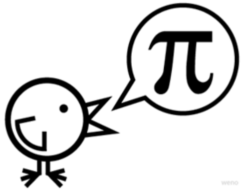
Conjuntos Numéricos

Conceptos preliminares



Algunos conceptos preliminares

Máximo de un conjunto A: es un número **M perteneciente al conjunto** que verifica que para todo elemento $x \in A$ es $x \leq M$

Mínimo de un conjunto A: es un número **m perteneciente al conjunto** que verifica que para todo elemento $x \in A$ es $m \leq x$

Ejemplos		**Máximo**	**Mínimo**
$A = \{x \in N / x \leq 10\}$	$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$	$M = 10$	$m = 1$
$B = \{x \in Z / x < 2\}$	$B = \{1, 0, -1, -2, \ldots\}$	$M = 1$	no tiene
$C = \{x \in Z / x = 2k, \text{con } k \in Z\}$	$C = \{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\}$	no tiene	no tiene

Hay conjuntos que tienen máximo y mínimo, una sola de las dos cosas o ninguna de las dos.

Algunos conceptos preliminares

Llamaremos **cota superior** de un conjunto A, a cualquier número real C tal que para todo $x \in A, x \leq C$

Llamaremos **cota inferior** de un conjunto A, a cualquier número real c tal que para todo $x \in A, x \geq c$

Ejemplos	**Cotas superiores**	**Cotas Inferiores**
$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$	$C = 10;\ 25;\ 10{,}8;\ 100$	$c = 1;\ 0, -2$
$B = \{1, 0, -1, -2, \ldots\}$	$C = 1;\ 2;\ 3{,}5, 1000$	no tiene
$C = \{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\}$	no tiene	no tiene
$D = [0, 2]$	$C = 2, 3, 10, 40$	$c = 0, -1, -10 \ldots$
$C = (-\infty, 1)$	$C = 1;\ 2;\ 3{,}5, 1000$	no tiene

Algunos conceptos preliminares

Llamaremos **supremo** de un conjunto A, a la menor de las cotas superiores

Llamaremos **ínfimo** de un conjunto A, a la mayor de las cotas inferiores

Ejemplos	**Supremo** **Cotas superiores**	**Ínfimo** **Cotas Inferiores**
$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$	$C = \mathbf{10};\ 25;\ 10{,}8;\ 100$	$c = \mathbf{1};\ 0, -2$
$B = \{1, 0, -1, -2, \ldots\}$	$C = \mathbf{1};\ 2;\ 3{,}5, 1000$	no tiene
$C = \{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\}$	no tiene	no tiene
$D = [0, 2]$	$C = \mathbf{2}, 3, 10, 40$	$c = \boxed{0}, -1, -10 \ldots$
$C = (-\infty, 1)$	$C = \mathbf{1};\ 2;\ 3{,}5, 1000$	no tiene

Algunos conceptos preliminares

Un conjunto se llama **acotado** si tiene cotas superiores e inferiores

Si un conjunto no tiene cotas superiores o inferiores se llama **no acotado**

Si un conjunto sólo tiene cotas superiores se llama **acotado superiormente**

y si sólo tienen inferiores se llama **acotado inferiormente**.

Algunos conceptos preliminares

¿Qué diferencia estas dos definiciones?

Máximo y cotas superiores

El **máximo de un conjunto A** es un número $M \in A$ tal que:
para todo $x \in A$ es $x \leq M$

¿Qué dice acá?

?

Una **cota superior de un conjunto A**, es cualquier $C \in R$ tal que:
para todo $x \in A$, $x \leq C$

Algunos conceptos preliminares

¿Qué diferencia estas dos definiciones?

Máximo y cotas superiores

El **máximo de un conjunto A** es un número $\boxed{M \in A}$ tal que:
para todo $x \in A$ es $x \leq M$

Una **cota superior de un conjunto A**, es cualquier $\boxed{C \in R}$ tal que:
para todo $x \in A$, $x \leq C$

Algunos conceptos preliminares

¿Qué diferencia estas dos definiciones?

