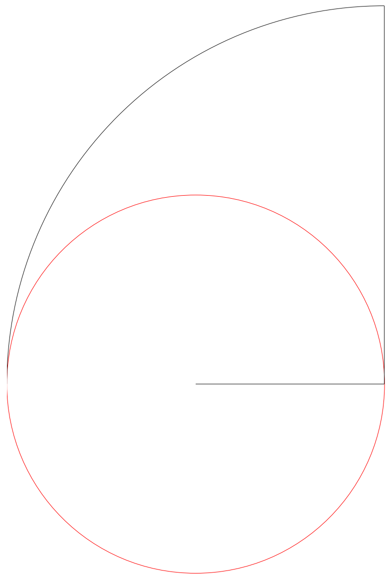
La cuadratura del círculo

Autor: David Fernández Roibás

En este artículo vamos a descubrir cómo realizar un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo de radio igual a la unidad como ejercicio visual a fin de aprender un método gráfico sencillo para dicho cálculo.

Primero, describiré las propiedades gráficas y matemáticas de la relación de un círculo y sus ampliaciones con la famosa constante Pi (π).

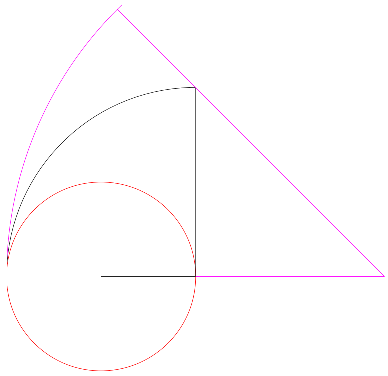
Una circunferencia de radio 1 mide exactamente 2 por π. La mitad de dicha circunferencia medirá, pues, π. Y una cuarta parte de una circunferencia del doble de dicho radio (en este caso 2 unidades) también medirá π. Así:



La circunferencia roja mide $2 \cdot \pi$. Su mitad superior mide π . El arco de circunferencia, en negro, de radio 2, mide π..

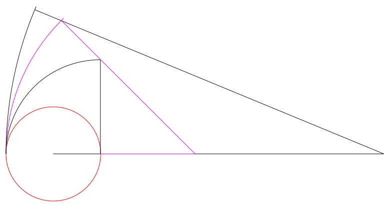
En la imagen anterior, se aprecia que, para duplicar el radio, hemos utilizado una técnica concreta que consiste en trazar una recta desde el extremo del círculo origen y que pasa por un punto de corte (en este caso inicial, del radio origen con la circunferencia origen, lo que nos da una tangente vertical en el plano de trazado), encontrando el arco que mide la mitad en la intersección de dicha recta con la circunferencia de radio 2 (el doble que la primera) Esta técnica la podemos repetir el número de veces que sea necesario para ir propagando π en arcos sucesivos (podemos utilizar la bisección del ángulo cuando el centro de la circunferencia esté demasiado lejos)

En la siguiente imagen, utilizaremos esta técnica para hallar un arco que mide π. Dicho arco será el de una circunferencia el doble que la anterior.



En esta segunda imagen, hemos trazado un segmento desde el extremo de la circunferencia de radio 2, que pasa por el cruce de dicha circunferencia con el anterior cruce y que termina en una circunferencia de radio 4 y centro en el extremo de la circunferencia de radio 2. El resultado es un arco (en magenta) que mide, exactamente, π (si la circunferencia origen fuera de radio diferente de 1, este arco mediría $\pi \cdot r$)

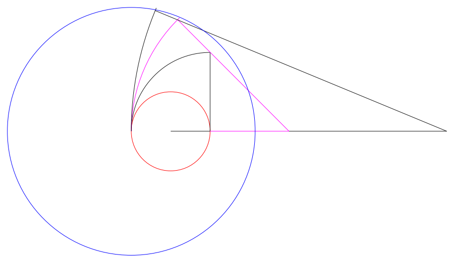
Repitamos el proceso en la siguiente imagen:



