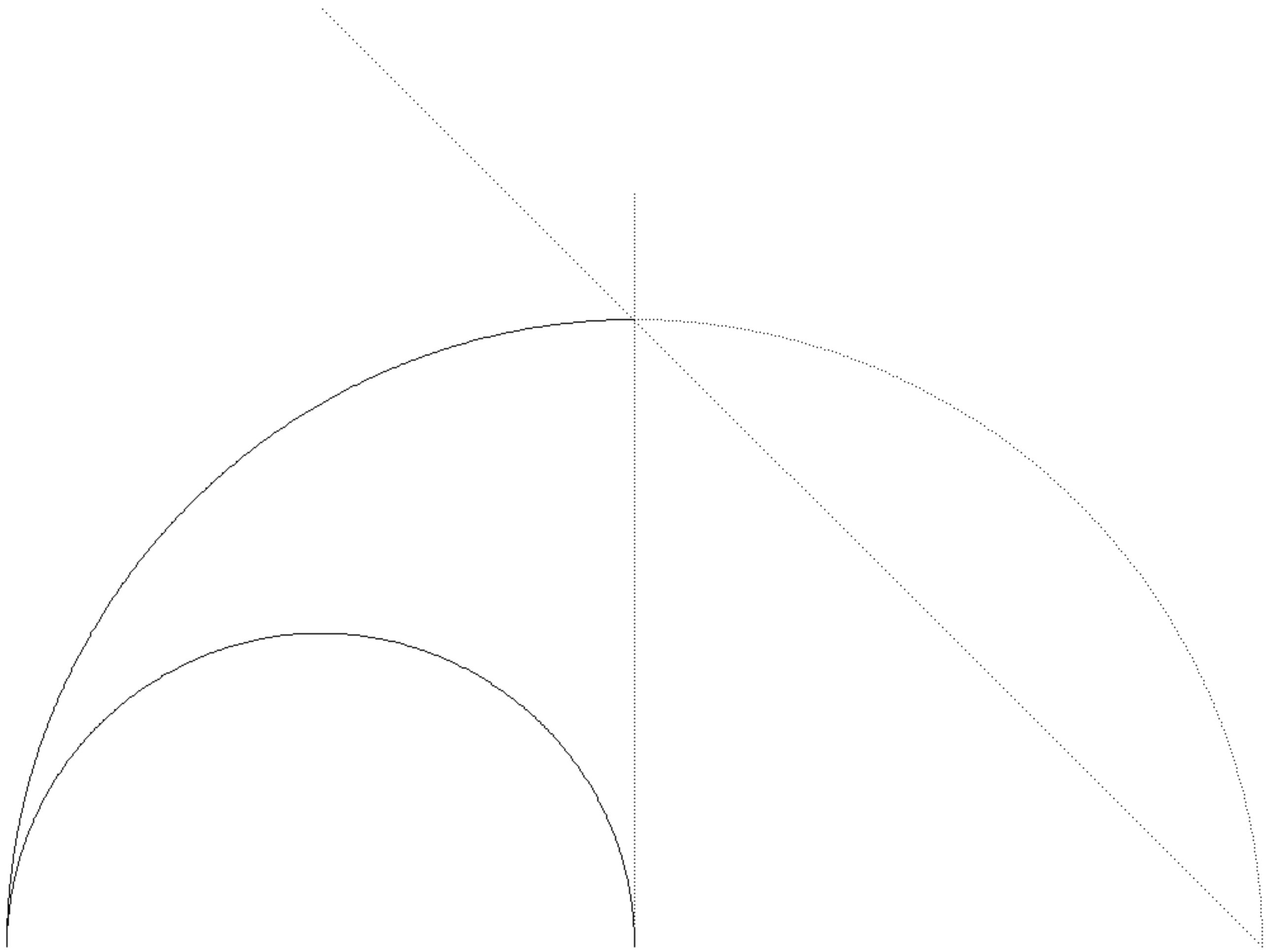
Por tanto, una cuarta parte de una circunferencia del cuádruple de radio, también medirá $\pi \cdot r$. Para encontrar dicha medida, existe un procedimiento repetitivo que ya hemos aplicado sin darnos cuenta. Hemos trazado una recta desde el extremo derecho del semicírculo de radio r que pasa por el último punto de corte (en este caso, el mismo, obteniendo una tangente vertical) que corta la circunferencia de radio 2r en su cuarta parte. En la siguiente imagen se muestra explícitamente dicha recta que hemos utilizado para obtener $\pi \cdot r$ en la circunferencia 2r.



