# Sucesiones

## Empezando a entender el concepto de límite

Unidad 2

## sucesiones

**¿Cuál es el uso más común de los números naturales?**

Contar — Ordenar

**¿Qué hace uno cuando ordena algo?** Asigna un número de orden a cada elemento del conjunto que está ordenando:


Esta asignación es una función porque a cada número natural (número de orden) asigna una única "imagen" (cualquier cosa)

Al asignar signa un número de orden a cada elemento del conjunto que está ordenando tenemos en general:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de orden **(dominio)** | → | 1 ↓ | 2 ↓ | 3 ↓ | 4 ↓ | ... | n ↓ |
| Qué hay en cada lugar del orden **(imagen)** | → | a(1) | a(2) | a(3) | a(4) | | a(n) |

**Definición:**
Se define como **sucesión** de números reales a una **función** con dominio en el conjunto de los números naturales e imagen en algún subconjunto de los números reales:

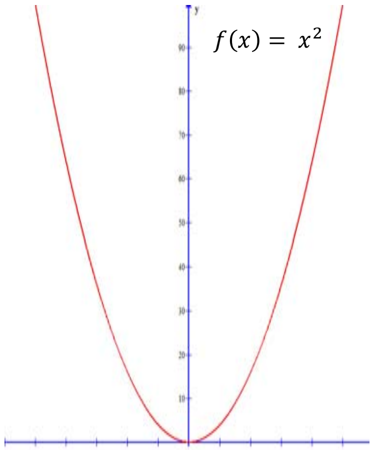
$$a: N \to R$$
$$n \to a(n)$$

## Ejemplo

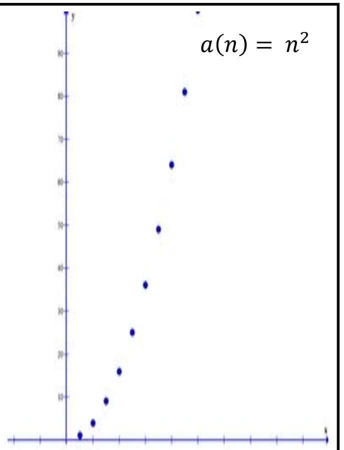
$a(n) = n^2$ Función que a cada número natural le asigna su cuadrado

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de orden | → | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | $n$ |
| | | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | | ↓ |
| Qué hay en cada lugar del orden | → | 1 | 4 | 9 | 16 | | $n^2$ |

¿En qué se diferencia $a(n) = n^2$
de esta función? $f(x) = x^2$




Variable real, trazo continuo, dominio $(-\infty, +\infty)$




Variable **natural**, puntos aislados. Dominio $N$

# Sucesiones

## Usando Excel para graficar

Unidad 2

## Análisis del comportamiento de algunas sucesiones

Graficar las siguientes sucesiones, analizar las características (tendencias) de las gráficas y agruparlas según algún criterio elegido

$a(n) = n^2$ $\quad b(n) = (-1)^n n^2$ $\quad c(n) = \dfrac{2n-2}{n+1}$

$d(n) = -2n + 6$ $\quad e(n) = (-1)^n$ $\quad \mathrm{f}(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

$g(n) = sen\, n\dfrac{\pi}{4}$ $\quad h(n) = 4 + \dfrac{1}{n}$ $\quad i(n) = \begin{cases} 20 \; si\ n\ es\ par \\ n^2 \; si\ n\ es\ impar \end{cases}$

¿Cómo hacemos esto?

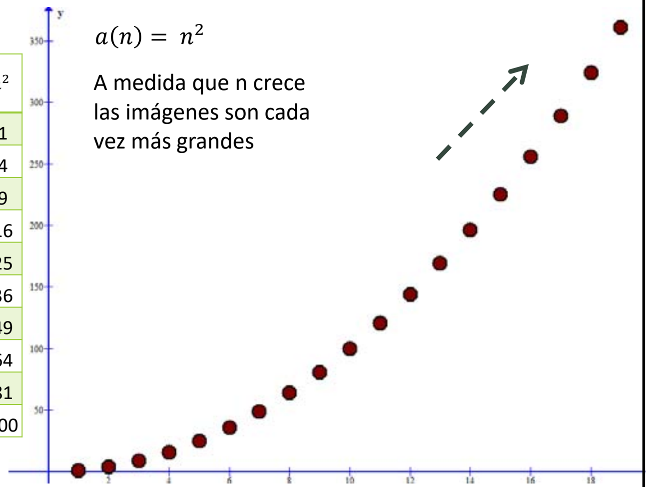
## Cálculos en Excel

| | |
|---|---|
| $a(n) = n^2$ | =A2^2 |
| $b(n) = (-1)^n n^2$ | = ((-1)^ A2)* A2^2 |
| $c(n) = \dfrac{2n-2}{n+1}$ | =(2*A2-2)/(A2+1) |
| $d(n) = -2n + 6$ | = (-2)*A2+6 |
| $e(n) = (-1)^n$ | =(-1)^A2 |
| $\mathrm{f}(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ | =(-1/2)^A2 |
| $g(n) = sen\, n\dfrac{\pi}{4}$ | =SENO((A2*3,14)/4) |
| $h(n) = 4 + \dfrac{1}{n}$ | = 4+(1/A2) |
| $i(n) = \begin{cases} 20 \; si\ n\ es\ par \\ n^2 \; si\ n\ es\ impar \end{cases}$ | =SI(ENTERO(A2/2)=(A2/2);20;A2^2) |

| n | $n^2$ | $(-1)^n n^2$ | $\frac{2n-2}{n+1}$ | $-2n+6$ | $(-1)^n$ | $\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ | $sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ | $4+\frac{1}{n}$ | $\begin{cases} 20\ n\ par \\ n^2\ \ n\ imp. \end{cases}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | 0 | 4 | -1 | -0,5 | 0,707 | 5 | 1 |
| 2 | 4 | 4 | 0,67 | 2 | 1 | 0,25 | 1 | 4,5 | 20 |
| 3 | 9 | -9 | 1 | 0 | -1 | -0,125 | 0,7071 | 4,333 | 9 |
| 4 | 16 | 16 | 1,2 | -2 | 1 | 0,0625 | 0 | 4,25 | 20 |
| 5 | 25 | -25 | 1,33 | -4 | -1 | -0,031 | -0,7071 | 4,2 | 25 |
| 6 | 36 | 36 | 1,43 | -6 | 1 | 0,015 | -1 | 4,167 | 20 |
| 7 | 49 | -49 | 1,5 | -8 | -1 | -0,008 | -0,7071 | 4,14 | 49 |
| 8 | 64 | 64 | 1,56 | -10 | 1 | 0,004 | 0 | 4,125 | 20 |
| 9 | 81 | -81 | 1,6 | -12 | -1 | -0,002 | 0,7071 | 4,11 | 81 |
| 10 | 100 | 100 | 1,64 | -14 | 1 | 0,001 | 1 | 4,1 | 20 |

# LOS GRÁFICOS

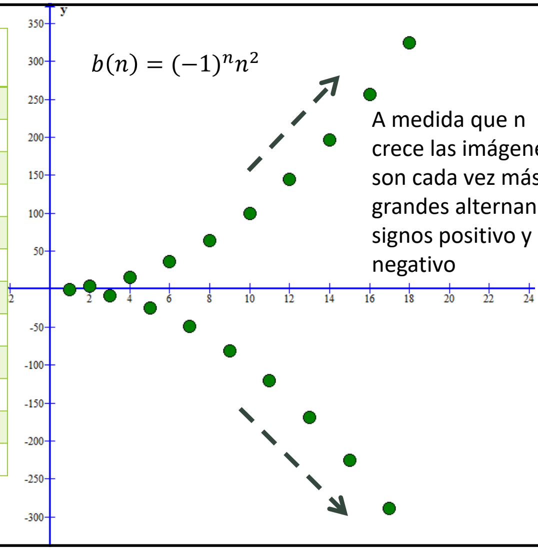
| n | $n^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 6 | 36 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| 9 | 81 |
| 10 | 100 |



