Sucesiones

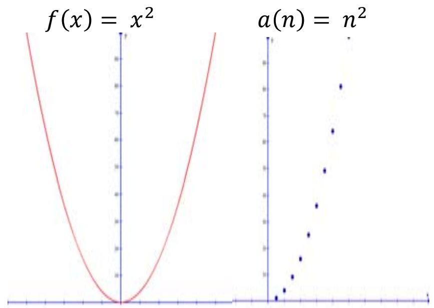
Repasando lo de ayer

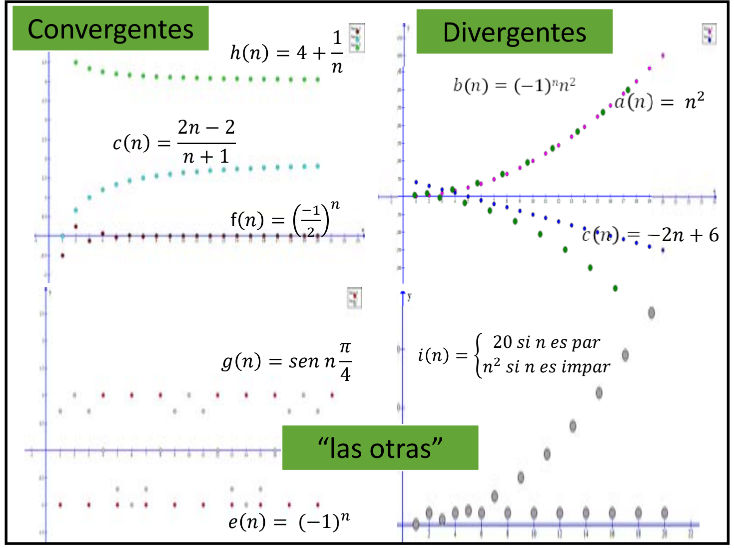
Unidad 2

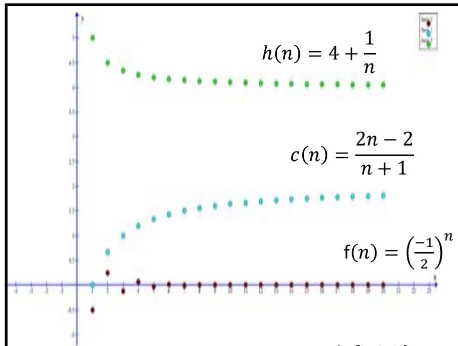
Definición:
Se define como **sucesión** de números reales a una **función**:

$$a: N \to R$$
$$n \to a(n)$$

Gráfico en el primer o cuarto cuadrante







Convergentes

Son todas acotadas

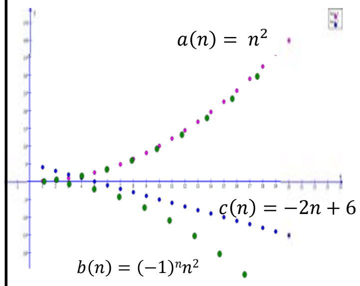
La idea…

"Una sucesión a(n) es convergente si a medida que la variable (n) crece, la imagen se acerca cada vez más a un valor determinado, L "

La definición

"Una sucesión a(n) converge a L si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n > N_\varepsilon$, la distancia entre el valor de la sucesión evaluada en n y el número L es menor que ε.

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = L$$



Divergentes

Son todas no acotadas

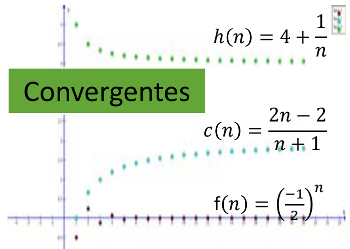
La idea…

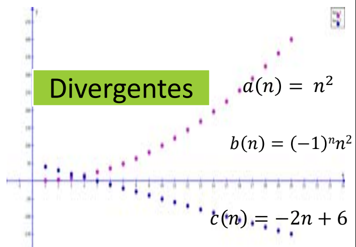
"Una sucesión a(n) es divergente si a medida que la variable (n) crece, la imagen crece, en valor absoluto, infinitamente "

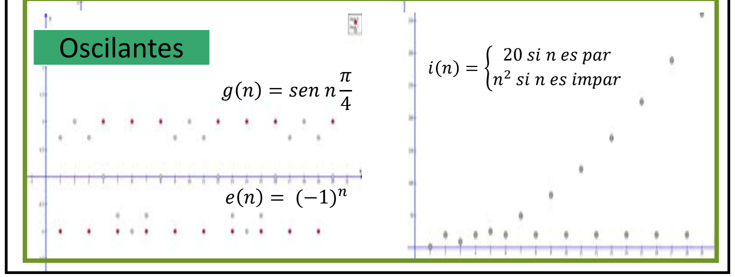
La definición

"Una sucesión a(n) diverge si para todo K > 0 es posible encontrar un valor $N_K \in \mathbb{N}$ de manera que para todo n > N_K, las imágenes de la sucesión superan en valor absoluto a K