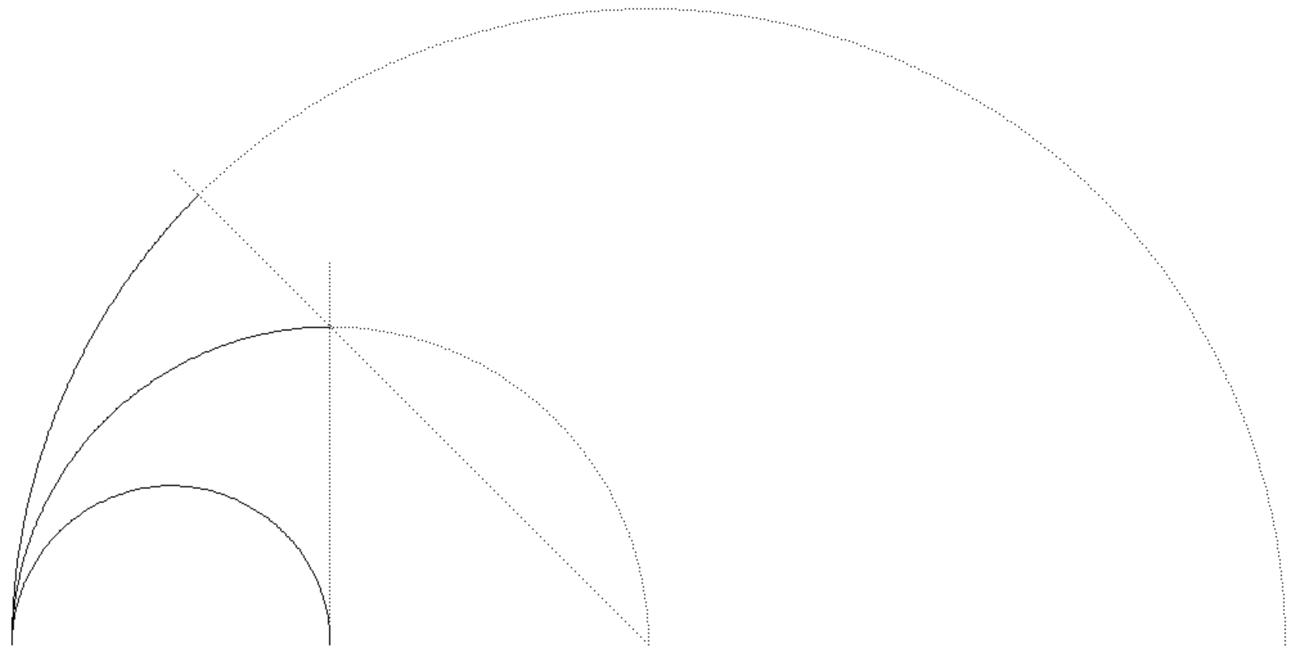
La recta punteada indica dónde debemos cortar la circunferencia de radio 2r para obtener la longitud $\pi \cdot r$ en su curvatura.

