Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction

TÉLÉCHARGER EN PDF

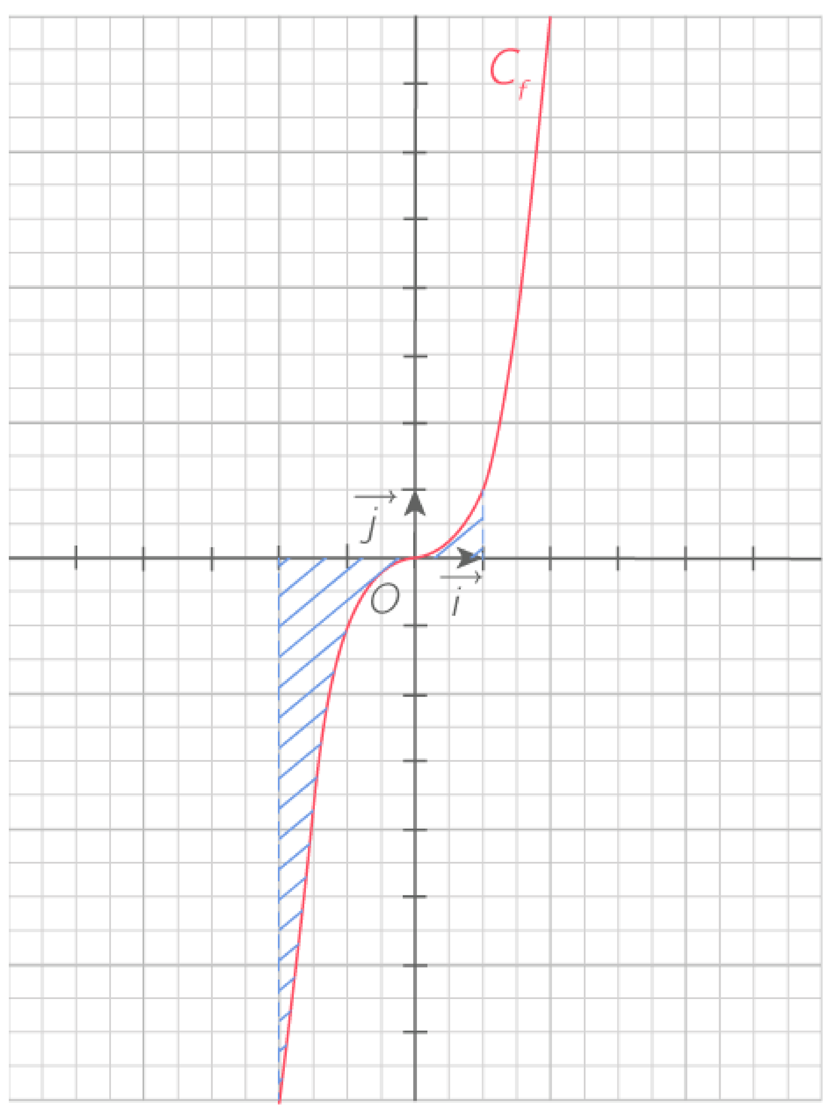
SITUATION
On peut calculer l'aire sous la courbe représentative d'une fonction *f* à l'aide d'un calcul d'intégrales.

ÉNONCÉ

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right) = x^3$$

Dans un repère orthonormal où une unité d'aire représente 4 cm^2, on trace la courbe représentative de la fonction *f*. Calculer l'aire de la zone hachurée.



ETAPE 1

Exprimer l'aire que l'on veut calculer

On détermine la fonction *f* et les réels *a* et *b* tels que l'aire à calculer soit celle de la surface comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

APPLICATION

On cherche à déterminer l'aire de la surface comprise entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

ETAPE 2

Déterminer le signe de *f* sur $\left[a;b\right]$

On détermine le signe de *f* sur $\left[a;b\right]$. On peut l'obtenir grâce à la position de C_f par rapport à l'axe des abscisses si la représentation graphique est donnée par l'énoncé.

APPLICATION

La courbe est située :

- En dessous de l'axe des abscisses sur $\left[-2;0\right]$
- Au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left[0;1\right]$

Ainsi, *f* est négative sur $\left[-2;0\right]$ et positive sur $\left[0;1\right]$.

ETAPE 3

Exprimer l'aire en fonction d'une intégrale

Trois cas se présentent :

- Si *f* est positive sur $\left[a;b\right]$, alors $A = \int_{a}^{b} f\left(x\right) \ \mathrm{d}x$.
- Si *f* est négative sur $\left[a;b\right]$, alors $A = -\int_{a}^{b} f\left(x\right) \ \mathrm{d}x$.
- Si *f* change de signe sur $\left[a;b\right]$, on utilise la relation de Chasles pour obtenir plusieurs intégrales vérifiant l'un des deux premiers cas.

APPLICATION

f étant négative sur $\left[-2;0\right]$ et positive sur $\left[0;1\right]$, on a :

$$A = -\int_{-2}^{0} f\left(x\right) \ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f\left(x\right) \ \mathrm{d}x$$

On remplace *f* par son expression :

$$A = -\int_{-2}^{0} x^3 \ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^3 \ \mathrm{d}x$$

ETAPE 4

Calculer les intégrales

On calcule la ou les intégrale(s) nécessaire(s). On peut alors conclure quant à la valeur de *A*. Cette valeur est exprimée en unités d'aire (u.a.).

APPLICATION

Une primitive de $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{x^4}{4}$.

On a donc :

$$A = -\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$A = -\left(\dfrac{0^4}{4} - \dfrac{\left(-2\right)^4}{4}\right) + \left(\dfrac{1^4}{4} - \dfrac{0^4}{4}\right)$$

$$A = \dfrac{16}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{17}{4}$$

A vaut donc $\dfrac{17}{4}$ u.a..

ETAPE 5

Donner l'aire dans l'unité demandée

Si l'énoncé le demande, on peut donner l'aire en centimètres carrés. Pour cela, grâce à l'échelle du graphique, on donne l'aire en centimètres carrés du carreau correspondant à une unité en abscisse et une unité en ordonnée. Si cette aire vaut *n* cm^2, alors 1 u.a. vaut *n* cm^2.

Ainsi, si $A = k$ u.a., on a alors $A = k \times n$ cm^2.

APPLICATION

Comme 1 u.a. vaut 4cm^2, on a finalement :

$$A = \dfrac{17}{4} \times 4 = 17 \text{ cm}^2$$

Sommaire