# Trabajo Práctico N° 5
## Límite de sucesiones

**Definición. Sucesión.**
Se define como sucesión de números reales a una función con dominio en el conjunto de los números naturales y codominio en el conjunto de los números reales, es decir:

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & n \to f(n) \end{aligned}$$

1. Calcular los diez primeros términos de las siguientes sucesiones y graficarlas (podés usar Excel, por ejemplo):

$$a(n) = \frac{(-1)^n}{n} \qquad b(n) = \begin{cases} 1 & \text{si n es impar} \\ 2n^2 & \text{si n es par} \end{cases} \qquad c(n) = 2n + 1$$

2. Las siguientes secuencias representan los primeros términos de distintas sucesiones. Hallar una expresión formal para el término general $a(n)$ de cada una de ellas. Bosquejar un gráfico. (También se puede usar Excel, Graph o similar para graficar).

   a) $2, 4, 6, 8, 10, ...$
   b) $2, 4, 8, 16, 32, ...$
   c) $1, 3, 5, 7, 9, ...$
   d) $3, 9, 27, 81, ...$
   e) $3, 5, 7, 9, 11, ...$
   f) $1, 4, 9, 16, 25, 36, ...$
   g) $0, 2, 4, 6, 8, ...$
   h) $1, 8, 27, 64, 125, ...$
   i) $5, 7, 9, 11, 13, ...$
   j) $10, 15, 20, 25, ...$
   k) $3, 6, 9, 12, 15, ...$
   l) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, ...$
   m) $1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$
   n) $0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, ...$

3. Bajo condiciones ideales una célula puede dividirse en dos células hijas en un cierto intervalo de tiempo $t$. Las nuevas células, una vez que transcurre otro intervalo de duración $t$, vuelven a subdividirse en dos células hijas cada una. Supongamos que el tiempo se mide en unidades que coinciden con la duración $t$ del intervalo.

   a) Escribir los números de células esperables después de $1, 2, 3, 4...$ unidades de tiempo.
   b) Llamando $C(n)$ al número de células en el tiempo $n$ (después de n intervalos de duración $t$), encontrar una expresión general para el número de células en función del tiempo.
   c) Graficar esta función.
   d) ¿Es una sucesión? ¿Por qué?

4. El isótopo radioactivo del carbono $C^{14}$ tiene una vida media de 5760 años, lo cual significa que si $N$ es la cantidad de átomos de $C^{14}$, transcurridos 5760 años, $N$ se verá reducido a la mitad. Supongamos que consideramos intervalos de tiempo de 5760 años de duración. Llamando $N_0$ a la cantidad de átomos de carbono cuando $t = 0$, se pide:

   *a*) Escribir los números de átomos esperables después de $1, 2, 3, 4...$ unidades de tiempo.
   *b*) Llamando $N(t)$ al número de de átomos en el tiempo $t$ (después de $t$ intervalos de 5760 años de duración), encontrar una expresión general para el número de átomos en función del tiempo.
   *c*) Graficar esta función.
   *d*) ¿Es una sucesión? ¿Por qué?

5. Para cada una de las siguientes sucesiones, cuyos términos generales se escriben a continuación, se pide:

   *a*) Escribir los diez primeros términos de cada una.
   *b*) Realizar un gráfico de estas sucesiones y comparar sus “comportamientos”. ¿Cómo podría describirse cada uno de ellos?
   *c*) Proponer otros tres ejemplos de sucesiones que tengan comportamientos similares a los dados.

$$a(n) = 2 + \frac{1}{n} \qquad b(n) = \begin{cases} 1 & \text{si n es impar} \\ n^2 & \text{si n es par} \end{cases} \qquad c(n) = 2n^2 - 4$$

Sin pensar en una definición formal, podríamos decir intuitivamente que a las sucesiones que tienen un comportamiento como $c(n)$ del ejercicio anterior, en la que los términos son más y más grandes a medida que se toma $n$ mayor, se las denomina *divergentes*. Si en cambio cuando $n$ crece, los términos de la sucesión se acercan cada vez más a cierto valor $L$, como es el caso de la sucesión $a(n)$, se la llama sucesión *convergente*. El caso de la sucesión $b(n)$ es el de una sucesión que no converge ni diverge, pues no posee un comportamiento similar ni al de $a(n)$ ni al de $c(n)$. (Se las denomina *oscilantes*, sin que esto signifique que hay una oscilación en el sentido físico del término.)

