Trabajo Práctico N° 4

1. Extremos, cotas, conjuntos acotados, Intervalos

Definición. Máximo y mínimo, cotas, supremo e ínfimo de un conjunto
Sea A un conjunto de números cualesquiera.

- Diremos que $M \in A$ es el **máximo** del conjunto A si para todo elemento $x \in A$ se verifica que $x \leq M$.
- Diremos que $m \in A$ es el **mínimo** del conjunto A si para todo elemento $x \in A$ se verifica que $x \geq m$.
- Diremos que $c \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** del conjunto A si para todo elemento $x \in A$ se verifica que $x \geq c$.
- Diremos que $C \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** del conjunto A si para todo elemento $x \in A$ se verifica que $x \leq C$.
- Llamaremos **ínfimo** del conjunto A a su máxima cota inferior.
- Llamaremos **supremo** del conjunto A a su mínima cota superior .
- Un conjunto que tiene cotas superiores se dice **acotado superiormente**.
- Un conjunto que tiene cotas inferiores se dice **acotado inferiormente**.
- Un conjunto A se dice **acotado** si lo es superior e inferiormente.

1. Para los siguientes conjuntos determinar, de ser posible:

   - Dos cotas superiores.
   - Dos cotas inferiores.
   - El supremo.
   - El ínfimo.
   - El máximo.
   - El mínimo.

   a) $\{-3, -2, 1, 2\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} / x - 2 < 1\}$
   c) $[-2, 4)$
   d) $\{x \in \mathbb{R} / -x^2 + 3x > 0\}$
   e) $(-\infty, 4]$
   f) $(-\infty, 4)$
   g) $\{x \in \mathbb{R} / -x^2 + 3x > 1\}$
   h) $\mathbb{N}$
   i) $\mathbb{Z}$
   j) $[-3, 2] \cup [4, 6]$
   k) $[2, +\infty)$
   l) $\{x \in \mathbb{R} / -x^2 + 3x < 0\}$

   En caso de no ser posible, explicar por qué.

2. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, y justificar:

a) Todo conjunto finito tiene siempre máximo y mínimo.
b) Todo conjunto finito es acotado.
c) Todo conjunto acotado es finito.
d) Si un conjunto es infinito, no es acotado.
e) Si un conjunto posee máximo, es acotado superiormente.
f) Si un conjunto es acotado superiormente, posee máximo.
g) Todo intervalo cerrado es acotado.
h) Todo intervalo cerrado posee siempre máximo y mínimo.
i) Todo conjunto acotado posee supremo e ínfimo.
j) Todo conjunto acotado posee máximo y mínimo.
k) El supremo de un conjunto acotado pertenece siempre al conjunto.

3. Proponer ejemplos de conjuntos en los cuales ninguna de las cotas superiores o inferiores pertenezcan al conjunto y ejemplos de conjuntos en los cuales haya al menos una cota superior o inferior perteneciente al conjunto.

4. Considerar la proposición **p**: un conjunto A se dice acotado si lo es superior e inferiormente.

   a) Escribir la negación: $\sim \mathbf{p}$.
   b) Dar ejemplos de conjuntos no acotados.

Definición. Intervalos acotados.
Sean dos números reales a y b tales que $a < b$.

- Se llama **intervalo abierto** (a, b) al conjunto de números reales comprendidos entre a y b, sin incluir a estos últimos. En símbolos:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$$

- Análogamente, se llama **intervalo cerrado** $[a, b]$ al conjunto de números reales comprendidos entre a y b, incluyendo a estos últimos. En símbolos:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$$

- Análogamente pueden definirse también los intervalos semicerrados o semiabiertos, los cuales son abiertos a izquierda y cerrados a derecha o viceversa.

5. Escribir las definiciones anteriores (intervalos abiertos y cerrados) como conjunción o disyunción de proposiciones.

6. Escribir en símbolos las definiciones de intervalos semiabiertos. Escribirlas también como conjunción o disyunción de proposiciones.