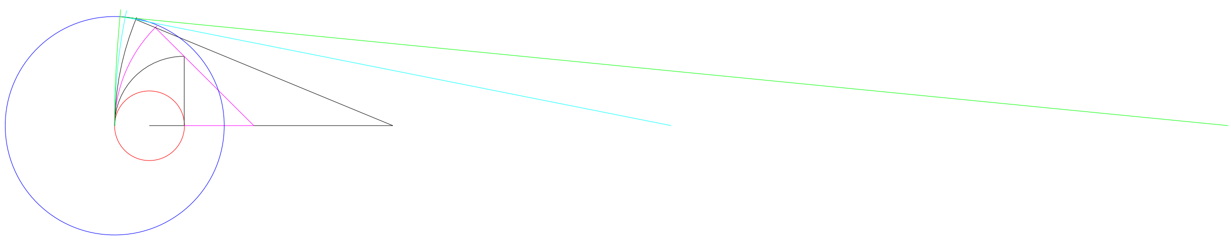
Vemos que el nuevo arco de radio 8 y que mide π es de menor curvatura que la semicircunferencia original de radio 1. Podemos deducir que si la circunferencia fuera de radio infinito, el arco pasaría a ser un segmento recto de longitud π, vertical y con origen en el extremo izquierdo de la circunferencia original de radio 1.

Como es obvio, no podemos trazar una circunferencia de radio infinito, pero sí podemos realizar las suficientes aproximaciones como para trazar un arco que una los últimos tres puntos de tal forma que el cruce de dicho arco con la vertical nos de la mejor aproximación a π posible.

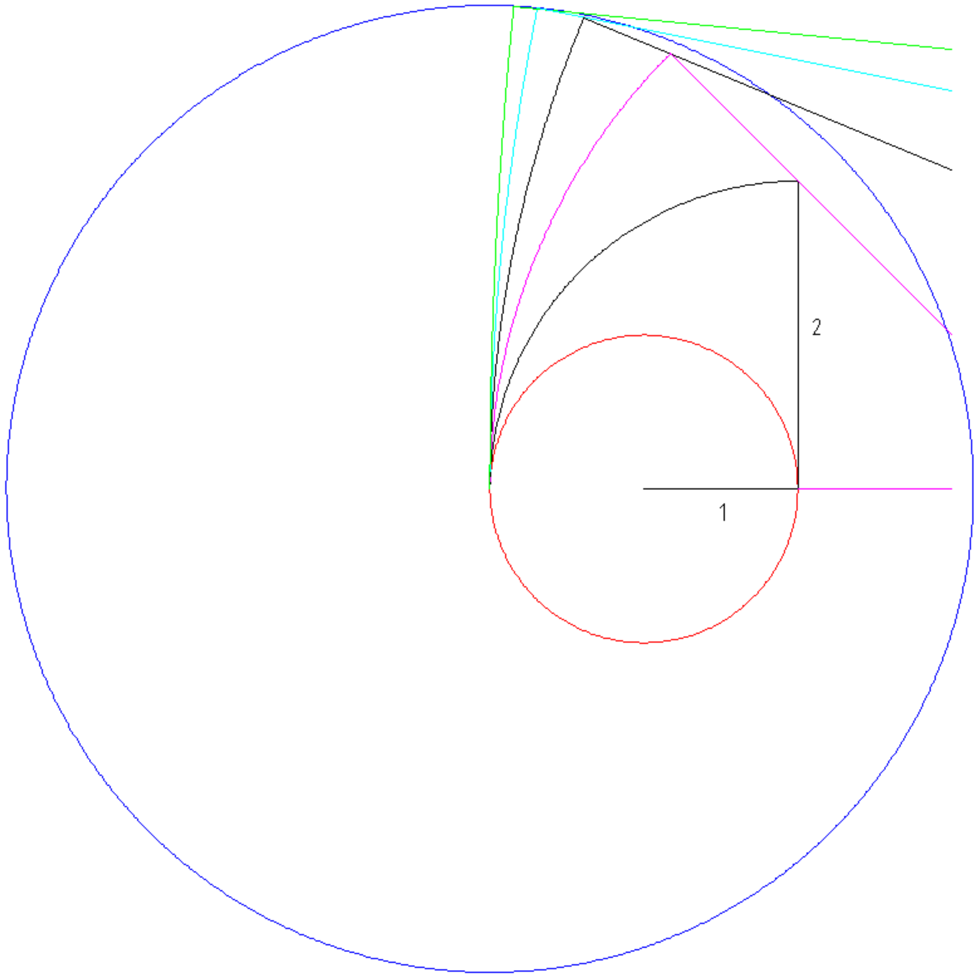
Veamos cuánta exactitud llevamos hasta ahora trazando un círculo de radio π con centro en el extremo izquierdo de la circunferencia origen (la de radio 1):