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$







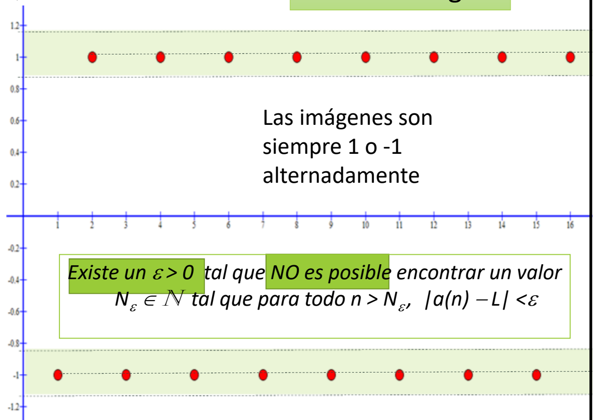
Límite de sucesiones

"Las otras…"

$e(n) = (-1)^n$

No converge

n	$(-1)^n$
1	-1
2	1
3	-1
4	1
5	-1
6	1
7	-1
8	1
9	-1
10	1



Las imágenes son siempre 1 o -1 alternadamente

Existe un $\varepsilon > 0$ tal que NO es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo n > N_ε, $|a(n) - L| < \varepsilon$

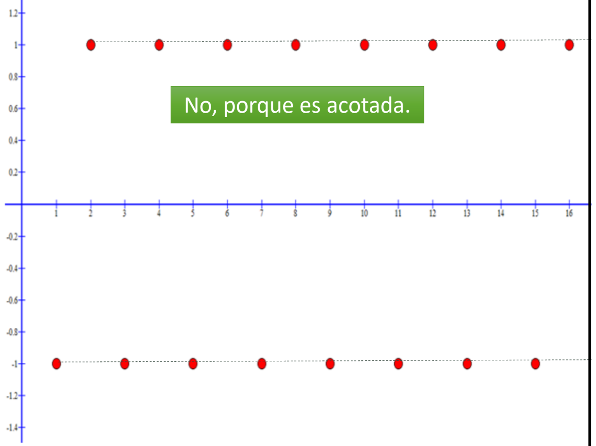
Para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo n > N_ε, $|a(n) - L| < \varepsilon$

$e(n) = (-1)^n$

No diverge

No converge

n	$(-1)^n$
1	-1
2	1
3	-1
4	1
5	-1
6	1
7	-1
8	1
9	-1
10	1



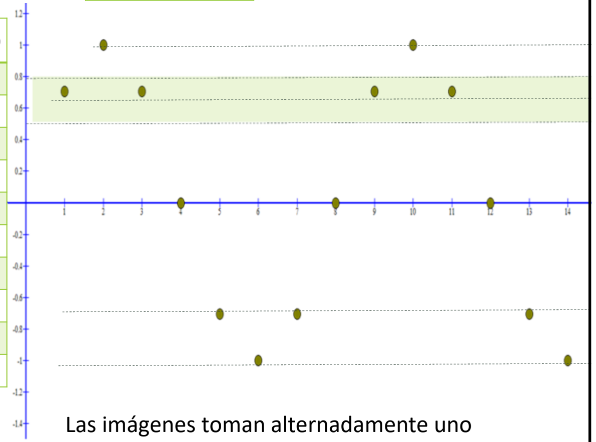
No, porque es acotada.

$g(n) = sen\ n\frac{\pi}{4}$

No diverge

No converge

n	$sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)$
1	0,707
2	1
3	0,7071
4	0
5	-0,7071
6	-1
7	-0,7071
8	0
9	0,7071
10	1



Las imágenes toman alternadamente uno de 5 valores fijos

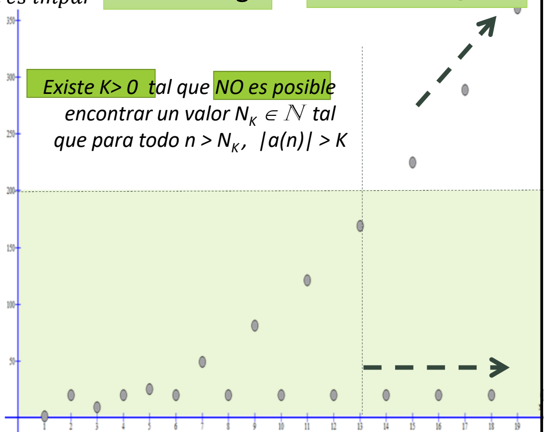
$i(n) = \begin{cases} 20\ si\ n\ es\ par \\ n^2\ si\ n\ es\ impar \end{cases}$

