Q_2 : Résoudre l'équation $z^n = a$?

on écrit a sous forme exponentielle

$a = re^{i\theta}$.

l'équation $\boxed{z^n = re^{i\theta}}$

les solutions : $\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}}$

exemple : $z^4 = 1 \iff z^4 = e^{i0}$.

les solutions sont $z_k = \sqrt[4]{1}\, e^{i\left(\frac{0}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$

$z_k = e^{i\frac{k\pi}{2}}$

avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

donc $z_0 = e^{i0} = 1$; $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $z_2 = e^{i\pi} = -1$

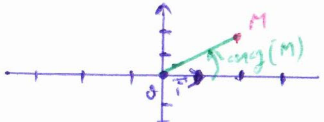
$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$S_{\mathbb{C}} = \{1, i, -1, -i\}$

Q_3 : travailler avec l'argument ?

il faut tjs mettre en tête :

$\boxed{\arg(z_M)\,[2\pi] = (\vec{i}, \vec{OM})}$



donc :

$$\begin{cases} \arg(\text{réel}) \equiv 0\,[\pi] \\ \arg(\text{imaginaire pur}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$$

exemple : $\arg(2) \equiv 0\,[2\pi]$

$\arg(-3) \equiv \pi\,[2\pi]$

Propriété : $\arg(z_1 \cdot z_2) \equiv (\arg(z_1) + \arg(z_2))\,[2\pi]$

$\arg(z_1/z_2) \equiv (\arg(z_1) - \arg(z_2))\,[2\pi]$

$\arg(\overline{z_1}) = -\arg(z_1)\,[2\pi]$

$\arg(z_1^n) = n\arg(z_1)\,[2\pi]$.

exemple :

$\arg\left(\frac{-3}{1+i}\right) \equiv (\arg(-3) + \arg(1+i))\,[2\pi]$.

$\equiv \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\,[2\pi]$.

$\equiv \frac{5\pi}{4}\,[2\pi]$.

$\boxed{(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\,[2\pi]}$

Q_4 : linéariser une expression ?

linéariser càd mettre les puissances > 1 égale 1 en utilisant les formule d'Euler :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

exemple : linéarise $f(x) = \cos^3(x)\sin(x)$.

$f(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)$

$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{2i}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right)\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)$

$= \frac{1}{16i}\left(e^{i5x} - e^{ix} + 3e^{i3x} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} + 3e^{-i3x} + e^{-ix} - e^{-i5x}\right)$

$= \frac{1}{16i}\left(e^{i5x} - e^{-i5x}\right) + 2\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + 3\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right)$

$f(x) = \frac{2i\sin(5x) + 4i\sin(x) + 6i\sin(3x)}{16i}$

$f(x) = \frac{1}{8}\sin(5x) + \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{3}{8}\sin(3x)$

Rappel : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$