Desigualdades comparadas con cero

Comparaciones con cero

Una comparación con cero es cualquier expresión de la forma ***"algo (expresión algebraica)"*** > **0** (Análogo para <, ≥, ≤)

Por ejemplo: $x^2 - 4x \geq 0$

O: $\frac{-x+4}{2(x-2)} < 0$

Este es un caso particular de **desigualdad (inecuación)**

Nuestro objetivo es encontrar el conjunto de todos los valores de la variable que hacen cierta la desigualdad, es decir, su **dominio de validez.**

Comparaciones con cero

Cosas importantes a tener en cuenta:

- Para que un **producto** (Ídem cociente) sea **positivo**, es necesario que tenga un número par de factores negativos (impar si queremos que sea **negativo**)
- Para que un **producto sea cero** es suficiente con que uno de los factores sea cero, y para que un **cociente sea cero** uno de los factores del numerador debe ser cero
- Una comparación con cero se puede interpretar de la forma $f(x) > 0$, es decir **la comparación de las imágenes de una función $f(x)$ con cero**. Entonces el problema se reduce a buscar los elementos del dominio de una función $f(x)$ para los cuales las imágenes son mayores que 0 (Análogo para <, ≥, ≤)

Desigualdades comparadas con 0

Forma 1: Totalmente algebraica	Reglas de pasaje de términos	Hay que saber manejo algebraico y considerar todos los casos posibles
Forma 2: Más o menos algebraica Un poco gráfica	Transformando la expresión algebraica en un producto (cociente) de factores y estudiando los signos de cada factor	Hay que saber factorizar, cómo estudiar el signo de cada factor y la regla de los signos
Forma 3: Nada algebraica Casi casi exclusivamente gráfica	Graficando las funciones involucradas y mirando los signos de las imágenes de estas funciones	Hay que saber graficar funciones y mirar el signo de las imágenes

Ejemplo. Uno fácil – Forma algebraica

$\underbrace{x^2-4x}\geq 0$ Sacando factor común: $x(x-4)\geq 0$

Esto es un polinomio, por lo tanto se puede escribir como producto de factores indivisibles

Para que este producto sea ≥ 0 deberán ser:

$\boxed{+.+}$ $x\geq 0$ y $(x-4)\geq 0$

o

$\boxed{-.-}$ $x\leq 0$ y $(x-4)\leq 0$

$\underbrace{x\geq 0 \ \boxed{\text{y}} \ (x-4)\geq 0}_{\text{Proposición compuesta con el conectivo “y”}}$ $\boxed{\text{o}}$ $\underbrace{x\leq 0 \ \boxed{\text{y}} \ (x-4)\leq 0}_{\text{Proposición compuesta con el conectivo “y”}}$

Proposición compuesta con el conectivo “o”

$(A \cap B) \cup (C \cap D)$

Ejemplo… sigue $x^2-4x\geq 0$

$\underbrace{x\geq 0 \ \boxed{\text{y}} \ (x-4)\geq 0}_{\text{Proposición compuesta con el conectivo “y”}}$ $\boxed{\text{o}}$ $\underbrace{x\leq 0 \ \boxed{\text{y}} \ (x-4)\leq 0}_{\text{Proposición compuesta con el conectivo “y”}}$

Proposición compuesta con el conectivo “o”

$(A \cap B) \cup (C \cap D)$

$x\geq 0$ y $(x-4)\geq 0$ ➡ $x\geq 0 \ \boxed{\text{y}} \ x\geq 4$ ➡ $[0,+\infty)\boxed{\cap}[4,+\infty)$

o $\cup$

$x\leq 0$ y $(x-4)\leq 0$ ➡ $x\leq 0 \ \boxed{\text{y}} \ x\leq 4$ ➡ $(-\infty,0]\boxed{\cap}(-\infty,4]$

$[0,+\infty)\cap[4,+\infty) \ \bigcup \ (-\infty,0]\cap(-\infty,4] = \boxed{(-\infty,0]\cup[4,+\infty)}$

Forma 2: Más o menos gráficamente

$x^2-4x\geq 0$ ➡ $x(x-4)\geq 0$

x: $-------------0++++++++++++$ Signo del primer factor

$(-\infty,0]$ 0 $[0,+\infty)$

$x-4$: $--------------------0+++++++$ Signo del segundo factor

$(-\infty,4]$ 0 4 $[4,+\infty)$

ambos negativos | signos distintos | ambos positivos

$+++++++++++++0----0+++++++$ Signo del producto

0 4

$(-\infty,0] = (-\infty,0]\cap(-\infty,4]$ $[4,+\infty) = [0,+\infty)\cap[4,+\infty)$

