Mech_1

Section 1 力学

Chapter 1 时空观和运动学

§ 1.1 绝对时空观

经典牛顿力学是以绝对时空观为基础的。我们将时间视为一个关键的、超越空间的物理量：固连在绝对空间背景上的空间坐标描述物体此时此刻在何位置，这要配合时间表述，时间作为自变量，坐标作为其函数，随其变化。引用牛顿的话："绝对的，纯粹的数学的时间，就其本性来说，均匀流逝，与外界任何情况无关。"相对的是相对时空观，其认为随观察者变化，时间的度量也会有变化，与空间有类似性质，故与空间可以联合为一个四维矢量（之后会解释此名词的意义）。我们会在狭义相对论一章中再详细解释其含义。除了此章之外我们都采取绝对时空观。

我们在日常生活中明显能够意识到空间和时间的概念，也能凭借我们的意识判断大概比较各个物体的空间时间参数，例如通过比对比较长度，通过视线角判断距离，通过天幕日月流转来判断时间长短。但是人的意识有判断的上下极限，不能很好地、精确地度量时空。因此产生了空间时间单位配合数字来计算度量时间、空间。一直以来人们致力于将其定义精确化，严谨化，这是出于近代物理发展的需要。以下引用在SI中的"秒"与"米"的定义：

> 秒，符号为 s，是国际单位制中的时间单位。它是通过采用铯133原子基态的超精细能级跃迁频率 $\Delta\nu_{Cs}$ 的固定数值来定义的，该频率以赫兹（Hz，单位等于 s^{-1}）表示时，其值为 9 192 631 770。

> 米，符号为 m，是国际单位制中的长度单位。它是通过采用真空中光速 c 的固定数值来定义的，该速度以米每秒（$m\ s^{-1}$）表示时，其值为 299 792 458，其中秒是根据 $\Delta\nu_{Cs}$ 定义的。

其本质是根据固有的时间空间间隔来定义“秒”与“米”。固有的时空间隔是借助相比人类尺度极大的物体（例如地球，太阳），其相关物理量变化极为缓慢来定义（例如日、月（时间）、秒差距（距离）等），或是根据微观或本质的物理现象来定义（最经典的莫过于光速）。

然而绝对时空观也有弊端：你不能每次选取坐标系都选取“固连在绝对空间背景上的空间坐标”，这样固定原点对做题和其他任何事情都有不便之处。故引入了参考系这一概念，这里不再赘述。

牛顿第一定律——惯性定律的讨论见Mech_2 > § 2.1.1 牛顿第一定律

§ 1.2 运动的描述

绝对时间观认为时间t均匀流动，作为因变量。而空间坐标 (x, y, z) 随之变化，我们先研究简单的直线运动，此时 $y = z = 0$ 对任意 t 成立

§ 1.2.1 直线运动

在初中阶段主要描述匀速直线运动，其满足 $x = x_0 + vt$ ，这定义了一个重要的物理量——速度。然而速度的概念不仅仅对于匀速直线有，对于其他任意运动都有速度这一概念。我们引入微时间元 Δt 并考察 $t \sim t + \Delta t$ 这一段时间内的位移。记 $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ 那么我们给出定义：

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}(\Delta t \to 0) \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

其中“ $\equiv$ ” 为 “定义为” 符号。数学上可以证明，对确定的时间t和对应关系x(t)，运动符合物理（无“瞬间移动”）时，总存在这样定义的瞬时速度，可以用来代表此时的运动快慢，其物理意义即在当时间无限短的区间内，总可以将变速运动视为匀速运动。注意，若此时物体受到冲击，速度有可能瞬间变化，表示在数学形式上即 Δt 分别在大于0与小于0时， Δx 呈现不同的逼近形式，与正常对比如下图，

