Operaciones entre conjuntos

Unión

Intersección

Diferencia (y diferencia simétrica)

Complemento

Producto cartesiano

Producto cartesiano

Un concepto previo: par ordenado

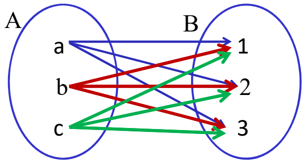
Llamaremos **par ordenado** al objeto (a, b) consistente en la dupla de números reales a y b y un orden, es decir, a ocupa el primer lugar y b el segundo

Entonces, al ser ordenado, $(a, b) \neq (b, a)$

No confundir con el intervalo (a, b), esto es otra cosa

Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se escribe $A \times B$ y está formado por todos los pares ordenados posibles donde el primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo al conjunto B

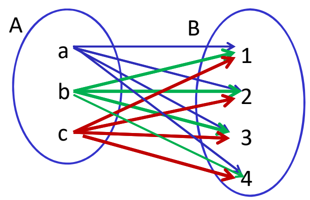


A × B = { (a,1), (a,2),(a,3),(b,1), (b,2), (b,3),(c,1),(c,2),(c,3)}

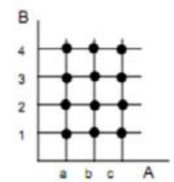
Formas de representación

Hay varias formas de representación del producto cartesiano A×B

Usando diagramas de globos



Usando diagramas cartesianos

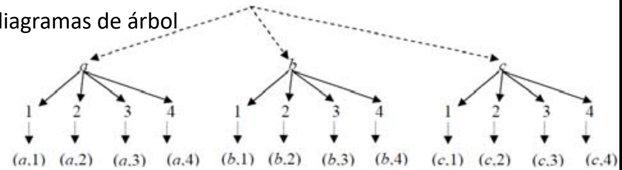


Formas de representación

Usando tablas

	1	2	3	4
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)	(a,4)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)	(b,4)
c	(c,1)	(c,2)	(c,3)	(c,4)

Usando diagramas de árbol



Las tablas, los globos y los árboles son engorrosos cuando A y B tienen muchos elementos e imposibles cuando A y B son infinitos

Operaciones entre conjuntos

- Unión
- Intersección
- Diferencia (y diferencia simétrica)
- Complemento

El resultado de la operación es otro conjunto con el **mismo tipo** de elementos

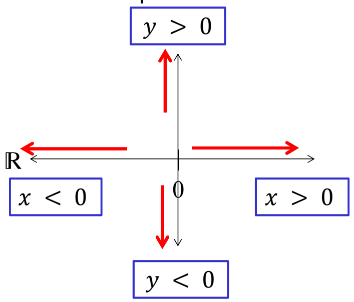
- Producto cartesiano

El resultado de la operación es un conjunto de **otro tipo** de elementos

El plano cartesiano: R^2

El producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ da por resultado el conjunto de todos los pares ordenados posibles de números reales que llamamos comúnmente (x, y).

En una recta podemos graficar el conjunto de todos los números reales de manera que a cada punto le corresponde un número real y viceversa. Estos son todos los números posibles para la primera componente del par ordenado (x, y)

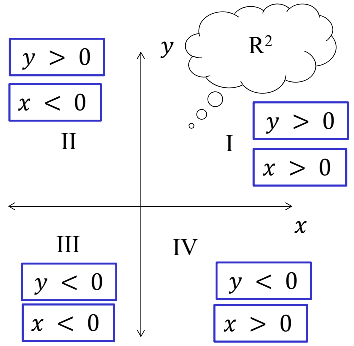


Los números reales que corresponden a la segunda componente del par (x, y) se grafican en una segunda recta, convencionalmente perpendicular a la primera.

El plano cartesiano: R^2

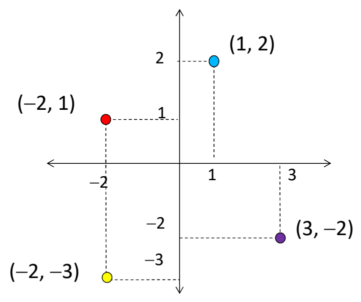
Todo par ordenado del números reales, es un elemento del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y tiene su representación gráfica en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, (el plano, para les amigues)

Todo punto del plano $\mathbb{R}^2$ se corresponde a un par ordenado del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



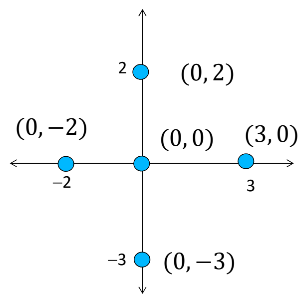
Cada región del plano $\mathbb{R}^2$ se denomina cuadrante y se corresponden a las combinaciones de los signos de x e y

