Trabajo Práctico N° 6

Límite de funciones

Definición. Límite finito de una función en un punto.
Sea $f(x)$ definida en un entorno reducido de $x = c$, es decir, al menos en la unión de intervalos $(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$ (es decir, $f(c)$ puede o no existir).

Diremos que la función $f(x)$ tiene límite finito L en el punto $x = c$ (o cuando x tiende a c) si para cualquier distancia elegida $\epsilon > 0$, es posible encontrar una distancia $\delta > 0$ tal que si x se encuentra a una distancia de c menor que δ y mayor que 0, entonces su imagen $f(x)$ se encontrará a una distancia de L menor que ϵ.

En símbolos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

1. Interpretar en términos de distancias las expresiones: $0 < |x - c| < \delta$ y $|f(x) - L| < \epsilon$.
2. ¿ Qué significado tiene la expresión $0 < |x - c|$? ¿Por qué razón es necesario incluir esta condición en la definición de límite?
3. Interpretar gráficamente la definición de límite finito de una función en un punto, y explicar su significado.
4. Analizar por qué en la definición de límite se dice que delta depende de épsilon ($\delta(\epsilon)$).

Definición. Límites laterales finitos.
Sea $f(x)$ definida en el intervalo $(c, c + \delta)$.

Límite lateral finito por la derecha de $f(x)$ en $x = c$:

Diremos que $f(x)$ posee límite finito por la derecha de $x = c$, si para cualquier distancia elegida $\epsilon > 0$, es posible encontrar una distancia $\delta > 0$ tal que si x verifica que $c < x < c+\delta$, entonces su imagen $f(x)$ se encontrará a una distancia de L menor que ϵ.

En símbolos:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que si } c < x < c + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

5. Interpretar gráficamente la definición de límite lateral por derecha de una función en un punto, y explicar su significado. ¿Cómo sería la definición de límite lateral finito por izquierda?

Teorema. *Una función tiene límite finito en un punto si y sólo si sus límites laterales en ese punto son finitos e iguales.*

En símbolos

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

Definición. Límites laterales infinitos.
Sea $f(x)$ definida en el intervalo $(c, c+\delta$.

Límite lateral infinito positivo por la derecha de $f(x)$ en $x = c$:

Diremos que $f(x)$ posee límite infinito positivo por la derecha de $x = c$, si para cualquier cota $K > 0$, es posible encontrar una distancia $\delta > 0$ tal que todos los valores de x que se encuentren en el intervalo $(c, c+\delta)$ tendrán imágenes superiores a K.

En símbolos:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \iff \forall K > 0,\ \exists \delta\,(K) > 0 \text{ tal que si } x \in (c, c+\delta) \implies f(x) > K$$

Límite lateral infinito negativo por la derecha de $f(x)$ en $x = c$:

Diremos que $f(x)$ posee límite infinito negativo por la derecha de $x = c$, si para cualquier cota $K > 0$, es posible encontrar una distancia $\delta > 0$ tal que todos los valores de x que se encuentren en el intervalo $(c, c+\delta)$ tendrán imágenes inferiores a $-K$.

En símbolos:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \iff \forall K > 0,\ \exists \delta\,(K) > 0 \text{ tal que si } x \in (c, c+\delta) \implies f(x) < -K$$

6. ¿Es lo mismo evaluar una función en un punto que calcular un límite? Explicar la diferencia.

7. Interpretar gráficamente la definición de límite lateral infinito positivo y negativo por derecha de una función en un punto, y explicar su significado. ¿Cómo sería la definición de límite lateral infinito positivo y negativo por izquierda?

Definición. Límite infinito de una función en un punto.

Diremos que una función $f(x)$ tiene límite infinito en $x = c$ si sus límites laterales son ambos infinitos.

