Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:
Su interpretación geométrica.
SIGUE…

Vamos a analizar el significado geométrico de algunas ecuaciones e inecuaciones que involucran valor absoluto.

$$\boxed{\begin{array}{l} d \geq 0 \\ c > 0 \end{array}}$$

Ecuaciones	**Inecuaciones**	
$\lvert x\rvert = d$	$\lvert x\rvert < d$	$\lvert x\rvert > d$
$\lvert x - c\rvert = d$	$\lvert x - c\rvert < d$	$\lvert x - c\rvert > d$
$\lvert x + c\rvert = d$	$\lvert x + c\rvert < d$	$\lvert x + c\rvert > d$

y las análogas con ≤ y ≥

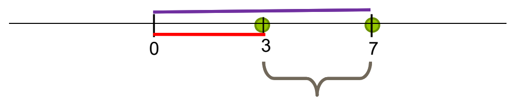
Resumiendo lo de la clase pasada

	Como distancia	Solución	Gráficamente
|x| = d	Puntos cuya distancia al 0 es igual a «d» unidades	{–d,d}	–d 0 d
|x| < d	Puntos cuya distancia al 0 es menor que «d» unidades	(–d,d)	( ) –d 0 d
|x| ≤ d	Puntos cuya distancia al 0 es menor o igual que «d» unidades	[–d,d]	[ ] –d 0 d
|x| > d	Puntos cuya distancia al 0 es mayor que «d» unidades	(–∞, –d) ∪(d, +∞)	) (–d 0 d
|x| ≥ d	Puntos cuya distancia al 0 es mayor que «d» unidades	(–∞, –d] ∪[d, +∞)	] [–d 0 d

Todos son conjuntos centrados en 0 y de radio «d»

¿Cómo podemos indicar la distancia entre dos números, independiendemente de su posición relativa en la recta?

Supongamos $7 - 3$



$\boxed{7 - 3}$

Mide la longitud del segmento que separa al 7 del 3

Ahora supongamos $3 - 7$

¿Qué "mide" esta resta?

¿Y el signo?

$x - y$

> 0 mide la distancia entre x e y y nos dice que x está a la derecha de y

< 0 mide la distancia entre x e y y nos dice que x está a la izquierda de y

¿Cómo podemos indicar la distancia entre dos números, independientemente de su posición relativa en la recta?

$|x - y|$

Supongamos que tenemos la siguiente ecuación:

$$|x - 4| = 3$$

Geométricamente, que la **distancia** entre x y 4 es de 3 unidades

Algebraicamente, que el valor absoluto del **resultado** de hacer $x - 4$ es 3

Esa es la pregunta…

Geométricamente, son los puntos cuya **distancia** al 4 es de 3 unidades

Algebraicamente, es un número al que, al restarle 4, el **resultado** es 3 o -3

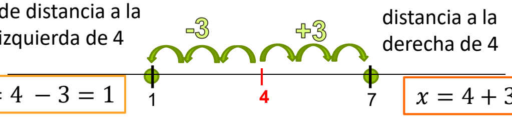
Geométricamente

$|x - 4| = 3$

Son los puntos cuya **distancia** al 4 es de 3 unidades

«3» unidades de distancia a la izquierda de 4

«3» unidades de distancia a la derecha de 4



$x = 4 - 3 = 1$

$x = 4 + 3 = 7$

Algebraicamente

Son números tales que el valor absoluto del **resultado** de hacer $x - 4$ es 3

Es decir, ese **resultado** puede ser 3 o -3

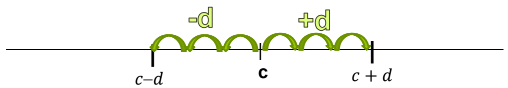
$x - 4 = 3$ ⇨ $x = 4 + 3$, o sea $\mathbf{x = 7}$

$x - 4 = -3$ ⇨ $x = 4 - 3$, o sea $\mathbf{x = 1}$

El conjunto solución está formado por dos valores: $\{1,7\}$

En general, para la ecuación $|x - c| = d$

Gráficamente la solución consiste en **dos puntos** en la recta situados a una distancia de «d» unidades (a la izquierda y a la derecha) de c:



«d» unidades de distancia a la izquierda de «c»

«d» unidades de distancia a la derecha de «c»

$x = c - d$

$x = c + d$

Entonces, la ecuación $|x - c| = d$ tiene dos soluciones:

$\boldsymbol{x = c + d}$ si x está a la derecha de c $(x > c)$

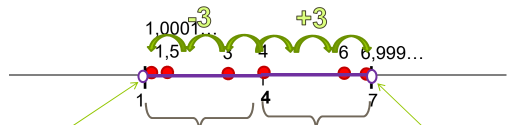
$\boldsymbol{x = c - d}$ si x está a la izquierda de c $(x < c)$

Pensemos ahora en la desigualdad $\boxed{|x-4| < 3}$

Recordemos que:

si $x = 7$, $|x-4| = 3$, y si $x = 1$, $|x-4| = 3$

¿Qué números podrían ser parte del conjunto solución de la desigualdad?