El plano cartesiano



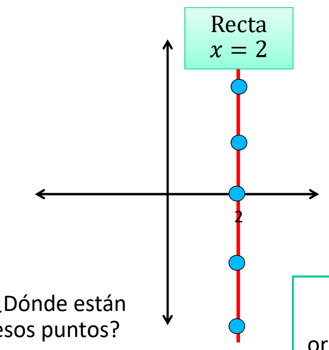
(1, 2) (−2, 1) (−2, −3) (3, −2)

El plano cartesiano



El plano cartesiano

Supongamos que queremos graficar todos los puntos del plano que tienen la primera coordenada fija en e $x = 2$



¿Dónde están esos puntos?

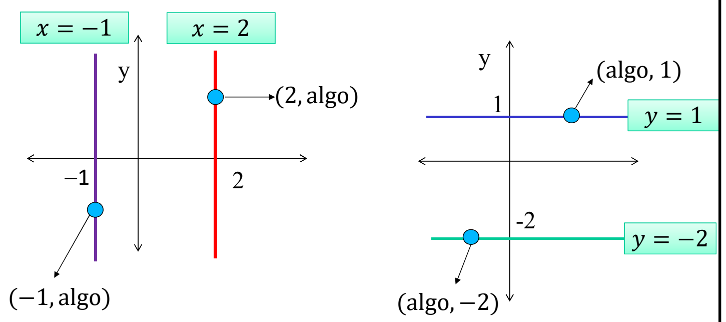
¿Cuáles son las coordenadas de estos puntos? (qué pares ordenados representan)

$(x, y) = (2, \text{algo})$

¿Dónde están esos puntos?

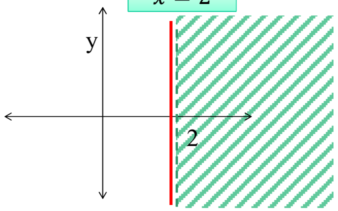
Está fija la coordenada x (la primera componente del par ordenado) y varía la coordenada y

Regiones en el plano



Regiones en el plano

$x = 2$



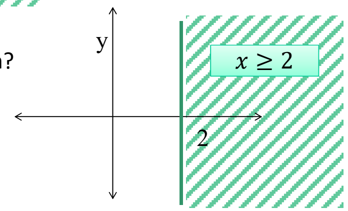
$x > 2$

¿Qué sabemos de esta región?

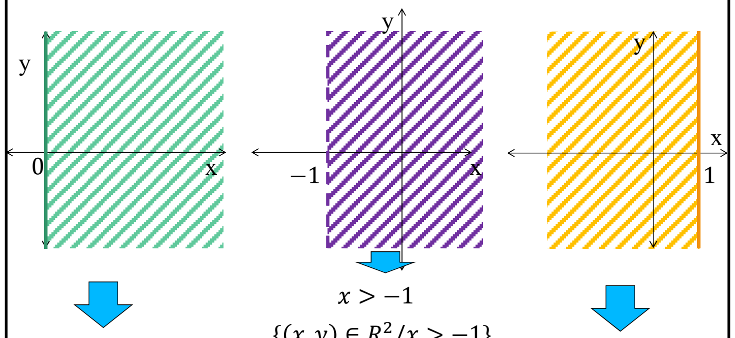
Es el conjunto de pares ordenados (x, y) tales que la primera componente es $x > 2$

¿Qué sabemos de esta región?