Si ahora trazamos una recta desde este nuevo semicírculo y que pase por el punto de corte, cortará a una circunferencia de radio 4r en el punto en el que el arco a la izquierda medirá $\pi \cdot r$. Gráficamente, lo hacemos en dos pasos:

Primero trazamos la recta:

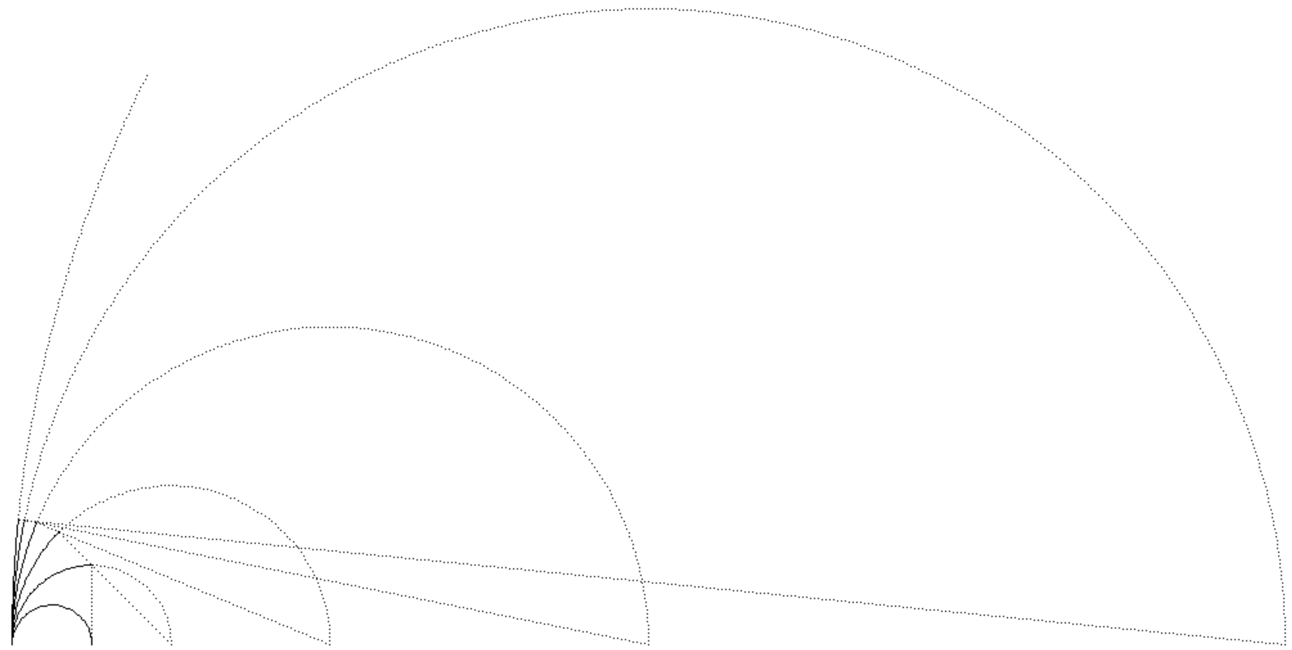


Esta nueva recta oblicua cortará el siguiente semicírculo de radio 4r, con centro en el cruce de la recta con el círculo de radio 2r y con el eje X. El arco que queda a la izquierda medirá $\pi \cdot r$.



En la anterior imagen hemos trazado un nuevo arco que mide $\pi \cdot r$ y que va desde el punto 0,0 hasta el corte de la recta con el semicírculo de radio 4r.

Procediendo de esta manera un número suficiente de veces, vamos aproximando el arco a una recta vertical de longitud $\pi \cdot r$. En la siguiente imagen aparecen unas cuantas repeticiones de dicho procedimiento para ilustrar el método.