No converge

No diverge

n	$\begin{cases} 20\ n\ par \\ n^2\ n\ imp. \end{cases}$
1	1
2	20
3	9
4	20
5	25
6	20
7	49
8	20
9	81
10	20

Existe K> 0 tal que NO es posible encontrar un valor $N_K \in \mathbb{N}$ tal que para todo n > N_K, |a(n)| > K



2 *Para todo K > 0 es posible encontrar un valor $N_K \in \mathbb{N}$ tal que para todo n > N_K, |a(n)| > K*

Oscilantes (o "las otras")

Pueden ser acotadas o no

Tienen al menos **dos** **subsucesiones** que muestran **Distinto comportamiento**

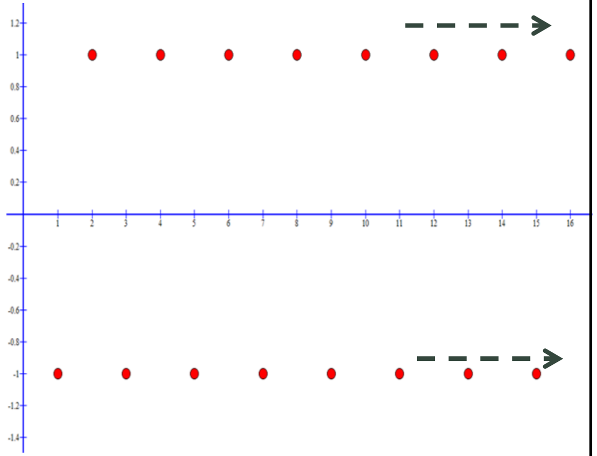
Una subsucesión convergente y una divergente o dos convergentes a distinto límite

Una subsucesión es un subconjunto infinito de imágenes de una sucesión

$\nexists \lim_{n\to\infty} a(n)$

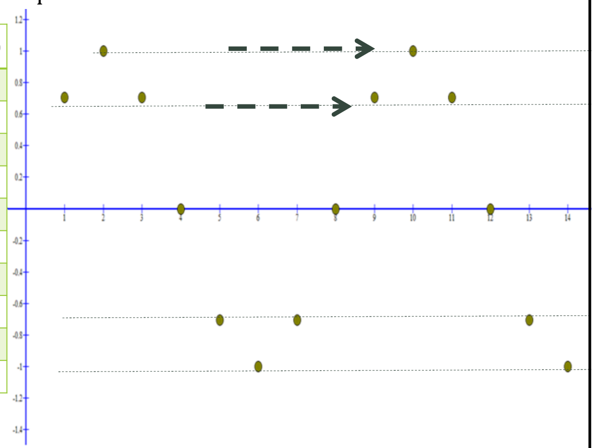
$e(n) = (-1)^n$

n	$(-1)^n$
1	-1
2	1
3	-1
4	1
5	-1
6	1
7	-1
8	1
9	-1
10	1



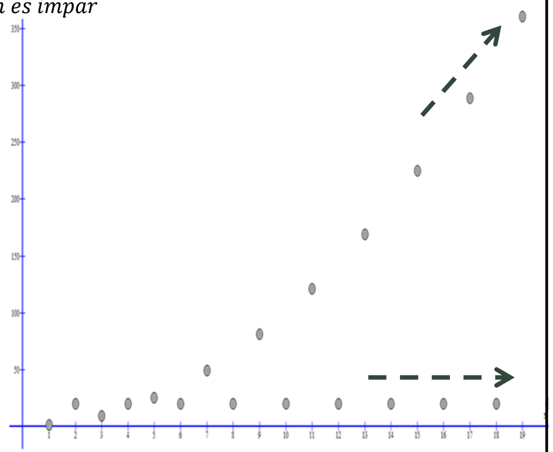
$g(n) = sen\, n\frac{\pi}{4}$

n	$sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)$
1	0,707
2	1
3	0,7071
4	0
5	-0,7071
6	-1
7	-0,7071
8	0
9	0,7071
10	1



$i(n) = \begin{cases} 20\ si\ n\ es\ par \\ n^2\ si\ n\ es\ impar \end{cases}$

n	$\begin{cases} 20\ n\ \ par \\ n^2\ \ n\ imp. \end{cases}$
1	1
2	20
3	9
4	20
5	25
6	20
7	49
8	20
9	81
10	20