Además:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

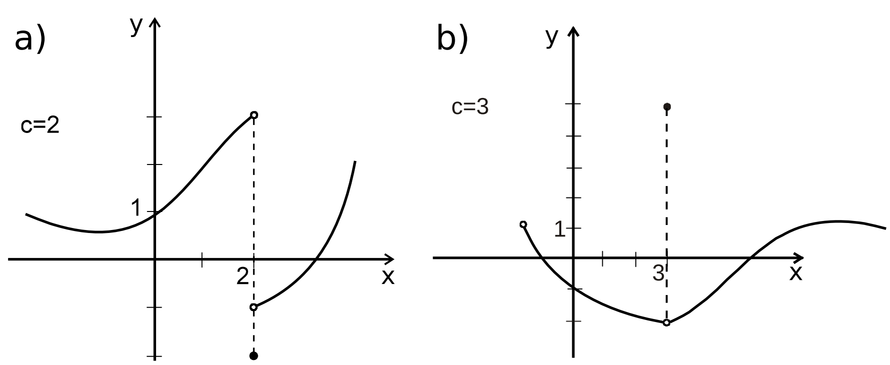
Y si los límites laterales son ambos infinitos pero de distinto signo, diremos que $f(x)$ tiene límite infinito en $x = c$, sin precisar un signo.

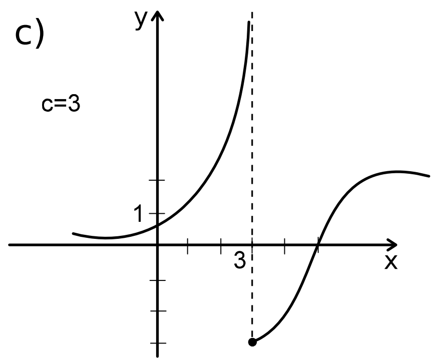
Si $f(x)$ tiene límite infinito en $x = c$, se dice que en ese punto tiene una *asíntota vertical.*

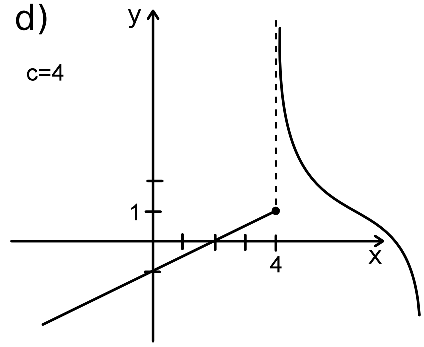
8. Mostrar ejemplos gráficos de funciones con límite infinito en $x = c$, donde se vean las posibles combinaciones de los signos de los límites laterales.

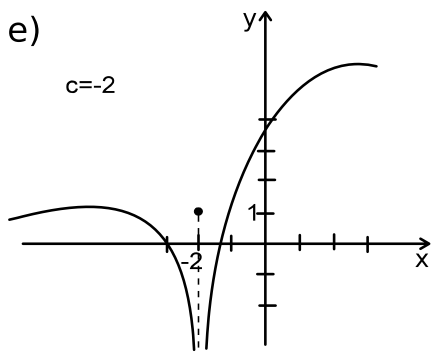
9. Dados los siguientes gráficos, hallar:

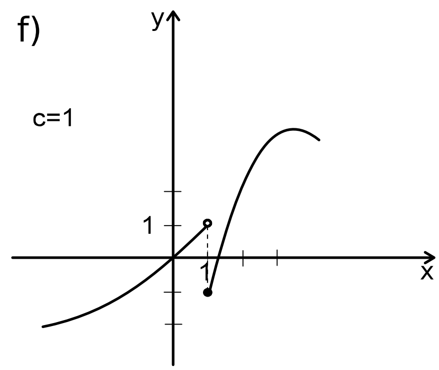
   i) $\lim_{x \to c^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \to c^-} f(x)$ iii) $\lim_{x \to c} f(x)$ iv) $f(c)$