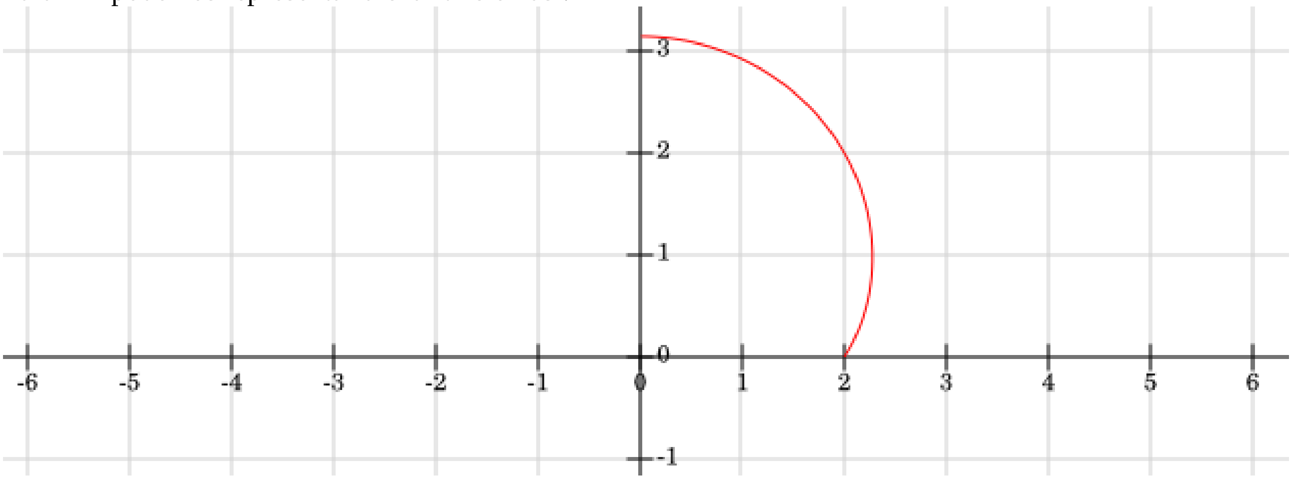
Rápidamente llegamos a una muy buena aproximación a $\pi \cdot r$ en la vertical. Este método es una forma de ir estirando una semicircunferencia como si fuéramos empujando el extremo derecho de una semicircunferencia de alambre flexible hacia arriba.

Lo que hemos hecho de forma gráfica, se puede demostrar con la función $f(n)=r\cdot 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

Donde n es el número de iteración (n=0 sería la circunferencia original) y cuya solución para n=∞ sería $\pi\cdot r$.