Máximo y cotas superiores

El **máximo de un conjunto A** es el mayor de los elementos **que pertenecen a ese conjunto**

Una **cota superior de un conjunto A**, a **cualquier número real,** pertenezca o no al conjunto, que es mayor que todos los elementos del conjunto

Algunos conceptos preliminares

Máximo, cotas superiores y supremo

¿Verdadero o Falso?

Si un conjunto A tiene máximo, tiene cotas superiores

$M \in A$ es el máximo del conjunto A si:

para todo $x \in A$, $x \leq M$

¿Puede ser M una **cota superior** para A?

Para que M sea cota superior para A debe ocurrir que:

para todo $x \in A$, $x \leq M$

Sin importar dónde está M

Algunos conceptos preliminares

Máximo, cotas superiores y supremo

¿Verdadero o Falso?

Si un conjunto A tiene máximo, tiene cotas superiores

Tener máximo **es condición suficiente** para tener cotas superiores

Todo conjunto que tiene máximo es acotado superiormente

Algunos conceptos preliminares

Máximo, cotas superiores y supremo

¿Verdadero o Falso?

Si un conjunto A tiene cotas superiores entonces tiene máximo

$C \in R$ es el una cota superior para el conjunto A si:

para todo $x \in A$, $x \leq C$

Si el conjunto tiene cotas superiores, ¿se puede garantizar que una de ellas es **máximo** para A?

Para que C sea **máximo para A** debe ocurrir que:

$C \in A$, además de que $x \leq C$ para todo elemento de A

Algunos conceptos preliminares

Máximo, cotas superiores y supremo

¿Verdadero o Falso?

Si un conjunto A tiene cotas superiores entonces tiene máximo

Tener cotas superiores **es condición necesaria** para tener máximo, **pero no suficiente**

¿Cómo mostramos que es Falso? **CONTRAEJEMPLO**

$A = \{x \in R \,/\, x < 2\}$

¿Cotas superiores?
Cualquier número mayor o igual que 2

¿Tiene máximo A? **NO**

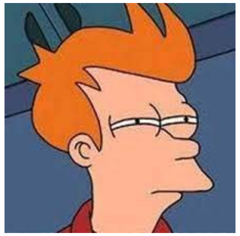
¿Alguna cota pertenece a A? **NO**

Algunos conceptos preliminares

Máximo, cotas superiores y supremo

¿Verdadero o Falso?

Si un conjunto A tiene cotas superiores entonces tiene supremo



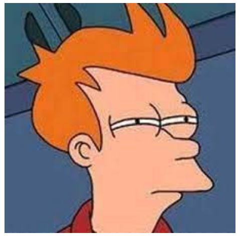
Esto, ¿es lo mismo que decir, que siempre que hay cotas superiores hay supremo?

Algunos conceptos preliminares

Máximo, cotas superiores y supremo

¿Verdadero o Falso?

Si un conjunto A tiene cotas superiores entonces tiene supremo



Esto, ¿es lo mismo que decir, que el conjunto de cotas superiores tiene mínimo?

Algunos conceptos preliminares

Máximo, cotas superiores y supremo

¿Verdadero o Falso?

Si un conjunto A tiene máximo, coincide con el supremo

Mayor de los números dentro de los que forman parte del conjunto

Son iguales $M = S$

La menor de las cotas superiores

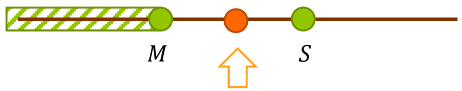
Supongamos que son distintos

Algunos conceptos preliminares

Máximo, cotas superiores y supremo

¿Verdadero o Falso?

Si un conjunto A tiene máximo, **coincide** con el supremo



Cualquier número acá es cota superior

Si ese número existe, entonces S no es el supremo

Entonces no puede haber ningún número entre M y S, es decir $\boxed{M = S}$

RESUMIENDO

- Si un conjunto tiene máximo, tiene cotas superiores ✓
- ¿Cuáles son?
  - Cualquier número mayor o igual que el máximo ✓
- Un conjunto que tiene cotas superiores no necesariamente tiene máximo ✓
- Un conjunto acotado superiormente siempre tiene supremo ✓
- En un conjunto que tiene máximo, el supremo coincide con el máximo ✓

Tarea 1: pensar las implicaciones del resumen anterior en relación a los conceptos mínimo, cotas inferiores e ínfimo.