Son puntos cuya distancia al 4 es menor que 3 unidades

Excluyendo a «1»

menos de «3» unidades de distancia a la izquierda de 4

menos de «3» unidades de distancia a la derecha de 4

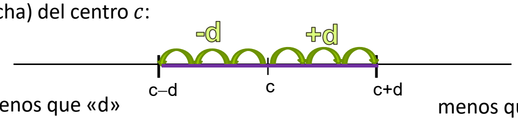
Excluyendo a «7»

$x \in (1,7) = \{x \in R / 1 < x < 7\}$

Consecuentemente, el conjunto solución la desigualdad

$\boxed{|x-c| < d}$

Estará constituido por todos los puntos de la recta que están situados a una distancia menor que «d» unidades (a la izquierda y a la derecha) del centro c:



menos que «d» unidades de distancia a la izquierda de «c»

menos que «d» unidades de distancia a la derecha de «c»

$\boxed{x > c - d}$ $\boxed{x < c + d}$

$\boxed{c - d < x < c + d}$

Entonces, la desigualdad $|x-c| < d$ tiene como solución el conjunto de números reales:

$\{x \in R / c - d < x < c + d\} = (c - d, c + d)$

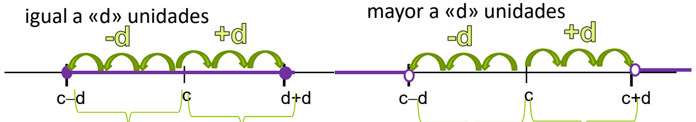
Análogamente:

$\boxed{|x-c| \le d}$

son los punto de recta cuya distancia a «c» es menor o igual a «d» unidades

$\boxed{|x-c| > d}$

gráficamente son los punto de recta cuya distancia a «c» es mayor a «d» unidades



«d» unidades de distancia a la izquierda o menos

«d» unidades de distancia a la derecha o menos

más que «d» unidades de distancia a la izquierda

«d» unidades de distancia a la derecha o menos

Incluyendo a «c–d»

Incluyendo a «c+d»

Excluyendo a «c–d»

Excluyendo a «c+d»

Por lo tanto el conjunto solución es:
$x \in [c - d, c + d]$

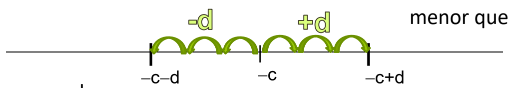
Por lo tanto el conjunto solución es:
$x \in (-\infty, c - d,) \cup (c + d, +\infty)$

Consideremos ahora la desigualdad $\boxed{|x+c| < d}$ $\boxed{d \ge 0, c > 0}$

$|x+c| < d$

puede escribirse como $|x - (-c)| < d$

La solución consiste en el conjunto de puntos cuya distancia a «–c» es menor que «d» unidades.



menos que «d» unidades de distancia a la izquierda de «$-c$»

menos que «d» unidades de distancia a la derecha de «$-c$»

$\boxed{x > -c - d}$ $\boxed{x < -c + d}$

$\boxed{-c - d < x < -c + d}$

Entonces, la desigualdad $|x+c| < d$ tiene como solución el conjunto de números reales:

$\{x \in R / -c - d < x < -c + d\} = (-c - d, -c + d)$

Des/igualdades y Valor absoluto: Resumiendo

	Como distancia	Solución	Gráficamente
$\lvert x-c\rvert = d$	Puntos cuya distancia a «c» es igual a «d» unidades	$\{c-d, c+d\}$	c–d c c+d
$\lvert x-c\rvert < d$	Puntos cuya distancia a «c» es menor que «d» unidades	$(c-d\,,\,c+d)$	c–d c c+d
$\lvert x-c\rvert \le d$	Puntos cuya distancia a «c» es menor o igual que «d» unidades	$[c-d\,,\,c+d]$	c–d c c+d
$\lvert x-c\rvert > d$	Puntos cuya distancia a «c» es mayor que «d» unidades	$(-\infty, c-d) \cup (c+d, +\infty)$	c–d c c+d
$\lvert x-c\rvert \ge d$	Puntos cuya distancia a «c» es mayor que «d» unidades	$(-\infty, c-d] \cup [c+d, +\infty)$	c–d c c+d