从图中可以看出，切线斜率也是速度的一种表现形式。数学上将一个函数做上面速度的操作，称为导数，导数的运算可以参考高中课本或高等数学。同样地知道了速度随时间的函数关系，也可以反推出位移的值，这是被称为积分的操作，直观上就是将时间分割成许多小块，在每个小块中速度近似不变，那么就可以给出这个区间内的位移大小，表示为下式，

$$x(T_2)-x(T_1)=\sum_{\text{对}T_1\sim T_2\text{的一个分割}} v(t_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)(\Delta t\to 0)\equiv\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$$

这即为积分运算，某种程度上是求导的逆运算，同学们需要掌握其运算法则，也可以根据求导法则自己摸索。

§ 1.2.2 曲线运动

曲线运动引入了y,z分量，让位置变为了一个矢量，其意义为“既有位置又有方向的量”，对三维空间需要使用三个坐标值来确定，即前文提到的 (x,y,z) 同样地，速度也为一个矢量，其为

$$\mathbf{v}=(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})\ ||\mathbf{v}||\ =\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}$$

其意义为间隔两位矢 $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ 与 Δt 之商。

同样地，速度也可反推之，这里不再赘述。值得注意的是，速度也可对时间求导数，得到的是加速度，描述速度变化快慢和方向，即，

$$\mathbf{a}=(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t})=(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2})$$

其中 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ 表示连续做两次导数。

例1.2.1 加速度的计算

> 给定圆周运动$(x,y,z)=(R\cos(\frac{1}{2}\beta t^2),R\sin(\frac{1}{2}\beta t^2),0)$ 写出其加速度，画图，描述其加速度方向。

解：
求导易得

$$\mathbf{v}=(v_x,v_y,v_z)=(-R\beta t\sin(\frac{1}{2}\beta t^2),R\beta t\cos(\frac{1}{2}\beta t^2))\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)=(-R\beta\sin($$

通过此例题我们看到不仅速度同向有加速度，与速度垂直的方向也有加速度，通常描述速度“转向”的速度。这会在下一章自然坐标系中展开讲解。

§ 1.2.3 极坐标系

极坐标系主要描述二维运动 $(x(t), y(t))$ 其重构了用x，y表示坐标选择用与到原点的距离r和与极轴的夹角 θ 来表示，从而一定有，

$$x = r\cos\theta y = r\sin\theta$$

θ 的取值具有周期循环性，即加 2π 仍是同一点。考虑已知坐标 (r, θ) 用矢量和表示之，如图所示定义 $\hat{r}, \hat{\theta}$ 则有： $\mathbf{r} = r\hat{r}$ 。矢量的数乘也满足导数乘法法则，故可以如下计算

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\hat{\theta}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

这里不加证明地给出加速度a在极坐标中的表达式，留作习题，读者自证不难。

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

注：加点表示对t求导数。这里要用到求导的链式法则（其是一个很重要的求导工具，需要掌握），即

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dx}} &= \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(g(x))\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dx}} \\ \mathrm{d}h &= f(g(x) + \mathrm{d}g(x)) - f(g(x)) \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(g(x))\mathrm{d}g(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

极坐标可以方便地表示曲线方程，例如我们不加证明地给出圆锥曲线的一般极坐标表达式为，

$$r = \frac{C}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

其中 θ_0 表示“近地点”的角坐标， e 即为偏心率。

§ 1.2.4 自然坐标系

自然坐标系的出发点是已知粒子的行进路径 $(x, y) = (x(s), y(s))$ ，其中 s 是一个参量，用参数方程来决定坐标。总有办法可以将 s 转义为曲线长度参量，即对任意s有

$$(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}s})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s})^2=1$$

其物理意义是：距离 $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$ 刚好与 $\mathrm{d}s$ 相等。这里的 d 表示取微元，这里的取等表示在极限趋于0条件下的近似相等。我们的任务是，通过以上函数的特征，给出速度和加速度关于 $\dot{s},\ddot{s}$ 的表达式，所有的运动是仅由路径和s参量关于时间的变换关系决定，这也能给出速度，加速度之间的一些关系，是一个十分有用的工具。

