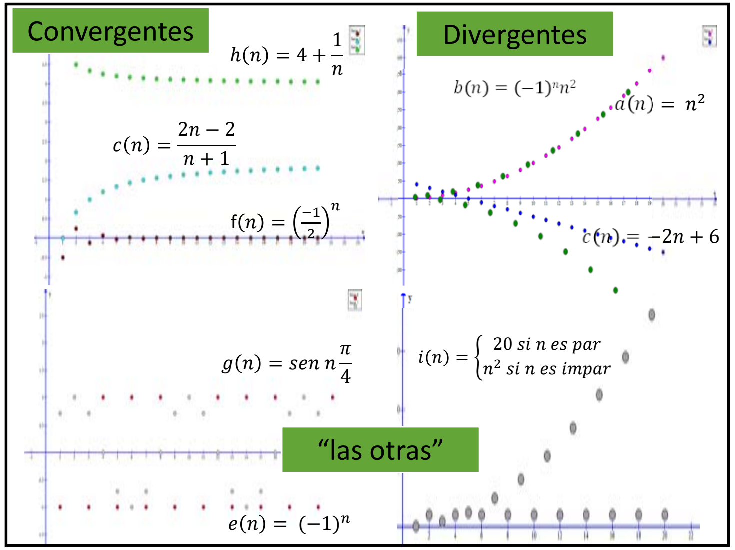
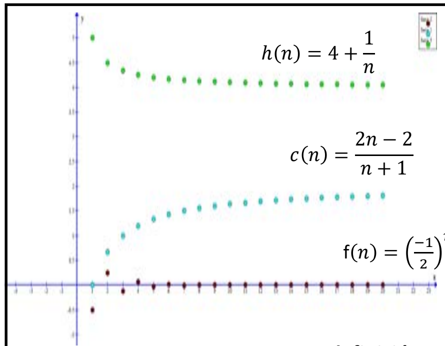
Sucesiones
Resumiendo…

Unidad 2





Convergentes

Son todas acotadas

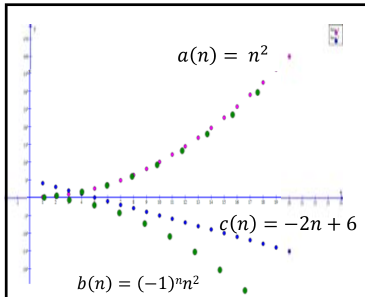
La idea…

"Una sucesión a(n) es convergente si a medida que la variable (n) crece, la imagen se acerca cada vez más a un valor determinado, L"

La definición

"Una sucesión a(n) converge a L si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n > N_\varepsilon$, la distancia entre el valor de la sucesión evaluada en n y el número L es menor que ε.

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = L$$



Divergentes

Son todas no acotadas

La idea…

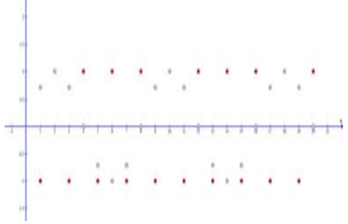
"Una sucesión a(n) es divergente si a medida que la variable (n) crece, la imagen crece, en valor absoluto, infinitamente"

La definición

"Una sucesión a(n) diverge si para todo $K > 0$ es posible encontrar un valor $N_K \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n > N_K$, las imágenes de la sucesión superan en valor absoluto a K

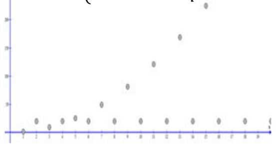
$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

$g(n) = sen\, n\frac{\pi}{4}$ $e(n) = (-1)^n$



Oscilantes

$i(n) = \begin{cases} 20\ si\ n\ es\ par \\ n^2\ si\ n\ es\ impar \end{cases}$



Pueden ser acotadas o no

$\nexists \lim_{n \to \infty} a(n)$

Tienen al menos **dos subsucesiones** que muestran **distinto comportamiento**

Una subsucesión convergente y una divergente o dos convergentes a distinto límite

---

✓ Si una sucesión es convergente, toda subsucesión tiene al mismo límite

✓ Si una sucesión es divergente, toda subsucesión diverge

✓ Una sucesión es oscilante, si existen al menos dos subsucesiones con ditstinto límite (uno finito y el otro infinito, o ambos infinitos pero distintos)

Y no hay otra cosa en el universo

$\lim_{n \to \infty} a(n)$

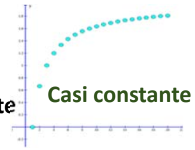
Límite

El comportamiento de las imágenes cuando los valores de la variable independiente son infinitamente grandes