6. Según este criterio, ¿cómo podrían clasificarse las sucesiones del ejercicio 2?

**Definición. Sucesión convergente.**
Una sucesión $a(n)$ se dice convergente al número real $L$ si, para cualquier distancia $\epsilon > 0$, es posible determinar un número natural $N(\epsilon)$ de modo que si $n$ es tomado mayor que $N(\epsilon)$, entonces la distancia entre $a(n)$ y $L$ será menor que $\epsilon$.
Es decir:

$a(n)$ **converge** a $L$ si parar todo $\epsilon > 0$,
existe $N(\epsilon)$ tal que, si $n > N(\epsilon)$, entonces $|a(n) - L| < \epsilon$

Si $a(n)$ converge a $L$ se dice que $a(n)$ **tiene límite** $L$ y se escribe:

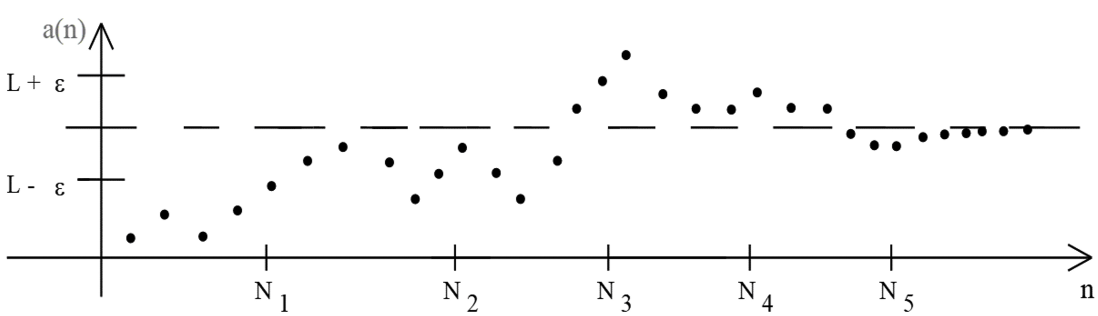
$$\lim_{n \to \infty} a(n) = L$$

7. Explicar en términos de distancia el significado de la desigualdad $|a(n) - L| < \epsilon$.

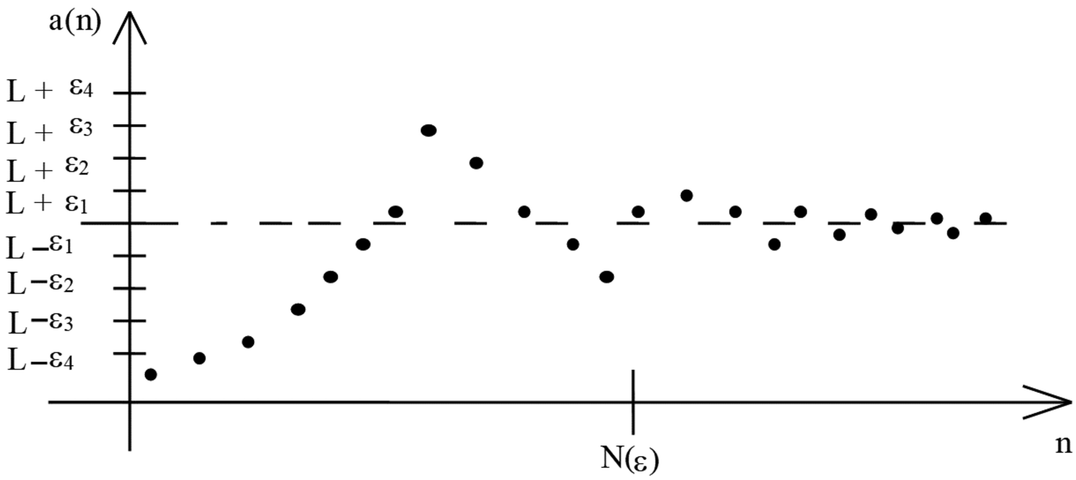
8. Analizar el siguiente razonamiento y decir si es correcto o no. Fundamentar.
"De cierta sucesión $a(n)$ se sabe que si $n$ se toma mayor que 345, la distancia entre $a(n)$ y 4 es menor que $0,0001$, si $n$ se toma mayor que 1525, la distancia entre $a(n)$ y 4 es menor que $0,00001$, y si $n$ se toma mayor que 9110, la distancia entre $a(n)$ y 4 es menor que $0,00000001$. Por lo tanto, la sucesión $a(n)$ converge a 4."