$\{(x, y) \in R^2 \ / \ x \geq 2\}$



Regiones en el plano



$x \geq 0$

$\{(x, y) \in R^2 \ / \ x \geq 0\}$

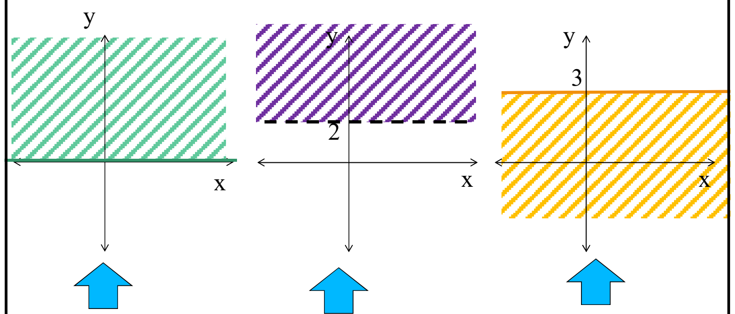
$x > -1$

$\{(x, y) \in R^2 / x > -1\}$

$x < 1$

$\{(x, y) \in R^2 \ / \ x < 1\}$

Regiones en el plano



y ≥ 0

$\{(x, y) \in R^2 \ / \ y \geq 0\}$

y> 2

$\{(x, y) \in R^2 / y > 2\}$

y ≤ 3

$\{(x, y) \in R^2 \ / \ y \leq 3\}$

Formas de representación

Supongamos que tenemos dos intervalos: $A = [1, 5]$ y $B = [2, 4]$ y queremos hacer el producto cartesiano $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) \text{ tales que } \underbrace{x \in A}_{} \text{ e } \underbrace{y \in B}_{}\}$$

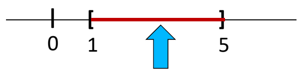
$x \in [1, 5]$

$1 \leq x \leq 5$

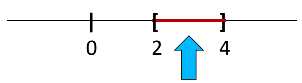
$x \in [2, 4]$

$2 \leq y \leq 4$

$A \times B$ no puede expresarse por extensión ni pueden usarse globos, tablas ni árboles. La única opción es el diagrama cartesiano.



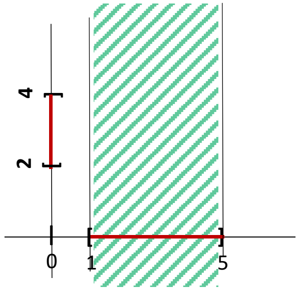
$x \in [1, 5]$



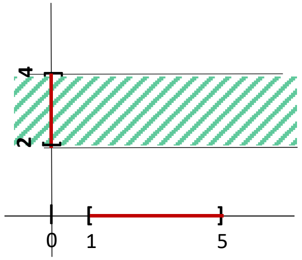
$x \in [2, 4]$

Formas de representación

Si queremos hacer $A \times B$ tenemos que "cruzar" los elementos de A con los de B



$1 \leq x \leq 5$



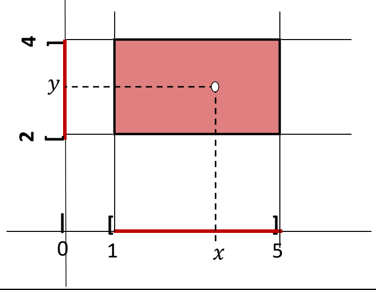
$2 \leq y \leq 4$

Formas de representación

$A \times B = \{(x, y)$ tales que $\underbrace{x \in A}$ e $\underbrace{y \in B}\}$

$1 \leq x \leq 5 \quad x \in [1, 5]$

$x \in [2, 4] \quad 2 \leq x \leq 4$

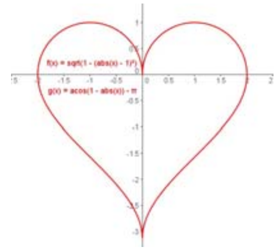


Para pensar para la próxima

¿Cuál es la diferencia entre estos dos conjuntos?

$A = \{x \in R \,/\, x > 1\}$

$B = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x > 1\}$



Relaciones y Funciones

Relaciones

Supongamos ahora que tenemos los conjuntos A y B:

A = {papa, arroz, maíz, café, uva, naranja} $\rightarrow$ algunos vegetales

B = {América, Asia, Europa, África, Oceanía} $\rightarrow$ algunos continentes

Cada vegetal es originario de algún continente

Los elementos de estos conjuntos pueden vincularse a través de la relación **“es originario de”**

Relaciones

A = {papa, arroz, maíz, café, uva, naranja}

B = {América, Asia, Europa, África, Oceanía}

¿Cómo está constituido el conjunto A $\times$ B?

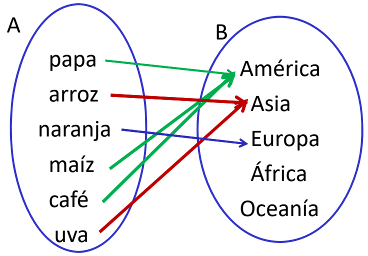
Son todos los pares ordenados posibles formados con elementos de estos conjuntos donde el primer elemento es un vegetal y el segundo un continente

Relaciones

“es originario de”

Estos vínculos forman un subconjunto del producto cartesiano A $\times$ B

Por extensión esta relación es el conjunto de pares ordenados:



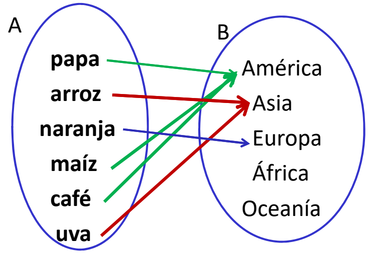
R = {(papa, América); (maíz, América); (café, América); (arroz, Asia); (uva, Asia) ; (naranja, Europa)}

