Nociones de Lógica Proposicional

Definición: Llamaremos **proposición** a cualquier expresión de la cual puede decirse que es **verdadera** o **falsa**.

Las Grutas está a 1500 km de mi casa

Hay 7.890.000 pelos en el cuero cabelludo

Llueve

9 es un número primo

Dios existe

Son **afirmaciones**

Son **verdaderas** o **falsas**, más allá de nuestra capacidad de demostrar que lo son

Proposición

Verdadera
Falsa

Valor de verdad

Cerrada
- El valor de verdad está definido

Abierta
- Involucran una variable
- El valor de verdad depende del valor que tome esa variable

8 es par	8 es impar	x es par
Cerrada	Cerrada	Abierta
Verdadera	Falsa	Falsa si $x = 1$ Verdadera si $x = 2$

Proposición abierta

Afirmación respecto de una propiedad o condición que debe cumplir (o no) cualquiera de los valores que puede tomar la variable involucrada

p: x es par

¿Qué es x?

x es un elemento de algún conjunto para cuyos elementos tiene sentido preguntarse si son pares o no

x es un número entero positivo o 0

Esta proposición se refiere entonces a una propiedad que cumplen o no los elementos de un conjunto

Para algunos elementos p será verdadera

Para algunos elementos p será falsa

R

p es F

3

11

A

2

30

p es V

27

0

Decimos que una proposición abierta $\boldsymbol{p}$ **induce** un subconjunto del referencial: $\boldsymbol{A}$.
El conjunto $\boldsymbol{A}$ reúne los elementos del referencial que hacen verdadera a $\boldsymbol{p}$

Negación de una proposición

Proposición ⇨ Verdadera o Falsa

Negación de una proposición

Definición: La negación de una proposición es otra proposición cuyo valor de verdad es exactamente opuesto al de la proposición original.

Cerrada

proposición

$\boldsymbol{p}$: llueve

$\boldsymbol{q}$: el cielo es verde

negación

$\sim\boldsymbol{p}$: **no** llueve

$\sim\boldsymbol{q}$: el cielo **no es** verde

Abierta

proposición

$\boldsymbol{r}$: x **es** par

$\boldsymbol{s}$: x **es** una palabra que empieza con A

negación

$\sim\boldsymbol{r}$: x **no es** par

$\sim\boldsymbol{s}$: x **no es** una palabra que empieza con A

Negación de una proposición

proposición

$\boldsymbol{r}$: x **es** par

negación

$\sim\boldsymbol{r}$: x **no es** par

Si $x = 2$
r es V
$\sim r$ es F

Si $x = 3$
r es F
$\sim r$ es V

$\boldsymbol{s}$: x **es** una palabra que empieza con A

$\sim\boldsymbol{s}$: x **no es** una palabra que empieza con A

Si $x =$ "Ala"
s es V
$\sim s$ es F

Si $x =$ "Ola"
s es F
$\sim s$ es V

R

p es F "x es par" es F
$\sim p$ es V "x no es par" es V

11

3

27

A

2

30

0

p es V
"x es par" es V

$\sim p$ es F
"x no es par" es F

Negación de una proposición

proposición

p

Elementos que hacen **verdadera** a p

A

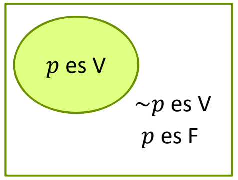
Referencial

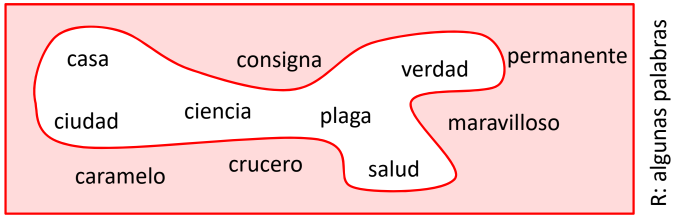
negación

$\sim p$

Elementos que hacen **falsa** a p (y hacen verdadera a $\sim p$)