9. ¿Por qué en la definición de sucesión convergente es necesario afirmar que *para toda distancia elegida* $\epsilon > 0$, es posible determinar un número naturall $N(\epsilon)$ que cumple con la condición establecida? ¿No sería suficiente con probar que "funciona" para algunos valores de $\epsilon$?

10. Para la siguiente sucesión, establecer qué valor o valores de $N(\epsilon)$ "sirven" de acuerdo a la definición de convergencia para el $\epsilon$ marcado:




11. Para la siguiente sucesión, establecer qué valor o valores de $\epsilon$ pueden corresponder de acuerdo a la definición de convergencia para el $N(\epsilon)$ elegido:




**Definición. Sucesión divergente.**
Una sucesión $a(n)$ se dice divergente si para cualquier distancia $K > 0$, es posible determinar un número natural $N(K)$ de modo que si $n$ es tomado mayor que $N(K)$, entonces el valor absoluto de $a(n)$ será mayor que $K$.
Es decir:

$a(n)$ **diverge** si para todo $K > 0$,
existe $N(K)$ tal que, si $n > N(K)$, entonces $|a(n)| > K$

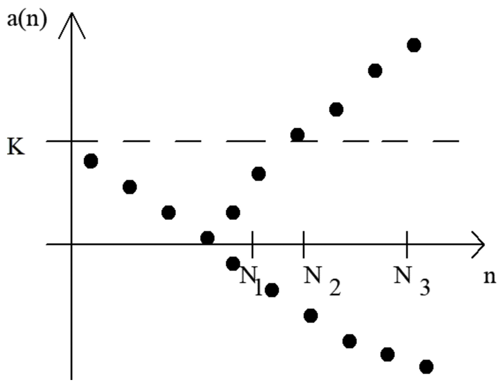
Si $a(n)$ diverge, se dice que **tiene límite infinito** y se escribe:

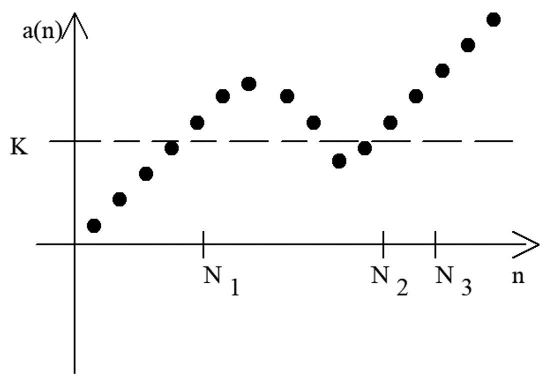
$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

