Zadanie 1

a) Predykaty i założenia w logice

Dane są następujące stałe i predykaty:

- Stałe indywiduowe:
  - m – Markus
  - c – Cezar
  - p – Pompeje
  - r – Rzym
  - t – czas
- Predykaty:
  - Człowiek(x) – x jest człowiekiem
  - Pompejańczyk(x) – x jest pompejańczykiem
  - Rzymianin(x) – x jest Rzymianinem
  - Władca(x) – x jest władcą
  - Lojalny(x, y) – x jest lojalny wobec y
  - Nienawidzi(x, y) – x nienawidzi y
  - PróbowałZamachu(x, y) – x próbował dokonać zamachu na y
  - Żyje(x, t) – x żyje w czasie t

Założenia:

1. Markus był człowiekiem. (Człowiek(m))
2. Markus był pompejańczykiem. (Pompejańczyk(m))
3. Wszyscy pompejańczycy byli Rzymianami. *∀x(Pompejan´czyk(x)→Rzymianin(x))\forall x (Pompejańczyk(x) \rightarrow Rzymianin(x))*∀x(Pompejan´czyk(x)→Rzymianin(x))
4. Cezar był władcą. (Władca(c))
5. Wszyscy Rzymianie albo byli lojalni wobec Cezara, albo go nienawidzili. *∀x(Rzymianin(x)→(Lojalny(x,c)∨Nienawidzi(x,c)))\forall x (Rzymianin(x) \rightarrow (Lojalny(x, c) \vee Nienawidzi(x, c)))*∀x(Rzymianin(x)→(Lojalny(x,c)∨Nienawidzi(x,c)))
6. Każdy jest lojalny wobec kogoś. *∀x∃y(Lojalny(x,y))\forall x \exists y (Lojalny(x, y))*∀x∃y(Lojalny(x,y))
7. Ludzie próbują dokonać zamachu tylko na tych władców, wobec których nie są lojalni. *∀x∀y((Władca(y)∧Człowiek(x))→(Pro´bowałZamachu(x,y)→¬Lojalny(x,y)))\forall x \forall y ((Władca(y) \land Człowiek(x)) \rightarrow*

(PróbowałZamachu(x, y) \rightarrow \neg Lojalny(x, y)))∀x∀y((Władca(y)∧Człowiek(x))→(Pro´bowałZamachu(x,y)→¬Lojalny(x,y)))

8. Markus próbował dokonać zamachu na Cezara. (PróbowałZamachu(m, c))

b) Odpowiedź na pytanie o lojalność Markusa wobec Cezara

Pytanie brzmi: czy Markus był lojalny wobec Cezara?

- Z założenia 8: Markus próbował dokonać zamachu na Cezara. (PróbowałZamachu(m, c))
- Z założenia 7: Ludzie próbują dokonać zamachu tylko na tych władców, wobec których nie są lojalni. (∀x∀y((Władca(y)∧Człowiek(x))→(Pro´bowałZamachu(x,y)→¬Lojalny(x,y)))\forall x \forall y ((Władca(y) \land Człowiek(x)) \rightarrow (PróbowałZamachu(x, y) \rightarrow \neg Lojalny(x, y)))∀x∀y((Władca(y)∧Człowiek(x))→(Pro´bowałZamachu(x,y)→¬Lojalny(x,y))))

Zatem:

- Pro´bowałZamachu(m,c)→¬Lojalny(m,c)PróbowałZamachu(m, c) \rightarrow \neg Lojalny(m, c)Pro´bowałZamachu(m,c)→¬Lojalny(m,c)

Ponieważ z założenia wynika, że Markus próbował dokonać zamachu na Cezara, możemy wnioskować, że Markus nie był lojalny wobec Cezara.

c) Przekształcenie formuł do postaci koniunkcyjnej normalnej (CNF)

Formuły już są w postaci koniunkcyjnej normalnej (CNF), ale dla przypomnienia:

1. Człowiek(m)Człowiek(m)Człowiek(m) – już w CNF.
2. Pompejan´czyk(m)Pompejańczyk(m)Pompejan´czyk(m) – już w CNF.
3. ∀x(Pompejan´czyk(x)→Rzymianin(x))\forall x (Pompejańczyk(x) \rightarrow Rzymianin(x))∀x(Pompejan´czyk(x)→Rzymianin(x)) przekształcamy na CNF: ¬Pompejan´czyk(x)∨Rzymianin(x)\neg Pompejańczyk(x) \vee Rzymianin(x)¬Pompejan´czyk(x)∨Rzymianin(x)
4. Władca(c)Władca(c)Władca(c) – już w CNF.
5. ∀x(Rzymianin(x)→(Lojalny(x,c)∨Nienawidzi(x,c)))\forall x (Rzymianin(x) \rightarrow (Lojalny(x, c) \vee Nienawidzi(x, c)))∀x(Rzymianin(x)→(Lojalny(x,c)∨Nienawidzi(x,c))) przekształcamy na CNF: ¬Rzymianin(x)∨Lojalny(x,c)∨Nienawidzi(x,c)\neg Rzymianin(x) \vee Lojalny(x, c) \vee Nienawidzi(x, c)¬Rzymianin(x)∨Lojalny(x,c)∨Nienawidzi(x,c)