Definición. Intervalos no acotados.
Se llaman intervalos no acotados a los siguientes conjuntos de números reales:

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

7. Decir si los siguientes conjuntos son intervalos o no lo son y justificar:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 2\}$
   b) $A = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 2 \wedge x \geq 0\}$
   c) $A = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 2 \wedge x \geq 6\}$
   d) $A = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 2 \vee x \geq 6\}$

Importante. No cualquier conjunto de números reales es un intervalo. Sólo son intervalos los siguientes conjuntos:

- $[a, b]$
- (a, b)
- $[a, b)$
- $(a, b]$
- $(-\infty, a)$
- $(-\infty, a]$
- $(a, +\infty)$
- $[a, +\infty)$
- $\mathbb{R}$
- $\varnothing$

Cualquier conjunto que no sea uno de los anteriores no es un intervalo.

8. Representar gráficamente los siguientes conjuntos y escribirlos con notación conjuntista:

   a) $(-2, 3)$
   b) $[4, 9)$
   c) $[-3, 9]$
   d) $[-1, 3]$
   e) $(-\infty, 2]$
   f) $(-1, +\infty)$
   g) $(-\infty, 4)$
   h) $[-2, +\infty)$

9. Para los intervalos del ejercicio anterior, decir si se trata de intervalos acotados o no. Dar, si corresponde, cotas superiores, inferiores, máximo, mínimo, supremo e ínfimo.

10. Proponer un ejemplo de un conjunto tal que (uno para cada ítem):

    a) tenga máximo pero no mínimo.
    b) tenga cotas superiores pero no máximo.
    c) sea acotado inferiormente pero no sea un intervalo.

Definición. Operaciones con intervalos.
Sean A y B dos intervalos cualesquiera dentro de un referencial R. Definiremos las siguientes operaciones:

- La **unión** de A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes y no comunes que pertenecen a A y a B. En símbolos:

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

- La **intersección** de A y B es el conjunto formado por los elementos comunes a A y a B. En símbolos:

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

- La **diferencia** entre A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. En símbolos:

$$A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$$

- El **complemento** de A es el conjunto formado por los elementos del referencial que no pertenecen a A. En símbolos:

$$\bar{A} = \{x \in R / x \notin A\}$$

11. Representar gráficamente y calcular $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ y $B - A$ siendo:

    a) $A = (-2, 4)$ y $B = (1, 5)$
    b) $A = (-2, 0]$ y $B = (1, 5)$
    c) $A = [-2, 8]$ y $B = (1, 5)$
    d) $A = (-1, 4]$ y $B = (4, 5)$
    e) $A = (-1, 4]$ y $B = [4, 5)$
    f) $A = (4, +\infty)$ y $B = (-\infty, 5)$
    g) $A = (-\infty, 0)$ y $B = [-1, 1]$
    h) $A = (-\infty, 0]$ y $B = [0, +\infty)$

12. Para cada uno de los conjuntos obtenidos como resultado de las operaciones del ejercicio anterior, decir si son acotados o no. Si tienen, indicar dos cotas superiores, dos cotas inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

2. Funciones acotadas, extremos de una función

Definición. Funciones acotadas.
Una función se dice **acotada** si lo es su conjunto imagen. Según sean las características del conjunto imagen se pueden definir también funciones **acotadas inferiormente** y **acotadas superiormente**.

13. Dar ejemplos gráficos de funciones tales que:

    a) Sean acotadas (superior e inferiormente),
    b) Sólo sean acotadas inferiormente,
    c) Sólo sean acotadas superiormente,
    d) No tengan cotas ni superiores ni inferiores.

    Cuando corresponda indicar algunas cotas.

Definición. Extremos de una función.

- Se dice que una función f alcanza en un punto x_0 de su dominio un **máximo absoluto** M, si $M = f(x_0)$ es mayor o igual que la imagen de cualquier otro elemento del dominio. En símbolos:
  $M = f(x_0)$ es un máximo absoluto de f si para todo $x \in Dom(f)$ se verifica $f(x) \leq M$.
  El número real M es el máximo del conjunto de las imágenes.
- Se dice que una función f alcanza en un punto x_0 de su dominio un **mínimo absoluto** m, si $m = f(x_0)$ es menor o igual que la imagen de cualquier otro elemento del dominio. En símbolos:
  $m = f(x_0)$ es un mínimo absoluto de f si para todo $x \in Dom(f)$ se verifica $f(x) \geq m$.
  El número real m es el mínimo del conjunto de las imágenes.

14. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, y justificar:

    a) Si una función es acotada (superior e inferiormente), necesariamente tiene máximo y mínimo absolutos.
    b) Si una función tiene máximo y mínimo absolutos, necesariamente es acotada.
    c) Ninguna función polinómica es acotada.
    d) La función $f(x) = sen(x)$ es acotada.
    e) La función $f(x) = tg(x)$ es acotada.
    f) Las funciones exponenciales $f(x) = a.e^x$ son acotadas sólo superior o inferiormente.

g) Las funciones logarítmicas $f(x) = a.ln(x)$ son acotadas sólo superior o inferiormente.

15. Para cada uno de los siguientes incisos, se pide:

    - Graficar ambas funciones (podés usar un graficador).
    - Encontrar analíticamente los puntos de intersección (capaz no dan números muy redonditos). Acá toca hacer cuentas.
    - Indicar en el gráfico los intervalos del dominio donde $f(x) < g(x)$. Escribir esto usando intervalos (o unión de ellos).
    - Indicar en el gráfico los intervalos del dominio donde $f(x) > g(x)$. Escribir esto usando intervalos(o unión de ellos).
    - Indicar en los dos incisos anteriores cuál sería la solución si las desigualdades fueran $\leq$ o $\geq$.

    a) $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = x - 2$

    b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y $g(x) = -x - 3$

    c) $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = 2x - 1$

    d) $f(x) = 2x^2 + 6x$ y $g(x) = 2x$

    e) $f(x) = x^2 + 5x + 4$ y $g(x) = -\frac{5}{2}x - 5$

3. Desigualdades. Comparación entre funciones

16. Para cada uno de los siguientes incisos, llevar a una comparación con cero si no está así, factorizar lo que haga falta y lo que se pueda, y buscar el resultado analizando el signo de cada factor. Escribir los conjuntos solución utilizando intervalos (o unión de ellos):

    a) $2 + 3x < 5$

    b) $-2x^2 + 4x \geq 0$

    c) $x^2 - 4 \leq 0$

    d) $\frac{x^2-4}{x(x-4)} > 0$

    e) $x^3 - 9x^2 > 0$

    f) $(2 - x)(3x + 2) < 0$

    g) $5x - 2x^2 \leq 3$

    h) $12x^2 + 6x < x + 2$

17. Hallar el dominio de validez de cada una de las siguientes desigualdades. Si es posible, expresarlo como intervalo o unión de intervalos. Usar el método que más te guste (graficando las funciones a comparar o analizando signos de factores):

a) $3x-(8-x)>-2$
b) $2x+1>x-3$
c) $x^2+1>4x$
d) $x+\frac{1}{x}\geq 1$
e) $5x(x-3)^2<0$
f) $x^2-1\leq 0$
g) $\frac{x}{x+5}>0$
h) $\frac{1}{x-1}>2$
i) $\frac{x^2-4x}{x+2}\geq 0$
j) $(x-1)(x+2)(x-3)\geq 0$
k) $\frac{x(x+2)}{x-2}\leq 0$
l) $\frac{2}{x-2}\geq\frac{3}{x+2}$
m) $\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x+1}\leq 1$
n) $x^2-4x\leq -1-2x$

18. Para resolver la desigualdad $\frac{3}{x}<2$ una persona procede así:
Multiplica por x de ambos lados de la desigualdad, y obtiene: $3<2x$. Luego divide todo por 2 y resulta $\frac{3}{2}<x$ de donde deduce que el dominio de validez de la desigualdad es el intervalo $(\frac{3}{2},+\infty)$.
El razonamiento es incorrecto. ¿Por qué?. Hacerlo bien.

19. Una de las aplicaciones más directas de las desigualdades es en la determinación del dominio de funciones. Entonces, encontrar el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones, y escribirlo como intervalo o unión de intervalos.

a) $f(x)=\sqrt{1-x}$
b) $f(x)=\sqrt{2x+3}$
c) $f(x)=\sqrt{x(x+3)}$
d) $f(x)=\frac{x-2}{x^3-x^2}$
e) $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x^3-x^2}}$
f) $f(x)=\log{(2x+3)}.(x-1)$

4. Valor absoluto. El valor absoluto como distancia

Definición. Valor absoluto de un número real.
Se define el **valor absoluto** de un número real $x\in\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$|x|=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 0\\ -x \text{ si } x<0\end{cases}$$