Como podemos comprobar, la aproximación ya es bastante buena con sólo unos trazados. Si queremos mejorarlo aún más, sólo tenemos que repetir los pasos y tendremos una exactitud de π de una precisión increíble:



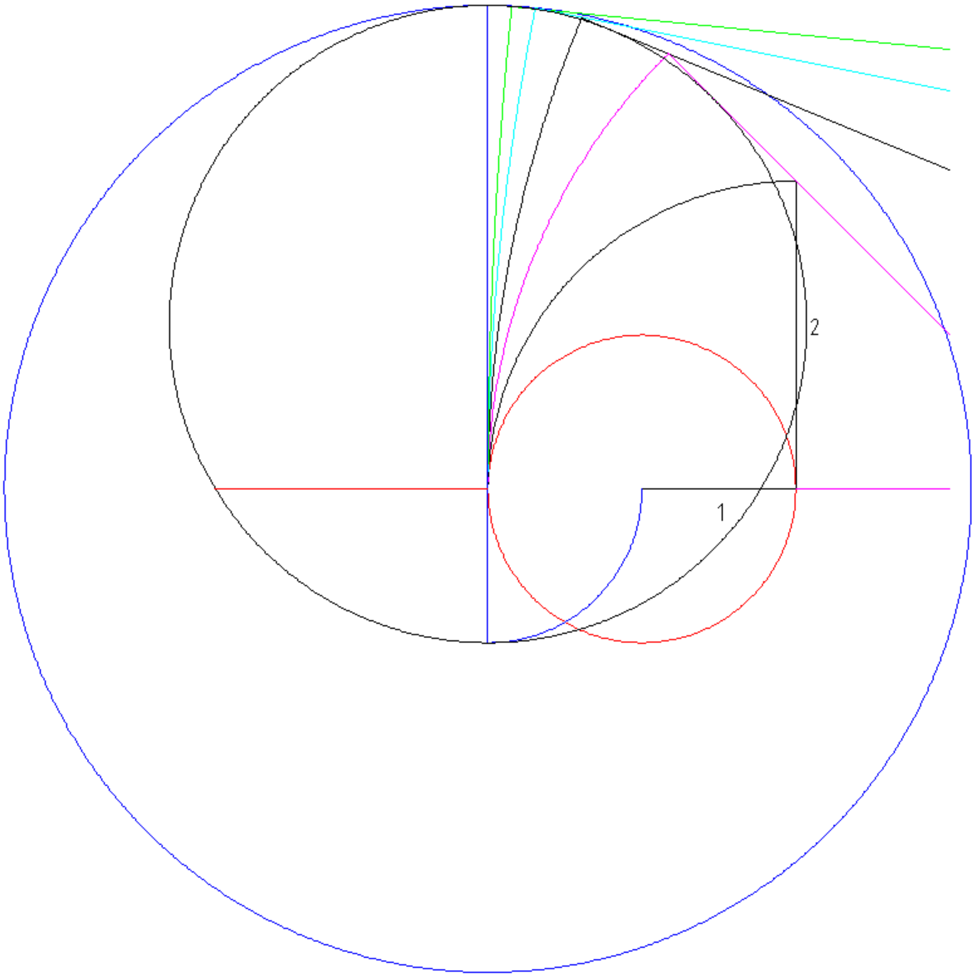
Ampliando:



En la imagen ampliada vemos el grado de exactitud de la medida de π (observando el círculo azul de radio π) con el último cruce efectuado (en verde)

Tomemos este valor suficientemente aproximado y con la medida obtenida tenemos que calcular su raíz cuadrada para poder dibujar un cuadrado de lado raíz de π tal que su superficie sea igual a la del círculo origen de radio 1 (es decir: π unidades cuadradas)