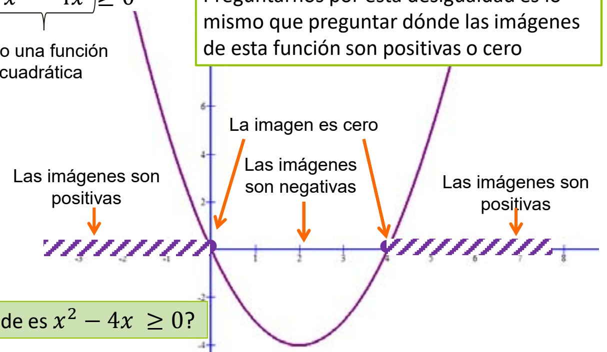
$\boxed{\text{Solución}: (-\infty,0]\cup[4,+\infty)}$

Forma 3: Casi totalmente gráfica

$\underbrace{x^2-4x}\geq 0$

Esto una función cuadrática

Preguntarnos por esta desigualdad es lo mismo que preguntar dónde las imágenes de esta función son positivas o cero



Dónde es $x^2-4x\geq 0$?

$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$ ← Conjunto Solución

Otro ejemplo: el uso de las desigualdades en el cálculo de dominios de funciones

Calcular el dominio de definición de la función siguiente:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x}{x - 3}}$$

El dominio de una función es el conjunto de valores de la variable para los cuales existe una imagen. En este caso:

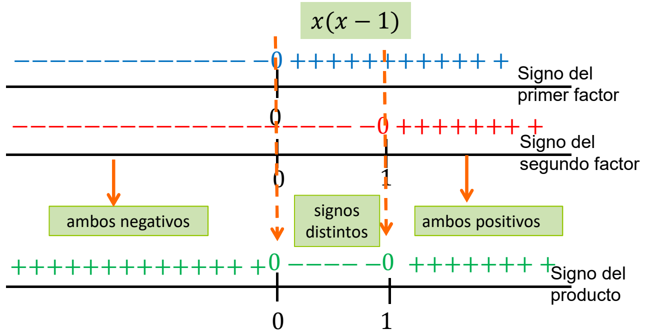
$$\frac{x^2 - x}{x - 3} \geq 0$$

Cosas que debemos considerar:

- Para que un cociente sea 0 sólo puede ser 0 el numerador
- Para que un cociente sea positivo, deben tener, numerador y denominador, el mismo signo
- El numerador tiene 2 factores y el denominador 1

Forma 2: bastante gráfica (mirando signos de factores)

Numerador: $x^2 - x$ Factorizando: $x(x-1)$



Signo del numerador

≥ 0 en $(-\infty, 0] \cup [1 + \infty]$

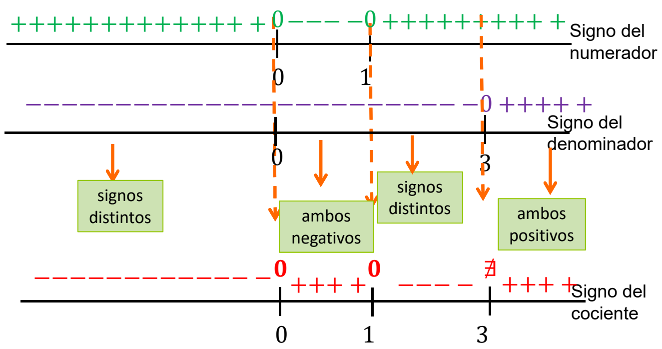
< 0 en $(0,1)$

Forma 2: bastante gráfica (mirando signos de factores)

Numerador: $x^2 - x$

Denominador: $x - 3$

$\frac{x^2 - x}{x - 3} \geq 0$



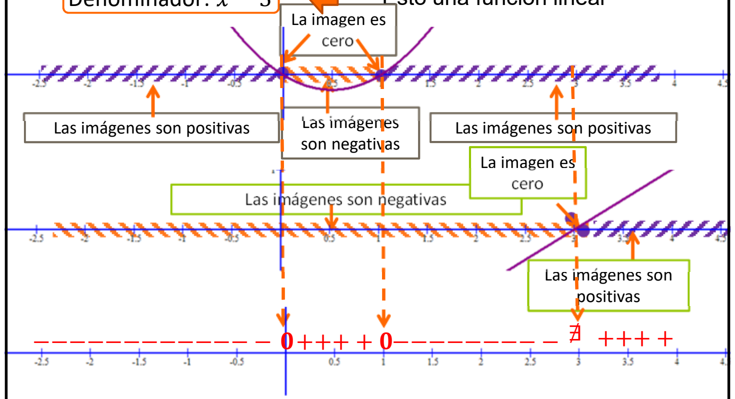
Dominio = $[0,1] \cup (3, +\infty)$

Otra forma de hacer lo mismo...

