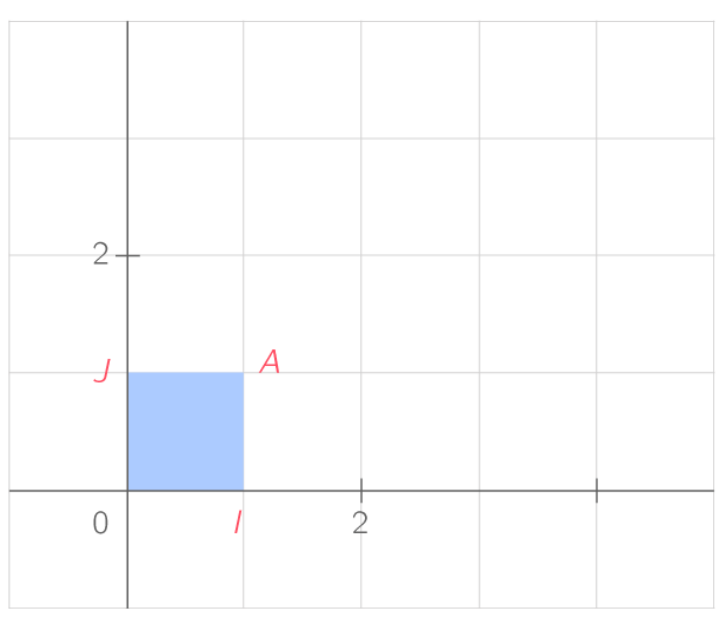
Les intégrales

TÉLÉCHARGER EN PDF

Sommaire

I Aires et intégrales

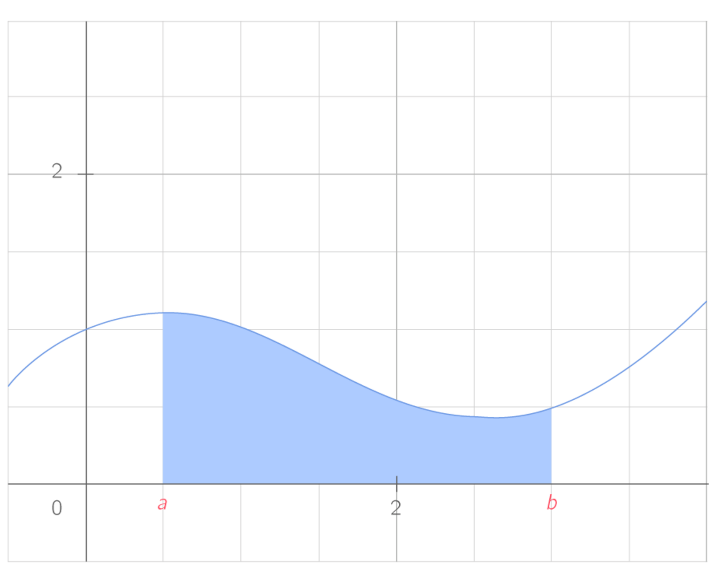
Soit un repère orthogonal $(O; I; J)$. On appelle unité d'aire l'aire du rectangle *OIAJ*, où *A* est le point de coordonnées $(1; 1)$.



A Intégrale d'une fonction continue positive

DÉFINITION **Intégrale d'une fonction continue positive**

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$), et *C* sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'intégrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de la fonction *f* sur $[a; b]$ est égale à l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe *C*, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