Una relación es un criterio de vinculación entre los elementos de dos conjuntos

Relaciones: algunas definiciones

A = {papa, arroz, maíz, café, uva, naranja} $\rightarrow$ **conjunto de partida**

B = {América, Asia, Europa, África, Oceanía} $\rightarrow$ **conjunto de llegada**



Llamaremos **dominio** de una relación al subconjunto del conjunto de partida formado por los elementos que tienen una relación con algún elemento del conjunto de llegada.

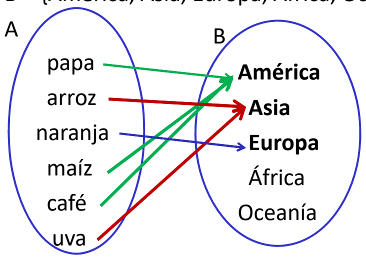
En este caso el dominio coincide con el conjunto de partida:

$$Dom\,R = A$$

Relaciones: algunas definiciones

A = {papa, arroz, maíz, café, uva, naranja} → **conjunto de partida**

B = {América, Asia, Europa, África, Oceanía} → **conjunto de llegada**



Llamaremos **rango o imagen** de una relación al subconjunto del conjunto de llegada formado por los elementos que tienen una relación con algún elemento del conjunto de partida.

En este caso la imagen es el conjunto $Im\ R$= {América, Asia, Europa}

Relaciones: otro ejemplo

A = {números naturales de 7 cifras que empiezan en 4} → **conjunto de partida**

B = {personas que viven en Bariloche} → **conjunto de llegada**

Consideremos la relación **"...es el número de teléfono fijo de..."**

Algunas observaciones:

No todo número de 7 cifras que empiezan en 4 es un número de teléfono

No toda persona que vive en Bariloche tiene un número de teléfono fijo

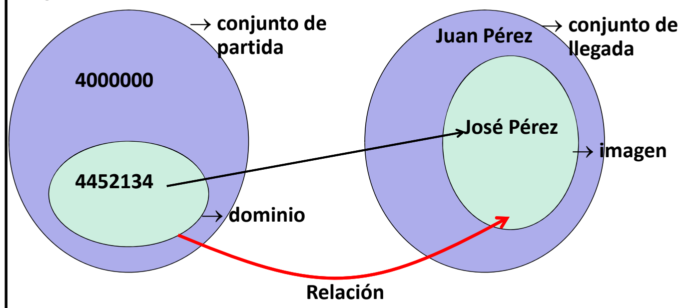
El dominio y la imagen no coinciden con los conjuntos de partida y llegada.

En este caso el **dominio** está formado por los números de7 cifras que empiezan en 4 que son número de teléfono de algún barilochense

El conjunto **imagen** está formada por: **las personas que viven en Bariloche que tienen un número de teléfono fijo**

Relaciones

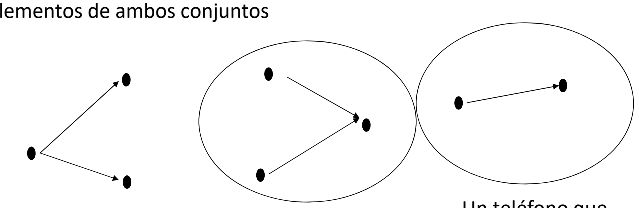
En general tendremos:



La relación vincula los elementos del **dominio** (subconjunto del conjunto de partida), con los elementos de la **imagen** (subconjunto del conjunto de llegada). La imagen también se denomina rango o codominio.

Tipos especiales de Relaciones

En el ejemplo anterior tenemos tres tipos de vínculos posibles entre los elementos de ambos conjuntos



Un teléfono que pertenece a más de una persona

Dos teléfonos que pertenecen a la misma persona

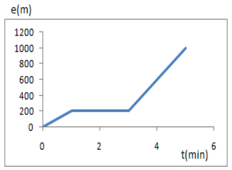
Un teléfono que pertenece a una sola persona y esa persona no tiene otro teléfono

Cuando en una relación **cada elemento del dominio** se relaciona con **un único elemento de la imagen** (no ocurre el primer caso), la relación se llama **función**

Tipos especiales de Relaciones

Estas relaciones (las funciones) pueden tener distintas representaciones:

Gráfica



Distancia recorrida en metros vs. tiempo en minutos

Fórmula

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

El valor de g se calcula a partir de una operación para cada valor de x

Tabla

Temperatura	Oxigeno (mg/l)
0	14,5
5	12,8
10	11,2
15	10
20	9,1
25	8,3
30	7,6

La concentración de oxígeno en miligramos por litro vs, la temperatura en grados

Funciones

Definición: Una relación

$$f: A \to B$$

es una función si a cada elemento del conjunto A se tiene asociado un único elemento del conjunto B.