$a(n) = n^2$

A medida que n crece las imágenes son cada vez más grandes

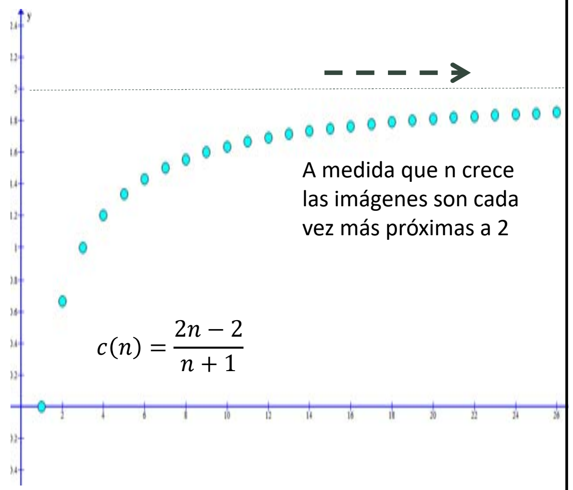
| n | $(-1)^n n^2$ |
|---|---|
| 1 | -1 |
| 2 | 4 |
| 3 | -9 |
| 4 | 16 |
| 5 | -25 |
| 6 | 36 |
| 7 | -49 |
| 8 | 64 |
| 9 | -81 |
| 10 | 100 |
| 100 | 10000 |
| 101 | -10201 |



$b(n) = (-1)^n n^2$

A medida que n crece las imágenes son cada vez más grandes alternando signos positivo y negativo

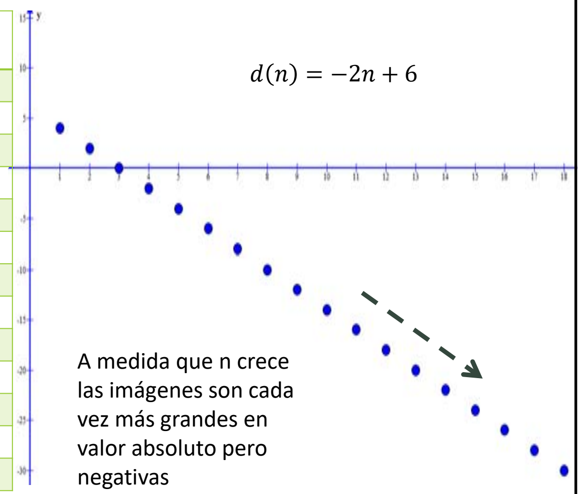
| n | $\frac{2n-2}{n+1}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,67 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1,2 |
| 5 | 1,33 |
| 6 | 1,43 |
| 7 | 1,5 |
| 8 | 1,56 |
| 9 | 1,6 |
| 10 | 1,64 |
| ... | ... |
| 50 | 1,921 |
| 100 | 1,96 |
| 1000 | 1,996 |



A medida que n crece las imágenes son cada vez más próximas a 2

$$c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$$

| n | $-2n+6$ |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 2 |
| 3 | 0 |
| 4 | -2 |
| 5 | -4 |
| 6 | -6 |
| 7 | -8 |
| 8 | -10 |
| 9 | -12 |
| 10 | -14 |
| 50 | -94 |
| 100 | -194 |
| 1000 | -1994 |

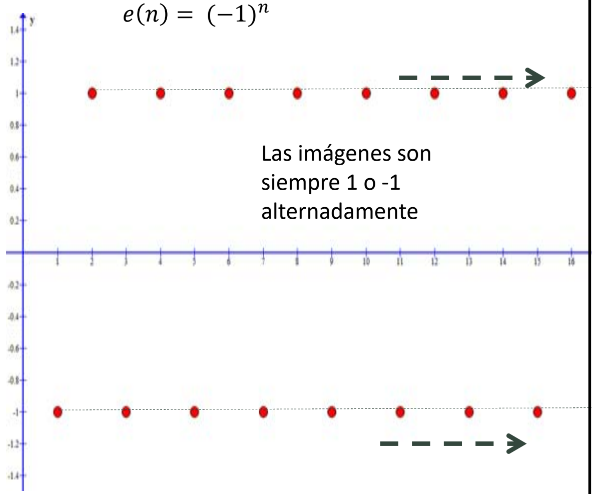


$$d(n) = -2n + 6$$

A medida que n crece las imágenes son cada vez más grandes en valor absoluto pero negativas

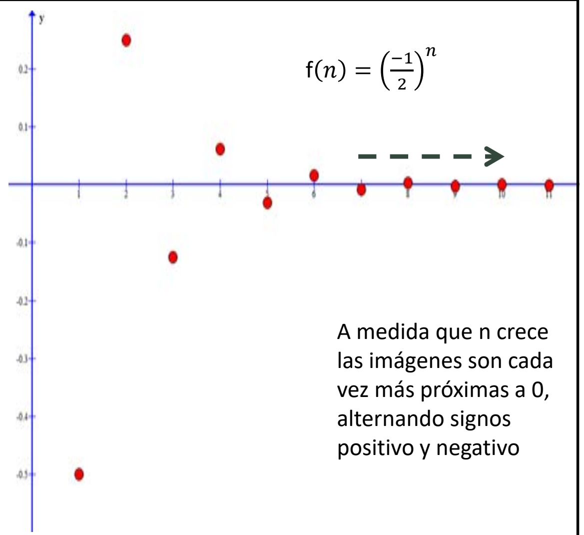
$$e(n) = (-1)^n$$

| n | $(-1)^n$ |
|---|---|
| 1 | -1 |
| 2 | 1 |
| 3 | -1 |
| 4 | 1 |
| 5 | -1 |
| 6 | 1 |
| 7 | -1 |
| 8 | 1 |
| 9 | -1 |
| 10 | 1 |



Las imágenes son siempre 1 o -1 alternadamente

| n | $\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ |
|---|---|
| 1 | -0,5 |
| 2 | 0,25 |
| 3 | -0,125 |
| 4 | 0,0625 |
| 5 | -0,031 |
| 6 | 0,015 |
| 7 | -0,008 |
| 8 | 0,004 |
| 9 | -0,002 |
| 10 | 0,001 |
| 100 | 8. $10^{-31}$ |

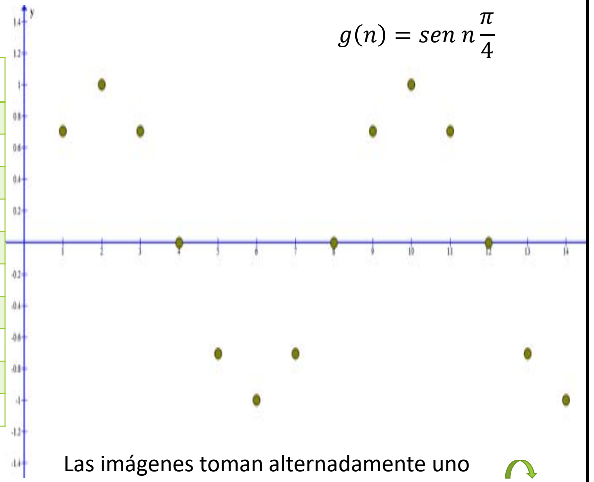


$$f(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

A medida que n crece las imágenes son cada vez más próximas a 0, alternando signos positivo y negativo