首先，s增加的方向我们定义为切向，记作 $\hat{\tau}$ ，定义为：

$$\hat{\tau}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$$

这样我们就定义了速度的方向，因为：

$$\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}$$

令 $\hat{\tau}$ 的变化方向为法向，记为 $\hat{n}$ ，即

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}s}=\kappa\hat{n}$$

其中 $\hat{n}$ 为单位矢量，表示法向分量； κ 表示曲线在此点处的曲率。同时局域坐标系需要三个坐标分量，不妨取为正交的，不难证明，$\hat{\tau}$ 一定与 $\hat{n}$ 正交。那么定义 $\hat{b}=\hat{\tau}\times\hat{n}$ 是极为合理的。这里的 $\times$ 是叉乘运算，我们会在数学基础这一部分讲一些关于矢量运算的东西，但由于我们现在也用不到，所以略去，这是一个与 $\hat{\tau},\hat{n}$ 均垂直的矢量。

接下来我们推导加速度的公式，对速度求导，并以s做间接变量，有

$$\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s}\dot{s}=\frac{\mathrm{d}\hat{\tau}}{\mathrm{d}s}\dot{s}^2+\ddot{s}\hat{\tau}$$

$$=\ddot{s}\hat{\tau}+\kappa\dot{s}^2\hat{n}$$

而曲线本身的性质决定了 κ 关于s的值。具体而言， κ 是描述曲线弯曲程度的数值，用圆拟合曲线，那么有圆的半径满足 $R=\frac{1}{|\kappa|}$ 。考虑二维平面上的曲线运动，有 $(x,y)=(x,y(x))$ ，先不采用s作为主元，我们来推导曲率 κ 的表达式。

观察 κ 的定义式，记曲线在x处切向与x轴正向的夹角为 θ ，则对比导数的定义式可知 $\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 那么一定有， $|\mathrm{d}\hat{\tau}| = \mathrm{d}\theta$ ，那么， $\kappa = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$ ，这里不完全指导数，而是微元的商。于是：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta &= \frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}s &= \sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad \kappa &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{(1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

曲率和曲率半径是描绘曲线的一个关键参数，读者可以尝试推导极坐标系下曲线 $(r,\theta) = (r(\theta),\theta)$ 的曲率。需要注意设定的曲线切向角的微分因坐标旋转导致的额外一项变化。

例题 1.2.2

> （1） 推导极坐标下曲线 $(r(\theta),\theta)$ 在 $\theta=\theta_0$ 的曲率半径。
> （2） 给定曲线 $r=r_0e^\theta$ ，求其曲率半径。

§ 1.3 参考系的变换

运动的合成与分解是一个过于trivial的东西，我们这里略去不谈。虽然参考系的变换与其数学运算很相似，但表达的物理意义是更多更深刻的。参考系的概念在狭义相对论中被发扬光大，成为“等效原理”的基石之一。

§ 1.3.1 参考系之间的平动

参考系，本质上就是我们把视角放在一个点上，随着这个点运动，视角运动，原点固定在这个点上：这就是平动参考系的思想。我们在地球上，通常认为地球几乎不运动，故有一个固定的，固连在地球上的参考系，即是初始的“惯性系”。之后每个相对于它做匀速运动的参考系也是“惯性系”。除外即为非惯性系了。惯性系中的物体遵循同一套物理定律，即为强等效原理。我们就是在这样一个系下才能引入明确的力的概念。

一个物体，相对惯性系运动为 $(x(t), y(t), z(t))$ ，参考物体相对惯性系运动为 $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ 那么在参考系下，物体的运动为 $(x(t)-x_0(t), y(t)-y_0(t), z(t)-z_0(t))$ ，显然易得，

$$\mathbf{v}_r=\mathbf{v}-\mathbf{v}_0\mathbf{a}_r=\mathbf{a}-\mathbf{a}_0$$

这里r指“relative”，相对的。通常我们会取匀速系，或者一个匀加速的系，我们看一个例题。

例题 1.3.1

> 在重力场中，在同一点开始，以速率 v_0 抛出N个小球，求这几个小球在t时刻组成的轨迹。

解：
法1：斜抛运动 写出每个小球在t时刻的位置 $(x, y)=(v_0 t\cos\theta, v_0 t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2)$ 消去 θ 知： $x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=v_0^2t^2$
法2：参考系变换 将参考系换到匀加速向下的物体：一个在抛出点自由下落的物体。由于斜抛运动的加速度恰好为向下的g，则在此系中各球均匀速。故可以轻易得到以上结论。