Todos (excepto el primero) son conjuntos centrados en c y de radio «d»

Des/igualdades y Valor absoluto: Resumiendo

	Como distancia	Solución	Gráficamente
$\lvert x+c\rvert = d$	Puntos cuya distancia a «$-c$» es igual a «d» unidades	$\{-c-d, -c+d\}$	–c–d –c –c+d
$\lvert x+c\rvert < d$	Puntos cuya distancia a «$-c$» es menor que «d» unidades	$(-c-d\,,\,-c+d)$	–c–d –c –c+d
$\lvert x+c\rvert \le d$	Puntos cuya distancia a «–c» es menor o igual que «d» unidades	$[-c-d\,,\,-c+d]$	–c–d –c –c+d
$\lvert x+c\rvert > d$	Puntos cuya distancia a «–c» es mayor que «d» unidades	$(-\infty, -c-d) \cup (-c+d, +\infty)$	–c–d –c –c+d
$\lvert x+c\rvert \ge d$	Puntos cuya distancia a «–c» es mayor que «d» unidades	$(-\infty, -c-d] \cup [-c+d, +\infty)$	–c–d –c –c+d

Todos (excepto el primero) son conjuntos centrados en $-c$ y de radio «d»

fotomat.es

FUNCION VALOR ABSOLUTO

y = |x|

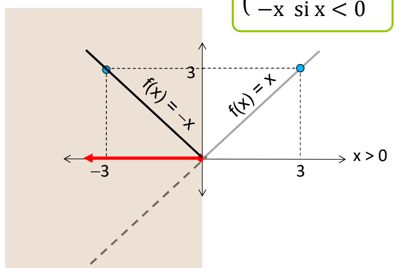
La función Valor Absoluto

Es una función $f:\ R \to R^{+} \cup \{0\}$

$$x \to |x|$$

Por definición de valor absoluto tenemos que:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ \boxed{-x \text{ si } x < 0} \end{cases}$$



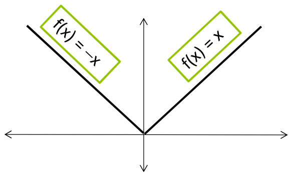
La función Valor Absoluto

Es una función $f\colon R \to R^{+} \cup \{0\}$

$x \;\to\; |x|$

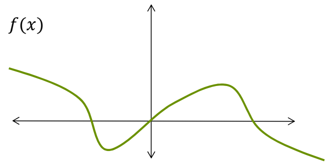
Por definición de valor absoluto tenemos que:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} \mathrm{x} \;\; \text{si x} \geq 0 \\ -\mathrm{x} \;\; \text{si x} < 0 \end{cases}$$



La función Valor Absoluto compuesta con otras funciones

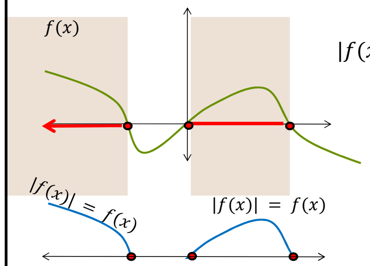
Supongamos una función cualquiera $f(x)$



Hagamos la composición de esta función con la función valor absoluto.
Es decir, $|f(x)|$.

Por definición:

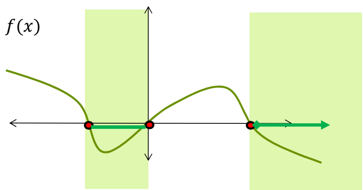
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \;\text{ cuando } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \;\text{ cuando } f(x) < 0 \end{cases}$$

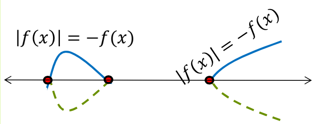


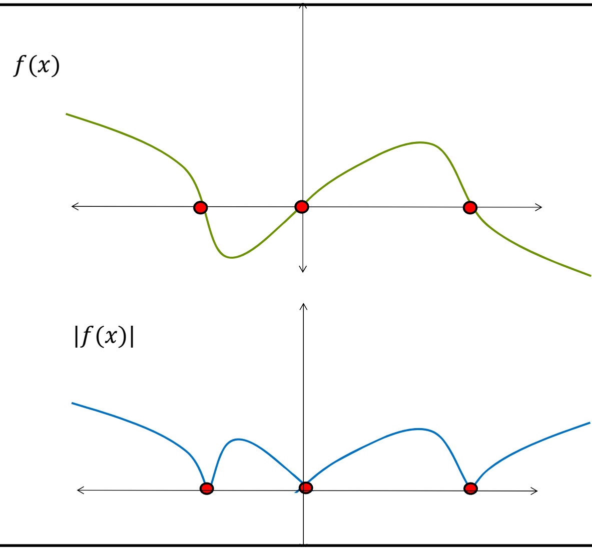
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \;\text{ cuando } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \;\text{ cuando } f(x) < 0 \end{cases}$$