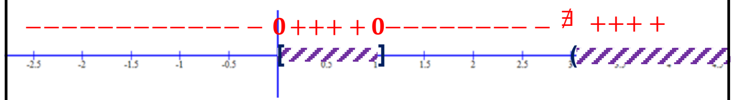
$\frac{x^2 - x}{x - 3} \geq 0$

Numerador: $x^2 - x$ Esto una función cuadrática

Denominador: $x - 3$ Esto una función lineal



Volvemos a la pregunta... $\frac{x^2-x}{x-3} \geq 0$



¿Cuál es el dominio de la función siguiente?

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x}{x-3}}$$

$$Dom\ f = \left\{x \in R \text{ tales que } \frac{x^2-x}{x-3} \geq 0\right\} =$$

$$= [0,1] \cup (3,+\infty)$$

Otro ejemplo … no está comparado con 0 pero lo hacemos

Encontrar el dominio de validez de la siguiente desigualdad:

$$\frac{x}{2(x-2)} > 1$$

Recomendación: Hacer un poquito de manejo algebraico hasta llevar a un cociente comparado con cero:

$$\frac{x}{2(x-2)} - 1 > 0$$

Sacando común denominador:

$$\frac{x-2(x-2)}{2(x-2)} > 0$$

Haciendo una cuentita:

$$\frac{x-2x+4}{2(x-2)} = \boxed{\frac{-x+4}{2(x-2)} > 0}$$

Ahora sí tenemos un cociente comparado con cero

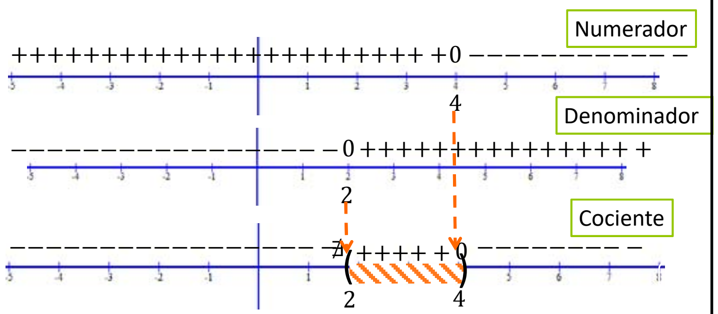
Desigualdades comparadas con 0

Forma 1: Totalmente algebraica	Reglas de pasaje de términos	Hay que saber manejo algebraico y considerar todos los casos posibles
Forma 2: Más o menos algebraica. Un poco gráfica	Transformando la expresión algebraica en un producto (cociente) de factores y estudiando los signos de cada factor	Hay que saber factorizar, cómo estudiar el signo de cada factor y la regla de los signos
Forma 3: Nada algebraica. Casi casi exclusivamente gráfica	Graficando las funciones involucradas y mirando los signos de las imágenes de estas funciones	Hay que saber graficar funciones y mirar el signo de las imágenes