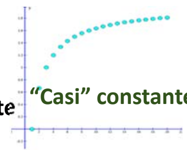


$$\lim_{n\to\infty} a(n)$$

$= L \in \mathbb{R}$

Límite finito

La sucesión es **convergente**



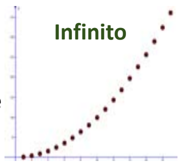
"Casi" constante

$= \infty$

Límite infinito

La sucesión es **divergente**

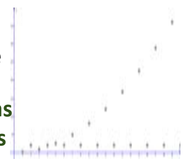
Infinito



No existe límite

La sucesión es **oscilante**

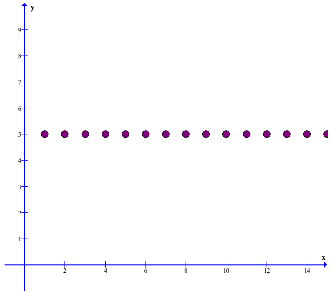
Dos cosas distintas



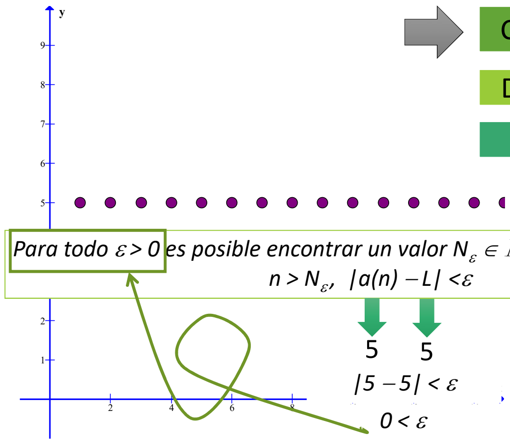
Límite

El comportamiento de las imágenes cuando los valores de la variable son infinitamente grandes

Una sucesión constante, es ¿convergente?



Una sucesión constante, es ¿convergente?



Convergente

Divergente

Oscilante

Para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_\varepsilon$, $|a(n) - L| < \varepsilon$

5 5

$|5 - 5| < \varepsilon$

$0 < \varepsilon$

SUCESIÓN

Convergente

Divergente

Ninguna de las anteriores (las otras)

Definición y concepto de límite

Operaciones con sucesiones

Cálculo y propiedades de los límites

Algunas propiedades de los límites

La **suma de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente**, y el límite de la suma de dos sucesiones es la suma de los límites de ambas.

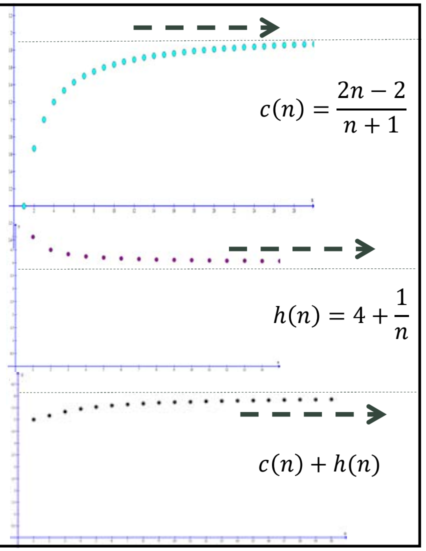
$\lim_{n\to\infty} a(n) = L$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = M$

$$\lim_{n\to\infty} a(n) + b(n) = \lim_{n\to\infty} a(n) + \lim_{n\to\infty} b(n) = L + M$$

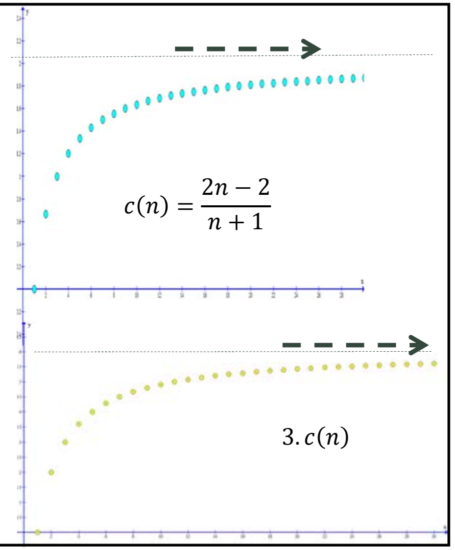
El **producto de una sucesión convergente por una constante k ∈ R es también convergente**, y el límite es igual a k por el límite de la sucesión

$$\lim_{n\to\infty} k.a(n) = k.\lim_{n\to\infty} a(n) = k.L$$

n	$\frac{2n-2}{n+1}$	$4+\frac{1}{n}$	suma
1	0	5	5
2	0,67	4,5	5,17
3	1	4,333	5,333
4	1,2	4,25	5,45
5	1,33	4,2	5,53
6	1,43	4,167	5,597
7	1,5	4,14	5,64
8	1,56	4,125	5,685
9	1,6	4,11	5,71
10	1,64	4,1	5,74
50	1,921	4.02	5,941
100	1,96	4.01	5,97
1000	1,996	4,001	5,997



n	$\frac{2n-2}{n+1}$	k = 3
1	0	0
2	0,67	2,01
3	1	3
4	1,2	3,6
5	1,33	3,99
6	1,43	4,29
7	1,5	4,5
8	1,56	4,68
9	1,6	4,8
10	1,64	4,92
50	1,921	5,763
100	1,96	5,88
1000	1,996	5,988