$\bar{A}$





PROPOSICIÓN

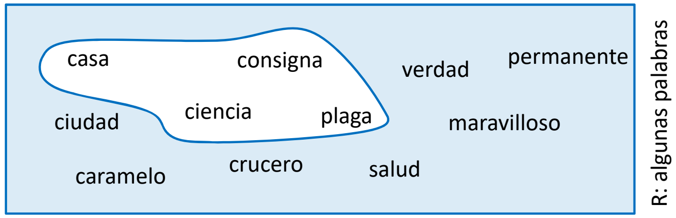
p : x es una palabra de dos sílabas

$\sim p$: x no es una palabra de dos sílabas

CONJUNTO

A= { casa, ciudad, ciencia, plaga, salud, verdad}

$\bar{A}$= { caramelo, consigna, crucero, maravilloso, permanente}



PROPOSICIÓN

q : x es una palabra que termina en "a"

$\sim q$: x es una palabra que **no** termina en "a"

CONJUNTO

B= { casa, ciencia, plaga, consigna}

$\bar{B}$= { verdad, permanente, maravilloso, caramelo, crucero, ciudad, salud}

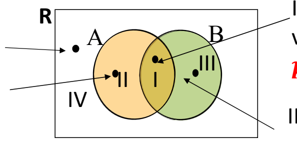
Si tenemos dos proposiciones abiertas $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ cuyas variables refieren a los elementos de un mismo conjunto

Cada una define un conjunto dentro del referencial

$\boldsymbol{p} \longrightarrow A$ $\qquad$ $\boldsymbol{q} \longrightarrow B$

IV: elementos que no verifican ni $\boldsymbol{p}$ ni $\boldsymbol{q}$

II: elementos que verifican sólo $\boldsymbol{p}$



I: elementos que verifican tanto $\boldsymbol{p}$ como $\boldsymbol{q}$

III: elementos que verifican sólo $\boldsymbol{q}$

Las regiones I y II reúnen a todos los elementos que verifican $\boldsymbol{p}$

Las regiones I y III reúnen a todos elementos que verifican $\boldsymbol{q}$.

Resumen hasta acá:

Si un elemento hace **verdadera** a una proposición, **pertenece** al conjunto que esta proposición genera.

Es decir a cada proposición **se asocia un conjunto** formado por todos los elementos del referencial que la hacen verdadera.

Si un elemento hace **falsa** a una proposición, **no pertenece** al conjunto que esta proposición genera.

Pero, si un elemento hace **falsa** a una proposición, hace **verdadera** a su **negación.**

Un elemento que hace **falsa** a una proposición, **pertenece** al **complemento** del conjunto que la proposición genera

Todo elemento de un conjunto hace verdadera o falsa a una proposición

---

Una proposición abierta p

NO

Un conjunto A

¿Son la misma cosa?

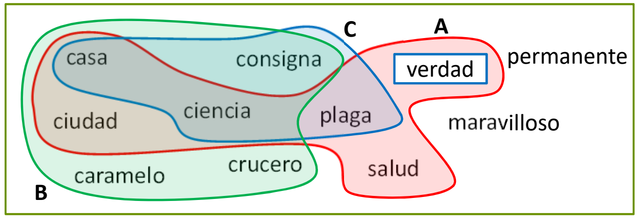
Una proposición es una **afirmación** que puede ser verdadera o falsa

Un conjunto es una **colección de objetos** reunidos con un criterio

¿Qué las vincula?