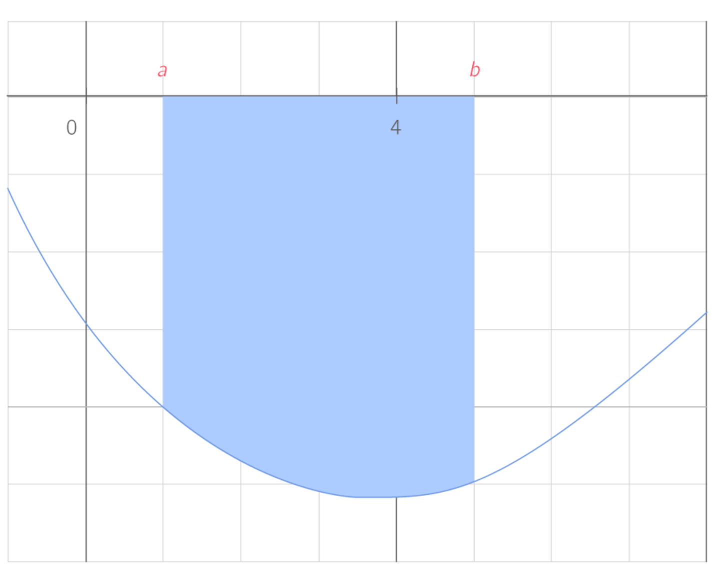
DÉFINITION **Bornes d'intégration**

En utilisant les notations précédentes, les réels *a* et *b* sont appelés bornes d'intégration.

B Intégrale d'une fonction continue négative

DÉFINITION **Intégrale d'une fonction continue négative**

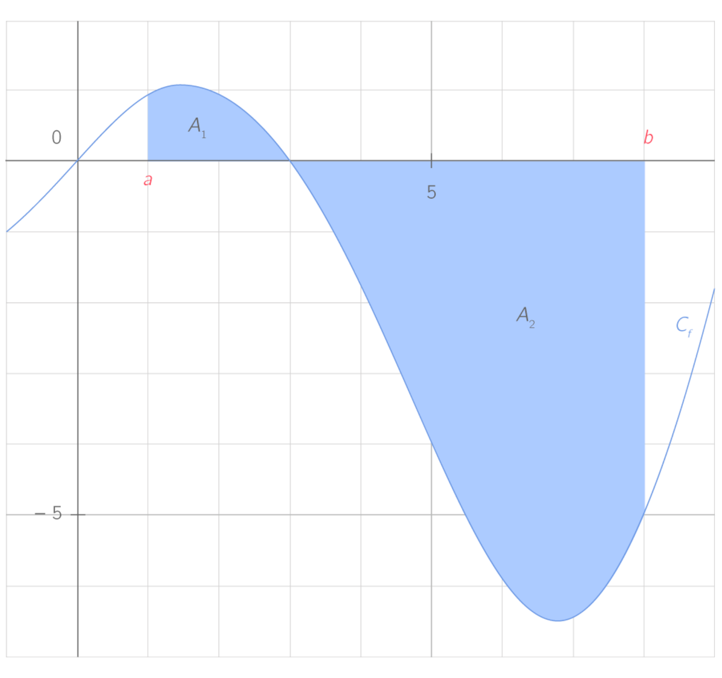
Soit *f* une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$), et *C* sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'intégrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de la fonction *f* sur $[a; b]$ est égale à l'opposé de l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe *C*, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



C Intégrale d'une fonction continue

DÉFINITION **Intégrale d'une fonction continue**

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$), et *C* sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'intégrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de la fonction *f* sur $[a; b]$ est égale à la différence entre la somme des aires des surfaces comprises entre la courbe représentative de *f* et l'axe des abscisses lorsque *f* est positive et la somme des aires des surfaces comprises entre la courbe représentative de *f* et l'axe des abscisses lorsque *f* est négative.



On a ici : $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = A_1 - A_2$

DÉFINITION

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* et soient a et b deux réels de *I* tels que $a > b$. Alors, on pose :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$$

D La valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION **Valeur moyenne d'une fonction**

On appelle valeur moyenne de *f* sur $[a; b]$ ($a < b$) le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

EXEMPLE

Considérons la fonction *f* continue et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x - 2$. Sa valeur moyenne sur l'intervalle $[2; 5]$ est donnée par le nombre :

$\frac{1}{5-2}\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_2^5 (7x-2)\ \mathrm{d}x$.