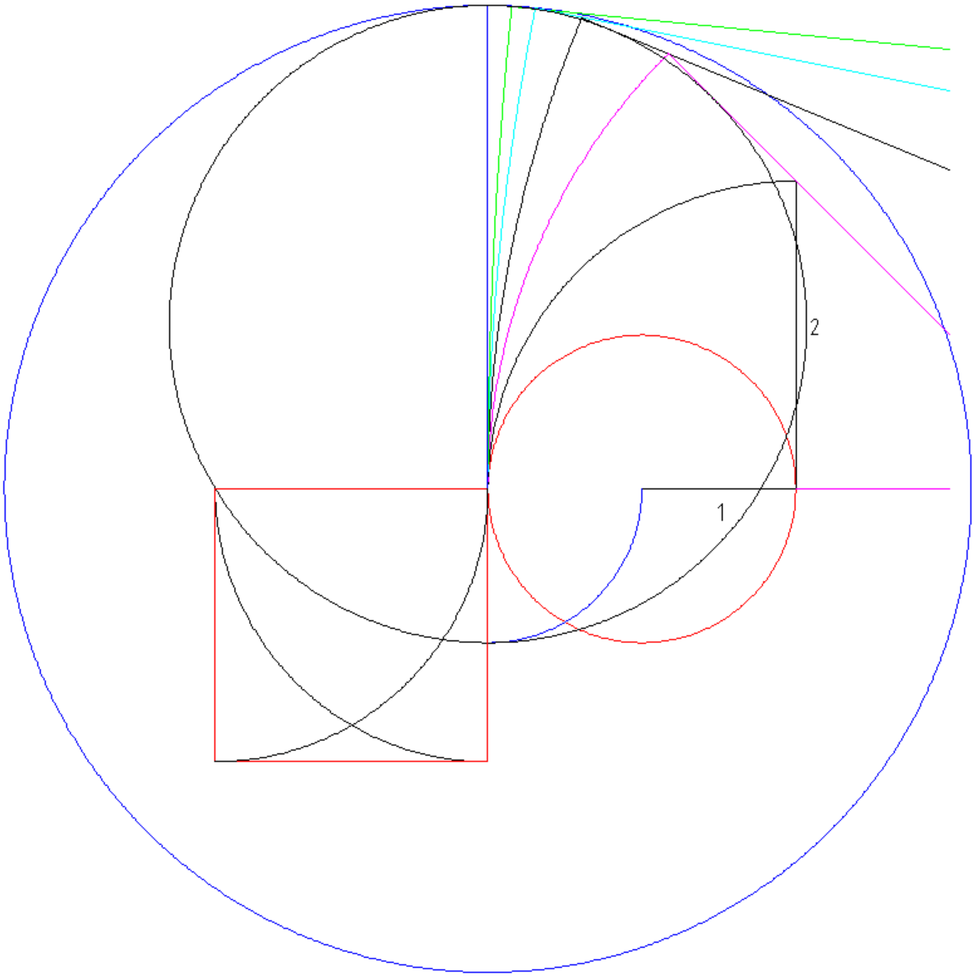
Para calcular la raíz cuadrada utilizamos un método muy simple ya conocido:



Alargamos la medida de π en una unidad hacia abajo. Trazamos un círculo de diámetro igual a $\pi+1$ que corta el segmento $\pi+1$ por sus extremos. El segmento rojo horizontal que une el punto origen (desde este punto origen, hacia arriba está la medida de π y hacia abajo una unidad) con la circunferencia de diámetro $\pi+1$ es la raíz de π.

En la imagen, el segmento rojo a la izquierda es la raíz de π; por tanto, es uno de los lados del cuadrado que queremos obtener.