Cuando $f(x) \geq 0$
$|f(x)| = f(x)$

Cuando $f(x) < 0$
$|f(x)| = -f(x)$







Ejemplo

Veamos la función $f(x) = |x - 1|$

La función $f(x) = |x - 1|$ es una función compuesta

$$x \longrightarrow x - 1 \longrightarrow |x - 1|$$

Es decir, la función módulo aplicada sobre las imágenes de la la función $x - 1$

Por definición de valor absoluto tenemos que:

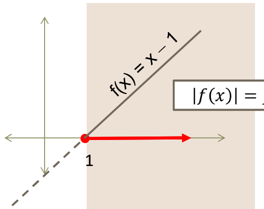
$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{si } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & si\ x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & si\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

Cuando $x - 1 \geq 0$

$|x - 1| = x - 1$

$\boxed{x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1}$

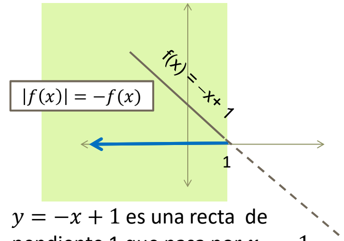


$y = x - 1$ es una recta de pendiente 1 que pasa por $x = -1$

Cuando $x - 1 < 0$

$|x - 1| = -(x - 1)$

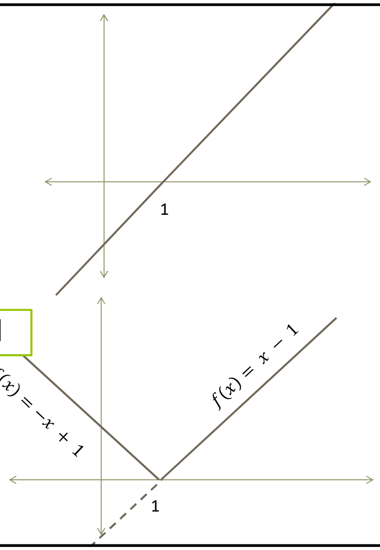
$\boxed{x - 1 < 0 \iff x < 1}$



$y = -x + 1$ es una recta de pendiente 1 que pasa por $x = 1$

$\boxed{f(x) = x - 1}$

$\boxed{|f(x)| = |x - 1|}$

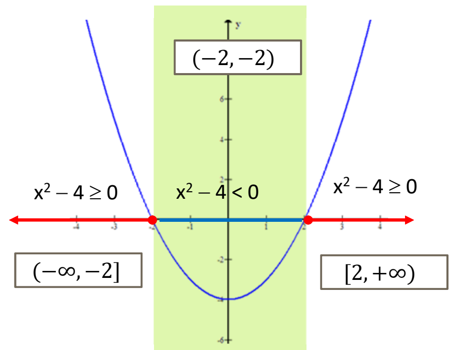


Otro ejemplo

La función $f(x) = |x^2 - 4|$ es una función compuesta donde la función módulo está aplicada sobre la función $g(x) = x^2 - 4$

Grafiquemos primero $g(x) = x^2 - 4$

Definimos intervalos de positividad y negatividad



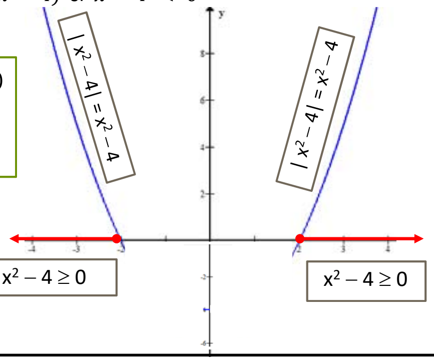
Al realizar la composición de $g(x) = x^2 - 4$ con $h(x) = |x|$ tendremos $h(g(x)) = |x^2 - 4|$. Llamémosla $f(x)$

$$f(x) = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } \boxed{x^2-4 \geq 0} \\ -(x^2-4) & \text{si } x^2-4 < 0 \end{cases}$$