12. Explicar en términos de distancia el significado de la desigualdad $|a(n)| > K$ .

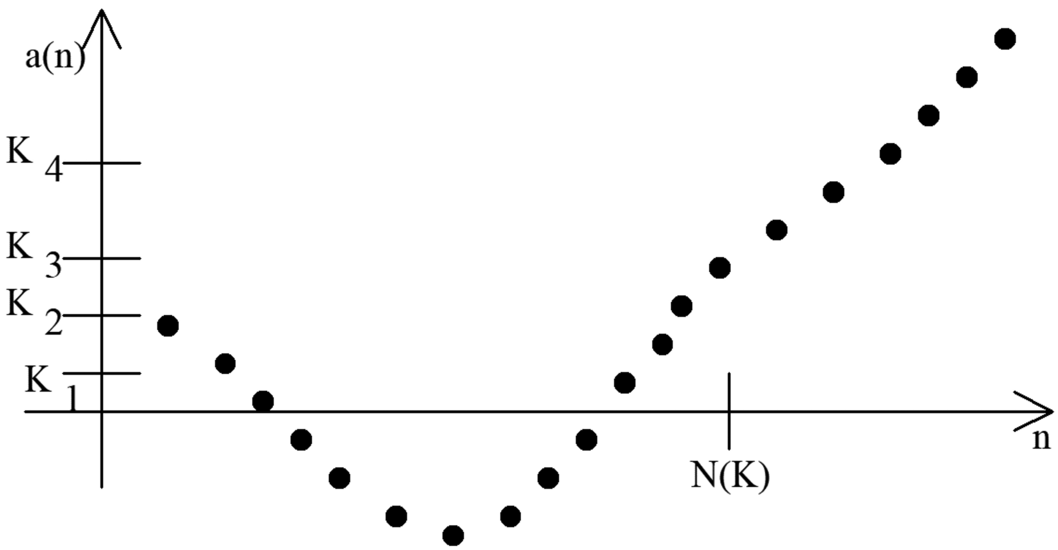
13. Analizar el siguiente razonamiento y decir si es correcto o no. Fundamentar.
“De cierta sucesión $a(n)$ se sabe que si $n$ se toma mayor que 1230, $a(n) > 10000$, si $n$ se toma mayor que 4125, $a(n) > 100000$, si $n$ se toma mayor que 9372, $a(n) > 10000000$. Por lo tanto, la sucesión es divergente”.

14. Para la siguiente sucesión, establecer qué valor o valores de $N(K)$ ”sirven”de acuerdo a la definición de divergencia para el $K$ marcado:




15. Para la siguiente sucesión, establecer qué valor o valores de $K$ pueden corresponder de acuerdo a la definición de divergencia para el $N(K)$ marcado:




**Definición. Sucesión oscilante.**
Llamaremos oscilantes, a todas aquellas sucesiones que no convergen ni divergen. Una sucesión se dice oscilante si existen al menos dos subsucesiones con distinto límite (uno finito y el otro infinito o ambos finitos y distintos).
Una sucesión oscilante se dice que no tiene límite (ni finito ni infinito).

**Definición. Sucesión acotada.**
Una sucesión $a(n)$ se dice **acotada superiormente**, si existe un valor $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo valor de $n$, las imágenes de la sucesión son menores o iguales que $C$. En símbolos:

$a(n)$ es **acotada superiormente** si existe $C \in \mathbb{R}$, tal que para todo $n$, $a(n) \leq C$

Una sucesión $a(n)$ se dice **acotada inferiormente**, si existe un valor $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo valor de $n$, las imágenes de la sucesión son mayores o iguales que $c$. En símbolos:

$a(n)$ es **acotada inferiormente** si existe $c \in \mathbb{R}$, tal que para todo $n$, $a(n) \geq c$

Una sucesión que es a la vez acotada superior e inferiormente, se dice **acotada**.

16. Proponer ejemplos gráficos de sucesiones acotadas superior pero no inferiormente, acotadas inferior pero no superiormente, y sucesiones acotadas (tanto superior como inferiormente).