20. Dar la interpretación geométrica del valor absoluto de un número real, interpretándolo en términos de distancia.

21. Hallar si es posible el o los valores de x que satisfacen las siguientes expresiones y graficar la solución en la recta real:

a) $|x| = 3$ *b*) $|x| = 0$ *c*) $|x| > 0$ *d*) $|x| < 1$

22. Interpretar las siguientes expresiones en términos de distancia, graficar y dar el conjunto solución (cuando corresponda) como intervalos o unión de intervalos:

a) $|x-2| = 1$
b) $|x+1| = 3$
c) $|x-c| = 2$
d) $|x-3| = d$
e) $|x-2| < 1$
f) $|x+1| < 3$
g) $|x-c| < 2$
h) $|x-3| < d$
i) $|x-2| > 1$
j) $|x+1| > 3$
k) $|x-c| > 2$
l) $|x-3| > d$
m) $|x-3| \geq 1$
n) $|x+3| \leq 2$
ñ) $|x| < 2$
o) $|x| \geq 3$

23. Considerar los siguientes conjuntos. Primero graficar y pensarlos en términos de distancia. Luego escribir simbólicamente esa distancia usando el módulo.

a) Puntos de la recta que distan de 2 exactamente 5 unidades.
b) Puntos de la recta que distan de 3 en menos de 2 unidades.
c) Puntos de la recta que distan de 1 en 3 unidades o más.
d) Puntos de la recta que distan de -2 exactamente 3 unidades.
e) Puntos de la recta que distan de -4 menos de 2 unidades.
f) Puntos de la recta que distan de -5 en más de 3 unidades.
g) Puntos de la recta que distan de 0 exactamente 5 unidades.
h) Puntos de la recta que distan de 0 en 3 unidades o menos.
i) Puntos de la recta que distan de 0 en más de 4 unidades.
j) Puntos de la recta que distan de 2 en menos de 5 y más de 3 unidades.
k) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (c-1, c+1)\}$
l) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)\}$
m) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $x \neq 0\}$
n) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $x \neq 3\}$
ñ) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (-4, -2) \cup (2, 4)\}$
o) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in [c-1, c+1]\}$
p) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)\}$
q) $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in [-4, -2) \cup (2, 4]\}$

5. Función valor absoluto

Definición. Función Valor Absoluto (o Función Módulo)
La función **valor absoluto** se define de la siguiente manera:

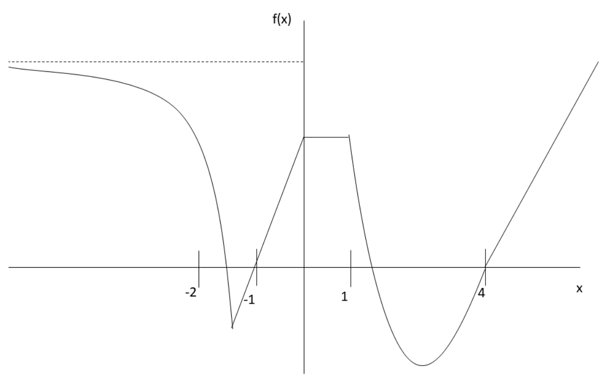
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$x \to |x|$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

24. Representar gráficamente $f(x) = |x|$

25. El siguiente es el gráfico de $f(x)$



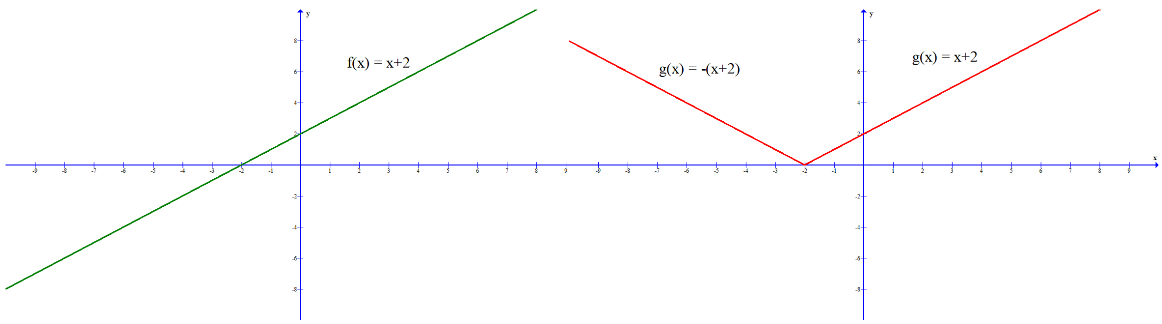
   a) Dibujar el gráfico que corresponde a $|f(x)|$
   b) Indicar el o los intervalos donde $|f(x)| = f(x)$
   c) Indicar los intervalos donde $|f(x)| = -f(x)$