En una función, el **dominio** es el subconjunto de elementos del conjunto de partida para los cuales existe una imagen.

En una función, la **imagen** o **rango** es el subconjunto de elementos del conjunto de llegada para los cuales existe un elemento del conjunto de partida con el que se vinculan

Funciones

En su forma genérica, las **funciones** que tienen una sola variable, cuando se expresan a través de una fórmula se escriben como

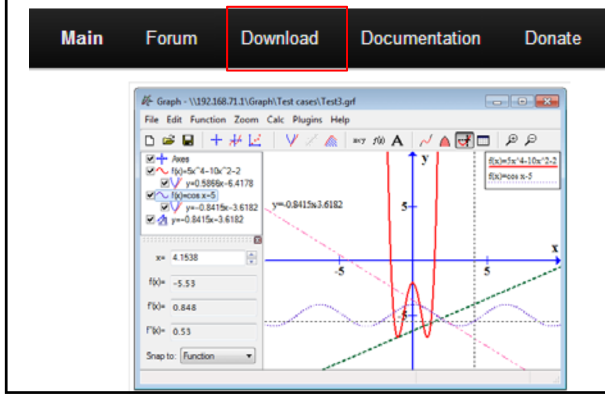
$$f(x)$$

x es un valor genérico para el elemento del dominio, llamado "variable independiente"

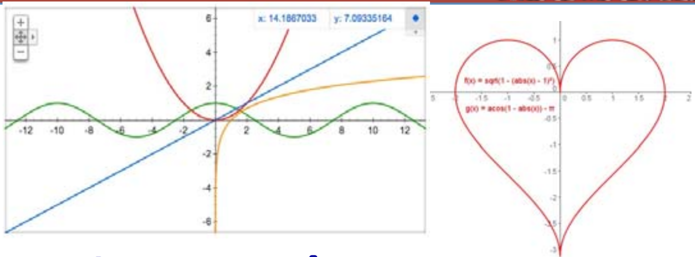
$f(x)$ indica el valor de la imagen para ese valor de x

GRAPH 4.4.2

http://www.padowan.dk/



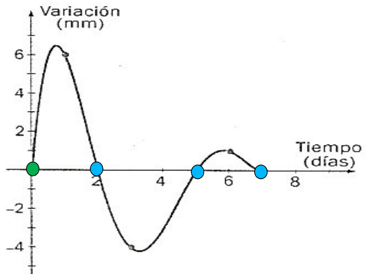
Parte 2



Lectura, interpretación y construcción de gráficos de funciones

Lectura de gráficos

la variación en milímetros durante una semana, de la longitud de una viga de acero, que varía según la temperatura del ambiente



¿Es una función?

Escala y unidades del eje horizontal

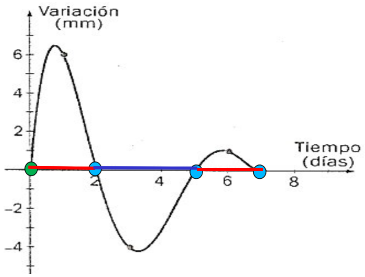
Escala y unidades del eje vertical

¿Qué representa el punto (0,0)?

¿Qué representan estos puntos celestes?

Lectura de gráficos

la variación en milímetros durante una semana, de la longitud de una viga de acero, que varía según la temperatura del ambiente



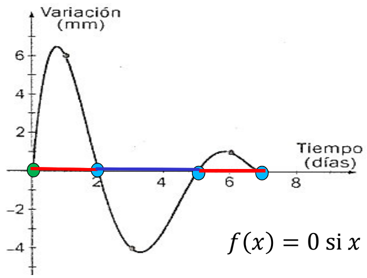
¿Que significa $f(x) > 0$?

¿Dónde (en el gráfico es $f(x) > 0$?

¿Que significa $f(x) < 0$?

¿Dónde (en el gráfico es $f(x) < 0$?