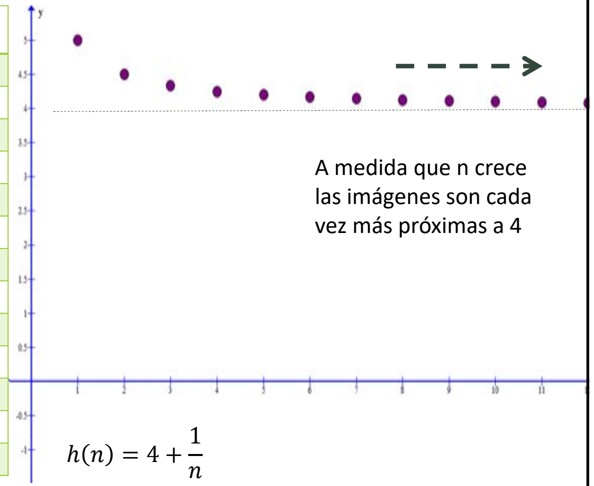
$$g(n) = sen\, n\frac{\pi}{4}$$

| n | $sen\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ |
|---|---|
| 1 | 0,707 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0,7071 |
| 4 | 0 |
| 5 | -0,7071 |
| 6 | -1 |
| 7 | -0,7071 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0,7071 |
| 10 | 1 |



Las imágenes toman alternadamente uno de 5 valores fijos

| n | $4+\frac{1}{n}$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 4,5 |
| 3 | 4,333 |
| 4 | 4,25 |
| 5 | 4,2 |
| 6 | 4,167 |
| 7 | 4,14 |
| 8 | 4,125 |
| 9 | 4,11 |
| 10 | 4,1 |
| 50 | 4.02 |
| 100 | 4.01 |
| 1000 | 4,001 |

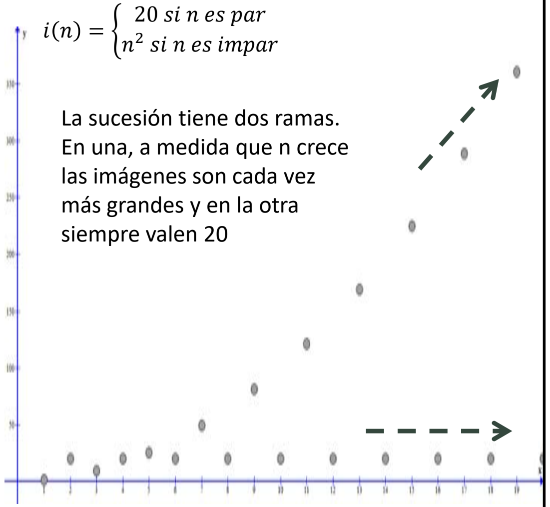


A medida que n crece las imágenes son cada vez más próximas a 4

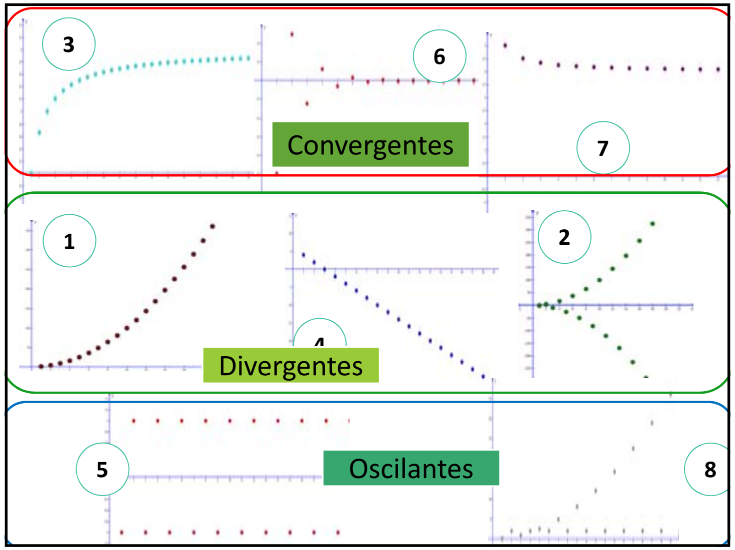
$$h(n) = 4 + \frac{1}{n}$$

$$i(n) = \begin{cases} 20 \text{ si } n \text{ es par} \\ n^2 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

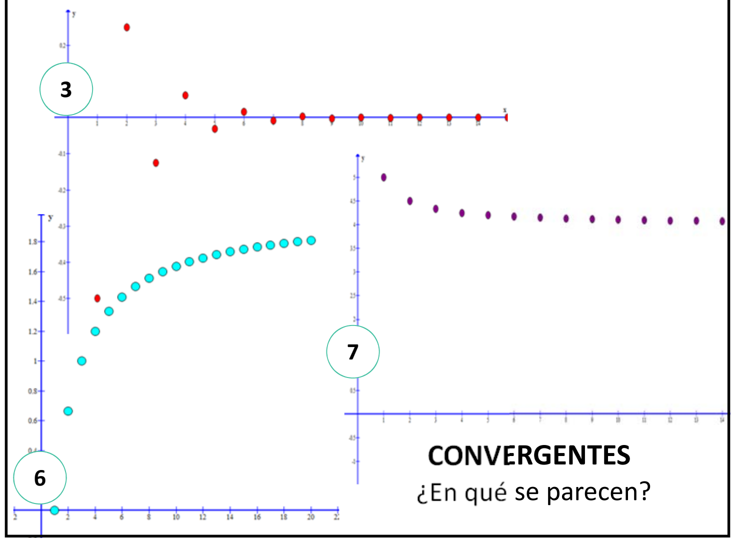
| n | $\begin{cases} 20\ n\ par \\ n^2\ n\ imp. \end{cases}$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 20 |
| 3 | 9 |
| 4 | 20 |
| 5 | 25 |
| 6 | 20 |
| 7 | 49 |
| 8 | 20 |
| 9 | 81 |
| 10 | 20 |



La sucesión tiene dos ramas. En una, a medida que n crece las imágenes son cada vez más grandes y en la otra siempre valen 20



# Sucesiones convergentes




**CONVERGENTES**

¿En qué se parecen?

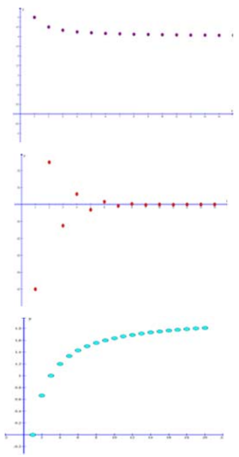
Por qué motivo pusimos juntas a las que llamamos "convergentes"?

## Criterios de agrupación

- Son todas acotadas... Pero...
- Todas "se acercan cada vez más a un número"

¿Qué significa más precisamente **"se acercan cada vez más a un número"**?

**"A medida que n aumenta las imágenes son cada vez más cercanas a un número"**



## Criterios de agrupación

**"A medida que n aumenta ...**

**las imágenes son cada vez más cercanas a un número"**

**a(n)**

**La distancia entre estas dos cosas es cada vez menor**

**L**

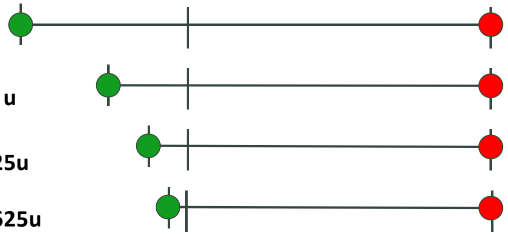
**| a(n) – L |**

**¿cada vez menor?**

**Distancia= 2 u**

En cada paso el punto verde se acerca hacia el punto rojo la mitad de la distancia que lo separa de punto medio

**Paso 1**
**Distancia= 1,5 u**
**Paso 2**
**Distancia= 1,25 u**
**Paso 3**
**Distancia= 1,125u**
**Paso 4**
**Distancia= 1,0625u**



El punto verde ¿está a una distancia cada vez menor del punto rojo?