17. Para cada una de las siguientes sucesiones realizar un bosquejo (aproximado) de las mismas (podés usar cualquier graficador). A continuación:

    *a*) Decidir si es o no acotada (superior y/o inferiormente).
    *b*) Establecer la mínima cota superior y/o máxima cota inferior, si existen.
    *c*) Pensar si existen otras cotas. Ejemplificar.
    *d*) ¿Es alguna de las sucesiones convergente o divergente?
    *e*) ¿Es posible establecer alguna relación entre convergencia y divergencia de una sucesión y el hecho de que sea o no acotada? Si es posible, establecer una regla general.

$$a(n) = \frac{n-3}{n^2+1} \qquad b(n) = log(n+3) \qquad c(n) = \frac{2n+3}{n+1}$$

**Teorema.** *Toda sucesión convergente es acotada.*

18. Enunciar la afirmación recíproca del teorema anterior ($q \Rightarrow p$). ¿Es verdadera o falsa? Proponer ejemplos de sucesiones que lo muestren.

**Teorema.** *Toda sucesión divergente es no acotada.*

19. ¿Cuáles pueden ser, en este teorema, las posibilidades para "no acotada"?

20. Enunciar la afirmación recíproca del teorema anterior ($q \Rightarrow p$). ¿Es verdadera o falsa? Proponer ejemplos de sucesiones que lo muestren.

21. Proponer ejemplos gráficos de sucesiones covergentes tales que:

    *a*) el límite coincida con alguna cota superior.
    *b*) el límite coincida con alguna cota inferior.
    *c*) el límite no coincida con ninguna cota.

**Teorema** (Teorema del *sandwich.*)**.** *Sean dos sucesiones $a(n)$ y $b(n)$, convergentes al mismo valor $L$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} b(n) = L$$

*y una tercera sucesión $c(n)$, para las que a partir de determinado valor de $n$, llamémoslo $N$, se cumple que $a(n) \leq c(n) \leq b(n)$. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} c(n) = L$$

22. Interpretar gráficamente el teorema anterior y explicar.

23. Hacer un gráfico de las siguientes sucesiones (por separado) que muestre aproximadamente su comportamiento. ¿Qué puede decirse acerca de la convergencia o divergencia de las mismas?

$$a(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \leq 10^3 \\ n & \text{si } n > 10^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si n es impar} \\ \frac{1}{2n} & \text{si n es par} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{3n-2} & \text{si } n \leq 50 \\ n.[(-1)^n + 1] & \text{si } n > 50 \end{cases}$$

**Teorema.** *Para las sucesiones convergentes se tiene que:*

a) *La suma de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente, y el límite de la suma es la suma de los límites de ambas sucesiones.*

b) *El producto de una sucesión convergente por una constante $k \in \mathbb{R}$ es también convergente, y el límite es igual a $k$ por el límite de la sucesión.*

c) *El producto de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente y el límite del producto es el producto de los límites de ambas sucesiones.*

d) *El cociente de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente, y el límite del cociente es el cociente de los límites de ambas sucesiones, siempre que la sucesión del denominador no converja a 0.*

*En símbolos, sea $k$ un número real y sean dos sucesiones $a(n)$ y $b(n)$, convergentes a $L$ y $M$ respectivamente. Es decir:*

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = L \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} b(n) = M$$

*Entonces:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} [a(n) + b(n)] = \lim\limits_{n\to\infty} a(n) + \lim\limits_{n\to\infty} b(n) = L + M$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} k.a(n) = k. \lim\limits_{n\to\infty} a(n) = k.L$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a(n).b(n) = \lim\limits_{n\to\infty} a(n). \lim\limits_{n\to\infty} b(n) = L.M$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} a(n)}{\lim_{n\to\infty} b(n)} = \frac{L}{M}$, *siempre que* $M \neq 0$.