$= L \in \mathbb{R}$

Límite finito

La sucesión es **convergente**

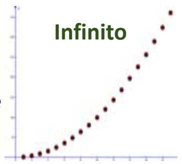


Casi constante

$= \infty$

Límite infinito

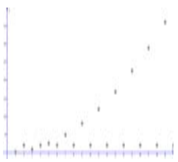
La sucesión es **divergente**



Infinito

No existe límite

La sucesión es **oscilante**



Dos (o más) cosas distintas

Operaciones con límites

Ambas convergentes

	$a(n) \to L \neq 0$ $b(n) \to M \neq 0$	$a(n) \to L \neq 0$ $b(n) \to 0$	$a(n) \to 0$ $b(n) \to 0$	$a(n) \to 0$ $b(n) \to M \neq 0$
SUMA	✓ $L + M$	✓ L	✓ 0	✓ M
PRODUCTO	✓ $L.M$	✓ 0	✓ 0	✓ 0
COCIENTE	✓ L/M	✓ ∞	✗	✓ 0
POTENCIA	✓ L^M	✓ 1	✗	✓ 0

Una convergente y la otra divergente

	$a(n) \to L \neq 0$ $b(n) \to \infty$	$a(n) \to 0$ $b(n) \to \infty$	$a(n) \to \infty$ $b(n) \to L \neq 0$	$a(n) \to \infty$ $b(n) \to 0$
SUMA	✓ ∞	✓ ∞	✓ ∞	✓ ∞
PRODUCTO	✓ ∞	✗	✓ ∞	✗
COCIENTE	✓ 0	✓ 0	✓ ∞	✓ ∞
POTENCIA	✗	✗	✓ ∞	✗

Ambas divergentes

	$a(n) \to +\infty$ $b(n) \to +\infty$	$a(n) \to +\infty$ $b(n) \to -\infty$	$a(n) \to -\infty$ $b(n) \to +\infty$	$a(n) \to -\infty$ $b(n) \to -\infty$
SUMA	✓ $+\infty$	✗	✗	✓ $-\infty$
PRODUCTO	✓ $+\infty$	✓ $-\infty$	✓ $-\infty$	✓ $+\infty$
COCIENTE	✗	✗	✗	✗

Algunas formas indeterminadas son:

$$\boxed{\frac{0}{0}},\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}},\ \boxed{0.\infty},\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ \infty - \infty$$

¿Por qué es un problema?

Porque el resultado depende de quiénes son las funciones involucradas

El límite puede resultar:
finito
infinito
o no existir

Algunas técnicas para resolver límites indeterminados

Dividir por la mayor potencia

Fundamentos:

✓ $\frac{A}{B} = \frac{A/C}{B/C}$ si $C \neq 0$ $\qquad \frac{24}{15} = \frac{\frac{24}{3}}{\frac{15}{3}} = \frac{8}{5}$

✓ $\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ $\qquad \frac{24+12}{4} = \frac{24}{4} + \frac{12}{4}$

✓ Si $\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$ ➡ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = 0$

Usos:

Límites que involucran cocientes de polinomios ✓

Es decir, algunas indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Dividir por la mayor potencia

Procedimiento:

✓ Buscar la mayor potencia que aparece entre numerador y denominador

✓ Dividir numerador y denominador por n elevado a esa potencia

✓ Distribuir y calcular

Ejemplo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-6}{4n^2-2n+2}$$

La mayor potencia es 2

Dividimos numerador y denominador por n^2

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+3n-6}{n^2}}{\frac{4n^2-2n+2}{n^2}}$$

Distribuimos

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{6}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}$$

Simplificamos

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}+\frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}-\frac{6}{n^2}}{\frac{4\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}-\frac{2\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{2}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

0 0 0 0

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

La sucesión converge a $L=\frac{1}{2}$

Dividir por la mayor potencia

La mayor potencia puede aparecer:

- ✓ En el numerador
- ✓ En el denominador
- ✓ En ambos

Y cada caso, tiene un resultado general…

Multiplicar y dividir por el conjugado

Fundamentos:

- ✓ El conjugado de $(a+b)$ es $(a-b)$ — Y viceversa
- ✓ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Objetivo Transformar una resta en un cociente

Es decir, algunas indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$

Hacer algún manejito algebraico

Fundamentos:

- ✓ Muchas funciones pueden reescribirse como producto de factores
- ✓ Las propiedades de límites que vimos

Objetivo Transformar sumas y restas en productos o cocientes

Es decir, llevar indeterminaciones a cosas del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

Análisis cualitativo de límites

Análisis cualitativo de algunos límites

Para algunas funciones, puede evaluarse el límite sin necesidad de hacer un cálculo, y basándose en el conocimiento que uno tiene de las funciones involucradas

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{n^3 - 4n^2}^{\infty-\infty} + 1$$

Si bien formalmente es una indeterminación ∞–∞, sabemos que los polinomios tienen ramas que se van a +∞ o a –∞ según el signo del coeficiente de la mayor potencia.