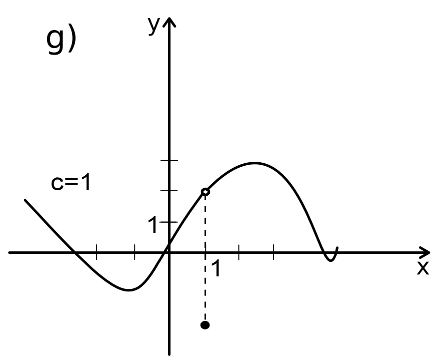


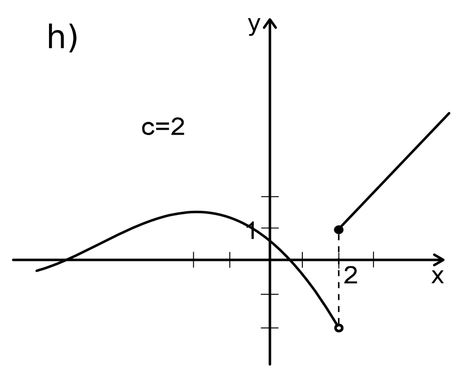

c)
c=3
y
x
1
3

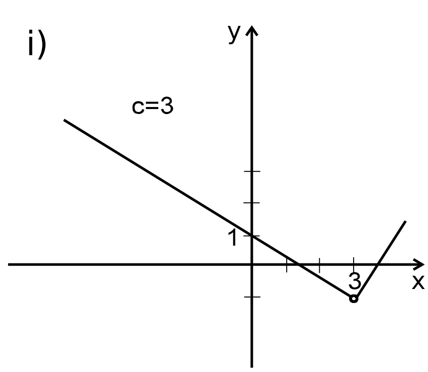

d)
c=4
y
x
1
4

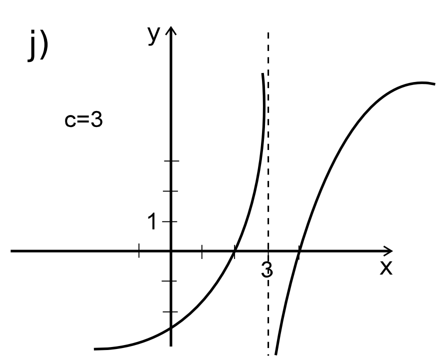

e)
c=-2
y
x
1
-2

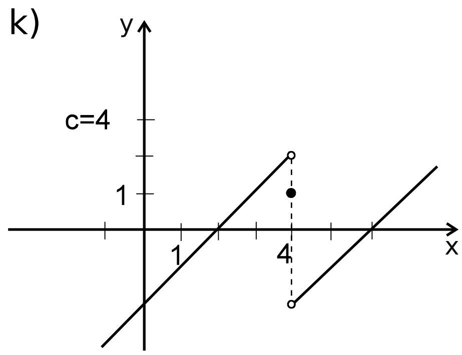

f)
c=1
y
x
1
1

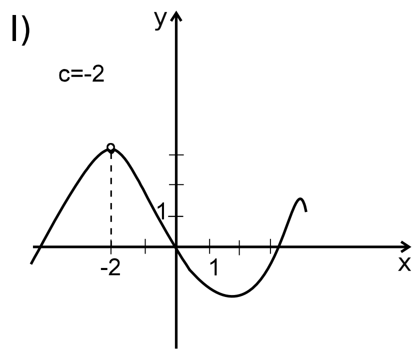

g)
c=1
y
x
1
1


h)
c=2
y
x
1
2


i)
c=3
y
x
1
3


j)
c=3
y
x
1
3





10. Completar la siguiente tabla con ejemplos gráficos que ilustren cada caso

Límite finito en $x = c$: Los límites laterales son finitos e iguales $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to c} f(x) = L$	
Límite infinito positivo en $x = c$: Los límites laterales son ambos infinitos positivos $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$	
Límite infinito negativo en $x = c$: Los límites laterales son ambos infinitos negativos $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$	
Límite infinito en $x = c$: Los límites laterales son ambos infinitos pero de distinto signo $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty \implies \lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$	
Límite infinito en $x = c$: Los límites laterales son ambos infinitos pero de distinto signo $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty \implies \lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$	
No existe límite en $x = c$: Los límites laterales son ambos finitos pero distintos $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = M$ y $L \neq M \implies \nexists \lim\limits_{x \to c} f(x)$	
No existe límite en $x = c$: Los límites laterales son uno finito y el otro infinito $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty \implies \nexists \lim\limits_{x \to c} f(x)$ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L \implies \nexists \lim\limits_{x \to c} f(x)$	

No existe límite en $x = c$: Los límites laterales son uno finito y el otro infinito $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \implies \nexists \lim_{x\to c} f(x)$ $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = L \implies \nexists \lim_{x\to c} f(x)$	

11. ¿Tiene sentido calcular $\lim_{x\to 2} \ln(x-10)$? ¿Por qué? Graficar.