Lectura de gráficos



$\text{Dom } f(x) = [0,7]$

$\text{Im } f(x) = [-4,6]$

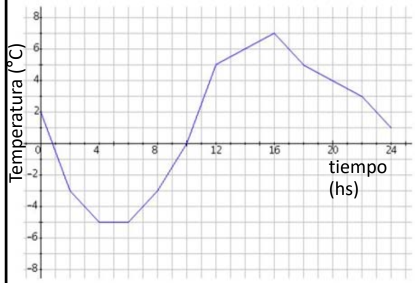
$f(x) = 0$ si $x = 0, x = 2, x = 5$ y $x = 7$

$f(x) > 0$ si $x \in (0,2) \cup (5,6)$

$f(x) < 0$ si $x \in (2,4)$

Para practicar

El gráfico muestra la variación de la temperatura del aire a lo largo de un día.



¿Es una función?

Escala y unidades del eje horizontal

Escala y unidades del eje vertical

¿Dónde está y qué representa el punto (0,2)?

¿Dónde están los puntos para los que f(x) =0?

¿Qué significa f(x) =0?

¿En qué horarios la temperatura fue de 5°C?

¿Que significa f(x) < 0?

¿Dónde es f(x) < 0?

¿Que significa f(x) > 0?

¿Dónde es f(x) > 0?

Para practicar

En una habitación a 20°C se coloca un recipiente con agua a 80°C dentro de otro más grande con agua a 40°C y se registra la temperatura cada 5 min.

Confeccionar un gráfico que muestre la variación de temperatura del agua en ambos recipientes en función del tiempo (son dos curvas). Graficar para el intervalo de tiempo [0, 20]

Definir escala, unidades y rango de variación del eje horizontal

Definir escala, unidades y rango de variación del eje vertical

Establecer valores iniciales

Graficar para el intervalo de tiempo [0, 120]

Dominio de funciones

Definición: El **dominio** de una función es el conjunto de valores que tienen imagen por la función.

Cuando tenemos una fórmula para definir la función, el dominio se define como aquellos números (reales por lo general) para los cuales "podemos hacer la cuenta"

Algunas operaciones tienen sus restricciones

Un denominador no puede ser cero

Una raíz cuadrada no puede calcularse sobre números negativos

Algunas funciones como el logaritmo no pueden calcularse sobre números negativos ni sobre cero

Dominio de funciones

Para determinar del dominio de una función dada por medio de una fórmula debemos considerar esas restricciones.

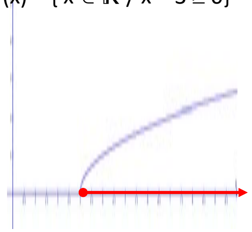
El dominio siempre será un subconjunto (eventualmente todo) de $\mathbb{R}$.

Por lo tanto su representación gráfica es sobre el eje x (en la recta real)

Ejemplo $f(x) = \sqrt{x-3}$ Dom f(x) = $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x-3 \geq 0 \}$

La raíz cuadrada no puede ser calculada sobre un número negativo, por lo tanto $x-3$ debe ser positivo o 0

$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3 \quad \boxed{x \in [3, +\infty)}$



Algunas particularidades

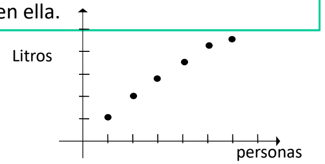
Litros de agua promedio consumidos por día en una casa particular, respecto número de personas que viven en ella.

¿Es una función?

¿Qué variables relaciona?

Dominio?

Imagen?



Es una función

Número de personas que viven en una casa con litros de agua consumidos por día

Dominio: Algún subconjunto de N*

Imagen: Algún subconjunto de R^+. Un intervalo $[x_0, x_1]$

Algunas particularidades

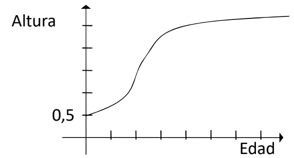
Altura de una persona, respecto del transcurso del tiempo.

¿Es una función?

¿Qué variables relaciona?

Dominio?

Imagen?



Es una función

Edad y altura

Dominio: Un intervalo $[x_0, x_1]$ (de tiempo)

Imagen: Un intervalo $[y_0, y_1]$ (de altura)

Algunas particularidades

Una llamada telefónica local en una cabina o en un teléfono público cuesta $10 los primeros 2 minutos y a partir del minuto 2, aumenta $5 por cada dos minutos.

Realizar un gráfico de la **función costo** de la llamada en **función del tiempo** de duración de la misma

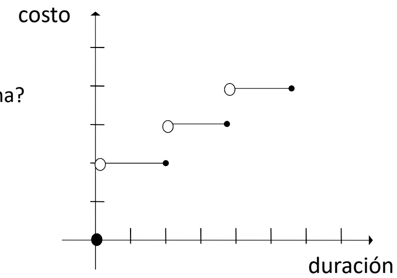
Algunas particularidades

¿Es una función?