El conjunto A está formado por todos los elementos del referencial que hacen verdadera a p

Si $x \in A \Rightarrow p$ es Verdadera
Si p es Verdadera $\Rightarrow x \in A$



R: algunas palabras

p : x *es una palabra de dos sílabas*

$A = \{$ casa, ciudad, ciencia, plaga, salud, verdad$\}$

q : x *es una palabra que termina en "a"*

$B = \{$ casa, ciencia, plaga, consigna$\}$

r : x *es una palabra que empieza con "c"*

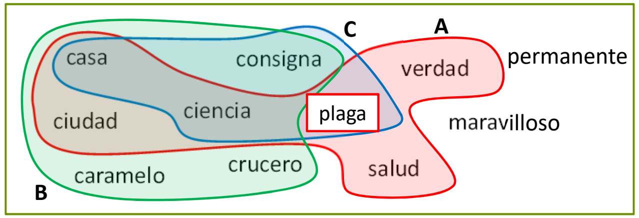
$C = \{$ casa, ciudad, ciencia, caramelo, crucero$\}$

La palabra "verdad" **hace verdadera** a p, pero **no a** q ni a r

"verdad" $\in A$

"verdad" $\notin B$

"verdad" $\notin C$



R: algunas palabras

p : x *es una palabra de dos sílabas*

$A = \{$ casa, ciudad, ciencia, plaga, salud, verdad$\}$

q : x *es una palabra que termina en "a"*

$B = \{$ casa, ciencia, plaga, consigna$\}$

r : x *es una palabra que empieza con "c"*

$C = \{$ casa, ciudad, ciencia, caramelo, crucero$\}$

Una palabra que haga **verdadera** a p y a q pero **no a** r.

Tiene dos sílabas, termina en "a" pero no empieza con "c"

"plaga" $\in A$
"plaga" $\in B$
"plaga" $\notin C$

Otro ejemplo

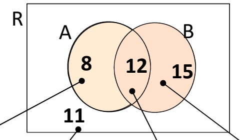
R (referencial): números enteros positivos

p: x es un número par

A

q: x es un múltiplo de 3

B



Hay números pares que no son múltiplos de 3

Hacen V sólo a p

Hay números que son múltiplos de 3 pero no son pares

Hacen V sólo a q

Hay números que no son pares ni múltiplos de 3

No hacen V ni a p ni a q

Hay números que son a la vez múltiplos de 3 y pares

Hacen V a p y a q

Proposiciones categóricas

Proposiciones categóricas

Una proposición categórica es aquella que contiene un **cuantificador**

Un **cuantificador** es un término que hacen referencia a:

uno (a al menos uno) de los elementos de un conjunto:

$\exists$ (existe)

O a **todos** los elementos de un conjunto:

$\forall$ (Todo)

Proposiciones categóricas

Al ser **proposiciones**, tendrán un **valor de verdad**

$\exists$ (existe)

- Existe/n
- Hay
- Un/unos/una /unas
- Algún/algunos/alguna/algunas

Distintas formas en el lenguaje coloquial

Existen números naturales múltiplos de 5, que son pares.

Hay números enteros que tienen exactamente dos divisores positivos

Una alumna de Mate 1 se llama Patricia

Algunos sánguches tienen queso

Existen números naturales múltiplos de 5, que son pares.

Existe un número natural múltiplo de 5 que es par

∃ (existe)

Hay números enteros que tienen exactamente dos divisores positivos

Existe un número entero que tiene exactamente dos divisores positivos

Una alumna de Mate 1 se llama Patricia

Existe una alumna de Mate 1 se llama Patricia

Algunos sánguches tienen queso

Existe un sánguche que tiene queso

Existe dentro del referencial **al menos un elemento** que cumple con **la proposición**

Existe dentro del referencial **al menos un elemento** que cumple con **la proposición**

∃ (existe)

Existe un número natural múltiplo de 5, que es par

p: x es múltiplo de 5 y x es par

R: números naturales

Existe un número entero que tiene exactamente dos divisores positivos

q: x tiene dos divisores positivos

R: números enteros

Existe una alumna de Mate 1 se llama Patricia

r: x se llama Patricia

R: alumnes de Matemática 1

Existe un sánguche que tienen queso

s: x tiene queso

R: sánguches en la mesa

Proposiciones categóricas

Al ser **proposiciones**, tendrán un **valor de verdad**

∀ (Todo)