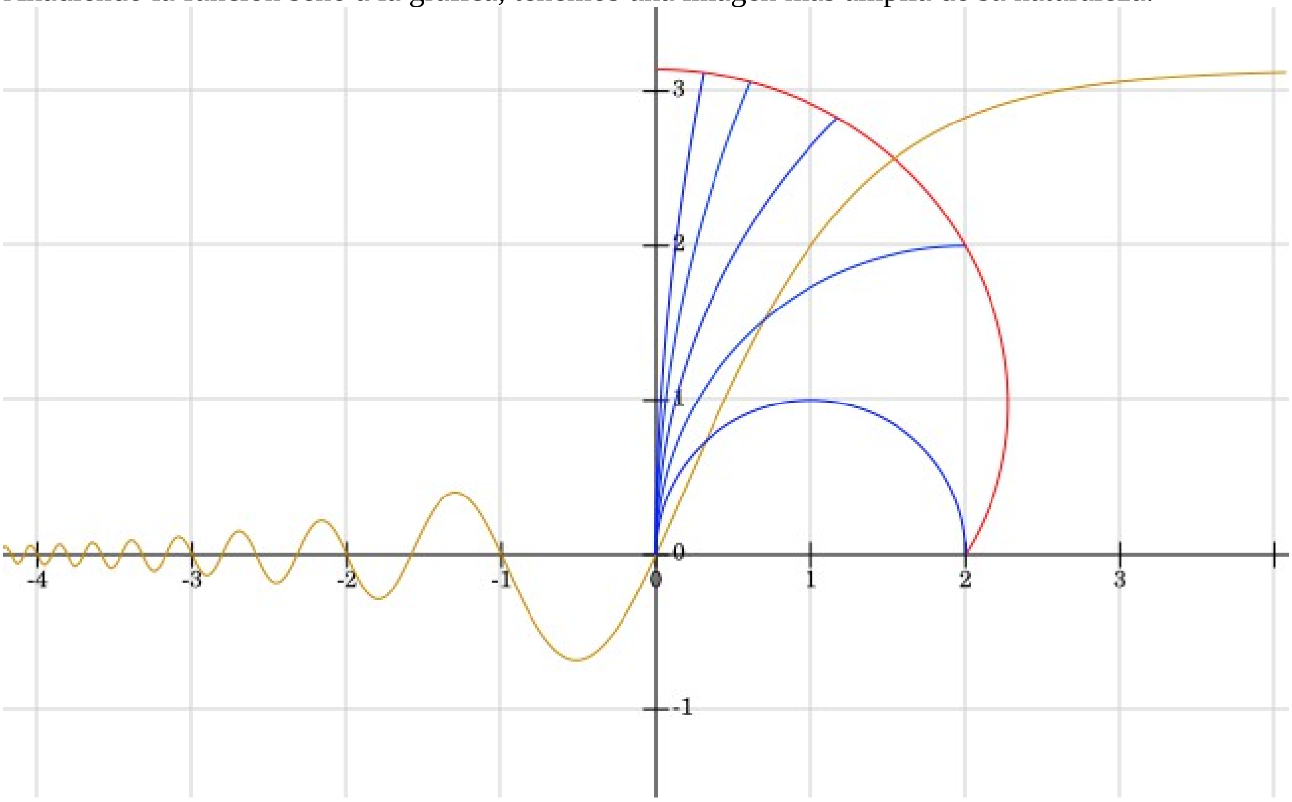
Si trazamos la función paramétrica $\left\{\begin{matrix} y=r\cdot 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \\ x=r\cdot 2^{n+1}-r\cdot 2^n\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\end{matrix}\right\}$ obtenemos la espiral cuyo límite superior está a la altura $\pi\cdot r$.

Para r=1 podemos representar dicha función así:



En la anterior gráfica, la función es la curva roja, para valores de n tal que $0<n<9$.