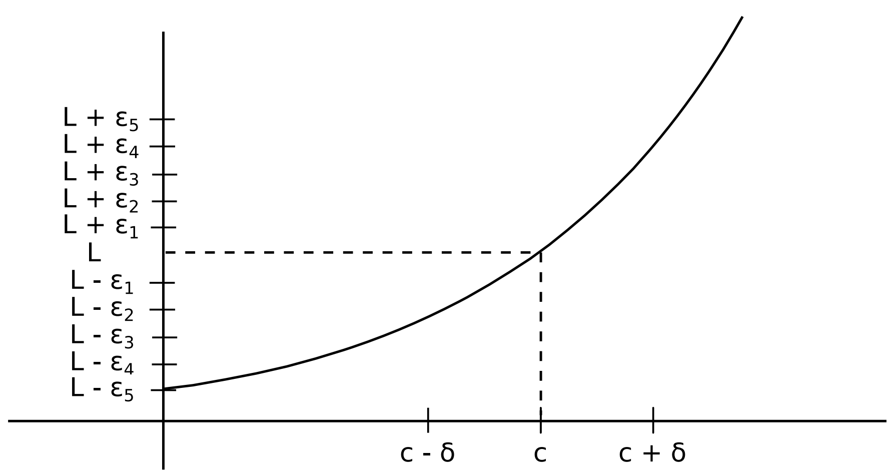
12. Suponga que de una función $f(x)$ se sabe que si $0 < |x-3| < 1$ entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$.

    a) Hacer una interpretación gráfica de la condición enunciada.

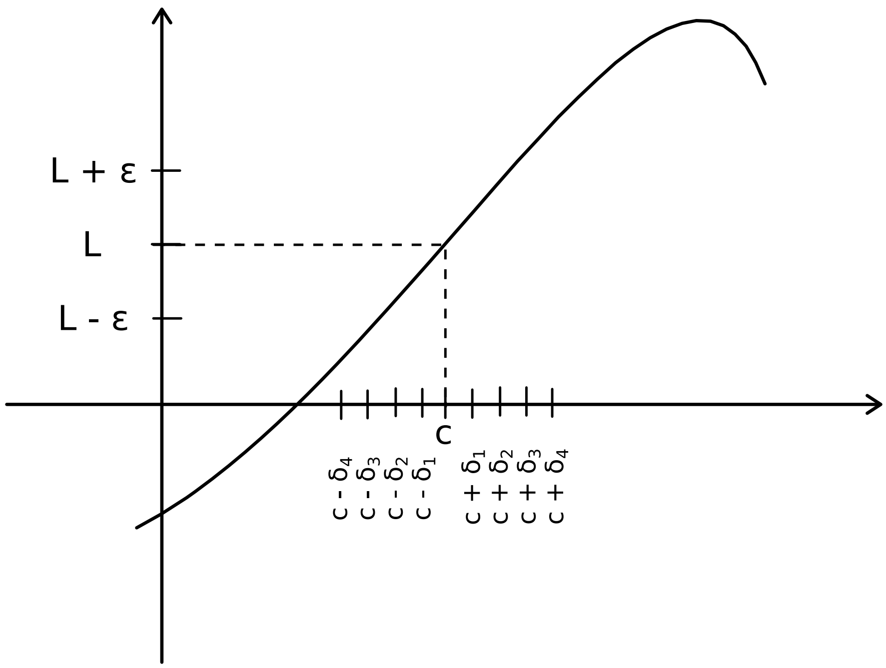
    b) Para cada una de las afirmaciones propuestas a continuación, analizar gráficamente y, comparando con la interpretación gráfica del inciso anterior, decir si son verdaderas o falsas. Justificar.

    i) Si $|x-3| < 1$ entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$
    ii) Si $|x-2{,}5| < 0{,}3$ entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$
    iii) $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$
    iv) Si $0 < x-3 < 2$ entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$
    v) Si $0 < x-3 < 0{,}5$ entonces $|f(x)-5| < 0{,}1$
    vi) Si $0 < x-3 < 0{,}25$ entonces $|f(x)-5| < 0{,}1.(0{,}25)$
    vii) Si $0 < x-3 < 1$ entonces $|f(x)-5| < 0{,}2$
    viii) Si $0 < x-3 < 1$ entonces $|f(x)-4{,}95| < 0{,}05$
    ix) Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$, entonces $4{,}9 < L < 5{,}1$

13. ¿Para cuál o cuáles de los siguientes valores de ϵ "sirve" el valor de δ especificado en el gráfico?



14. ¿Para cuál o cuáles de los siguientes valores dados de δ "funciona" el valor de ϵ marcado?



Teorema. (Propiedades de los límites)
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con límite finito en $x = c$. Entonces:

a) El límite de la suma es la suma de los límites.

b) El límite del producto es el producto de los límites.

c) Si, en particular, una de las funciones es constante, el límite del producto de una función por una constante es el producto de la constante por el límite de la función.

d) El límite del cociente es el cociente de los límites, siempre que el límite de la función del denominador no sea 0.