¿Qué variables relaciona?

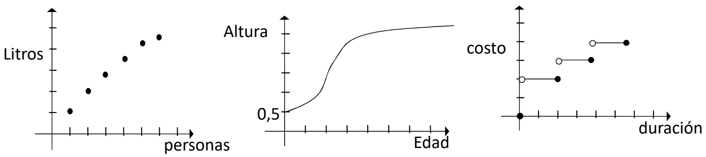
Dominio?

Imagen?



Intentar dar una fórmula que permita calcular el costo de la llamada para cualquier duración de la misma. (Tarea para el hogar)

Algunas particularidades

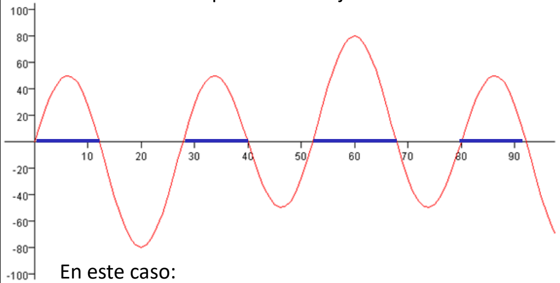


Variable Independiente		
discreta	continua	continua
Variable Dependiente		
continua	continua	discreta
Gráfico		
puntos	trazo continuo	escalones

Generalidades de las funciones

Llamaremos **conjunto de positividad** de una función al conjunto formado por aquellos valores de x para los cuales f(x) > 0

Gráficamente son los puntos en el eje x donde la curva corta está sobre el eje



El conjunto de positividad de una función están formados por intervalos abiertos

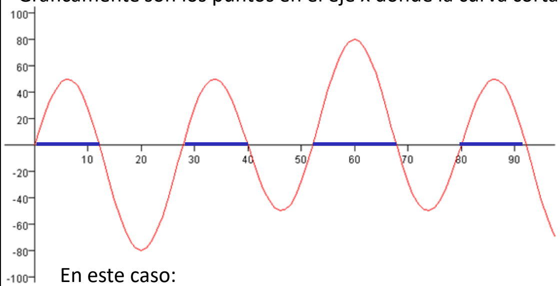
En este caso:

(0, 12) ∪ (28, 40) ∪ (52, 68) ∪ (80, 92)

Generalidades de las funciones

Llamaremos **conjunto de positividad** de una función al conjunto formado por aquellos valores de x para los cuales f(x) > 0

Gráficamente son los puntos en el eje x donde la curva corta está sobre el eje



El conjunto de positividad de una función están formados por intervalos abiertos

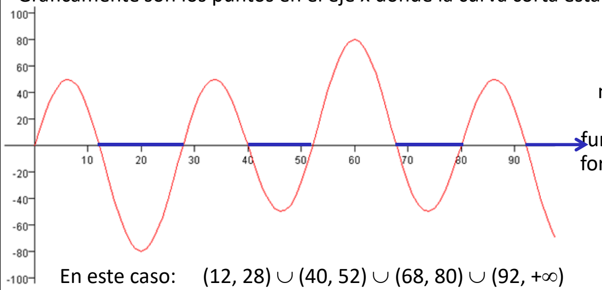
En este caso:

(0, 12) ∪ (28, 40) ∪ (52, 68) ∪ (80, 92)

Generalidades de las funciones

Llamaremos **conjunto de negatividad** de una función al conjunto formado por aquellos valores de x para los cuales f(x) < 0

Gráficamente son los puntos en el eje x donde la curva corta está sobre el eje



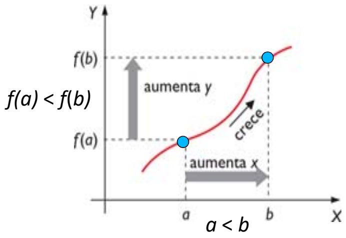
El conjunto de negatividad de una función están formados por intervalos abiertos

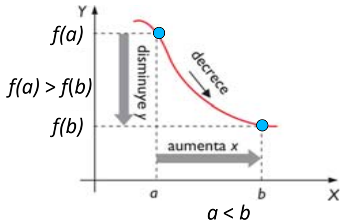
En este caso: (12, 28) ∪ (40, 52) ∪ (68, 80) ∪ (92, +∞)

Los intervalos de positividad y negatividad de están delimitados por los ceros de la función o por puntos de discontinuidad (donde la función se interrumpe)

Generalidades de las funciones

Una función se dice **creciente** en un intervalo si para todo par de puntos dentro del intervalo se cumple que si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$