$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n+1} = 2 \qquad \lim_{n\to\infty} b(n) = \lim_{n\to\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} a(n) + b(n) = \lim_{n\to\infty} a(n) + \lim_{n\to\infty} b(n) = L + M$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n+1} + (4 + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n+1} + \lim_{n\to\infty} 4 + \frac{1}{n} = 2 + 4 = 6$$

$$\lim_{n\to\infty} k.a(n) = k.\lim_{n\to\infty} a(n) = k.L$$

$$\lim_{n\to\infty} 3.\boxed{\frac{2n-2}{n+1}} = 3.\lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n+1} = 3.2 = 6$$

Algunas propiedades de los límites

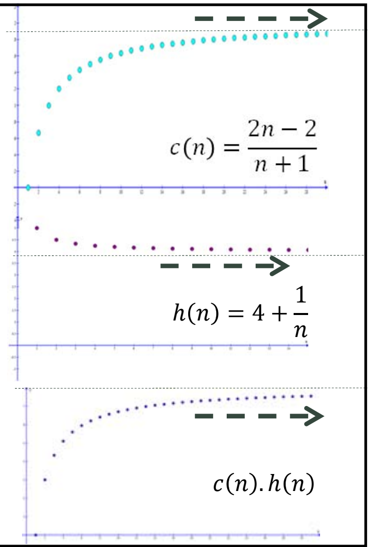
El **producto de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente**, y el límite del producto es el producto de los límites de ambas sucesiones.

$$\lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = \lim_{n\to\infty} a(n).\lim_{n\to\infty} b(n) = L.M$$

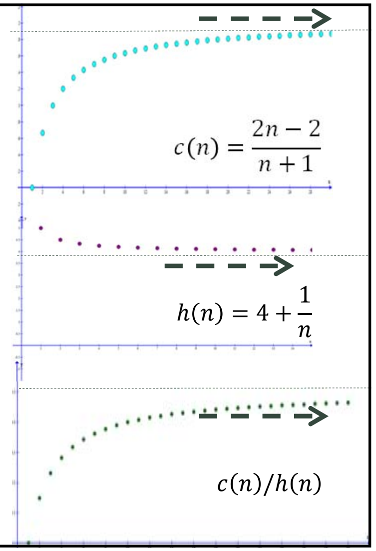
El **cociente de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente**, y el límite del cociente es el cociente de los límites de ambas sucesiones, **excepto si la del denominador tiene límite 0**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} a(n)}{\lim_{n\to\infty} b(n)} = \frac{L}{M} \quad \textbf{si } \boldsymbol{M \neq 0}$$

n	$\frac{2n-2}{n+1}$	$4+\frac{1}{n}$	producto
1	0	5	0
2	0,67	4,5	3,015
3	1	4,333	4,333
4	1,2	4,25	5,1
5	1,33	4,2	5,586
6	1,43	4,167	5,959
7	1,5	4,14	6,21
8	1,56	4,125	6,435
9	1,6	4,11	6,576
10	1,64	4,1	6,724
50	1,921	4.02	7,72242
100	1,96	4.01	7,8596
1000	1,996	4,001	7,986



n	$\frac{2n-2}{n+1}$	$4+\frac{1}{n}$	cociente
1	0	5	0
2	0,67	4,5	0,1481
3	1	4,333	0,2307
4	1,2	4,25	0,2823
5	1,33	4,2	0,3174
6	1,43	4,167	0,3428
7	1,5	4,14	0,3620
8	1,56	4,125	0,3771
9	1,6	4,11	0,3892
10	1,64	4,1	0,3991
50	1,921	4.02	0,4780
100	1,96	4.01	0,4888
1000	1,996	4,001	0,4988



$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n+1} = 2 \qquad \lim_{n\to\infty} b(n) = \lim_{n\to\infty} 4+\frac{1}{n} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = \lim_{n\to\infty} a(n).\lim_{n\to\infty} b(n) = L.M$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-2}{n+1}\right).\left(4+\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty} 4+\frac{1}{n}\right) = 2.4 = 8$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} a(n)}{\lim_{n\to\infty} b(n)} = \frac{L}{M} \quad \text{si } M \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-2}{n+1}}{\frac{4n+1}{n}} = \frac{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n+1}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty} 4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{4} = 0,5$$