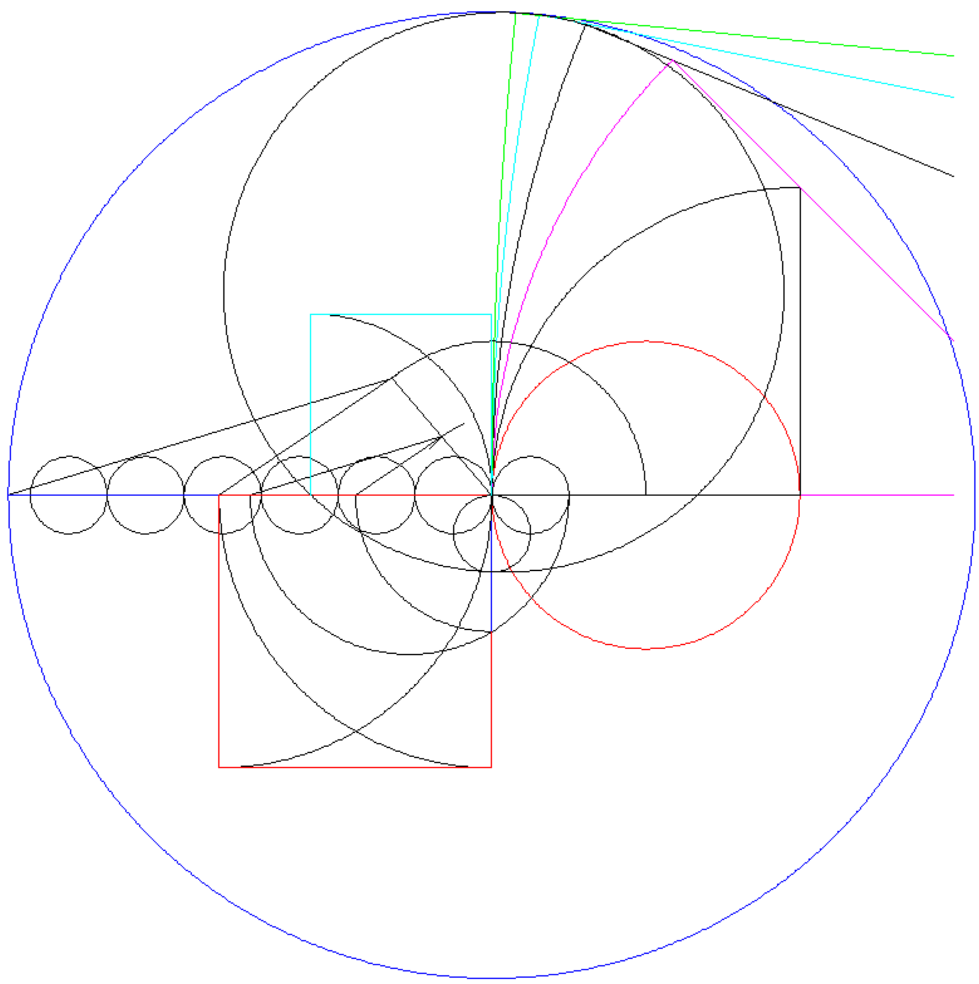
Trazamos los otros tres lados (supongamos el primero como la base del cuadrado) y obtenemos la cuadratura del círculo de radio 1. Así:



El círculo rojo y el cuadrado rojo tienen ambos la misma superficie (con un margen de error marcada por la desviación del arco verde respecto de la recta) y es igual a π unidades cuadradas porque el círculo es de radio 1 unidad y el cuadrado de lado π.

Lo más interesante de este método es que podemos proceder a la inversa. Partiendo de un cuadrado de π unidades cuadradas (radio igual a raíz de π) podemos calcular la circunferencia de radio unidad con un margen de error conocido de antemano (esto es necesario porque tenemos que comenzar por una desviación inicial para hacer posible el proceso)

Para realizar la cuadratura de un círculo de radio r. Hay que realizar un paso intermedio de división por el radio anterior al cálculo de la raíz cuadrada de π y otro de multiplicación por el radio (con el valor de raíz de π) Como el objetivo de este artículo es la cuadratura del círculo de radio unidad, no explicaré todo el proceso, aunque sí dejaré una imagen en la que es posible deducir todo el proceso, incluyendo la división y la multiplicación del valor de π.



En la imagen anterior, se dibuja un cuadrado rojo cuya superficie es igual a la de la circunferencia roja medido en unidades dadas por los diámetros de los pequeños círculos negros a lo largo del diámetro de la circunferencia roja. También se ha dibujado un cuadrado en azul claro para mostrar la diferencia entre la cuadratura del círculo y una cuadratura falsa, esto es: el cuadrado azul claro tiene una superficie de $\pi \cdot r$ unidades cuadradas, mientras que el rojo tiene una superficie de $\pi \cdot r^2$ unidades cuadradas, la misma que el círculo rojo.

En esta misma imagen, el radio de la circunferencia roja, que es el dato origen, tiene 2 unidades, las cuales se dividen a su “semidiámetro” para obtener π, al cual se calcula su raíz y dicha raíz se multiplica nuevamente por el radio (estas operaciones son las que están a la izquierda del círculo rojo, mientras que en el cuadrante de la derecha se mantiene el cálculo de $\pi \cdot r$)

David Fernández Roibás

Madrid, a Miércoles 29 de Mayo de 2013