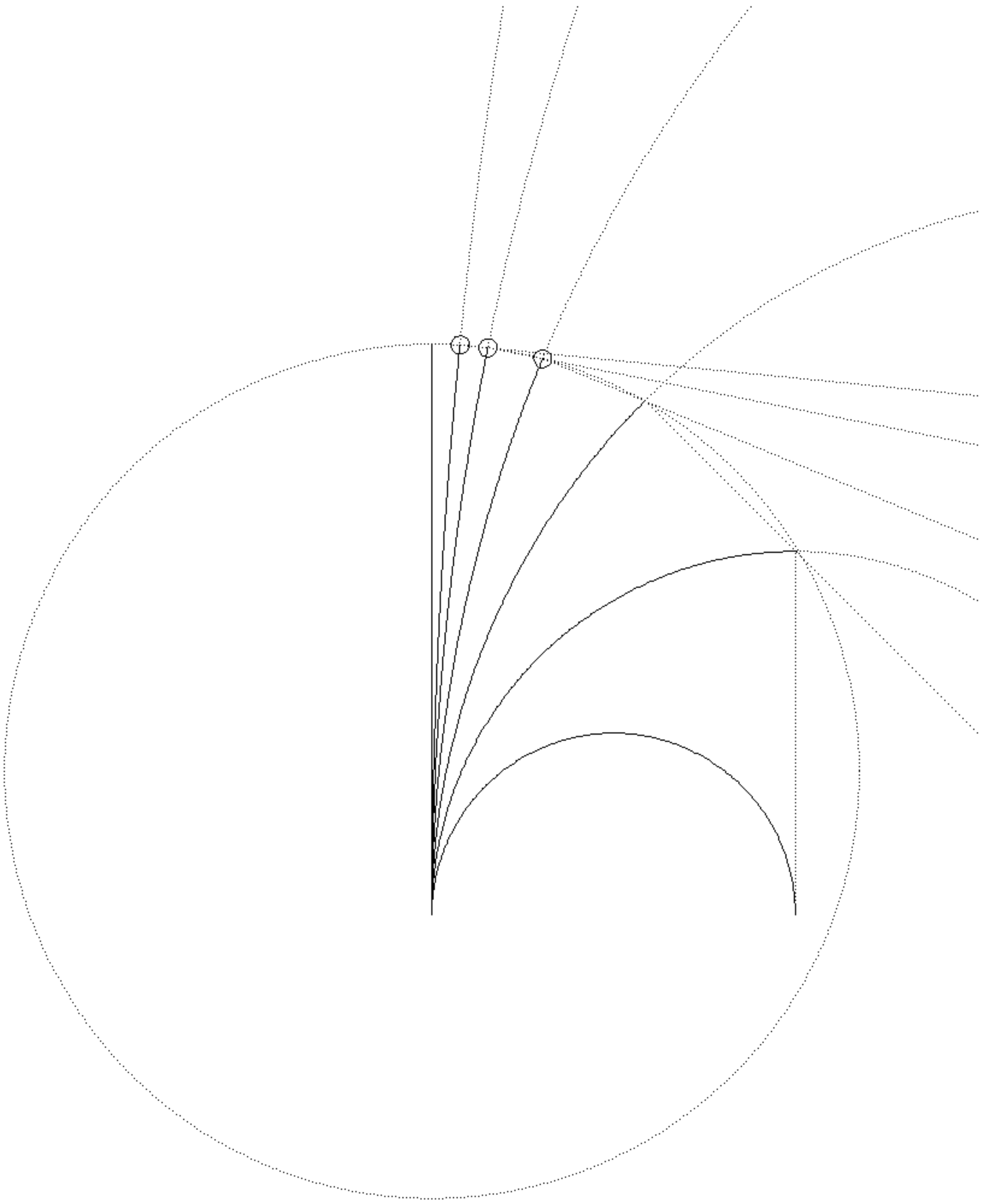
Añadiendo la función seno a la gráfica, tenemos una imagen más amplia de su naturaleza:



Para r=1, la función seno (amarillo) varía de -5 a + 5 y la paramétrica (rojo) de 0 a 9 como valores de *n*. Se muestran, en azul, los arcos utilizados en el cálculo gráfico para llegar a la misma solución.