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} n^3 - 4n^2 + 1 = \infty$$

Análisis cualitativo de algunos límites

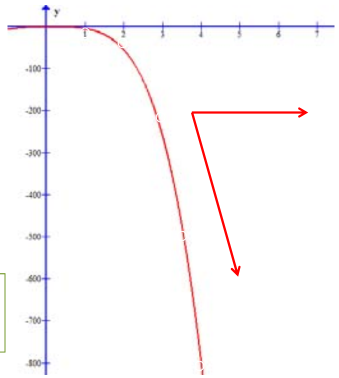
En general Si $P(n) = a_r n^r + \ldots a_2 n^2 + a_1 n + a_0$

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \infty$$

Más aún, si $a_r > 0$ el límite será $+\infty$, si $a_r < 0$ será $-\infty$

Ejemplo

$$\lim_{n\to\infty} -3n^4 - 2n^2 + n - 1 = -\infty$$



Análisis cualitativo de algunos límites

Si tenemos $P(n) = a_r n^r + \ldots a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ y queremos calcular:

$$\lim_{n\to\infty} e^{P(n)}$$

Por ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty} e^{4n-n^2}$$

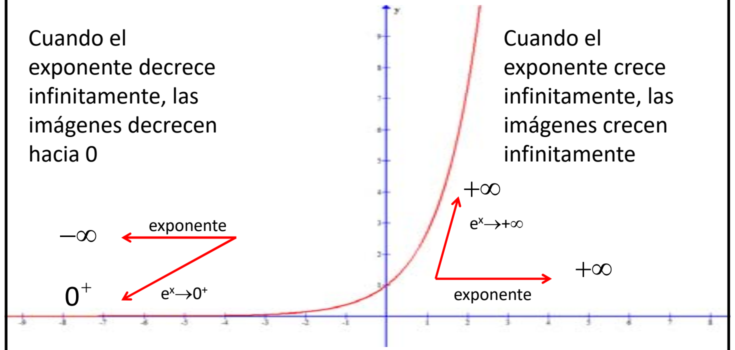
Sabemos dos cosas:

1. Cómo se comporta P(n) de acuerdo al coeficiente de la potencia mayor
2. Cómo se comporta la función $f(x) = e^x$

Cosa N° 2) Sobre cómo se comporta la función $f(x) = e^x$

Cuando el exponente decrece infinitamente, las imágenes decrecen hacia 0

Cuando el exponente crece infinitamente, las imágenes crecen infinitamente



Cosa N° 1) cómo se comporta P(n) de acuerdo al coeficiente de la mayor potencia

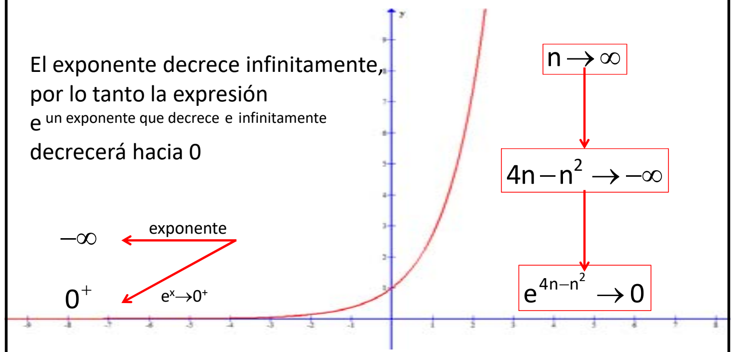
$$\lim_{n\to\infty} 4n - n^2 = -\infty$$

Análisis cualitativo de algunos límites no indeterminados

$$\lim_{n\to\infty} e^{4n-n^2}$$

Combinando estos dos hechos:

El exponente decrece infinitamente, por lo tanto la expresión $e^{\text{un exponente que decrece e infinitamente}}$ decrecerá hacia 0