II Les propriétés de l'intégrale

A Les propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle *I* ; *a*, *b* et *c* trois réels de *I*, et *k* un réel quelconque.

$$\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

EXEMPLE

$\int_5^5 3x^8\ \mathrm{d}x = 0$

$$\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

EXEMPLE

$\int_4^1 e^x\ \mathrm{d}x = -\int_1^4 e^x\ \mathrm{d}x$

$$\int_a^b kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

EXEMPLE

$\int_a^b (3x^2 - 3)\ \mathrm{d}x = 3\int_a^b (x^2 - 1)\ \mathrm{d}x$

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

EXEMPLE

$\int_1^{100} \ln(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^{25} \ln(x)\ \mathrm{d}x + \int_{25}^{100} \ln(x)\ \mathrm{d}x$

Linéarité :

Pour tous réels α et β, $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ \mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

EXEMPLE

$\int_1^3 \frac{3x^5+2x}{x+1}\ \mathrm{d}x = \int_1^3 \left[\frac{3x^5}{x+1} + \frac{2x}{x+1}\right]\ \mathrm{d}x = 3\int_1^3 \frac{x^5}{x+1}\ \mathrm{d}x + 2\int_1^3 \frac{x}{x+1}\ \mathrm{d}x$

B Ordre et intégration

PROPRIÉTÉ

Positivité de l'intégrale :

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*. Soient *a* et *b* deux réels de *I* tels que $a \leq b$. Si, pour tout réel *x* appartenant à $[a; b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$$

EXEMPLE

La fonction $x \longmapsto x^2 + 1$ est positive et continue sur l'intervalle $[3; 5]$. Donc, par positivité de l'intégrale, (avec $3 < 5$), on a :

$\int_3^5 (x^2 + 1)\ \mathrm{d}x \geq 0$

PROPRIÉTÉ

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle *I*. Soient *a* et *b* deux réels de *I* tels que $a \leq b$. Si, pour tout réel *x* appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

EXEMPLE

Pour tout réel $x \in [3; 5]$, $e^x \geq x$. Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto e^x$ étant continues sur $[3; 5]$, on a donc :

$\int_3^5 e^x\ \mathrm{d}x \geq \int_3^5 x\ \mathrm{d}x$

III Primitives et intégrales

A Relation entre primitives et intégrales

THÉORÈME **Intégrale**

Soient *f* une fonction continue sur *I* et *F* une primitive de *f* sur *I*. Soient *a* et *b* deux réels de *I*. On a :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

EXEMPLE

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$. On cherche à calculer $I = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

On sait qu'une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est la fonction *F* définie pour tout réel *x* par $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$.

On a donc :

$\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = F(2) - F(1)$

$\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{3}{2} \times 2^2 + 2\right) - \left(\frac{3}{2} \times 1^2 + 1\right)$

$\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{11}{2}$

REMARQUE

$F(b) - F(a)$ se note également $[F(x)]_a^b$.

EXEMPLE

$\int_1^2 x\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

B Primitive qui s'annule en a

THÉORÈME **Primitive qui s'annule en a**

Soit *f* une fonction continue sur *I*, et *a* un réel de *I*. La fonction *F* définie ci-après est l'unique primitive de *f* sur *I* qui s'annule en *a* :

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Cette fonction *F* est donc dérivable sur *I* et *f* est sa fonction dérivée sur *I*.

EXEMPLE

Soit *f* la fonction définie pour tout réel *x* par $f(x) = 2x + 1$. La fonction *F* définie ci-après est l'unique primitive de *f* sur *I* qui s'annule en 0. Pour tout réel *x*, on a :

$F(x) = \int_0^x (2t + 1)\ \mathrm{d}t$

Soit :

$F(x) = [t^2 + t]_0^x$

$F(x) = (x^2 + x) - (0^2 + 0)$

$F(x) = x^2 + x$