Tarea 2: Analizar si es verdadero o falso y justificar:

- Todo conjunto finito tiene máximo y mínimo
- Todo conjunto finito es acotado
- Todo conjunto finito tiene ínfimo y supremo

Algunos conceptos preliminares

Llamaremos **conjunto abierto** a aquel que no tiene ni máximo ni mínimo. Gráficamente, son abiertos aquellos conjuntos que no incluyen las fronteras (o no las tienen).

p: A tiene máximo $\quad$ q: A tiene mínimo

Definición: A es cerrado si se verifica $p \wedge q$

Llamaremos **conjunto cerrado** a aquel tiene máximo y mínimo. Gráficamente, son cerrados aquellos que incluyen las fronteras.

Definición: A es abierto si se verifica $\sim p \wedge \sim q$

Algunos conceptos preliminares

Conjuntos semiabiertos o semicerrados: son aquellos que tienen máximo o mínimo pero no ambos.

p: A tiene máximo $\quad$ q: A tiene mínimo

Definición: A es semicerrado o semiabierto si se verifica $p \underline{\vee} q$

Ya vimos que **conjuntos acotados** son aquellos que tienen cotas superiores e inferiores, o sea, cuyos elementos pueden «encerrarse» entre dos números reales

Algunos ejemplos

Conjuntos	Abiertos	Cerrados	Semiabiertos o semicerrados
Acotados	(2, 3)	[2, 3] Cualquier conjunto finito {2, 3, 4, 5}	(2, 3] [2, 3)
No acotados	$\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$ $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$	No hay	$(-\infty, 3)$ $[5, +\infty)$ $\mathbb{N}$

Funciones acotadas

Los conceptos que vimos de máximo, mínimo, cotas, etc., pueden aplicarse a funciones.

❖ Diremos que una función es acotada, si lo es su conjunto de imágenes.

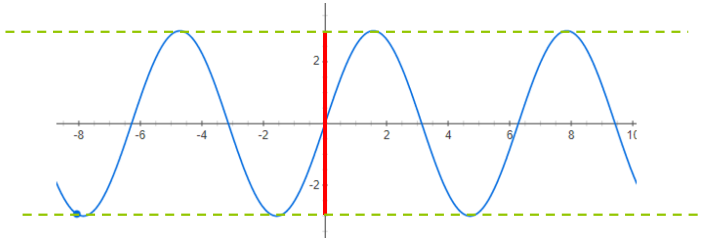
❖ Diremos que una función alcanza un máximo absoluto, si su conjunto de imágenes tiene máximo.

❖ Diremos que una función alcanza un mínimo absoluto, si su conjunto de imágenes tiene mínimo.

La función $f(x) = 3.\operatorname{sen} x$ tiene dominio en todos los reales, y el conjunto imagen es el intervalo $[-3,3]$

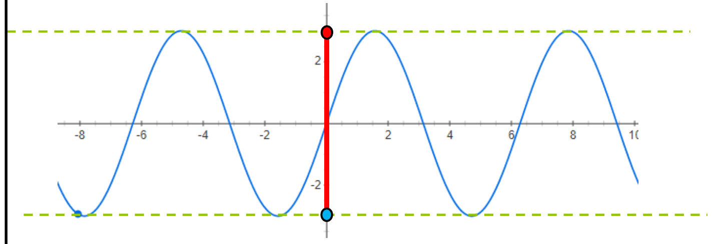
Esto significa, que para todo $x \in Dom\, f$, $f(x) \in [-3,3]$ o, lo que es lo mismo:

$$-3 \leq f(x) \leq 3$$

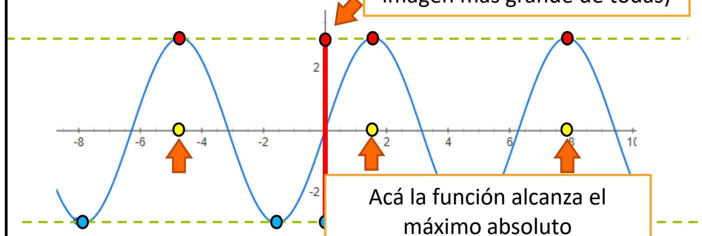


Como el conjunto $[-3,3]$ es acotado, la función $f(x) = 3.\operatorname{sen} x$ es acotada.