$n \to \infty$

$4n - n^2 \to -\infty$

$e^{4n-n^2} \to 0$

Análisis cualitativo de algunos límites no indeterminados

El exponente decrece infinitamente, por lo tanto la expresión $e^{\text{un exponente que decrece e infinitamente}}$ decrecerá hacia 0

$$\lim_{n\to\infty} e^{4n-n^2} =$$

$-\infty$

0

$$\lim_{n\to\infty} e^{4n-n^2} = 0^+$$

n	4n-n2	a(n)
1	3	20,086
2	4	54,598
3	3	20,086
4	0	1
5	-5	0,007
6	-12	6,1E-06
7	-21	7,6E-10
8	-32	1,3E-14
9	-45	2,9E-20
10	-60	8,8E-27

$n \to \infty$

$4n - n^2 \to -\infty$

$e^{4n-n^2} \to 0$

Un ejemplo

Elegir un valor adecuado de $\alpha \in \mathbf{R}$ en cada caso y completar la sucesión de modo que resulte

i) convergente,

ii) divergente,

iii) oscilante.

$$\begin{cases} e^{\alpha n^3+n} & \text{si n es par} \\ \dots\dots\dots & \text{si n es impar} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\alpha n^3+n} & \text{si n es par} \\ \dots\dots\dots & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Esta sucesión tiene dos **subsucesiones**

Para que sea **convergente**, ambas subsucesiones tienen que tener el mismo límite finito

Para que sea **divergente**, ambas subsucesiones tienen que tener límite infinito

Para que sea **oscilante**, ambas subsucesiones tienen que tener el distinto límite:

- uno finito y el otro infinito
- ambos finitos y distintos

Veamos qué pasa con:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n^3+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n^3+n}$$

Dos posibilidades:

- Si el exponente crece a $+\infty$, el límite es $+\infty$
- Si el exponente decrece a $-\infty$, el límite es 0

Veamos qué pasa con el exponente:

Por ejemplo:

Este límite depende de α

$\alpha > 0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 + n = +\infty$

$\alpha = 0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \cancel{\alpha} n^3 + n = +\infty$

$\alpha < 0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} -2n^3 + n = -\infty$

$\alpha \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha n^3 + n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n^3+n} = \infty$$

$\alpha < 0$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha n^3 + n = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\alpha n^3+n} = 0$$

$\alpha = 1$

n	n^3+n	e^{n^3+n}
1	2	7,4
2	10	22026,4
3	30	$1{,}1.\ 10^{13}$
4	68	$3{,}4.10^{29}$
5	130	$2{,}9.10^{56}$
6	222	$2{,}6.10^{96}$
7	350	10^{152}
8	520	$6{,}8.10^{225}$

$\alpha = -1$

n	$-n^3+n$	e^{-n^3+n}
1	0	1
2	-6	0,002
3	-24	$3{,}8.10^{-11}$
4	-60	$8{,}7.10^{-27}$
5	-120	$7{,}7.10^{-53}$
6	-210	$6{,}2.10^{-92}$
7	-336	$1{,}2.10^{-146}$
8	-504	$1{,}3.10^{-219}$

Para que la sucesión sea convergente

Ambas subsucesiones tienen que tener el mismo límite finito

Entonces es necesario elegir α < 0, y la subsucesión para los n impares debe ser elegida de modo que converja a 0. Por ejemplo:

$$\begin{cases} e^{-2n^3+n} & \text{si n es par} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si n es impar} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{-2n^3+n} = 0 \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{matrix}$$

Para que la sucesión sea divergente

Ambas subsucesiones tienen que tener límite infinito

Es necesario elegir α ≥ 0, y la subsucesión para los n impares debe ser elegida de modo que diverja . Por ejemplo:

$$\begin{cases} e^{n^3+n} & \text{si n es par} \\ n^2 & \text{si n es impar} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{n^3+n} = +\infty \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty \end{matrix}$$

Para que la sucesión no sea ni convergente ni divergente

Para este caso, ambas subsucesiones tienen que tener el distinto límite:

- uno finito y el otro infinito
- ambos finitos y distintos

Caso 1 — si α ≥ 0, la primera la subsucesión diverge.