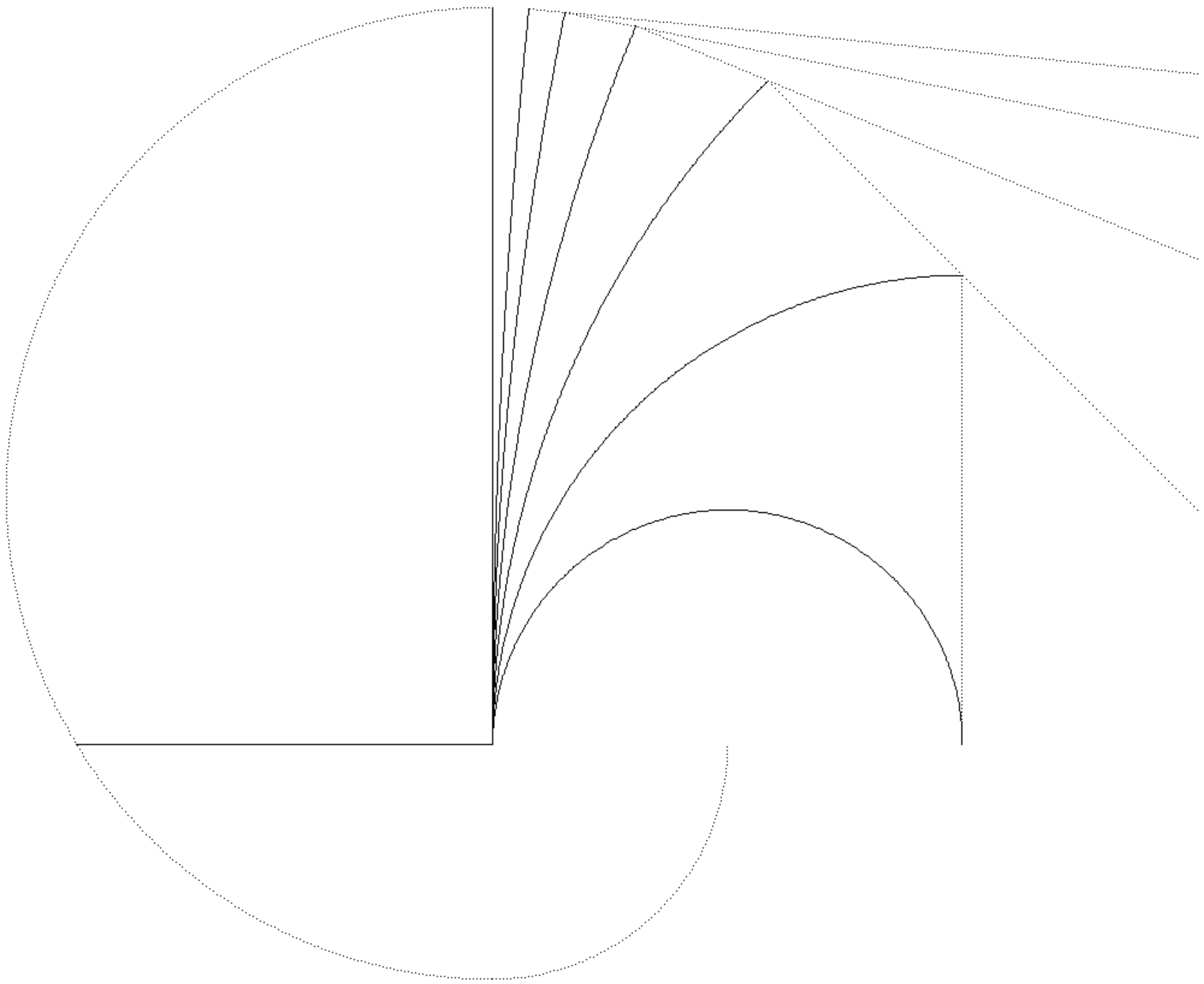
A partir de este punto, podemos tomar como recta el último arco y realizar una operación de raíz cuadrada, donde las unidades pasan a ser “r”. Es decir, realizamos una raíz cuadrada en base a “r” en lugar de en base a 1 (el procedimiento es el mismo)

Primero pasemos la aproximación al eje Y.