Como el conjunto $[-3{,}3]$ tiene máximo y mínimo, la función $f(x) = 3.\operatorname{sen} x$ tiene **máximo absoluto** y **mínimo absoluto**, $f(x) = 3$ y $f(x) = -3$, respectivamente.



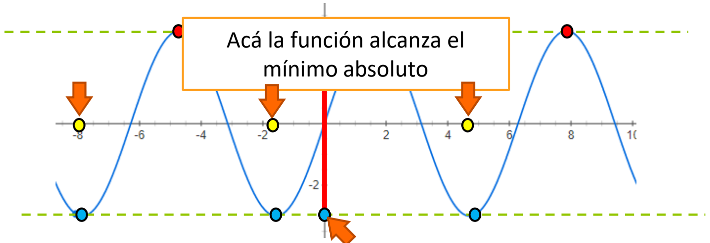
Este es el máximo absoluto (la imagen más grande de todas)



Acá la función alcanza el máximo absoluto

Una cosa es el **valor máximo** (o mínimo) de la función, y otra **muy distinta** es **dónde** (en qué lugar del dominio) la función **alcanza ese extremo**

Acá la función alcanza el mínimo absoluto



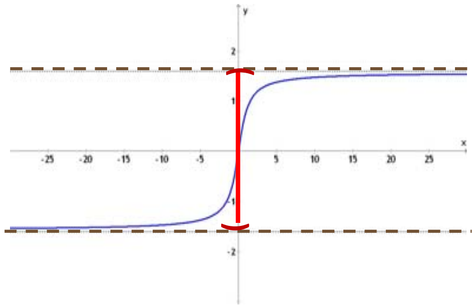
Este es el mínimo absoluto (la imagen más chica de todas)

Una cosa es el valor máximo (o mínimo) de la función, y otra **muy distinta** es dónde (en qué lugar del dominio) la función alcanza ese extremo

Ejemplos

Funciones acotadas que no tengan extremos

$$Im\ f = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$



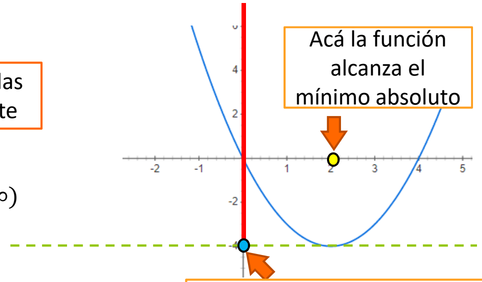
Conjunto de imágenes **acotado** pero **abierto.**
La función es acotada pero no tiene ni máximo ni mínimo absolutos.

La función nunca alcanza los valores $-\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$ pero aún así es acotada

Ejemplos

Funciones acotadas solo inferiormente

$Im\ f\ =\ [-4, +\infty)$



Este es el mínimo absoluto (la imagen más chica de todas)

Conjunto de imágenes **acotado** inferiormente y tiene **mínimo**:
La función es acotada inferiormente y alcanza un mínimo absoluto

Intervalos

(repaso a la velocidad de la luz)

Un intervalo es cualquiera de los siguientes conjuntos de números reales:

$(a, b)\ =\ \{x \in R\ /\ a\ <\ x\ <\ b\}$

$[a, b]\ =\ \{x \in R\ /\ a\ \leq\ x \leq b\}$

$[a, b)\ =\ \{x \in R\ /\ a \leq x <\ b\}$

$(a, b]\ =\ \{x \in R / a <\ x \leq b\}$

Un intervalo es cualquiera de los siguientes conjuntos de números reales (sigue):

$(-\infty, b)\ =\ \{x \in R\ /\ x\ <\ b\}$

$(a, +\infty]\ =\ \{x \in R\ /\ x\ >\ a\}$

$(-\infty, b]\ =\ \{x \in R\ /\ x \leq b\}$

$[a, +\infty)\ =\ \{x \in R\ /\ x\ \geq\ a\}$

Intervalos, en resumen…

	Abiertos	Cerrados	Semiabiertos o Semicerrados
Acotados	(a,b)	[a,b]	[a,b) , (a,b]
No acotados	(–∞, b) (a, +∞)		(–∞, b] [a, +∞)