¿Es eso lo que queremos decir? con "cada vez más cerca?

| n | $\frac{2n-2}{n+1}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,67 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1,2 |
| 5 | 1,33 |
| 6 | 1,43 |
| 7 | 1,5 |
| 8 | 1,56 |
| 9 | 1,6 |
| 10 | 1,64 |
| ... | ... |
| 50 | 1,921 |
| 100 | 1,96 |
| 1000 | 1,996 |

$$c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$$

**Se acerca cada vez más a...**

**L = 2**

| n | $\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ |
|---|---|
| 1 | -0,5 |
| 2 | 0,25 |
| 3 | -0,125 |
| 4 | 0,0625 |
| 5 | -0,031 |
| 6 | 0,015 |
| 7 | -0,008 |
| 8 | 0,004 |
| 9 | -0,002 |
| 10 | 0,001 |
| 100 | $8.\ 10^{-31}$ |

$$f(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

**Se acerca cada vez más a...**

**L = 0**

$$h(n) = 4 + \frac{1}{n}$$

**Se acerca cada vez más a...**

**L = 0**

| n | $4+\frac{1}{n}$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 4,5 |
| 3 | 4,333 |
| 7 | 4,14 |
| 8 | 4,125 |
| 9 | 4,11 |
| 10 | 4,1 |
| 50 | 4.02 |
| 100 | 4.01 |
| 1000 | 4,001 |

$$c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$$ Se acerca cada vez más a... **L = 2**

**Nos interesa ver qué le pasa a la distancia |c(n) – 2|**

$$f(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$ Se acerca cada vez más a... **L = 0**

**Nos interesa ver qué le pasa a la distancia |f(n) – 0|**

$$h(n) = 4 + \frac{1}{n}$$ Se acerca cada vez más a... **L = 4**

**Nos interesa ver qué le pasa a la distancia |h(n) – 4|**

| n | $c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$ | \|c(n) - 2\| |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | 0,6667 | 1,333333333 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1,2 | 0,8 |
| 5 | 1,333333333 | 0,666666667 |
| 100 | 1,96039604 | 0,03960396 |
| 101 | 1,960784314 | 0,039215686 |
| 102 | 1,961165049 | 0,038834951 |
| 103 | 1,961538462 | 0,038461538 |
| 104 | 1,961904762 | 0,038095238 |
| 105 | 1,962264151 | 0,037735849 |
| 1000 | 1,996003996 | 0,003996004 |
| 1001 | 1,996007984 | 0,003992016 |
| 1002 | 1,996011964 | 0,003988036 |
| 1003 | 1,996015936 | 0,003984064 |
| 1004 | 1,9960199 | 0,0039801 |
| 1005 | 1,996023857 | 0,003976143 |
| 10001 | 1,99960008 | 0,00039992 |
| 10002 | 1,99960012 | 0,00039988 |
| 10003 | 1,99960016 | 0,00039984 |
| 10004 | 1,9996002 | 0,0003998 |
| 10005 | 1,99960024 | 0,00039976 |

$$c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$$

Se acerca cada vez más a **L = 2**

La distancia entre la imagen de cada número n y el número 2 es cada vez más cercana a 0

|c(n) – 2 | tiende a 0

|c(n) – 2 | → 0

| n | $f(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ | \|f(n) - 0\| |
|---|---|---|
| 1 | -0,5 | 0,5 |
| 2 | 0,25 | 0,25 |
| 3 | -0,125 | 0,125 |
| 4 | 0,0625 | 0,0625 |
| 5 | -0,03125 | 0,03125 |
| 100 | 7,88861E-31 | 7,88861E-31 |
| 101 | -3,9443E-31 | 3,9443E-31 |
| 102 | 1,97215E-31 | 1,97215E-31 |
| 103 | -9,8607E-32 | 9,86076E-32 |
| 104 | 4,93038E-32 | 4,93038E-32 |
| 105 | -2,4651E-32 | 2,46519E-32 |
| 1000 | 9,3326E-302 | 9,3326E-302 |
| 1001 | -4,666E-302 | 4,6663E-302 |
| 1002 | 2,3332E-302 | 2,3332E-302 |
| 1003 | -1,166E-302 | 1,1666E-302 |
| 1004 | 5,8329E-303 | 5,8329E-303 |
| 1005 | -2,916E-303 | 2,9164E-303 |
| 10001 | 0 | 0 |
| 10002 | 0 | 0 |
| 10003 | 0 | 0 |
| 10004 | 0 | 0 |
| 10005 | 0 | 0 |

$$f(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

Se acerca cada vez más a **L = 0**

La distancia entre la imagen de cada número n y el número L = 0, es cada vez más cercana a 0

$|f(n) - 0|$ tiende a 0

$|f(n)| \to 0$

| n | $h(n) = 4 + \frac{1}{n}$ | \|h(n) - 4\| |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 |
| 2 | 4,5 | 0,5 |
| 3 | 4,333333333 | 0,33333 |
| 4 | 4,25 | 0,25 |
| 5 | 4,2 | 0,2 |
| 100 | 4,01 | 0,01 |
| 101 | 4,00990099 | 0,009901 |
| 102 | 4,009803922 | 0,009804 |
| 103 | 4,009708738 | 0,009709 |
| 104 | 4,009615385 | 0,009615 |
| 105 | 4,00952381 | 0,009524 |
| 1000 | 4,001 | 0,001 |
| 1001 | 4,000999001 | 0,000999 |
| 1002 | 4,000998004 | 0,000998 |
| 1003 | 4,000997009 | 0,000997 |
| 1004 | 4,000996016 | 0,000996 |
| 1005 | 4,000995025 | 0,000995 |
| 10001 | 4,00009999 | 9,999E-05 |
| 10002 | 4,00009998 | 9,998E-05 |
| 10003 | 4,00009997 | 9,997E-05 |
| 10004 | 4,00009996 | 9,996E-05 |
| 10005 | 4,00009995 | 9,995E-05 |

$$h(n) = 4 + \frac{1}{n}$$

Se acerca cada vez más a **L = 4**

La distancia entre la imagen de cada número n y el número L = 4, es cada vez más cercana a 0

$|h(n) - 4|$ tiende a 0

$|h(n) - 4| \to 0$

| n | $c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$ | \|c(n) - 2\| |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | 0,666666667 | 1,333333333 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1,2 | 0,8 |
| 5 | 1,333333333 | 0,666666667 |
| 6 | 1,428571429 | 0,571428571 |
| 7 | 1,5 | 0,5 |
| 8 | 1,555555556 | 0,444444444 |
| 9 | 1,6 | 0,4 |
| 10 | 1,636363636 | 0,363636364 |
| 15 | 1,75 | 0,25 |
| 25 | 1,846153846 | 0,153846154 |
| 38 | 1,897435897 | 0,102564103 |
| 39 | 1,9 | 0,1 |
| 40 | 1,902439024 | 0,097560976 |
| 41 | 1,904761905 | 0,095238095 |
| 79 | 1,95 | 0,05 |
| 80 | 1,950617284 | 0,049382716 |
| 81 | 1,951219512 | 0,048780488 |
| 82 | 1,951807229 | 0,048192771 |

$$c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$$

L = 2

La distancia entre las imágenes de cada número n y el número 2 ¿puede hacerse menor que 0,1?