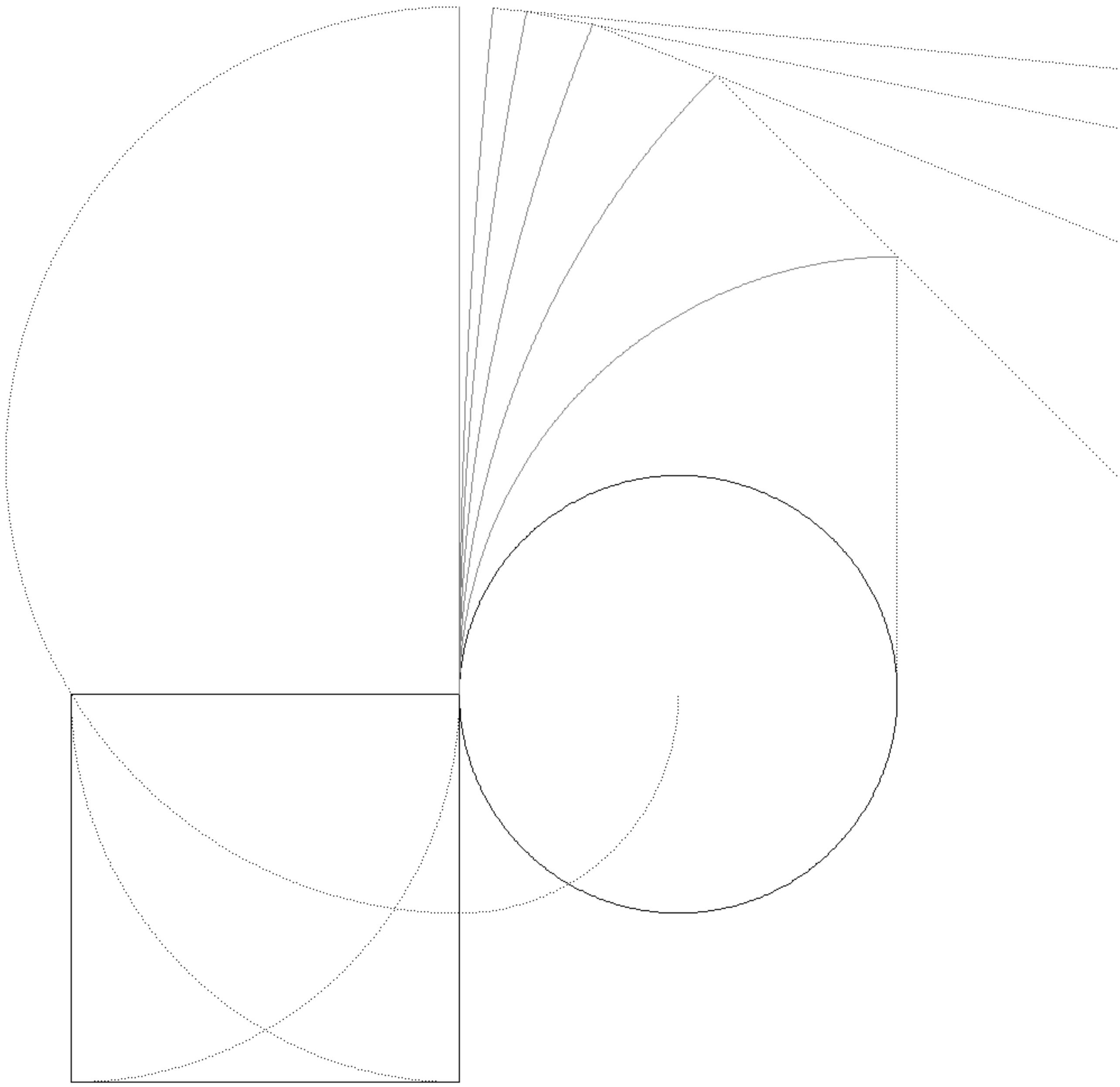
La mejor aproximación que he encontrado en este punto es la del cruce de una circunferencia que pase por los tres últimos cortes con el eje Y. Quedando una recta vertical sobre el eje Y que mide $\pi \cdot r$ (en realidad, usando un programa CAD, he utilizado una circunferencia inicial de radio r=100 milímetros y la recta final $\pi \cdot r$ mide realmente 314,157751 milímetros, algo inferior. Si hubiera trazado más cruces, hubiera aproximado más decimales, pero con tan sólo 5 cruces, hemos llegado a una precisión del quinto decimal)

Sobre esta precisión, realizamos la raíz cuadrada tomando como unidad la del radio original.



El arco de circunferencia inferior pasa el radio a la vertical (al punto 0,-r) y el arco grande de circunferencia de la izquierda tiene un diámetro igual a $\pi \cdot r+r$. El cruce de este último arco con el eje X nos da la medida de r por raíz de π (es decir: $\sqrt{\pi} \cdot r$), que es la medida del lado del cuadrado que necesitamos para que su superficie sea igual a la del círculo inicial (es decir $\pi \cdot r^2$ metros cuadrados)

Trazando dicho cuadrado, obtenemos la cuadratura del círculo.



En la última imagen, apreciamos un cuadrado cuya superficie es muy aproximadamente igual al círculo que hemos completado.

David Fernández Roibás
Madrid, a 9 de junio de 2013