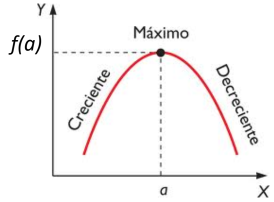




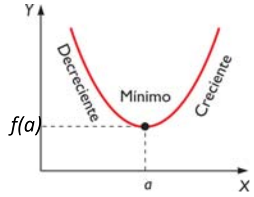
Una función se dice **decreciente** en un intervalo si para todo par de puntos dentro del intervalo se cumple que si $a < b$ entonces $f(a) > f(b)$

Generalidades de las funciones

Decimos que una función alcanza un **máximo local o relativo** en un punto $x=a$ si la imagen de ese punto $f(a)$ es mayor o igual que las imágenes de un entorno suficientemente pequeño de a



$f(a) \geq f(x)$ para los x próximos a a.



$f(a) \leq f(x)$ para los x próximos a a.

Decimos que una función alcanza un **mínimo local o relativo** en un punto $x=a$ si la imagen de ese punto $f(a)$ es menor o igual que las imágenes de un entorno suficientemente pequeño de a

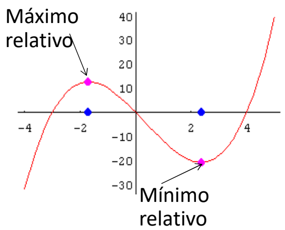
Generalidades de las funciones

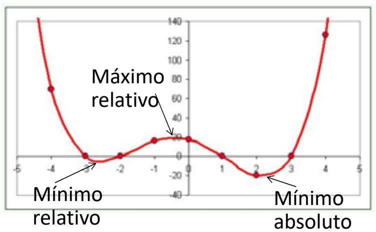
A los máximos y mínimos relativos de una función se los llama **extremos relativos**

Una función alcanza un **máximo absoluto** en $x = a$ si su imagen $f(a)$ es mayor o igual que las imágenes de todos los demás elementos del dominio. Análogamente el mínimo absoluto.

El máximo y mínimo absoluto de una función se llaman **extremos absolutos**

Una función puede tener **extremos relativos** y no absolutos

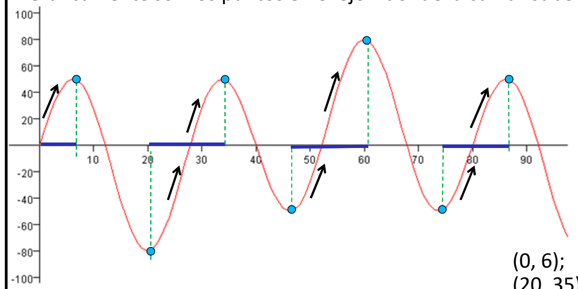




Generalidades de las funciones

Llamaremos **intervalos de crecimiento** a aquellos intervalos donde la función es creciente

Gráficamente son los puntos en el eje x donde la curva "sube"

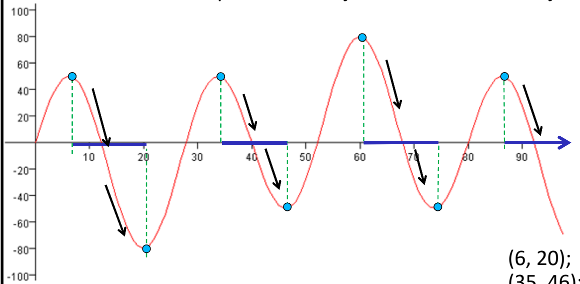


En este caso: Los intervalos de crecimiento son (0, 6); (20, 35); (46, 61) y (75, 87)

Generalidades de las funciones

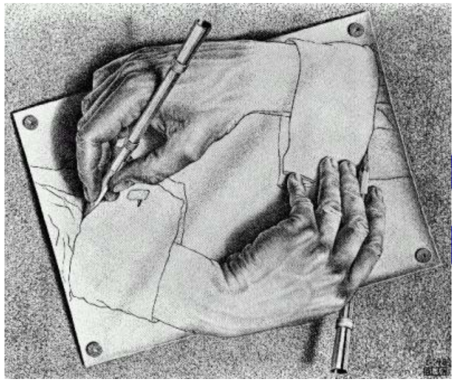
Llamaremos **intervalos de decrecimiento** a aquellos intervalos donde la función es decreciente

Gráficamente son los puntos en el eje x donde la curva “baja”



En este caso: Los intervalos de crecimiento son (6, 20); (35, 46); (61, 75) y (87, +∞)

Próxima clase



Lógica y Conjuntos

Martes 23

11 hs