En símbolos, sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to c} g(x) = M,$$

y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

a) $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

b) $\lim_{x\to c} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to c} f(x). \lim_{x\to c} g(x) = L.M$

c) $\lim_{x\to c} [k.f(x)] = k. \lim_{x\to c} f(x) = k.L$

d) $\lim_{x\to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$.

Teorema. Si $P(x)$ es una función polinómica de la forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, donde a_0, a_1 ,..., a_n son número reales, entonces:

$$\lim_{x\to c} P(x) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + ... + a_nc^n = P(c)$$

Teorema. Si $\lim_{x\to c} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Nota: para saber el “signo del infinito” hay que determinar los límites laterales cuando $x \to c^+$ y $x \to c^-$, como se explicó anteriormente en la definición de límite infinito de una función en un punto.

15. Calcular los siguientes límites e interpretar gráficamente:

    a) $\lim_{x\to 2} 5x$ *b*) $\lim_{x\to 1} x^2 - 4x + 1$ *c*) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ *d*) $\lim_{x\to 4} 3x + 2$

16. Analizar ambos límites laterales de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = tg(x)$, en $x = \frac{\pi}{2}$
    b) $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$, en $x = 2$
    c) $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$, en $x = 5$ y $x = -5$
    d) $f(x) = \frac{x-5}{x^2-25}$, en $x = 5$ y $x = -5$

17. Considerando los siguientes límites: $\lim_{x\to c} f(x) = 2$, $\lim_{x\to c} g(x) = -1$ y $\lim_{x\to c} h(x) = 0$, evaluar las siguientes expresiones (si es posible):

    a) $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)]$
    b) $\lim_{x\to c} \left([f(x)]^2\right)$
    c) $\lim_{x\to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$
    d) $\lim_{x\to c} \left[\frac{h(x)}{f(x)}\right]$
    e) $\lim_{x\to c} \left[\frac{f(x)}{h(x)}\right]$
    f) $\lim_{x\to c} \left[\frac{1}{f(x)-g(x)}\right]$

Teorema. (Teorema del sándwich)
Sean las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tales que en $(c - \delta, c + \delta)$ verifican que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, y además $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$. Entonces: $\lim_{x\to c} h(x) = L$.

18. Explicar el significado del teorema del sándwich y dar una interpretación gráfica del mismo.

19. Aplicando el teorema del sándwich y apoyándose gráficamente, hallar:

    a) $\lim_{x\to 0} f(x)$, sabiendo que $0 < |x| < 1 \implies 0 \leq f(x) \leq |x|$.
    b) $\lim_{x\to 0} f(x)$, sabiendo que $x \neq 0 \implies 2 - |x| \leq f(x) \leq 2 + |x|$.

c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, sabiendo que $x \neq 3 \implies 0 \leq f(x) \leq (x-3)^2$.

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, sabiendo que $0 < |x-2| < 1 \implies -(x-2)^2 \leq f(x) \leq 0$.

20. En las siguientes funciones, determinar los valores de x para los cuales la función no está definida (llamémoslos $x = a$). Luego calcular los límites laterales cuando $x \to a^+$ y $x \to a^-$. ¿Qué se puede decir del límite de la función cuando $x \to a$?

a) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+x-2}$ *b*) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ *c*) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-6x+9}$ *d*) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

Definición. Límite finito de una función cuando la variable tiende a infinito.

La función $f(x)$ tiene límite finito L cuando x tiende a infinito positivo, si para todo $\epsilon > 0$, es posible encontrar un número real x_0 tal que, cuando $x > x_0$, la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ.
En símbolos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} / x > x_0 \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

La definición cuando $x \to -\infty$ es similar.

21. Interpretar gráficamente la definición de límite finito de una función cuando la variable tiende a infinito positivo y negativo, y explicar su significado.

Definición. Asíntota horizontal.

Si $f(x)$ tiene límite finito cuando x tiende a infinito (positivo o negativo), se dice que tiene una *asíntota horizontal*.

22. Dar ejemplos gráficos de funciones que posean asíntotas horizontales a derecha y/o a izquierda.

Definición. Formas indeterminadas.

Ya sea que se trate de un límite de una función cuando la variable tiende a un punto o cuando tiende a infinito, se denomina *forma indeterminada* o *límite indeterminado* a un límite del cual es imposible determinar en forma inmediata si es finito, infinito o no existe.