Forma 2: más o menos algebraica

$$\frac{-x+4}{2(x-2)} > 0$$

Numerador y denominador ya están factorizados, sólo tenemos que mirar sus signos

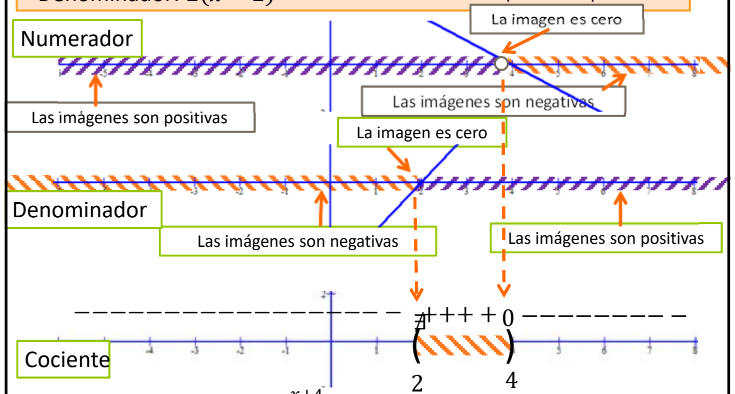


$\frac{-x+4}{2(x-2)} > 0$ en el intervalo $(2,4)$ ⟹ Dominio de validez

Forma 3: mirando imágenes de las funciones $\frac{-x+4}{2(x-2)} > 0$

Numerador: $-x+4$ Esto una función lineal de pendiente negativa

Denominador: $2(x-2)$ Esto una función lineal de pendiente positiva



Dominio de validez de $\frac{-x+4}{2(x-2)} > 0$: el intervalo $(2,4)$

Desigualdades comparadas con 0

Forma 1: Totalmente algebraica	Reglas de pasaje de términos	Hay que saber manejo algebraico y considerar todos los casos posibles
Forma 2: Más o menos algebraica Un poco gráfica	Transformando la expresión algebraica en un producto (cociente) de factores y estudiando los signos de cada factor	Hay que saber factorizar, cómo estudiar el signo de cada factor y la regla de los signos
Forma 3: Nada algebraica Casi casi exclusivamente gráfica	Graficando las funciones involucradas y mirando los signos de las imágenes de estas funciones	Hay que saber graficar funciones y mirar el signo de las imágenes

Forma 1: totalmente algebraica

Otro ejemplo, un poco más complicado

$$\frac{x-2}{x+1} < \frac{2-x}{x-1}$$

Ver videos en PEDCO

Valor absoluto

Definición: **Valor Absoluto** (o módulo) de un número real, se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $|4| = 4 \quad |-6| = -(-6) = 6$

Una definición alternativa de valor absoluto de un número real es: $|x| = máx\,\{x, -x\}$

$x = 2$ ➡ $-x = -2$ ➡ $máx\,\{2, -2\} = 2$ ➡ $|2| = 2$

Si $x \geq 0$, $-x \leq 0$ y el máximo entre x y $-x$ es x, por lo tanto $|x| = x$

$x = -4$ ➡ $-x = -(-4) = 4$ ➡ $máx\,\{-4, 4\} = 4$ ➡ $|-4| = 4$

Si $x < 0$, $-x > 0$ y el máximo entre x y $-x$ es $-x$, por lo tanto $|x| = -x$

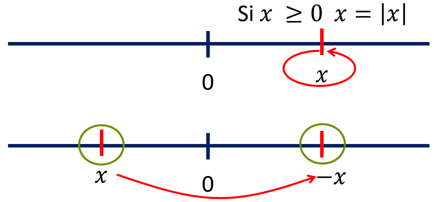
PROPIEDADES

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1) $x \leq |x|$

Un número siempre es menor o igual que su valor absoluto

Si $x \geq 0 \quad x = |x|$



Si $x < 0$ ⬇ $-x > 0$

$|x| = -x$ ⬇ $x < |x|$

Si $x \geq 0$
$x = |x|$

Si $x < 0$
$x < |x|$

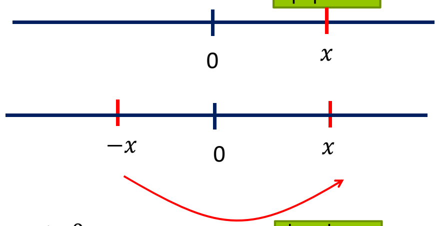
Luego
$x \leq |x|$

2) $|x| = |-x|$

Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto

$|x| = x$

Tomemos $x > 0$ ⬇



Si $x > 0$

$-x < 0$

$|-x| = -(-x) = x > 0$

$|-x| = x$

Si $x = 0$ es trivial

El caso $x < 0$ es análogo

$x \geq 0$ e $y \geq 0$ ➡

$|x| = x$
$|y| = y$
$|x||y| = x.y$

$|3.5| = |3|.|5| = 3.5 = 15$

Pero además, sabemos que $x.y > 0$ por lo que:

$|x.y| = x.y$

$x \geq 0$ e $y < 0$ ➡

$|x| = x$
$|y| = -y$
$|x||y| = -x.y$

$|3.(-5)| = |3|.|-5| = 3.5 = 15$

Pero además, sabemos que $x.y < 0$ por lo que:

$|x.y| = -x.y$

Tarea: analizar los otros dos casos

Razonamientos similares se pueden aplicar a:

4) $|x/y| = |x|/|y|$

El valor absoluto del cociente de dos números se puede calcular como el cociente de los valores absolutos de cada uno, independientemente de su signo

5) $|x^2| = |x|^2 = x^2$

El valor absoluto del cuadrado de un número es el mismo valor

6) $|x - y| = |y - x|$

El valor absoluto de la diferencia entre dos números es el mismo, sin importar el orden en que se restan

Tarea: argumentar estas afirmaciones

7) $|x + y| \leq |x| + |y|$ Desigualdad Triangular

El valor absoluto de la suma de dos números, es menor o igual que la suma de sus valores absolutos

Si ambos son positivos: $|3 + 5| = |3| + |5| = 3 + 5 = 8$

Si ambos son negativos: $|-3 - 5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8$

Pero, si tienen distinto signo,
$|-3 + 5| = |2| = 2$
Mientras que $|-3| + |5| = 8$

$|2 - 8| = |-6| = 6$
Mientras que $|2| + |8| = 10$

En estos casos, el valor absoluto de la suma en menor que la suma de los valores absolutos

8) $\sqrt{x^2} = |x|$ No vamos a demostrar… lo vamos a pensar

Que no está bien hacer: $\sqrt{x^{\cancel{2}}} = x$

Por ejemplo: $3^2 = 9$ pero $(-3)^2 = 9$

Al aplicar la raíz cuadrada sobre 9, deberíamos poder “recuperar” los dos números que le dieron origen: 3 y -3

¿Qué relaciona estos dos números? **Que ambos tienen el mismo valor absoluto.**

9) $|x| \geq 0$ y solo es igual a cero si $x = 0$

Esta propiedad se deduce de la definición

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:
Su interpretación geométrica.

Vamos a analizar el significado geométrico de algunas ecuaciones e inecuaciones que involucran valor absoluto.

$$\boxed{\begin{array}{c} d \geq 0 \\ c > 0 \end{array}}$$

Ecuaciones

$|x| = d$

$|x - c| = d$

$|x + c| = d$

Inecuaciones

$|x| < d$ $\quad$ $|x| > d$

$|x - c| < d$ $\quad$ $|x - c| > d$

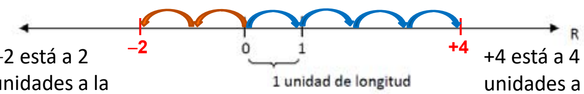
$|x + c| < d$ $\quad$ $|x + c| > d$

y las análogas con $\leq$ y $\geq$

Representación gráfica de un número x = a en la recta real

Un número $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ se puede representar como un punto sobre la recta real a «$\boldsymbol{a}$» unidades de distancia del 0, situado a la derecha o a la izquierda del 0 según el signo de $\boldsymbol{a}$.

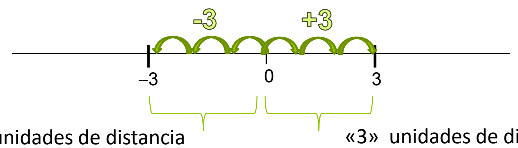
−2 está a 2 unidades a la izquierda de 0



+4 está a 4 unidades a la derecha de 0

Supongamos que tenemos la ecuación $|x| = 3$

Para que $|x| = 3$, $\quad x = 3$ o $x = -3$



«3» unidades de distancia a la izquierda de 0

«3» unidades de distancia a la derecha de 0

En general, para la ecuación $|x| = d$

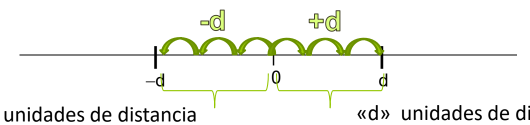
Por definición,
$x = d$ o $x = -d$

Gráficamente son dos puntos situados sobre la recta real cuya distancia al 0 es de «d» unidades (a la izquierda y a la derecha):

En general, para la ecuación $|x| = d$

Por definición, $x = d$ o $x = -d$

Gráficamente son dos puntos situados sobre la recta real cuya distancia al 0 es de «d» unidades (a la izquierda y a la derecha):



«d» unidades de distancia a la izquierda de 0

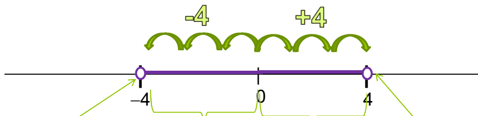
«d» unidades de distancia a la derecha de 0

La solución de la ecuación son dos puntos sobre la recta cuya distancia al 0 es de «d» unidades, es decir, el conjunto $\{-\mathrm{d}, \mathrm{d}\}$

Consideremos ahora la siguiente desigualdad: $|x| < d$

Por ejemplo, pensemos en la desigualdad $|x| < 4$

¿Cuáles números podrían ser parte del conjunto solución?