Puede hacerse $|c(n) - 2| < 0,1$

Basta con tomar n > 39

Puede hacerse $|c(n) - 2| < 0,05$

Basta con tomar n > 79

Puede hacerse $|c(n) - 2|$ < cualquier cosa, por pequeña que sea?

Basta con tomar n suficientemente grande

| n | $f(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ | \|f(n) - 0\| |
|---|---|---|
| 1 | -0,5 | 0,5 |
| 2 | 0,25 | 0,25 |
| 3 | -0,125 | 0,125 |
| 4 | 0,0625 | 0,0625 |
| 5 | -0,03125 | 0,03125 |
| 6 | 0,015625 | 0,015625 |
| 7 | -0,0078125 | 0,0078125 |
| 8 | 0,00390625 | 0,00390625 |
| 9 | -0,00195315 | 0,0019531 |
| 10 | 0,00097653 | 0,00097653 |
| 11 | -0,00048821 | 0,00048821 |
| 12 | 0,0002441 | 0,0002441 |
| 13 | -0,00012207 | 0,00012207 |
| 14 | 6,10352E-05 | 6,10352E-05 |
| 15 | -3,0517E-05 | 3,05176E-05 |
| 16 | 1,52588E-05 | 1,52588E-05 |
| 17 | -7,6293E-06 | 7,62939E-06 |
| 18 | 3,8147E-06 | 3,8147E-06 |
| 19 | -1,90735E-06 | 1,90735E-06 |
| 20 | 9,53674E-07 | 9,53674E-07 |

$$f(n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

**L = 0**

Puede hacerse $|f(n) - 0| < 0,1$

Basta con tomar n > 3

Puede hacerse $|f(n)| < 0,01$

Basta con tomar n > 6

Puede hacerse $|f(n)| < 0,0001$

Basta con tomar n > 14

Puede hacerse $|f(n) - 0|$ < cualquier cosa, por pequeña que sea?

Basta con tomar n suficientemente grande

## En resumen...

Para cada distancia que elijamos $\varepsilon > 0$ tiene que ser posible determinar un número del dominio de la función tal que, con tal de tomar n mayor que ese número se verifica que:

la distancia entre las imágenes y el número $\boldsymbol{L}$ es menor que $\varepsilon$

Para cada $\varepsilon > \mathbf{0}$, tiene que ser posible determinar un número $N_\varepsilon$ tal que, si $n > N_\varepsilon$ se verifica $|\, a(n) - L \,| < \varepsilon$

En este caso, la sucesión se dice **CONVERGENTE**

# Sucesiones convergentes

Desmenuzando la definición

## De la Caracterización A la Definición

**La idea…**

*"Una sucesión a(n) es convergente si a medida que la variable (n) crece, la imagen se acerca cada vez más a un valor determinado, L"*

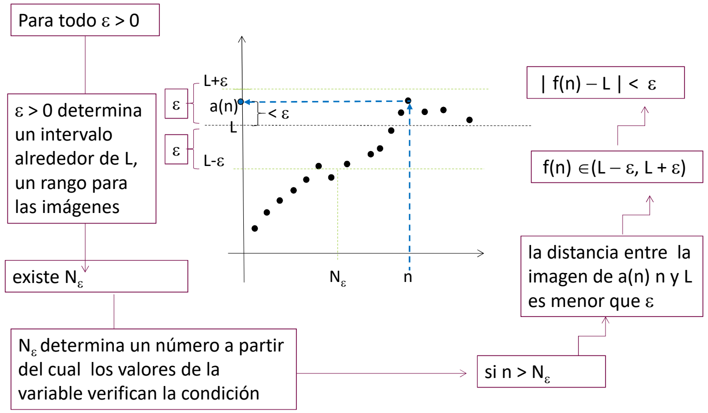
**La definición**

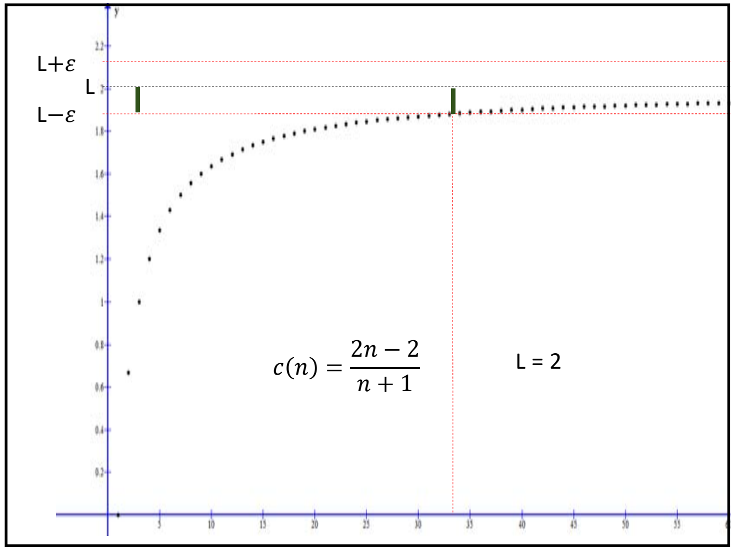
*"Una sucesión a(n) converge a L si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n > N_\varepsilon$, la distancia entre el valor de la sucesión evaluada en n y el número L es menor que $\varepsilon$. Esto es $\lim_{n\to\infty} a(n) = L$.*

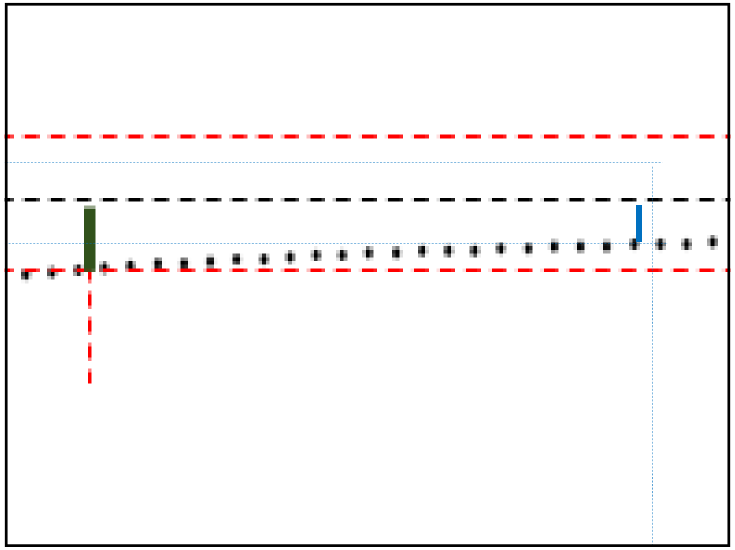
O, simbólicamente,

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \in N \,/ n > N_\varepsilon \Rightarrow |a(n) - L| < \varepsilon$$