Por lo tanto, para los n impares debe ser elegida de modo que converja a cualquier límite finito. Por ejemplo:

$$\begin{cases} e^{n^3+n} & \text{si n es par} \\ \dfrac{2n^2-n}{n^2+1} & \text{si n es impar} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{n^3+n} = +\infty \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-n}{n^2+1} = 2 \end{matrix}$$

Para que la sucesión no sea ni convergente ni divergente

Caso 2 — si α < 0, la primera subsucesión converge a 0

Para los n impares debe ser elegida de modo que diverja o converja a otro valor L ≠ 0. Por ejemplo:

$$\begin{cases} e^{-2n^3+n} & \text{si n es par} \\ 4+\dfrac{1}{n} & \text{si n es impar} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{-2n^3+n} = 0 \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 4+\dfrac{1}{n} = 4 \end{matrix}$$

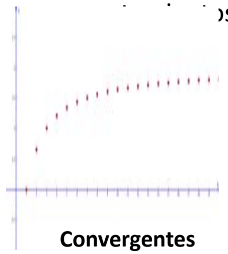
$$\begin{cases} e^{-2n^3+n} & \text{si n es par} \\ 4n^2+2 & \text{si n es impar} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{-2n^3+n} = 0 \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 4n^2+2 = +\infty \end{matrix}$$

Límite de una función de variable real

Unidad 2

EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

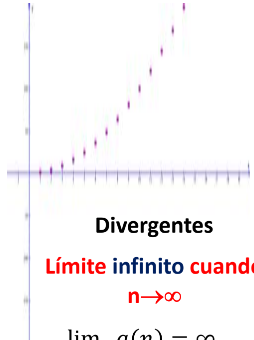
Trabajamos con el concepto de límite de una sucesión cuando la variable (natural) tiende a infinito. Vimos tres [illegible]os:



Convergentes

Límite finito cuando n→∞

$$\lim_{n \to +\infty} a(n) = L$$



Divergentes

Límite infinito cuando n→∞

$$\lim_{n \to +\infty} a(n) = \infty$$

Las otras (oscilantes)