**Teorema.** *Si la sucesión $a(n)$ converge a 0, la sucesión $b(n) = \frac{1}{a(n)}$ diverge, es decir:*

$$Si \ \lim_{n\to\infty} a(n) = 0, \ entonces \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = \infty$$

24. Mostrar un ejemplo de una sucesión que converja a 0 y verificar que su recíproca diverge.

**Teorema.** *Si la sucesión $a(n)$ diverge, la sucesión $b(n) = \frac{1}{a(n)}$ converge a 0, es decir:*

$$Si \ \lim_{n\to\infty} a(n) = \infty, \ entonces \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(n)} = 0$$

25. Mostrar un ejemplo de una sucesión que diverja y verificar que su recíproca converge a 0.

**Teorema.** *Si la sucesión $a(n)$ converge a $L \neq 0$ y $b(n)$ diverge, entonces su producto diverge. Es decir:*

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a(n) = L \neq 0 \;\text{ y }\; \lim_{n\to\infty} b(n) = \infty, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} a(n).b(n) = \infty$$

26. Mostrar un ejemplo de una sucesión que converja a $L \neq 0$ y una que diverja y verificar que su producto diverge.

**Definición. Formas indeterminadas.**
Se denomina *forma indeterminada* o *límite indeterminado*, a un límite del cual es imposible determinar en forma inmediata si es finito, infinito o no existe.
Algunas formas indeterminadas son:

$$\tfrac{0}{0},\ \tfrac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ \infty-\infty$$

entendiéndose que se trata de una expresión donde participan dos sucesiones que tienden a 0, 1 o $\infty$, según corresponda, y no propiamente una operación entre éstos.
*Resolver una indeterminación* (o un límite indeterminado), significa llegar a una decisión acerca del límite indeterminado, es decir, poder afirmar si es finito (cuánto vale), es infinito o no existe.

27. Dar ejemplos de sucesiones $a(n)$ y $b(n)$ tales que:

   *a*) $\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 3$
   *b*) $\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} b(n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{b(n)} = \infty$
   *c*) $\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$ , $\lim_{n\to\infty} b(n) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} a(n).b(n)$ no exista.
   *d*) $\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} b(n) = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} a(n) - b(n) = 2$

28. Si $a(n)$ y $b(n)$ son dos sucesiones divergentes, ¿se puede afirmar que $a(n)+b(n)$ también es divergente? Ejemplificar. ¿Y si ambas son convergentes?

29. Decidir el comportamiento de las siguientes sucesiones (es decir, decidir si el límie es finito (y cuánto vale), infinito, o no existe):

$a(n) = (2^n)^2$ $\quad d(n) = \frac{2^n}{4^n+1}$ $\quad f(n) = (\frac{-1}{2})^n$ $\quad h(n) = 1 + (-1)^n$

$b(n) = \frac{n-1}{n}$ $\quad e(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $\quad g(n) = \frac{n+(-1)^n}{n}$

$c(n) = \frac{n+1}{n^2}$

30. Encontrar los valores de $\alpha$ para que la siguiente sucesión resulte a) convergente, b) divergente ó c) oscilante. Justificar

$$\begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si n es impar} \\ e^{2-\alpha^2 n} & \text{si n es par} \end{cases}$$

31. En caso de ser posible, complete la siguiente sucesión de modo que (i) converja, (ii) diverja, (iii) oscile.

$$\begin{cases} \frac{2n^2+3n-6}{4n^2-2n+2} & \text{si n es impar} \\ \text{.............} & \text{si n es par} \end{cases}$$

32. Considerar la sucesión siguiente y completar de modo que la misma (i) converja, (ii) diverja ó (iii) ninguna de las anteriores. Explicar.

$$\begin{cases} 2n^2 - 3n + 2 & \text{si ...........} \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{si ...........} \end{cases}$$

33. En caso de ser posible, complete la siguiente sucesión de modo que (i) converja, (ii) diverja, (iii) oscile. Explicar.

$$\begin{cases} \frac{2n^3+3n-6}{4n^2-2n+2} & \text{si n es impar} \\ \text{.............} & \text{si n es par} \end{cases}$$