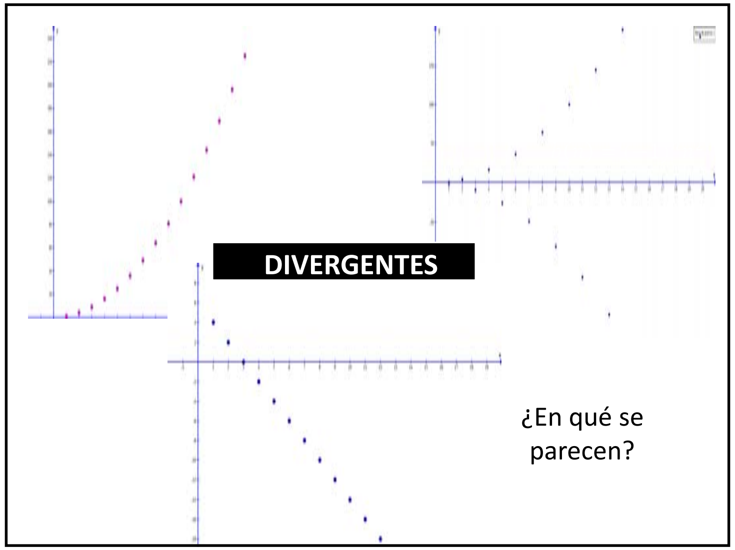
*a(n) **converge a L** si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que si $n > N_\varepsilon$, la distancia entre el valor de la sucesión evaluada en n y el número L es menor que $\varepsilon$*





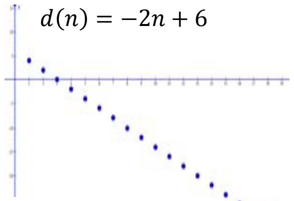
# Sucesiones divergentes



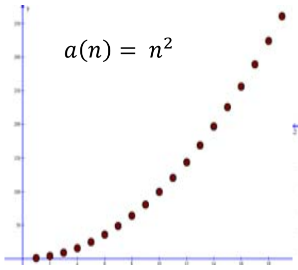
## Criterios de agrupación

- Son todas **no acotadas**
- Todas "crecen infinitamente" para arriba o para abajo

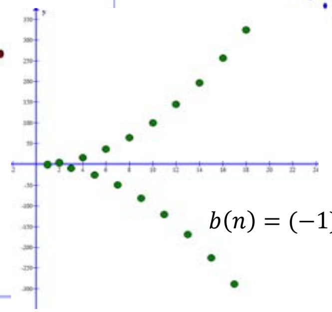
$d(n) = -2n + 6$



$a(n) = n^2$

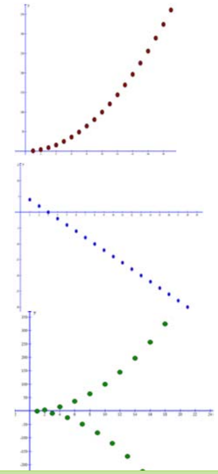


$b(n) = (-1)^n n^2$



## Criterios de agrupación

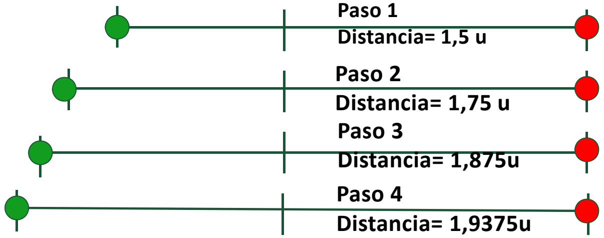
- **Caso 1:** "A medida que n aumenta las imágenes son cada vez más grandes"
- **Caso 2:** "A medida que n aumenta las imágenes son cada vez "más grandes" pero negativas"
- **Caso 3:** "A medida que n aumenta las imágenes son cada vez "más grandes" alternando positivas y negativas"
- Caso 2 = Caso 1 = Caso 3 si se consideran en **valor absoluto**



¿Qué significa más precisamente **"crecen infinitamente"**?

**dijimos: las imágenes son cada vez "más grandes" ...**


En cada paso el punto verde se aleja del punto rojo la mitad de la distancia que lo separaba de punto extremo izquierdo




El punto verde ¿está a una distancia **cada vez más grande** del punto rojo?

¿Es eso lo que queremos decir? con "cada vez más grande"?

| n | $c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,6667 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1,2 |
| 5 | 1,333333333 |
| 100 | 1,96039604 |
| 101 | 1,960784314 |
| 102 | 1,961165049 |
| 103 | 1,961538462 |
| 104 | 1,961904762 |
| 105 | 1,962264151 |
| 1000 | 1,996003996 |
| 1001 | 1,996007984 |
| 1002 | 1,996011964 |
| 1003 | 1,996015936 |
| 1004 | 1,9960199 |
| 1005 | 1,996023857 |
| 10001 | 1,99960008 |
| 10002 | 1,99960012 |
| 10003 | 1,99960016 |
| 10004 | 1,9996002 |
| 10005 | 1,99960024 |

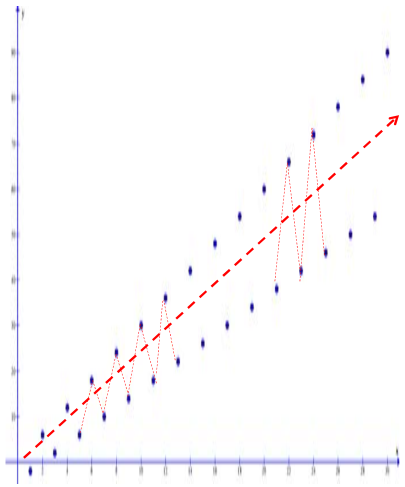
$$c(n) = \frac{2n-2}{n+1}$$

**¿Las imágenes cada vez más grandes...?**

**¡¡SI!!**

¿Eso es lo que queremos decir? (recordar que esta sucesión es convergente)

**Tener imágenes cada vez más grandes no significa "Crecer infinitamente"**



**¿Es divergente?** **SI**

Sin embargo no es cierto que sus imágenes son cada vez más grandes ...

Pero... tiene la misma tendencia que las otras.... a crecer infinitamente a pesar de las fluctuaciones

---

Crecer infinitamente no implica tener imágenes cada vez más grandes

Tener imágenes cada vez más grandes no implica crecer infinitamente

Crecer infinitamente → **superar cualquier cota**

Para cualquier cota que se elija, la sucesión divergente en algún momento la superará....

---

**Para cualquier cota que se elija,**

...... la sucesión **en algún momento**

Esta cota es cualquier número real, por más grande que sea

↓

**para cualquier K > 0**

↓ ...la superará.

**desde determinado N en adelante**

La sucesión a(n) es divergente si para cualquier cota que se elija, K > 0, siempre es posible determinar un número natural en el dominio, $N_k$, tal que con tal de tomar n > $N_k$, **la sucesión superará a K**

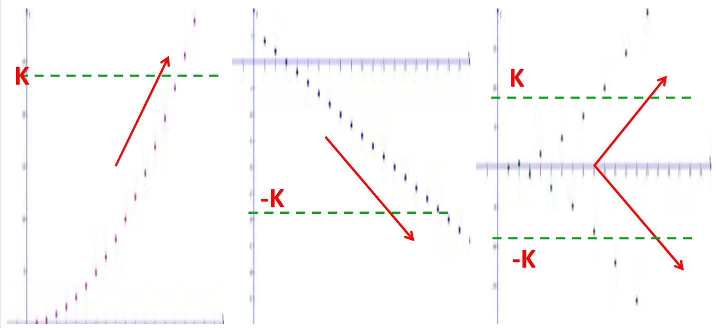
↓

**a(n) > K**

**¿y si decrecen infinitamente?**

---

**CASO 1** **CASO 2** **CASO 3**




**a(n) > K** **a(n) < –K** **AMBAS COSAS**

| n | $a(n) = n^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 50 | 2500 |
| 51 | 2601 |
| 52 | 2704 |
| 53 | 2809 |
| 54 | 2916 |
| 55 | 3025 |
| 100 | 10000 |
| 101 | 10201 |
| 102 | 10404 |
| 103 | 10609 |
| 104 | 10816 |
| 105 | 11025 |
| 1000 | 1000000 |
| 1001 | 1002001 |
| 1002 | 1004004 |
| 1003 | 1006009 |
| 1004 | 1008016 |

$a(n) = n^2$

Puede hacerse a(n) > 2500?