En $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

En $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$
$|x^2-4| = x^2-4$

Porque $x^2 - 4 \geq 0$



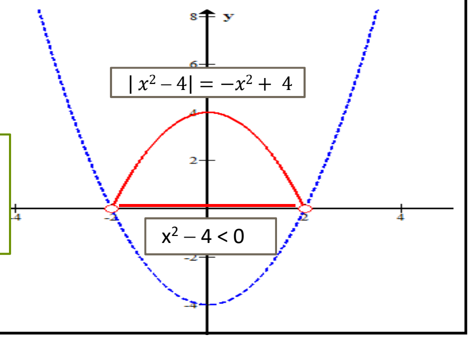
Al realizar la composición de $g(x) = x^2 - 4$ con $h(x) = |x|$ tendremos $h(g(x)) = |x^2 - 4|$. Llamémosla $f(x)$

$$f(x) = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x^2-4 \geq 0 \\ -(x^2-4) & \text{si } \boxed{x^2-4 < 0} \end{cases}$$

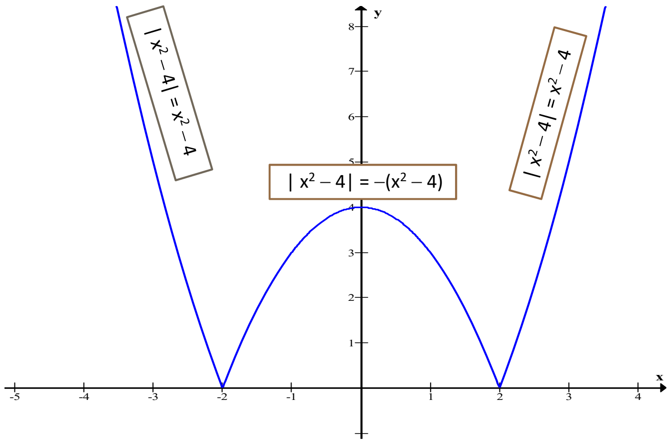
En $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

En $(-2,2)$
$|x^2-4| = -(x^2-4)$

Porque $x^2 - 4 < 0$



$f(x) = |x^2 - 4|$.



Ejemplo $\quad f(x) = |x^2 - 4x|$

$x^2 - 4x$ $\to$ Parábola con raíces en 0 y 4, ☺

$\to$ Positiva o cero en... $\quad (-\infty, 0] \cup [4,+\infty)$

$\to$ Negativa en... $\quad (0, 4)$

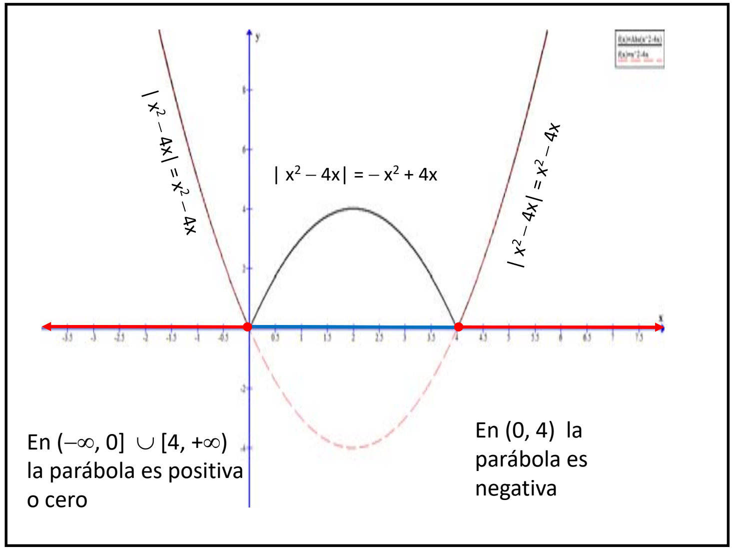
Entonces : $f(x) = |x^2-4x| = x^2-4x$ en $(-\infty, 0] \cup [4,+\infty)$