Más propiedades de los límites

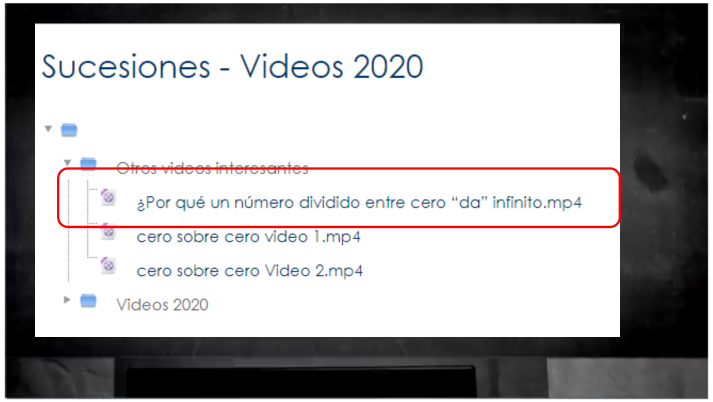
$\lim_{n\to\infty} a(n) = L$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = M$

Suma	**Producto por k**	**Producto**	**Cociente**
$\lim_{n\to\infty} a(n) + b(n)$	$\lim_{n\to\infty} k.b(n)$	$\lim_{n\to\infty} a(n).b(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$
$L + M$	$k.L$	$L.M$	$\frac{L}{M}$
✓	✓	✓	✗

si $M = 0$

Si $\boldsymbol{a(n)}$ **converge a 0**, $b(n) = \frac{1}{a(n)}$ **diverge**, es decir,

Si $\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$ ➡ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = \infty$



Vimos que: $a(n)$ converge, $b(n)$ converge ➡ $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$ ➡ **converge** si el denominador no converge a 0

✓ Y vimos que: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = \infty$ si el denominador converge a 0

Qué pasa con $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$ si $M = 0$?

$a(n)$ converge a $L \neq 0$, $b(n)$ converge a 0 ➡ Si el denominador converge a 0 (y el numerador converge a $L \neq 0$), el cociente **diverge**

$\lim_{n\to\infty} a(n) = L \neq 0$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = \lim_{n\to\infty} a(n) \frac{1}{b(n)} = L.\infty = \infty$

∞

0

¿Y si $M = 0$ y $L = 0$?

Cociente $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} a(n) = L$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = M$

$L \neq 0$, $M \neq 0$	$L = 0$, $M \neq 0$	$L \neq 0$, $M = 0$	$L = 0$, $M = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$
✓	✓	✓	✗
$\frac{L}{M}$	0	∞	?

Algunas propiedades más de los límites

Vimos que: Si la sucesión $a(n)$ **converge a 0**, la sucesión $b(n) = \frac{1}{a(n)}$ **diverge**, es decir,

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a(n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = \infty$$

∞

1 o cualquier constante

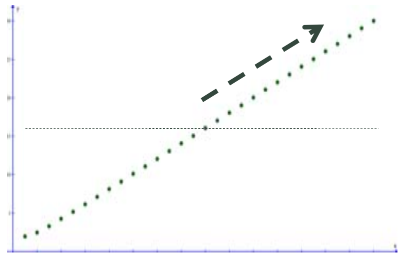
0

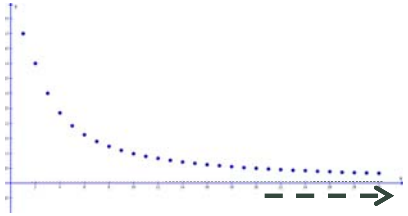
Si la sucesión **a(n) diverge**, la sucesión b(n) = $\frac{1}{a(n)}$ **converge a 0,** es decir,

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = 0$$

Agarrá la calculadora y convencete

n	$a(n) = \frac{n^2+1}{n}$	$\frac{1}{a(n)}$
1	2	0,5
2	2,5	0,4
3	3,3333	0,3
4	4,25	0,2352
5	5,2	0,1923
6	6,1666	0,1621
7	7,1428	0,14
8	8,125	0,1230
9	9,1111	0,1097
10	10,1	0,0990
11	11,090	0,0901
12	12,083	0,0827
13	13,076	0,0764
14	14,071	0,0710
15	15,066	0,0663
1000	1000,001	0,001





Vimos que: $\text{Si } \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = 0$

Qué pasa con $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$ si $a(n)$ convergey $b(n)$ diverge?

$a(n)$ converge

$b(n)$ diverge

El **cociente** converge a 0 Veamos...

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = L \qquad \lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = \lim_{n\to\infty} a(n) \cdot \frac{1}{b(n)} = L.0 = 0$$

0

∞

Más propiedades de los límites

Aparecen algunos problemas...