总结以上，如果多个物体有相同的一个运动，那么可以考虑改变参考系来考虑问题。有些问题本身就是物体固连在另一个物体上运动，那么也可以考虑换到其中一个物体的系中。

§ 1.3.2 参考系之间的定向转动

在此章中我们考虑参考系之间的转动。一般的三维转动的描写过于复杂，无法以现有知识体系给出，之后我会给出一个用欧拉角和无穷小转动为基础的讲义。这里我们考虑二维平面上的转动。考虑此问题的出发点是：一个物体不仅仅由单质点构成，而是由多质点以刚性连接，其指每个考察的质点之间距离均固定。这种物体在二维平面内的运动可以由任意一个确定的质点的位置坐标和另一个循环的参数决定。这个参数显然就是角度。角度参量的变化率是角速度，如果适当定义的话其可以为一个矢量：顺时针垂直纸面向下，逆时针垂直纸面向上。其记为 ω 。我们设原点O本身速度恒定为0，那么可以想见，由圆周运动和平面几何知识：

$$\mathrm{d}s=\omega r\mathrm{d}t\equiv\omega\times\mathbf{r}\mathrm{d}t\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\omega\times\mathbf{r}$$

这里研究的是平面运动，所以垂直纸面的 ω 与正常矢量的叉乘的方向符合右手定则，数学上有

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{x}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{y}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{z}$$

可以验证叉积方向与a和b均垂直，量纲为其之积，方向可以自己探究（注意到a，b互换其叉积的值反向）。此概念可以很好地描述转动，也可以验证上式 $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$ 。

我们考虑视角放在一个刚性物体下的参考系：此时基准矢量已然改变，但是我们仍认为可以等效为未变，如图。此时矢量的变化等价于先在原系下的变化，再加上转动效应的一项。即：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}'\mathbf{A}}{\mathrm{d}'t}+\omega\times\mathbf{A}$$

在此dt时间内，A基本不变，所以可以严谨的写出后一项，如同我们对v做的那样。下图能够很好的表出此结果

那么有，可以计算一个质点的速度，加速度的变换：

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}&=\mathbf{v}'+\omega\times\mathbf{r}'\\
\mathbf{a}&=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}+\omega\times\mathbf{v}\\
&=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}'+\omega\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}+\omega\times\mathbf{v}'+\omega\times(\omega\times\mathbf{r}')\\
&=\mathbf{a}'+\beta\times\mathbf{r}'+2\omega\times\mathbf{v}'+\omega\times(\omega\times\mathbf{r}')\\
&\text{其中}\,\beta\equiv\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

这就是在转动参考系中速度加速度的表达形式。已知原系中的加速度和速度也可以很轻易得写出转动系中的，因为显然两者相对转动，只需将 ω 替换为 $-\omega$ 即可。可以证明，除了一些符号不同，其他的形式均相同，同学们可以自己由上两式反解出转动系下的，留为习题。

如若用极坐标推解此两式也是方便的，转动仅仅对 θ 方向有影响，而对r方向无影响，这使得分解后只需对一个方向作改动即可。

$$r'=r\,,\,\theta'=\theta-\theta_r$$

引用极坐标速度加速度表达式：

$$
\begin{aligned}
v_r &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\
v_\theta &= r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
a_r &= \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2 \\
a_\theta &= 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}
$$

那么有：

$$
\begin{aligned}
v_r' &= v_r \\
v_\theta' &= v_\theta - \omega r \\
a_r' &= \frac{\mathrm{d}^2 r'}{\mathrm{d}t^2} - r(\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t})^2 \\
&= a_r + 2\omega v_\theta + \omega^2 r \\
a_\theta' &= 2\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta'}{\mathrm{d}t^2} \\
&= a_\theta - 2\omega v_r - \beta r
\end{aligned}
$$