Basta con tomar n > 50

Puede hacerse a(n) > 10000

Basta con tomar n > 100

Puede hacerse c(n) > cualquier cosa, por grande que sea?

Basta con tomar n suficientemente grande

| n | $c(n) = -2n + 6$ |
|---|---|
| 50 | -94 |
| 51 | -96 |
| 52 | -98 |
| 53 | -100 |
| 54 | -102 |
| 55 | -104 |
| 1000 | -1994 |
| 1001 | -1996 |
| 1002 | -1998 |
| 1003 | -2000 |
| 1004 | -2002 |
| 1005 | -2004 |
| 10000 | -19994 |
| 10001 | -19996 |
| 10002 | -19998 |
| 10003 | -20000 |
| 10004 | -20002 |
| 10005 | -20004 |

$c(n) = -2n + 6$

Puede hacerse c(n) < –100?

Basta con tomar n > 53

Puede hacerse c(n) < –2000?

Basta con tomar n > 1003

Puede hacerse c(n) < cualquier cosa, por grande que sea?

Basta con tomar n suficientemente grande

| n | $a(n) = n^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 50 | 2500 |
| 51 | 2601 |
| 52 | 2704 |
| 53 | 2809 |
| 54 | 2916 |
| 55 | 3025 |
| 100 | 10000 |
| 101 | 10201 |
| 102 | 10404 |
| 103 | 10609 |
| 104 | 10816 |
| 105 | 11025 |
| 1000 | 1000000 |

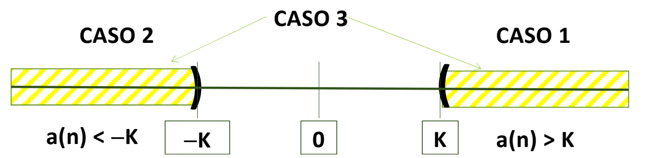
**a(n) > K**

| n | $c(n) = -2n + 6$ | \|c(n)\| |
|---|---|---|
| 50 | -94 | 94 |
| 51 | -96 | 96 |
| 52 | -98 | 98 |
| 53 | -100 | 100 |
| 54 | -102 | 102 |
| 55 | -104 | 104 |
| 1000 | -1994 | 1994 |
| 1001 | -1996 | 1996 |
| 1002 | -1998 | 1998 |
| 1003 | -2000 | 2000 |
| 1004 | -2002 | 2002 |
| 1005 | -2004 | 2004 |
| 10000 | -19994 | 19994 |
| 10001 | -19996 | 19996 |
| 10002 | -19998 | 19998 |
| 10003 | -20000 | 20000 |
| 10004 | -20002 | 20002 |
| 10005 | -20004 | 20004 |

**a(n) < –K**

| n | $b(n) = (-1)^n n^2$ | \|b(n)\| |
|---|---|---|
| 50 | 2500 | 2500 |
| 51 | -2601 | 2601 |
| 52 | 2704 | 2704 |
| 53 | -2809 | 2809 |
| 54 | 2916 | 2916 |
| 55 | -3025 | 3025 |
| 1000 | 1000000 | 1000000 |
| 1001 | -1002001 | 1002001 |
| 1002 | 1004004 | 1004004 |
| 1003 | -1006009 | 1006009 |
| 1004 | 1008016 | 1008016 |
| 1005 | -1010025 | 1010025 |
| 10000 | 100000000 | 100000000 |
| 10001 | -100020001 | 100020001 |
| 10002 | 100040004 | 100040004 |
| 10003 | -100060009 | 100060009 |
| 10004 | 100080016 | 100080016 |
| 10005 | -100100025 | 100100025 |

**|a(n)| > K**




**a(n) < –K o a(n) > K ⇒ |a(n)| > K**

**|a(n)| > K ⇒ a(n) ∈ (–∞, -K) ∪ (K, +∞ )**

**En términos de distancia....** la distancia entre las imágenes de la sucesión y el 0 es superior a cualquier cota K > 0 en valor absoluto

**Para cualquier cota que se elija,**

Esta cota es cualquier número real, por más grande que sea

**para cualquier K > 0**

...... la sucesión **en algún momento**

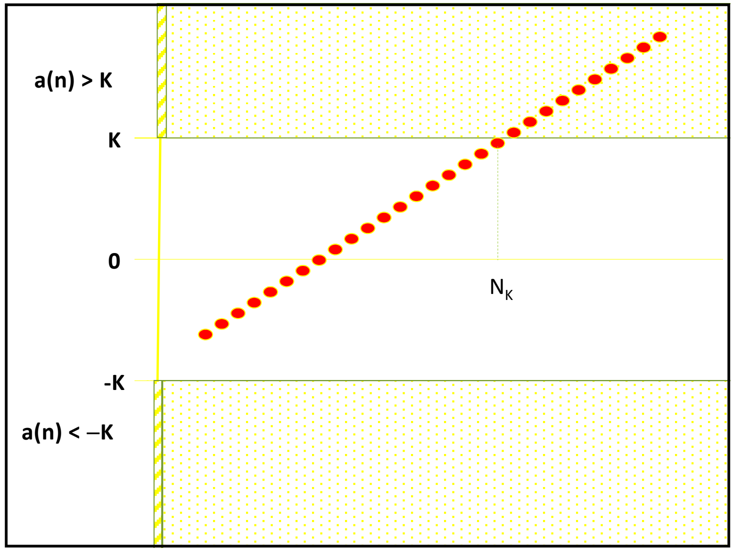
...la superará.

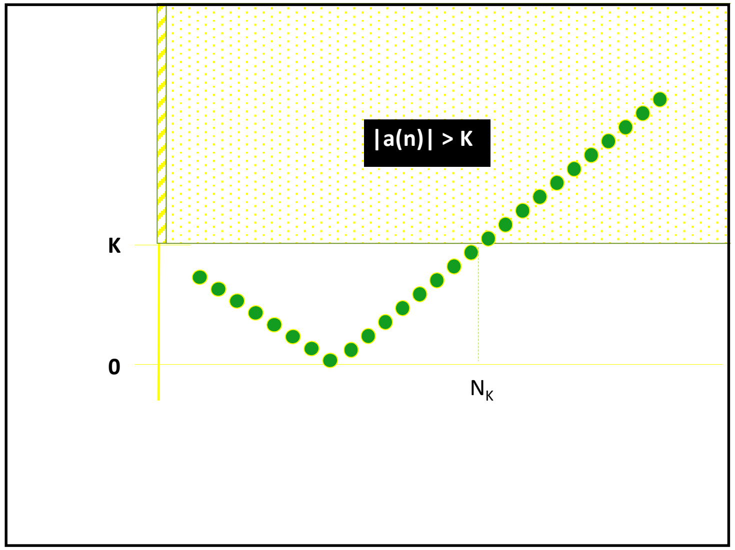
**desde determinado N en adelante**

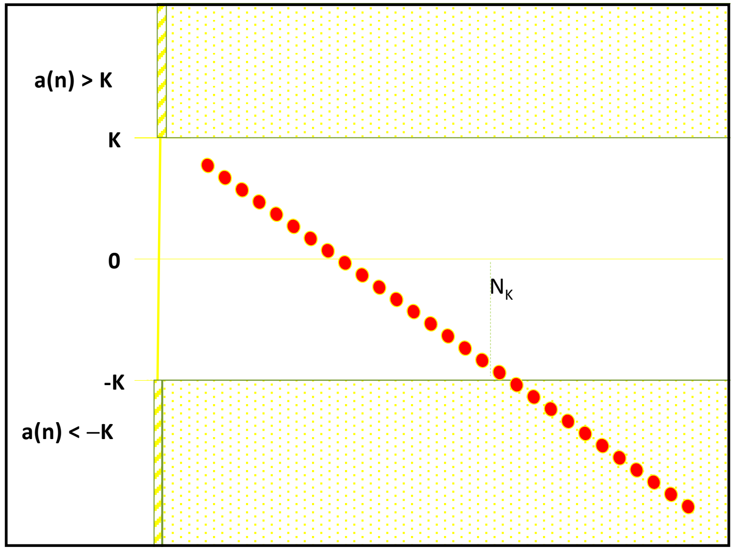
La sucesión a(n) es divergente si para cualquier cota que se elija, K > 0, siempre es posible determinar un número natural en el dominio, $N_k$, tal que con tal de tomar n > $N_k$, **la sucesión en valor absoluto superará a K**