Vimos que:

Cociente $\lim_{n\to\infty} a(n) = L$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = M$

$L \neq 0$, $M \neq 0$	$L = 0$, $M \neq 0$	$L \neq 0$, $M = 0$	$L = 0$, $M = 0$
$\frac{L}{M}$ ✓	0 ✓	∞ ✓	✗

Producto $\lim_{n\to\infty} a(n) = L$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = M$ $L.M$ ✓

$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a(n) = L \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$

¿Qué pasa con el producto en estos casos?

Primera situación: ambas divergen

Si dos sucesiones **divergen**, su producto **diverge,** es decir,

$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = \infty$

Agarrá la calculadora y convencete

EJEMPLO

$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} -2n+6 = \infty$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} (-2n+6).n^2 = \left(\lim_{n\to\infty} -2n+6\right)\left(\lim_{n\to\infty} n^2\right) = \infty$$

∞ ∞

Otro argumento:

$$\lim_{n\to\infty} (-2n+6).n^2 = \lim_{n\to\infty} -2n^3 + 6n^2 = \infty$$

Función polinómica $\lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = -\infty$

Segunda situación: **una converge y la otra diverge**

$\lim_{n\to\infty} a(n) = L \neq 0$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$

Si la sucesión $a(n)$ **converge a** $L \neq 0$, y la sucesión $b(n)$ **diverge**, entonces su producto **diverge**:

$\lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = \infty$

Veamos (argumento 1)

Vimos que: Si $\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{\frac{1}{b(n)}}$$

PARÉNTESIS ¿QUÉ HIZO?

PARÉNTESIS ¿QUÉ HIZO?

¿Cómo se multiplican las fracciones?

Numerador con numerador, denominador con denominador

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$

¿Cómo se dividen las fracciones?

Numerador con denominador, denominador con numerados

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}$$

¿Cómo puede escribir un producto como un cociente?

$$a.b=a:\frac{1}{b}=\frac{a}{\frac{1}{b}}$$

A ver…

$$\frac{a}{\frac{1}{b}}=a:\frac{1}{b}=a:\frac{1}{b}=\frac{a.b}{1}=a.b$$

CIERRO PARÉNTESIS

Segunda situación: una converge y la otra diverge

$\lim_{n\to\infty} a(n)=L\neq 0$

$\lim_{n\to\infty} b(n)=\infty$

Si la sucesión $a(n)$ **converge a** $L\neq 0$, y la sucesión $b(n)$ **diverge**, entonces su producto **diverge**:

$$\lim_{n\to\infty} a(n).b(n)=\infty$$

Veamos (argumento 1)

Vimos que: Si $\lim_{n\to\infty} a(n)=\infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a(n)}=0$

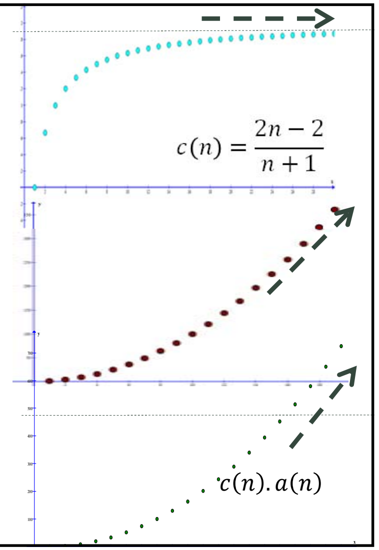
$$\lim_{n\to\infty} a(n).b(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\frac{1}{b(n)}}=L.\infty=\infty$$

∞ 0 ∞

Agarrá la calculadora y convencete

---

n	$\frac{2n-2}{n+1}$	n^2	producto
1	0	1	0
2	0,67	3	2,01
3	1	9	9
4	1,2	16	19,2
5	1,33	25	33,25
6	1,43	36	51,48
7	1,5	49	73,5
8	1,56	64	99,84
9	1,6	81	129,6
10	1,64	100	164
50	1,921	2500	4802,5
100	1,96	10000	19600
1000	1,996	10^6	1996000



Entonces:

Producto $\lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a(n) = L$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = M$ $L.M$ ✓

$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$ ∞ ✓

$\lim_{n\to\infty} a(n) = L \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$ ∞ ✓

$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$ ✗

¿Cuál es el conflicto?