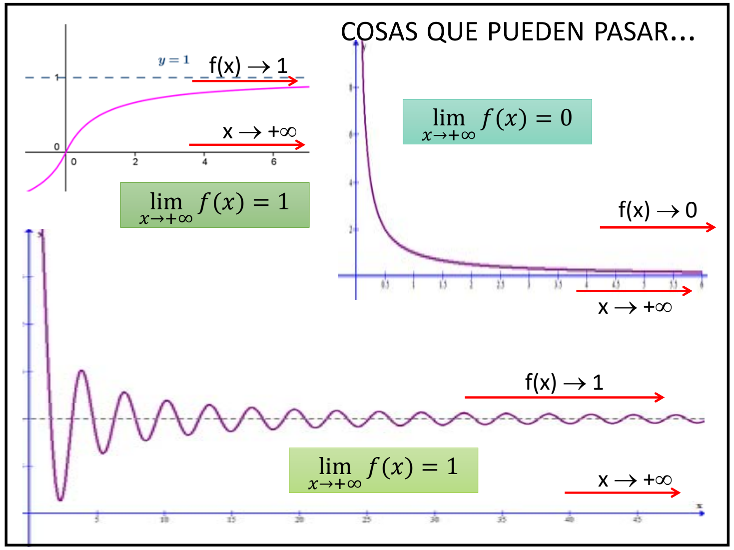
No existe límite cuando n→∞

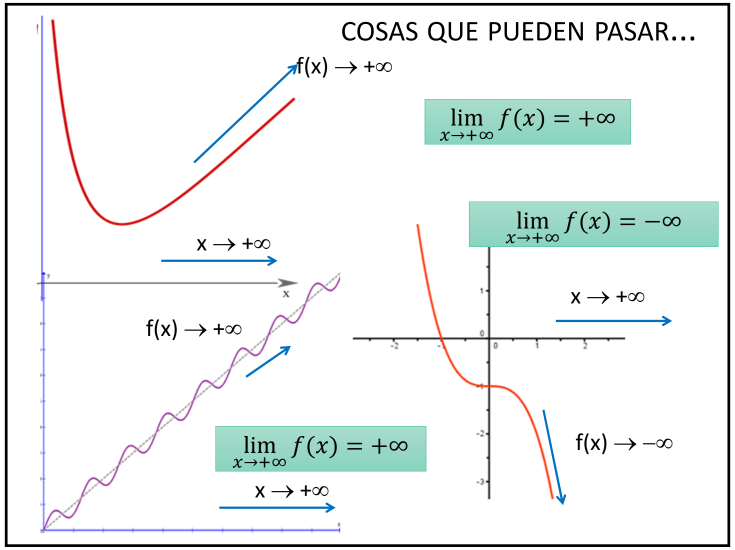
EL LÍMITE EN EL INFINITO

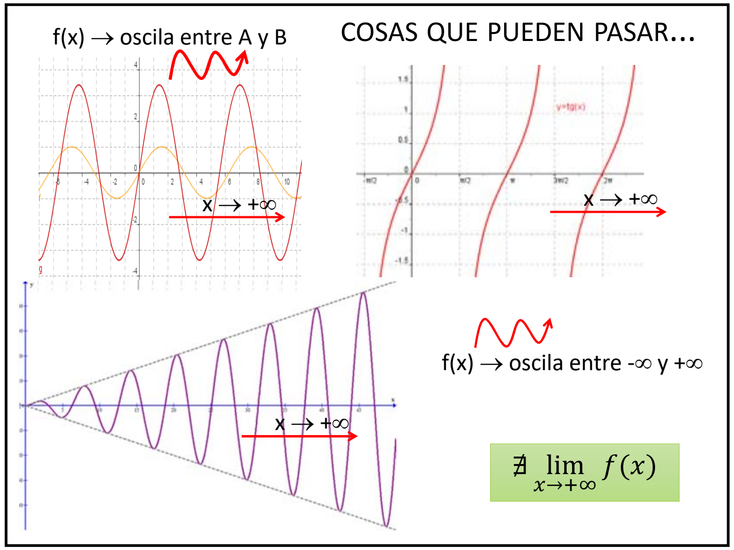
Si consideramos ahora una $f(x)$ una función de variable real, nos interesa discutir el significado de:

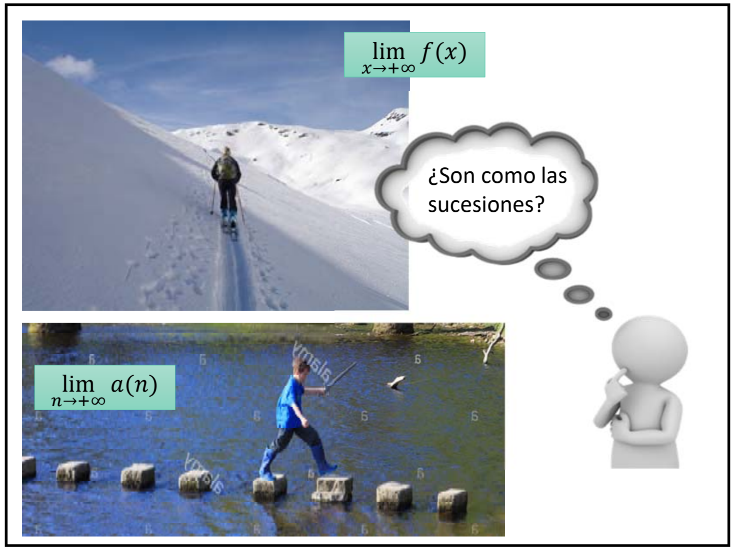
$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Este límite se trata de analizar (si tiene sentido) qué "comportamiento" tienen las imágenes de la función cuando la variable independiente crece infinitamente.


COSAS QUE PUEDEN PASAR…
f(x) → 1
x → +∞
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
f(x) → 0
x → +∞
f(x) → 1
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
x → +∞


COSAS QUE PUEDEN PASAR…
f(x) → +∞
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
x → +∞
x → +∞
f(x) → +∞
f(x) → −∞
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
x → +∞


f(x) → oscila entre A y B
COSAS QUE PUEDEN PASAR…
x → +∞
x → +∞
f(x) → oscila entre -∞ y +∞
x → +∞
$\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$


$\lim_{x\to+\infty} f(x)$
¿Son como las sucesiones?
$\lim_{n\to+\infty} a(n)$

EL LÍMITE EN EL INFINITO

Lo mismo para

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

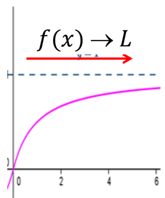
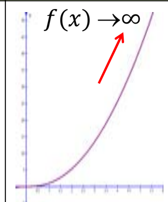
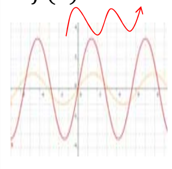
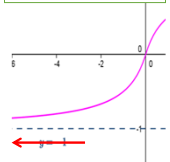
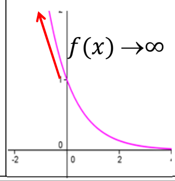
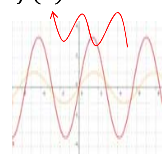
El límite cuando la variable real $x \to -\infty$ se trata de analizar qué “comportamiento” tienen las imágenes de la función cuando la variable independiente decrece infinitamente.

¿Qué cosas pueden pasar cuando $x \to -\infty$?