相比使用二级结论要方便些。这几个式子是很关键的，其描述了二维平面上的转动该如何去描述，无论是用通用的矢量变换公式，还是用极坐标来表示。之后我们考虑转动相关问题是会频繁用到这几个式子。现在我们来看一个例题：

例题 1.3.2
如图，套筒套在一个杆子上，可以自由滑动，固连在一个转动臂上，也即意味着杆到转轴的距离保持不变，设以匀速 v_0 将杆的左端下移，初始杆水平，参量如图所示，求杆转动的角速度。

§ 1.4 关联

§ 1.4.1 杆绳关联

两个物体以杆或绳相连接，在绳绷紧的情况下，都满足 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2$ ，其中 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ 分别是两个物体的位置矢量。并且在这一小章中，均使用

$$\mathbf{r} \equiv (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

，那么上式可以表为 $|\mathbf{r}|=l$或$\mathbf{r}^2=l^2$ 。对其求导，可知：

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$$

，即绳法向无相对速度。再次求导可知：

$$\mathbf{v}^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=0$$

这已经说明绳两端的法向相对加速度是同相对速度相联系的。当然，绳和杆同样有角速度的概念，总可以记 $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{a}=\beta\times\mathbf{r}-\frac{v^2}{r^2}\mathbf{r}$ ，其满足 ω 和 β 的定义。于是就有以下结论：

> 杆上的相对速度法向为0，切向定义了杆的角速度。
> 杆上的相对加速度法向是沿杆向内v^2/l，切向定义了杆的角加速度。

根据这一点，我们可以求出杆上任意一点的加速度。以下例题展示了这一点：
例题 1.4.1 杆在一个墙角滑落，上下两端点的速度和加速度分别为 v_1,a_1,v_2,a_2(方向如图，其中显然有不符合之的，其值为负)，记杆底端为 $s=0$，沿杆s为距离，求解$v(s)$和$a(s)$.

解:

s	0	l	相对
r	$(l\cos\theta,0)$	$(0,l\sin\theta)$	$(-l\cos\theta,l\sin\theta)$
v	$(v_1,0)$	$(0,v_2)$	$(-v_1,v_2)$
a	$(a_1,0)$	$(0,a_2)$	$(-a_1,a_2)$

而由$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r},\mathbf{a}=\beta\times\mathbf{r}-\frac{v^2}{r^2}\mathbf{r}$知

$$\theta=-\arctan\frac{v_1}{v_2}\omega=\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{l}\beta=\frac{a_1\sin\theta-a_2\cos\theta}{l}$$

a_1,a_2是相关的，可以用其中一个表出另一个。现在我们知道 ω,β 可以表出 $v(s),a(s)$ 了。

虽然如此，可以改写a的表达式，

$$\mathbf{a}=\beta\times\mathbf{r}-\omega^2\mathbf{r}$$

与$\mathbf{r}$正相关。则可以直接写出

$$\mathbf{v}(s)=(v_1(1-\frac{s}{l}),v_2\frac{s}{l})$$
$$\mathbf{a}(s)=(a_1(1-\frac{s}{l}),a_2\frac{s}{l})$$

这类题目要多做才能熟练掌握，之后会专门有一块讲解题目。

§ 1.4.2* 软绳上约束

追踪绳上的一个质点，绳的约束可以让绳有弯折，但相邻的质点间距离不变，即

$$\mathrm{d}\mathbf{r}(\mathrm{s})^2=\mathrm{ds}^2$$

这里使用自然坐标描述，但并不是正统的，因为是对绳子整体作自然坐标。可以自然得到，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{ds}}=\hat{\tau}\left|\hat{\tau}\right|=1$$

平方并对t求导，要得到速度相关关系：

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial s}\equiv\hat{\tau}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial s}=0$$

设$\mathbf{v}=v_\tau\hat{\tau}+v_n\hat{n}$ ，这里的法向$\hat{n}$ 直接由此定义。