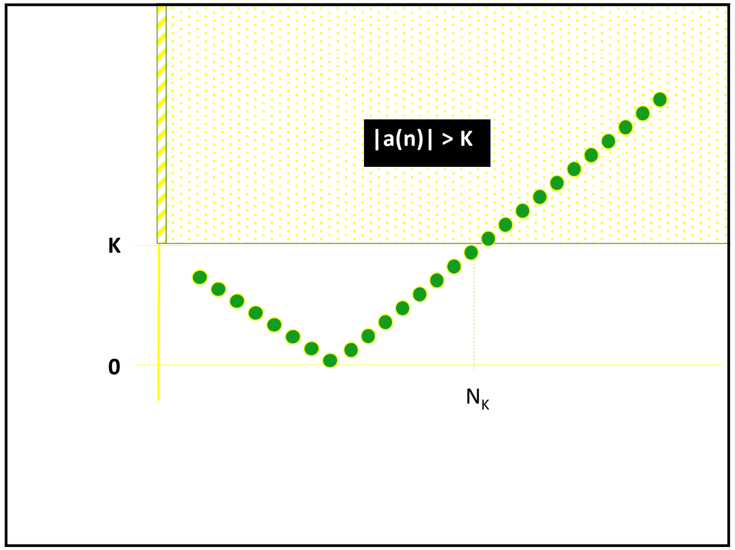
**|a(n)| > K**

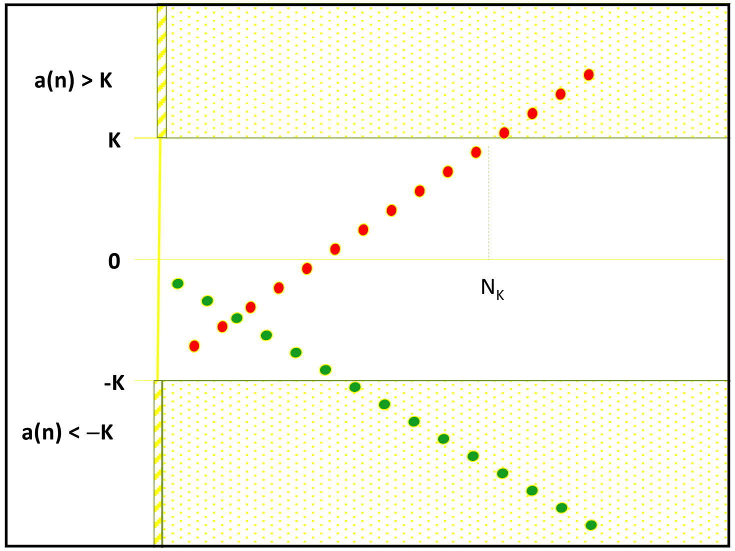
Tomando las funciones en valor absoluto los tres casos se reducen a uno solo

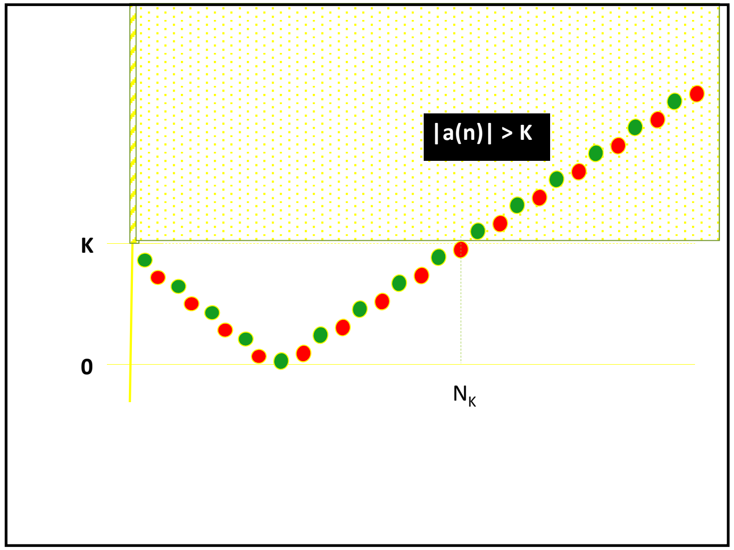





## De la Caracterización a la Definición

**La idea…**

*"Una sucesión a(n) es divergente si a medida que la variable (n) crece, la imagen crece, en valor absoluto, infinitamente"*

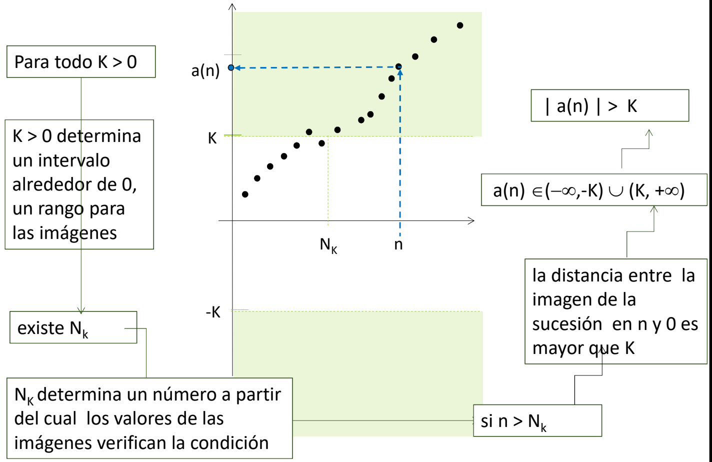
**La definición**

*"Una sucesión a(n) diverge si para todo K > 0 es posible encontrar un valor $N_K \in \mathbb{N}$ de manera que para todo n > $N_K$, las imágenes de la sucesión superan en valor absoluto a K*

O, simbólicamente,

$$\lim_{n \to \infty} a(n) = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists\, N_k \in N \,/\, n > N \Rightarrow |a(n)| > K$$

*a(n) diverge si para todo K > 0 es posible encontrar un valor $N_K \in \mathbb{N}$ de manera que para todo n > $N_K$, $|a(n)| > K$*




# RESUMIENDO….

## Convergentes

acotadas

a medida que la variable crece las imágenes se aproximan infinitamente a un número L

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = L$$

*Para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un valor $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo n > $N_\varepsilon$, $|a(n) - L| < \varepsilon$*

## Divergentes

no acotadas

a medida que la variable crece las imágenes se alejan infinitamente del 0

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$$

*Para todo K > 0 es posible encontrar un valor $N_K \in \mathbb{N}$ tal que para todo n > $N_K$, $|a(n)| > K$*