Todos/Toda/Todas
Los/Las
Ninguno/NInguna
Nadie

Distintas formas en el lenguaje coloquial

Todos los mamíferos tienen pelos

Los múltiplos de 8 son pares

Ningún estudiante de Mate 1 están inscripte en ingeniería

Nadie en esta clase habla mandarín

Todos los mamíferos tienen pelos

∀ (Todo)

Todo mamífero tiene pelos

Ningún estudiante de Mate 1 están inscripte en ingeniería

Todo estudiante de Mate 1 **no está** inscripte en ingeniería

Los múltiplos de 8 son pares

Todo múltiplo de 8 es par

Nadie en esta clase habla mandarín

Todo integrante de esta clase **no habla** mandarín

Todo elemento dentro del referencial cumple con **la proposición**

Todo elemento dentro del referencial cumple con **la proposición**

$\forall$ (Todo)

Todo mamífero tiene pelos

$p: x$ tiene pelos — R: mamíferos

Todo estudiante de Mate 1 **no está** inscripte en ingeniería

$q: x$ **no está** inscripte en ingeniería — R: estudiantes de Mate 1

Todo múltiplo de 8 es par

r: x es par — R: múltiplos de 8

Todo integrante de esta clase **no habla** mandarín

s: x no habla mandarín — R: integrantes de esta clase

RESUMIENDO…

Proposiciones categóricas

Aquellas que contienen un **cuantificador**

$\exists$ (existe)	Conjunto de referencia	$\forall$ (Todo)
Al menos un elemento del conjunto hace verdadera la proposición	Proposición referida a los elementos de ese conjunto	Todos los elementos del conjunto hacen verdadera la proposición

La verdad de las proposiciones categóricas

Hay dos tipos de proposiciones categóricas

Que pueden ser

Aluden a conjuntos finitos

	Verdaderas	Falsas
Todo…	Todo divisor de 20 es menor que 100	Todo divisor de 12 es par
	Todo múltiplo de 6 es par	Todo múltiplo de 3 es par
Existe…	Existe un divisor de 20 que es impar	Existe un divisor de 20 de tres cifras
	Existe un número par múltiplo de 5	Existe un múltiplo de 8 impar

La verdad de las proposiciones categóricas

Hay dos tipos de proposiciones categóricas

Que pueden ser

	Verdaderas	Falsas
Todo…	Todo divisor de 20 es menor que 100	Todo divisor de 12 es par
	Todo múltiplo de 6 es par	Todo múltiplo de 3 es par
Existe…	Existe un divisor de 20 que es impar	Existe un divisor de 20 de tres cifras
	Existe un número par múltiplo de 5	Existe un múltiplo de 8 impar

Aluden a conjuntos infinitos

¿Cómo mostrar que las proposiciones con cuantificadores son Verdaderas o Falsas?

Falsas

3 es divisor de 12 y es impar…

Verdaderas

Todo…

Todo divisor de 20 es menor que 100

Todo múltiplo de 6 es par

Todo divisor de 12 es par FALSO

Todo múltiplo de 3 es par FALSO

9 es múltiplo de 3 y es impar…

Existe…

Existe un divisor de 20 que es impar

Existe un número par múltiplo de 5

Existe un divisor de 20 de tres cifras

Existe un múltiplo de 8 impar

¿Cómo mostrar que las proposiciones con cuantificadores son Verdaderas o Falsas?

Falsas

Contraejemplo

3 es divisor de 12 y es impar…

Verdaderas

Todo…

Todo divisor de 20 es menor que 100

Todo múltiplo de 6 es par

Todo divis… es par

To… …o de 3

9 es múltiplo de 3 y es impar…

Existe…

Existe un divisor de 20 que es impar

Existe un número par múltiplo de 5

Existe un divisor de 20 de tres cifras

Existe un múltiplo de 8 impar

¿Cómo mostrar que las proposiciones con cuantificadores son Verdaderas o Falsas?