y $\; f(x) = |x^2-4x| = -(x^2-4x)$ en $(0,\ 4)$

Con el Graph

Sintaxis: para Valor Absoluto $Abs()$

$f(x) = Abs(x^2 - 4x)$



Ejemplo: $f(x) = |x^3 - 4x| = |g(x)|$

1) Graficar la función $g(x) = x^3 - 4x$

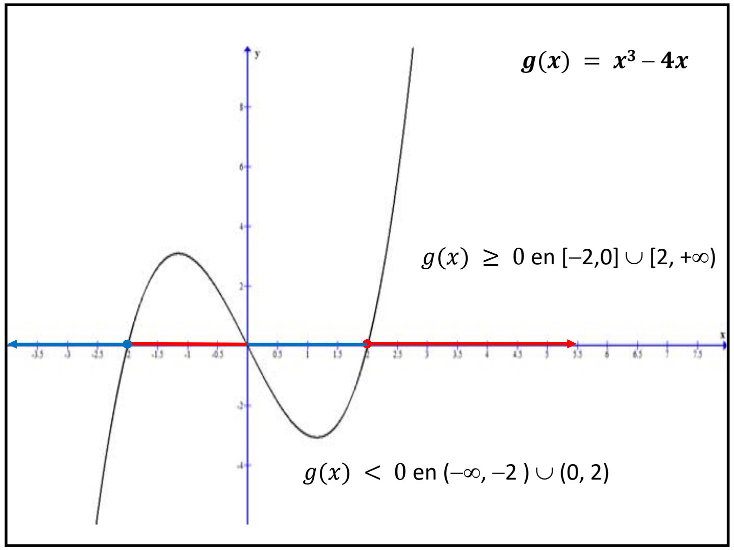
2) Dar los intervalos en los que $g(x) \geq 0$

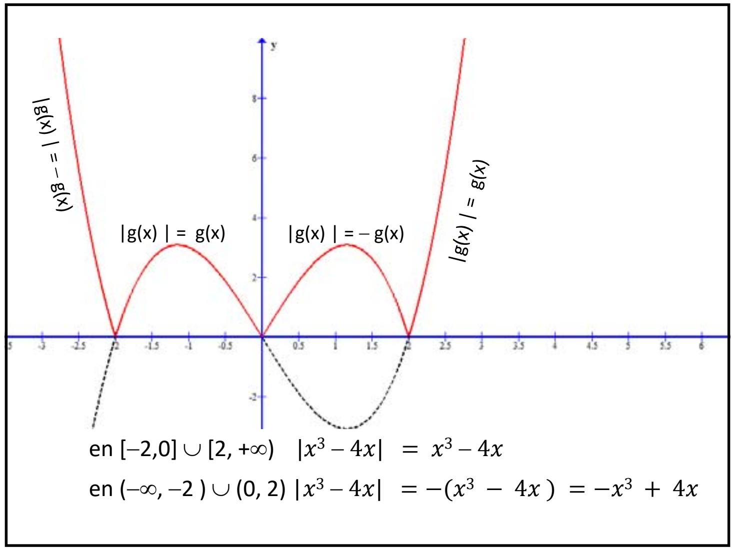
3) Dar los intervalos en los que $f(x) < 0$

4) Graficar $f(x) = |x^3 - 4x|$

5) Indicar en qué intervalos del dominio es $|g(x)| = g(x)$

6) Indicar en qué intervalos del dominio es $|g(x)| = -g(x)$





Desigualdades con valor absoluto

$|x^2 - 4x| \; < \; x \, + \, 2$

¿Resolución algebraica?

$x^2 - 4x \geq 0$ ⇒ $|x^2 - 4x| = x^2 - 4x$

Condición 1 ⇒ A

$x^2 - 4x \; < \; x \, + \, 2$ Problema a resolver

B ⇐ Solución 1

$x^2 - 4x < 0$ ⇒ $|x^2 - 4x| = -(x^2 - 4x)$

Condición 2 ⇒ C

$-(x^2 - 4x) \; < \; x \, + \, 2$ Problema a resolver

D ⇐ Solución 2

Solución ⇒ $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

Desigualdades con valor absoluto

$|x^2 - 4x| \; < \; x \, + \, 2$

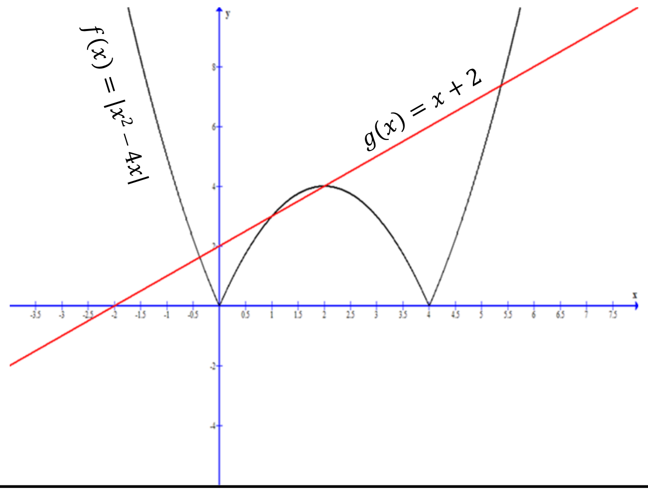
¡Comparación de funciones!