6. *∀x∃y(Lojalny(x,y))\forall x \exists y (Lojalny(x, y))*∀x∃y(Lojalny(x,y)) – formuła z kwantyfikatorami egzystencjalnymi nie wymaga przekształcenia do CNF.
7. *∀x∀y((Władca(y)∧Człowiek(x))→(Pro´bowałZamachu(x,y)→¬Lojalny(x,y)))\forall x \forall y ((Władca(y) \land Człowiek(x)) \rightarrow (PróbowałZamachu(x, y) \rightarrow \neg Lojalny(x, y)))*∀x∀y((Władca(y)∧Człowiek(x))→(Pro´bowałZamachu(x,y)→¬Lojalny(x,y))) przekształcamy na CNF: *¬Władca(y)∨¬Człowiek(x)∨¬Pro´bowałZamachu(x,y)∨¬Lojalny(x,y)\neg Władca(y) \vee \neg Człowiek(x) \vee \neg PróbowałZamachu(x, y) \vee \neg Lojalny(x, y)*¬Władca(y)∨¬Człowiek(x)∨¬Pro´bowałZamachu(x,y)∨¬Lojalny(x,y)
8. *Pro´bowałZamachu(m,c)PróbowałZamachu(m, c)*Pro´bowałZamachu(m,c) – już w CNF.

d) Dowód metodą rezolucji

1. *Pro´bowałZamachu(m,c)PróbowałZamachu(m, c)*Pro´bowałZamachu(m,c) – założenie (formuła 8).
2. *¬Pro´bowałZamachu(x,y)∨¬Lojalny(x,y)\neg PróbowałZamachu(x, y) \vee \neg Lojalny(x, y)*¬Pro´bowałZamachu(x,y)∨¬Lojalny(x,y) – założenie (formuła 7).

Rezolucja między (1) i (2) daje:

¬Lojalny(m,c)\neg Lojalny(m, c)¬Lojalny(m,c)

Zatem Markus nie był lojalny wobec Cezara.

Zadanie 2

a) Predykaty i założenia

Dane są następujące predykaty:

- Lubi(x, y) – x lubi y
- Pożywienie(x) – x jest pożywieniem
- Je(x, y) – x je y
- Zabija(x, y) – x zabija y
- Żyje(x) – x żyje

Założenia:

1. Jan lubi każdy rodzaj pożywienia. *∀x(Poz˙ywienie(x)→Lubi(j,x))\forall x (Pożywienie(x) \rightarrow Lubi(j, x))*∀x(Poz˙ywienie(x)→Lubi(j,x))

2. Jabłka są pożywieniem.
   *Poz˙ywienie(Jabłko)Pożywienie(Jabłko)*Poz˙ywienie(Jabłko)
3. Kurczak jest pożywieniem.
   *Poz˙ywienie(Kurczak)Pożywienie(Kurczak)*Poz˙ywienie(Kurczak)
4. Cokolwiek, co ktokolwiek je i go nie zabija, jest pożywieniem.
   ∀x∀y(Je(x,y)∧¬Zabija(x,y)→Poz˙ywienie(y))\forall x \forall y (Je(x, y) \land \neg Zabija(x, y) \rightarrow Pożywienie(y))∀x∀y(Je(x,y)∧¬Zabija(x,y)→Poz˙ywienie(y))
5. Adam je orzeszki i wciąż żyje. *Je(a,Orzeszki)∧Z˙yje(a)Je(a, Orzeszki) \land Żyje(a)*Je(a,Orzeszki)∧Z˙yje(a)
6. Basia je wszystko to, co Adam. *∀x(Je(a,x)→Je(b,x))\forall x (Je(a, x) \rightarrow Je(b, x))*∀x(Je(a,x)→Je(b,x))

b) Przekształcenie do postaci koniunkcyjnej normalnej (CNF)

1. *¬Poz˙ywienie(x)∨Lubi(j,x)\neg Pożywienie(x) \vee Lubi(j, x)*¬Poz˙ywienie(x)∨Lubi(j,x)
2. *Poz˙ywienie(Jabłko)Pożywienie(Jabłko)*Poz˙ywienie(Jabłko)
3. *Poz˙ywienie(Kurczak)Pożywienie(Kurczak)*Poz˙ywienie(Kurczak)
4. *¬Je(x,y)∨¬Zabija(x,y)∨Poz˙ywienie(y)\neg Je(x, y) \vee \neg Zabija(x, y) \vee Pożywienie(y)*¬Je(x,y)∨¬Zabija(x,y)∨Poz˙ywienie(y)
5. *¬Je(a,x)∨Je(b,x)\neg Je(a, x) \vee Je(b, x)*¬Je(a,x)∨Je(b,x)

c) Dowód metodą rezolucji (Jan lubi orzeszki)

1. *Poz˙ywienie(Orzeszki)Pożywienie(Orzeszki)*Poz˙ywienie(Orzeszki) – założenie 5.
2. *¬Poz˙ywienie(x)∨Lubi(j,x)\neg Pożywienie(x) \vee Lubi(j, x)*¬Poz˙ywienie(x)∨Lubi(j,x) – założenie 1.

Rezolucja między (1) i (2) daje:

*Lubi(j,Orzeszki)Lubi(j, Orzeszki)*Lubi(j,Orzeszki)

d) Dowód metodą rezolucji (Jakie pożywienie je Basia?)

1. *Je(a,Orzeszki)Je(a, Orzeszki)*Je(a,Orzeszki) – założenie 5.
2. *∀x(Je(a,x)→Je(b,x))\forall x (Je(a, x) \rightarrow Je(b, x))*∀x(Je(a,x)→Je(b,x)) – założenie 6.

Rezolucja między (1) i (2) daje:

*Je(b,Orzeszki)Je(b, Orzeszki)*Je(b,Orzeszki)
4o mini