$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$ ✗

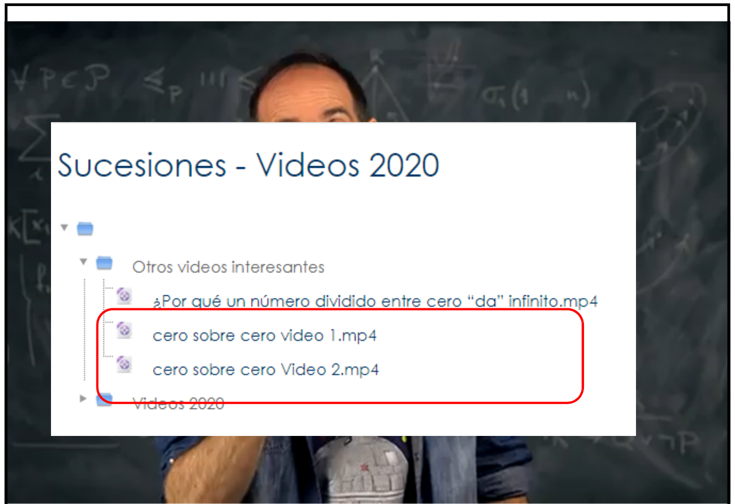
$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$ $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$ $\lim_{n\to\infty} a(n).b(n)$ ✗

Se trata del mismo problema

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{\underset{\searrow 0}{b(n)}} = \lim_{n\to\infty} a(n).\overset{\nearrow \infty}{\frac{1}{\underset{\searrow 0}{b(n)}}}$$

$\frac{0}{0} \Leftrightarrow 0.\infty$

¿Por qué es un problema?



Límites indeterminados

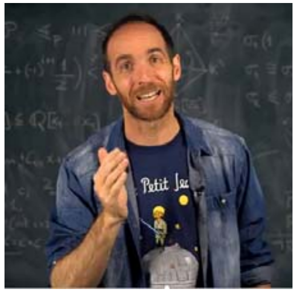
Ya vimos por qué

$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$

Es indeterminado



$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a(n).b(n)$

Es equivalente al anterior… es decir, el mismo problema

¿Qué quiere decir que un límite es indeterminado?

Qué el resultado depende de las sucesiones involucradas

Ya vimos que

$\lim_{n\to\infty} a(n) = \mathrm{L}$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = M$

$\lim_{n\to\infty} a(n) + b(n) = L + M$

$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$

Finito

Infinito

No existir!

Es indeterminado

LÍMITES INDETERMINADOS

Un ***límite indeterminado*** (o *forma indeterminada*), es un límite del cual es imposible determinar en forma inmediata o directa si es finito, infinito o no existe.

Algunas formas indeterminadas son:

$$\boxed{\frac{0}{0}},\ \frac{\infty}{\infty},\ \boxed{0.\infty},\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ \infty - \infty$$

entendiéndose que se trata de una expresión donde participan dos sucesiones que *tienden* a 0, 1 o ∞, según corresponda, y no propiamente una operación entre éstos.

LÍMITES INDETERMINADOS

Resolver una indeterminación (o un límite indeterminado), significa llegar a una decisión acerca del límite indeterminado, es decir, poder afirmar si es finito (cuánto vale), es infinito o no existe

Analicemos otra indeterminación:

$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$

¿Cuánto vale $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$?

$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)}$ Tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$

FORMAS INDETERMINADAS

Veamos cuatro situaciones:

SITUACIÓN 1

$$a(n) = 5n^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

$$b(n) = n^2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{b(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{5n^2+1}^{\infty}}{\underbrace{n^2}_{\infty}} \to \frac{\infty}{\infty}$$

pero...

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{1}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 5 + \frac{\overbrace{1}^{}}{\underbrace{n^2}_{\infty}} \to 0 \quad = \boxed{5}$$

Tenemos un límite $\frac{\infty}{\infty}$ cuyo resultado es finito y da 5

FORMAS INDETERMINADAS

SITUACIÓN 2

$$a(n) = 5n^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

$$b(n) = n^3 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{b(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{5n^2+1}^{\infty}}{\underbrace{n^3}_{\infty}}$$

pero...

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\cancel{n^2}}{\cancel{n^3}} + \frac{1}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{\underbrace{n}_{\infty}} + \frac{1}{\underbrace{n^3}_{\infty}} = \boxed{0}$$

Tenemos un límite $\frac{\infty}{\infty}$ cuyo resultado es finito y da 0

FORMAS INDETERMINADAS

SITUACIÓN 3

$$a(n) = 5n^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

$$b(n) = n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{b(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{5n^2+1}^{\infty}}{\underbrace{n}_{\infty}}$$

pero...

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\cancel{n^2}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{5n}_{\infty} + \frac{1}{\underbrace{n}_{\infty}} \to 0 \quad = \boxed{\infty}$$

Tenemos un límite $\frac{\infty}{\infty}$ cuyo resultado es infinito

FORMAS INDETERMINADAS

Tenemos 3 situaciones diferentes que conducen a un límite $\frac{\infty}{\infty}$ cuyo resultado es distinto

Si: $\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$ $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{b(n)}$ es **indeterminado** porque el resultado depende de quiénes son las funciones involucradas

Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{b(n)}$ tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$

El límite puede resultar:
- finito
- infinito
- o no existir

¡PRÓXIMA CLASE!

Algunas técnicas para resolver límites indeterminados