26. Para cada una de las siguientes funciones se pide:

   a) Graficar $f(x)$
   b) Graficar $|f(x)|$ y llamarla $g(x)$
   c) En la función módulo, indicar sobre el gráfico, cuál es el valor de la función en cada intervalo del dominio definido por el módulo. Nombrar esos intervalos.
   d) Desdoblar el módulo de acuerdo a la definición y comparar con lo analizado en el inciso anterior

Por ejemplo: para $f(x) = x + 2$, $g(x) = |x + 2|$

$$g(x) = x + 2 \text{ en } [-2, +\infty) \text{ y } g(x) = -(x + 2) \text{ en } (-\infty, -2)$$



De acuerdo a la definición de la función módulo:

$$g(x) = |x + 2| = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x \in [-2, +\infty) \\ -(x + 2) \text{ si } x \in (-\infty, -2) \end{cases}$$

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 2x$

c) $f(x) = (x - 1).(x - 2)$

d) $f(x) = x^3 - 1$

e) $f(x) = \sin x$ si $x \in [0, 2\pi]$

f) $f(x) = \cos x$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$

h) $f(x) = -4 - 3x$

i) $f(x) = 9 - x^2$

j) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

k) $f(x) = x.(x - 1).(x + 1)$

l) $f(x) = \ln x$

27. Hallar los valores de x que satisfacen las siguientes expresiones, interpretándolas gráficamente como comparación de funciones:

a) $|x - 1| = 3$

b) $|x - 5| < 2$

c) $0 < |x + 3| < 2$

d) $|2x - 4| \geq 3$

28. A un alumno (que desaprobó) se le pidió encontrar los puntos de intersección entre las funciones: $f(x) = |x^2 - 2x|$ y $g(x) = x - 1$. Para ello resolvió las siguientes ecuaciones:

$$x^2 - 2x = x - 1 \text{ y } -(x^2 - 2x) = x - 1$$

De cada igualdad encontró dos puntos de intersección. (Hacer las cuentas). Sin embargo, cuando realiza la gráfica (hacerla) nota que $f(x)$ y $g(x)$ sólo tienen dos puntos de intersección. ¿Por qué razón el alumno encontró cuatro puntos cuando en realidad son sólo dos? ¿Qué omitió en su razonamiento?

29. Encontrar los puntos de intersección de las siguientes funciones, tanto gráfica como analíticamente, y en este último caso tener en consideración las restricciones correspondientes a cada ecuación:

    a) $f(x) = |x - 1|$ y $g(x) = x^2 - 4$

    b) $f(x) = x - 1$ y $g(x) = |x^2 - 4|$

    c) $f(x) = |2x - 1|$ y $g(x) = (2 - x).x$

    d) $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = |(2 - x).x|$

30. Considerar las funciones $|f(x)| = |x^2 - 4|$ y $g(x) = 2x - 1$

    a) realizar un gráfico de ambas funciones (mejor en un mismo gráfico)

    b) Para $|f(x)|$ definir la función en cada tramo del gráfico (es decir, a qué es igual $|f(x)|$ según si las imágenes de $f(x)$ son positivas o negativas)

    c) Encontrar los puntos de intersección entre $|f(x)|$ y $g(x)$ (analíticamente)

    d) Señalar en el eje x de este gráfico, el conjunto de puntos para los cuales es $|f(x)| \geq g(x)$.

    e) Escribir lo anterior usando intervalos (o unión de ellos)

31. Para las desigualdades que siguen:

    - Graficar las funciones que representan cada lado de la desigualdad
    - Proceder como en el ejercicio anterior para determinar el conjunto solución

    a) $|x - 2| < 2x - 1$

    b) $|3 - x| > 1 - 2x$

    c) $3x - 4 < |5x - 1|$

    d) $6x - 2 < |6x|$

    e) $|2x - 1| \geq x^2 + 2$

    f) $3x - 4 > |2x - 2x^2$

    g) $|x^2 - 42| \leq -2x + 4$

    h) $|x^2 - x - 6| \geq x^2 - 1$

    i) $2x - 1 \geq |(2 - x).x|$

    j) $x^2 - x < |2x + 4|$