Las mismas cosas

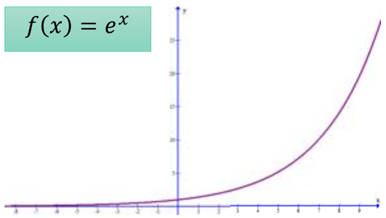
RESUMIENDO…

Hay **tres** posibilidades:

	Finito	Infinito	No existe
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ x → +∞	$f(x) \to L$ 	$f(x) \to \infty$ 	$f(x)$ oscila 
	Casi constante	± Infinito	Ni una ni otra
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ x → −∞	 $f(x) \to L$	$f(x) \to \infty$ 	$f(x)$ oscila 

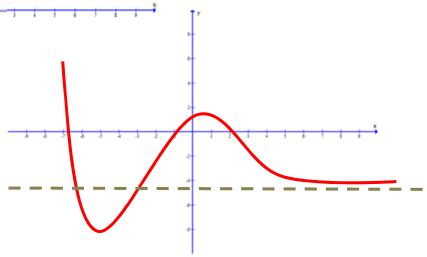
ESTAS COSAS PUEDEN PASAR “COMBINADAS”

$f(x) = e^x$



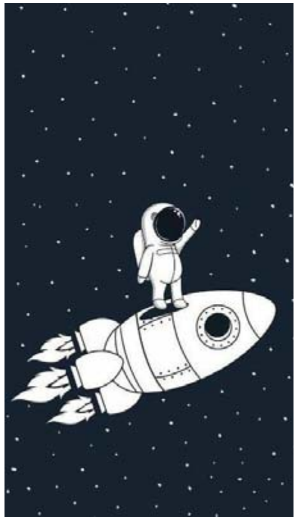
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



Límites en el infinito Definiciones

Unidad 2

LIMITE FINITO EN EL INFINITO

Por analogía con las definiciones de límite de una sucesión podemos definir el límite de una función de variable real f(x) cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$

"Una sucesión ***a(n) converge*** *a L si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que para todo n > N, la distancia entre el valor de la sucesión evaluada en n y L es menor que ε, o sea:* $\boxed{|a(n) - L| < \varepsilon}$ "

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = L$$

"Una función ***f(x) tiene límite finito*** *cuando $x \to +\infty$ si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $\mathbf{x_\varepsilon} \in R$ de manera que para todo $x > \mathbf{x_\varepsilon}$ la distancia entre f(x) y L es menor que ε.* O sea: $\boxed{|f(x) - L| < \varepsilon}$ "

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

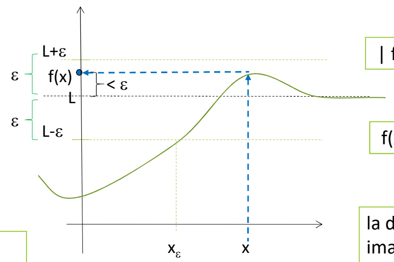
La función f(x) tiene ***límite finito L*** *cuando $x \to \infty$ si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ de manera que si $x > x_\varepsilon$, la distancia entre el valor de la función y el número L es menor que ε*

Para todo $\varepsilon > 0$

$\varepsilon > 0$ determina un intervalo alrededor de L, un rango para las imágenes

existe x_ε

x_ε determina un número a partir del cual los valores de la variable verifican la condición



si $x > x_\varepsilon$

la distancia entre la imagen de f(x) y L es menor que ε

$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

$|f(x) - L| < \varepsilon$

LIMITE INFINITO EN EL INFINITO

"Una sucesión a(n) ***diverge*** *si para todo K > 0 es posible encontrar un valor $N_K \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n > N_K$,* ***las imágenes de la sucesión superan en valor absoluto a K***

O sea $\boxed{|a(n)| > K}$

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

"Una función f(x) ***tiene límite infinito*** *cuando $x \to +\infty$ si para todo K > 0 es posible encontrar un valor $x_K \in R$ de manera que para todo $x > x_K$,* ***las imágenes de la función superan en valor absoluto a K***

O sea: $\boxed{|f(x)| > K}$

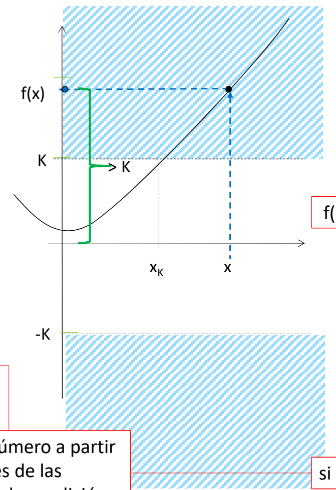
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