Son intervalos **SÓLO** estos conjuntos

Además de los siguientes casos particulares

R $\varnothing$ (a,a) = $\varnothing$ [a,a] = {a}

Volviendo a los máximos y mínimos

Intervalo	Abiertos	Cerrados	Semiabiertos o semicerrados
Acotados	**(a,b)** No tiene ni máximo ni mínimo	**[a,b]** M = b m = a	**[a,b)** M: no tiene m = a **(a,b]** M = b M: no tiene
No acotados	**(–∞, b)** **(a, +∞)** No tienen ni máximo ni mínimo		**[a, +∞)** M = no tiene m = a **(–∞, b]** M = b m = no tiene

Operaciones con Intervalos

Como los intervalos son conjuntos, las operaciones que definimos para conjuntos en general, se aplican a intervalos, con las mismas definiciones y propiedades:

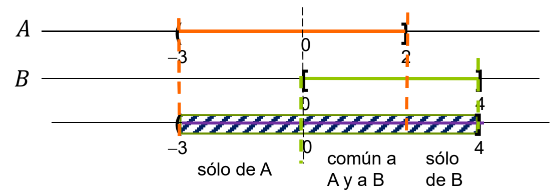
- Unión
- Intersección
- Diferencia
- Complemento

Operaciones con Intervalos

UNION: La unión de dos intervalos es un conjunto (no siempre un intervalo) que reúne a los elementos comunes y no comunes de ambos intervalos

Ejemplo: $A = (-3, 2]$ $= \{x \in R \,/\, -3 < x \leq 2\}$

$B = [0, 4]$ $= \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 4\}$

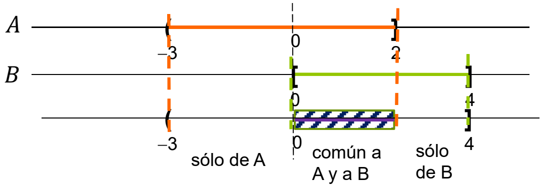


$A \cup B = (-3, 4] = \{x \in R \,/\, -3 < x \leq 4\}$

Operaciones con Intervalos

INTERSECCIÓN: La intersección de dos intervalos es un nuevo intervalo (siempre) que reúne a los elementos comunes a ambos intervalos

Mismo ejemplo: $A = (-3, 2] = \{x \in R \,/\, -3 < x \leq 2\}$ $\quad B = [0, 4] = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 4\}$

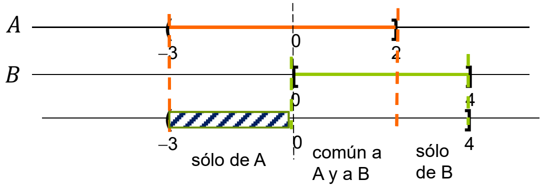


$$A \cap B = [0, 2] = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 2\}$$

Operaciones con Intervalos

DIFERENCIA: La diferencia de dos intervalos A y Bes un nuevo intervalo (siempre) que reúne a los elementos que pertenecen sólo a A (y no a B)

Mismo ejemplo: $A = (-3, 2] = \{x \in R \,/\, -3 < x \leq 2\}$ $\quad B = [0, 4] = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 4\}$

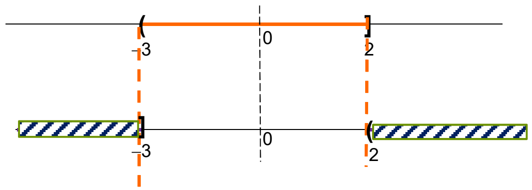


$$A - B = (-3, 0) = \{x \in R \,/\, -3 < x \leq 0\}$$

Operaciones con Intervalos

COMPLEMENTO de un intervalo A es un nuevo conjunto (no necesariamente un intervalo) que reúne a los elementos del referencial (el conjunto de números reales) que no pertenecen al conjunto A.

Mismo ejemplo:
$A = (-3, 2] = \{x \in R \,/\, -3 < x \leq 2\}$



$$\overline{A} = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty) = \{x \in R \,/\, x \leq -3 \text{ o } x > 2\}$$

Ecuaciones e Inecuaciones

Ver videos en PEDCO