Verdaderas

Falsas

Todo…

Todo divisor de 20 es menor que 100

Todo múltiplo de 6 es par

Todo divisor de 12 es par

Todo múltiplo de 3 es par

Existe…

Existe un divisor de 20 que es impar VERDADERO

Existe un número par múltiplo de 5 VERDADERO

Existe un divisor de 20 de tres cifras

Existe un múltiplo de 8 impar

5 es divisor de 20 y es impar…

10 es múltiplo de 5 y es par…

¿Cómo mostrar que las proposiciones con cuantificadores son Verdaderas o Falsas?

Verdaderas

Falsas

Todo…

Todo divisor de 20 es menor que 100

Todo múltiplo de 6 es par

Todo divisor de 12 es par

Todo múltiplo de 3 es par

Existe…

Ejemplo

Existe un div… …e 20 que e…

Exist… …ero par m… …e 5

Existe un divisor de 20 de tres cifras

Existe un múltiplo de 8 impar

5 es divisor de 20 y es impar…

10 es múltiplo de 5 y es par…

Como el conjunto es **finito**, podemos hacer una **revisión exhaustiva** y vemos que p es **verdadera**: todos los elementos cumplen con la proposición

	Verdaderas	**Falsas**
Todo…	Todo divisor de 20 es menor que 100 Todo múltiplo de 6 es par	Todo divisor de 12 es par Todo múltiplo de 3 es par
Existe…	Existe un divisor de 20 que es impar Existe un número par múltiplo de 5	Existe un divisor de 20 de tres cifras Existe un múltiplo de 8 impar

	Verdaderas	**Falsas**
Todo…	Todo divisor de 20 es menor que 100 Todo múltiplo de 6 es par	Todo divisor de 12 es par Todo múltiplo de 3 es par
Existe…	Existe un divisor de 20 que es impar Existe un número par múltiplo de 5	Existe un divisor de 20 de tres cifras Existe un múltiplo de 8 impar

	Verdaderas	**Falsas**
Todo…	Todo divisor de 20 es menor que 100 Todo múltiplo de 6 es par	Todo divisor de 12 es par Todo múltiplo de 3 es par
Existe…	Existe un divisor de 20 que es impar Existe un número par múltiplo de 5	Existe un divisor de 20 de tres cifras Existe un múltiplo de 8 impar

Como el conjunto es **finito**, podemos hacer una revisión **exhaustiva** y vemos que p es **falsa**: no existe ningún elemento en el conjunto que cumpla la proposición

	Verdaderas	**Falsas**
Todo…	Todo divisor de 20 es menor que 100 Todo múltiplo de 6 es par	Todo divisor de 12 es par Todo múltiplo de 3 es par
Existe…	Existe un divisor de 20 que es impar Existe un número par múltiplo de 5	Existe un divisor de 20 de tres cifras Existe un múltiplo de 8 impar

Si el conjunto es **infinito**, debemos hacer un **razonamiento deductivo,** lo que se conoce como demostración

	Verdaderas	Falsas
Todo...	Todo divisor de 20 es menor que 100 Todo múltiplo de 6 es par	Todo divisor de 12 es par Todo múltiplo de 3 es par
Existe...	Existe un divisor de 20 que es impar Existe un número par múltiplo de 5	Existe un divisor de 20 de tres cifras Existe un múltiplo de 8 impar

Si el conjunto es **infinito**, debemos hacer un **razonamiento deductivo,** lo que se conoce como demostración

Resumen ¿Cómo mostrar que las proposiciones con cuantificadores son Verdaderas o Falsas?