$|3| = 3 < 4$
$|0| = 0 < 4$
$|-1| = 1 < 4$
$|-3{,}5| = 3{,}5 < 4$

Excluyendo a «–4»

menos que «4» unidades de distancia a la izquierda

menos que «4» unidades de distancia a la derecha

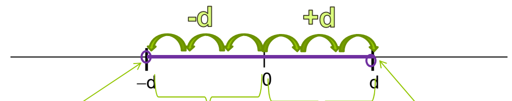
Excluyendo a «4»

$x \in (-4, 4) = \{x \in R / -4 < x < 4\}$

Si pensamos el valor absoluto en términos de distancia

$$|x| < d$$

puntos situados sobre la recta real cuya distancia al 0 es menor que «d» unidades (a la izquierda y a la derecha):



Excluyendo a «–d»

menos que «d» unidades de distancia a la izquierda

menos que «d» unidades de distancia a la derecha

Excluyendo a «d»

La solución por lo tanto está constituida por el conjunto de todos los $x \in (-\mathrm{d}, \mathrm{d})$, es decir, el conjunto
$\{x \in R / -d < x < d\}$

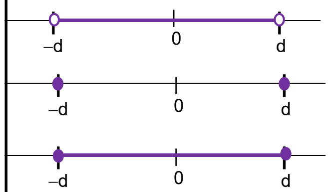
Análogamente:

$|x| \leq d$

Proposición compuesta

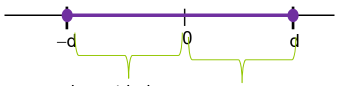
$|x| < d$ **o** $|x| = d$

$(-d, d)$ ∪ $\{-d, d\}$



$[-d, d]$

Gráficamente son los punto de recta cuya distancia al 0 es menor o igual a «d» unidades



«d» unidades de distancia a la izquierda o menos

«d» unidades de distancia a la derecha o menos

Incluyendo a «–d»

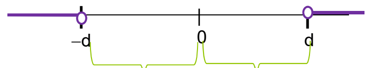
Incluyendo a «d»

Por lo tanto la solución es el conjunto de los $x \in [-d, d]$

Análogamente:

$|x| > d$

Gráficamente son los punto de recta cuya distancia al 0 es mayor a «d» unidades



más que «d» unidades de distancia a la izquierda

Más de «d» unidades de distancia a la derecha

Excluyendo a «–d»

Excluyendo a «d»

Por lo tanto la solución es el conjunto de los x que pertenecen a (–∞, –d) ∪ (d, +∞)

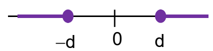
$|x| \geq d$

$|x| > d$ **o** $|x| = d$

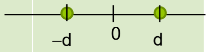
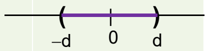
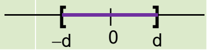
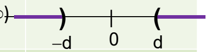
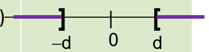
$(-\infty, -d) \cup (d, +\infty)$

∪ $\{-d, d\}$

$(-\infty, -d] \cup [d, +\infty)$



Resumiendo hasta acá

	Como distancia	Solución	Gráficamente
$\lvert x \rvert = d$	Puntos cuya distancia al 0 es igual a «d» unidades	$\{-d,d\}$	
$\lvert x \rvert < d$	Puntos cuya distancia al 0 es menor que «d» unidades	$(-d,d)$	
$\lvert x \rvert \leq d$	Puntos cuya distancia al 0 es menor o igual que «d» unidades	$[-d,d]$	
$\lvert x \rvert > d$	Puntos cuya distancia al 0 es mayor que «d» unidades	$(-\infty, -d) \cup (d, +\infty)$	
$\lvert x \rvert \geq d$	Puntos cuya distancia al 0 es mayor que «d» unidades	$(-\infty, -d] \cup [d, +\infty)$	

Todos son conjuntos centrados en 0 y de radio «d»