Para todo K > 0

K > 0 determina un intervalo alrededor de 0, un rango para las imágenes

existe $\mathbf{x_k}$

$\mathbf{x_K}$ determina un número a partir del cual los valores de las imágenes verifican la condición



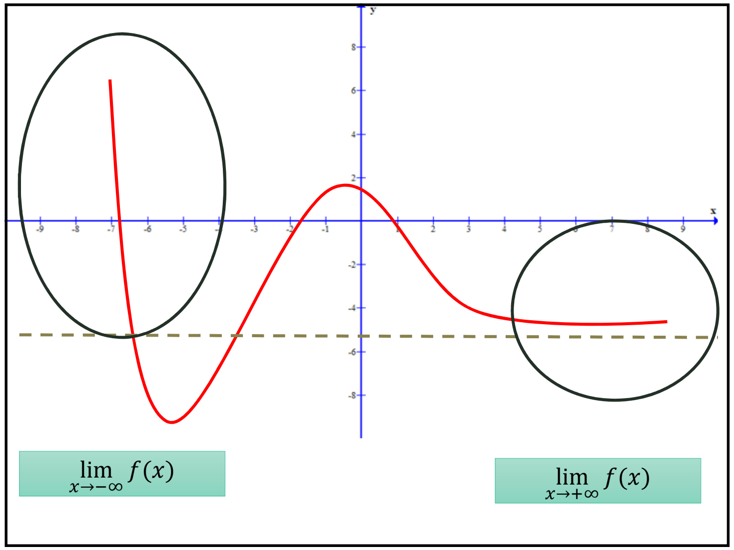
si $x > \mathbf{x_k}$

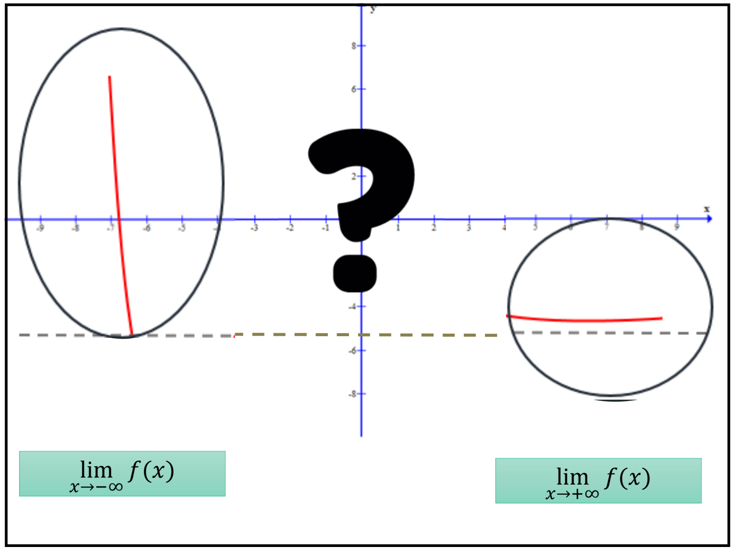
la distancia entre la imagen de la función y 0 es mayor que K

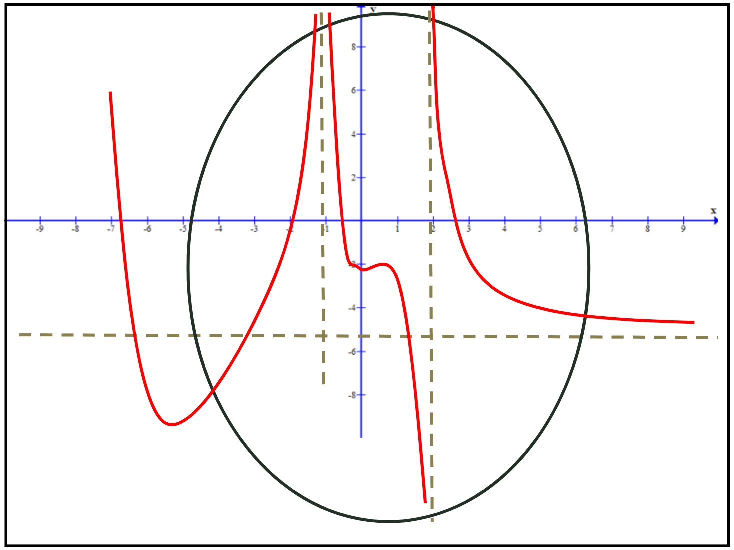
$f(x) \in (-\infty, K) \cup (K, +\infty)$

f(x) > K o f(x) < -K

| f(x) | > K







MAÑANA

Límite de una función **en un punto**

Unidad 2