	Verdaderas	Falsas
Todo...	finito: Revisión exhaustiva infinito: Demostración	finito / infinito: Contraejemplo
Existe...	finito / infinito: Ejemplo	finito: Revisión exhaustiva infinito: Demostración

¿Cómo se hace una demostración en matemática?

Por ejemplo: **Todo múltiplo de 6 es par**

Queremos mostrar que es una afirmación **Verdadera**

No podemos hacer una revisión sistemática de todos los números naturales para ver que esto es cierto

Tendremos que ver que es cierto, deduciendo que lo es, a partir de propiedades que conocemos de los números

¿Cómo se hace una demostración en matemática?

Por ejemplo: **Todo múltiplo de 6 es par**

Múltiplo de 6: Se obtiene de hacer 6 por cualquier número natural:

Si x es un número múltiplo de 6, lo podemos escribir como:

$$x = 6.k$$

donde k es cualquier número natural

Par: Se obtiene de hacer 2 por cualquier número natural:

Si x es un número par, lo podemos escribir como:

$$x = 2.k'$$

donde k' es cualquier número natural

¿Cómo se hace una demostración en matemática?

Todo múltiplo de 6 es par

Para demostrar que esto es cierto, lo que tenemos que hacer es:

Partiendo de que x es **Múltiplo de 6** deducir que es **par:**

Entonces, tomemos un número x múltiplo de 6:

$$x = 6.k$$

donde k es cualquier número natural

Pero:

$$x = 6.k = (2.3).k = 2.(3.k)$$

por lo tanto x es par

La negación de proposiciones categóricas

Tomemos una proposición falsa con el cuantificador **existe:**

$\boldsymbol{p}$**:** Existen múltiplos de 5 terminados en 3

Si $\boldsymbol{p}$ es **falsa**, su negación $\sim\boldsymbol{p}$ será **verdadera**

La negación de $\boldsymbol{p}$ es:

$\sim\boldsymbol{p}$: **no** (**Existen** múltiplos de 5 terminados en 3)

No existe = **ninguno** de los elementos del conjunto hace verdadera a p

Para **todo** elemento del conjunto p es **falsa**

Para **todo** elemento del conjunto $\sim p$ es **verdadera**

La negación de proposiciones categóricas

En resumen

Si tenemos una proposición del tipo

Existe….

$\exists$ un elemento del conjunto tal que p es V

Su negación es

$\sim$ ($\exists$ un elemento del conjunto tal que p es V)

Todo…

$\forall$ elemento del conjunto p es F

La negación de proposiciones categóricas

Tomemos una proposición falsa con el cuantificador **existe:**

$\boldsymbol{p}$**:** todo múltiplo de 5 termina en 0

Si $\boldsymbol{p}$ es **falsa**, su negación $\sim\boldsymbol{p}$ será **verdadera**

La negación de $\boldsymbol{p}$ es:

$\sim\boldsymbol{p}$: **no** (**todo** múltiplo de 5 termina en 0)

No todo = existe al menos un elemento del conjunto hace **falsa** a p

Existe al menos un elemento del conjunto tal que $\sim p$ es **verdadera**

La negación de proposiciones categóricas

En resumen

Si tenemos una proposición del tipo

Todo….

∀ elemento del conjunto p es V

Su negación es

~ (∀ un elemento del conjunto tal que p es V)

Existe..

∃ elemento del conjunto p es F

La negación de proposiciones categóricas

La negación de una proposición con el cuantificador todo es una proposición con el cuantificador existe

La negación de una proposición con el cuantificador existe es una proposición con el cuantificador todo

Un ejemplo con Proposiciones categóricas

R: Estudiantes del CRUB

A: Estudiantes de Ingeniería

B: Estudiantes de Lic. en Biología

C: Estudiantes que tienen el secundario incompleto

D: Estudiantes que cursan materias de primer año, primer cuatrimestre

E: Estudiantes que cursan Matemática 1

F: Estudiantes que aprobaron Matemática 2