Algunas formas indeterminadas son: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, $\infty - \infty$,

entendiéndose que se trata de expresiones donde participan dos funciones *que tienden a* 0, 1 o ∞, según corresponda, y no propiamente de una operación entre éstos.

Algunas técnicas de cálculo de límites

Técnica de cancelación

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones polinómicas tales que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$. Por lo tanto, el límite $\lim\limits_{x\to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ es una forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Sabemos que si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, entonces $f(c) = 0$ y por lo tanto $f(x)$ es divisible por $(x-c)$, o sea:

$$f(x) = r(x).(x-c).$$

Por el mismo argumento:

$$g(x) = s(x).(x-c).$$

Entonces:

$$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to c}\left[\frac{r(x)(x-c)}{s(x)(x-c)}\right] = \lim_{x\to c}\left[\frac{r(x)}{s(x)}\right],$$

cancelando el factor $(x-c)$, ya que cuando $x \to c$, $x \neq c$.

Si el límite vuelve a ser indeterminado, significa que el factor $(x-c)$ está presente nuevamente tanto en el numerador como en el denominador, y se repite el procedimiento. Si $(x-c)$ no es factor simultáneamente en el numerador y en el denominador, el límite ya no es indeterminado y se puede calcular por sustitución directa o aplicando las propiedades vistas.

Técnica de división por la mayor potencia

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones polinómicas tales que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ (infinitos de cualquier signo). Por lo tanto, el límite $\lim\limits_{x\to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ es una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Haciendo uso del hecho de que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

para toda potencia positiva de x, la técnica consiste en dividir todos los términos del numerador y del denominador por la potencia x^n, donde n es el mayor valor entre el grado de $f(x)$ y el de $g(x)$. De ese modo, todos los términos presentes en el cociente tendrán la forma $\frac{k}{x^m}$ (donde k es un número real coeficiente de la función polinómica), los cuales tienden a cero cuando $x \to \infty$, a excepción de, a lo sumo, un término en el numerador y uno en el denominador que son independientes de x.

Técnica de reescribir el producto como cociente

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $f(x).g(x) \to 0.\infty$ cuando $x \to c$ o $x \to \infty$. Por un teorema enunciado más arriba, sabemos que:

$$f(x) \to 0 \implies \frac{1}{f(x)} \to \infty \text{ y } g(x) \to \infty \implies \frac{1}{g(x)} \to 0.$$

Por lo tanto, como el producto $f(x).g(x)$ puede escribirse como

$$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

entonces puede transformarse en una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ (primer caso) o $\frac{\infty}{\infty}$ (segundo caso), las cuales pueden resolverse empleando las otras técnicas descritas.

Técnica de racionalización (multiplicación por el conjugado)

Esta técnica se aplica en ocasiones cuando se tiene una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, para intentar transformar la resta en un cociente llevándolo a una forma conocida de tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, o a un límite de cálculo inmediato.

Teniendo $\lim\limits_{x\to c} [f(x) - g(x)] \to \infty - \infty$ y sabiendo que:

$$[f(x) - g(x)] \,.\, [f(x) + g(x)] = [f(x)]^2 - [g(x)]^2 ,$$

podemos reescribir el límite como:

$$\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} \left(\frac{[f(x) - g(x)] \,.\, [f(x) + g(x)]}{f(x) + g(x)} \right) = \lim_{x\to c} \left(\frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{f(x) + g(x)} \right).$$

Esta técnica es válida tanto cuando $x \to c$ como cuando $x \to \infty$.

23. Calcular los siguientes límites indeterminados aplicando las técnicas anteriores:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)+3\cos(x)-4}{\cos^2(x)-1}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \frac{4x^2-9}{2x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3+1}{x^3}$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2+4x-2}{x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{5x}$

l) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+5}$

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3-2x+3}{3x^2-5x+1}$

24. En ausencia de viento, la concentración de metano emitida por un montículo de termitas es:

$$f(d) = \frac{0{,}4d + 0{,}7}{d + 1},$$

donde d es la distancia al montículo. La concentración de metano existe en el ambiente independientemente de la presencia de los termiteros. Por eso, para conocerla se debería poder averiguar cuál es dicha concentración en un lugar muy apartado de las termitas. Proponer y calcular cómo se puede conocer ese dato a partir de la función anterior.