$f(x) = |x^2 - 4x|$ Función compuesta de una función cuadrática (parábola) con la función valor absoluto

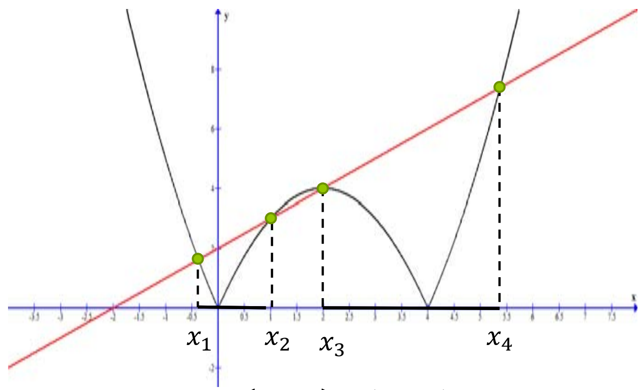
$g(x) = x - 2$ Función lineal (recta)

Para qué valores de x del dominio de ambas funciones, las imágenes de $f(x)$ son menores que las imágenes de $g(x)$

Graficar, encontrar los puntos de intersección y ¡mirar!

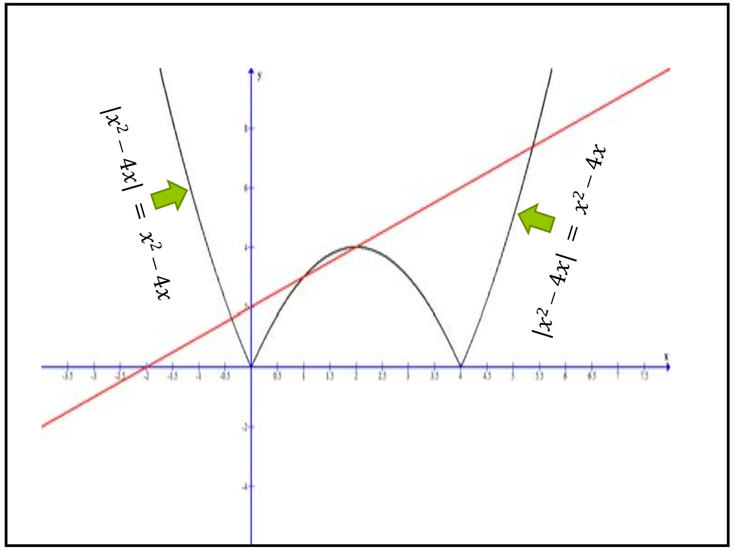


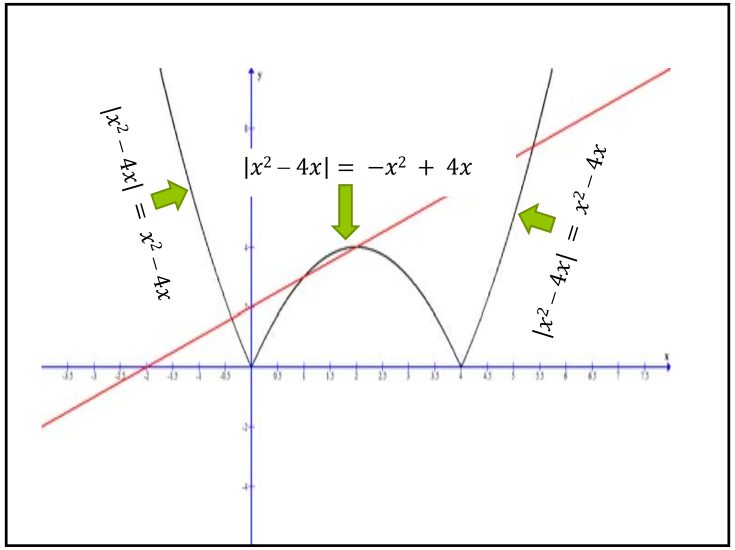
$|x^2 - 4x| \; < \; x \, + \, 2$

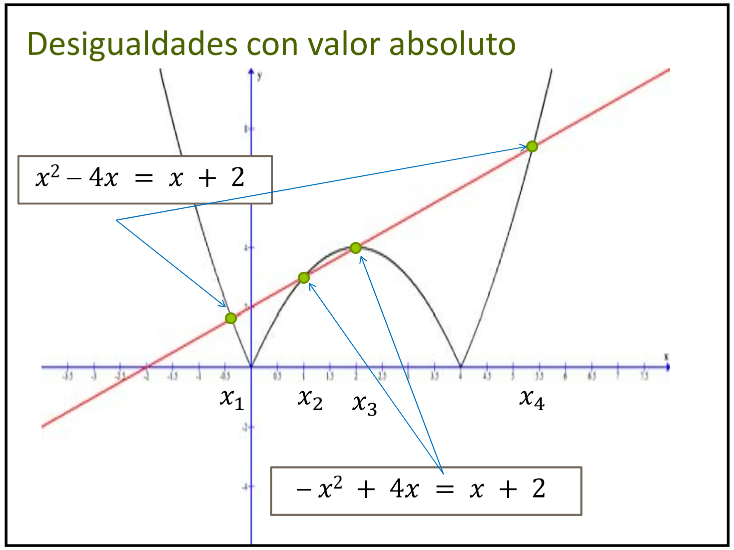


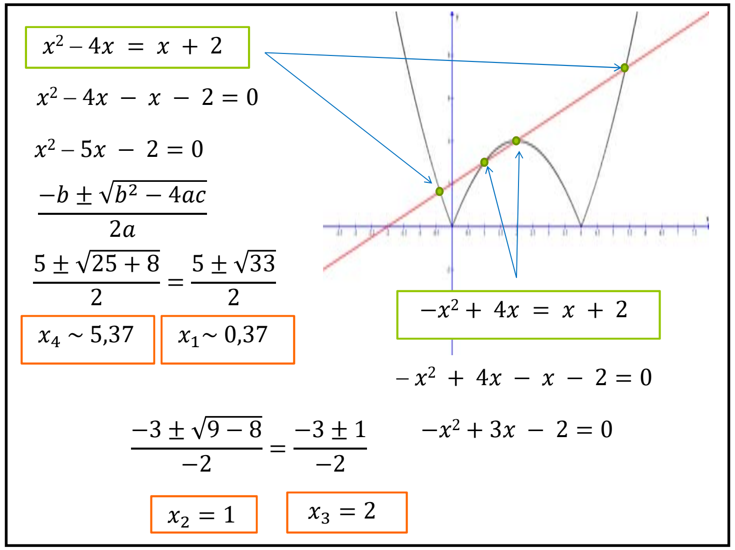
Conjunto solución: $(x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$

El problema se reduce a encontrar x_1, x_2, x_3 y x_4

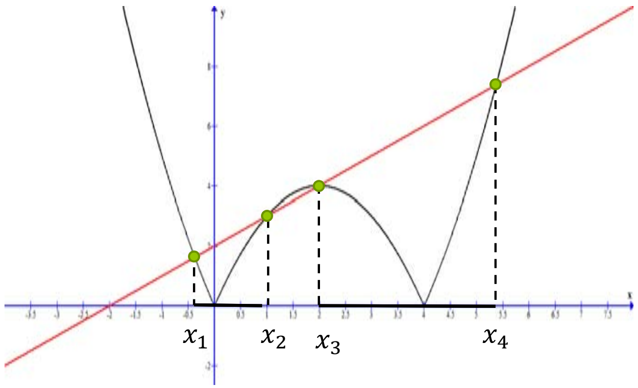

$|x^2 - 4x| = x^2 - 4x$
$|x^2 - 4x| = x^2 - 4x$


$|x^2 - 4x| = x^2 - 4x$
$|x^2 - 4x| = -x^2 + 4x$
$|x^2 - 4x| = x^2 - 4x$


Desigualdades con valor absoluto
$x^2 - 4x = x + 2$
x_1
x_2
x_3
x_4
$-x^2 + 4x = x + 2$


$x^2 - 4x = x + 2$
$x^2 - 4x - x - 2 = 0$
$x^2 - 5x - 2 = 0$
$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$\frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$
$x_4 \sim 5{,}37$
$x_1 \sim 0{,}37$
$-x^2 + 4x = x + 2$
$-x^2 + 4x - x - 2 = 0$
$-x^2 + 3x - 2 = 0$
$\frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$
$x_2 = 1$
$x_3 = 2$

$|x^2 - 4x| < x + 2$



Conjunto solución: $(-0{,}37; 1) \cup (2; 5{,}37)$

PROCEDIMIENTO para resolver $|f(x)| < g(x)$ $(>, \leq. \geq)$

1) Graficar la función $f(x)$

2) Dar los intervalos en los que $f(x) < 0$

Indicar en qué intervalos del dominio es $|f(x)| = f(x)$

3) Dar los intervalos en los que $f(x) < 0$

Indicar en qué intervalos del dominio es $|f(x)| = -f(x)$

4) Graficar $|f(x)|$

5) Graficar g(x)

6) Indicar el o los intervalos del dominio donde $|f(x)| < g(x)$

7) Buscar analíticamente los puntos donde $f(x) = g(x)$ y donde $-f(x) = g(x)$

8) Volver al gráfico y escribir con precisión el conjunto solución