Sommaire :
- l'ensemble des pts $M(z)$.
- l'équation de type $z^n = a$
- travailler avec l'argument.
- linéarisation.

Q_1 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que .... ?

$E = \{M(z) \in P / \ldots\}$

① sans module ② avec module

① Sans module : on pose $z = x+iy$, puis on met l'expression sous forme algébrique :

on a 2 cas :

* $ax+by+c=0$

E = droite d'équation $ax+by+c=0$

* $x^2 + \cdots + y^2 + \cdots = 0$

on la transforme en $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

$E = \mathcal{C}_{(A(\alpha,\beta), R)}$

Astuce : $\boxed{x^2 \pm ax = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

⚠ dénominateur $\neq 0$ donc privé d'un point

Complexe

exemple : $z' = \dfrac{z-2i}{z+i} = \dfrac{(x+iy)-2i}{x+iy+i} = \dfrac{x+(y-2)i}{x+(y+1)i}$

$= \dfrac{(x+(y-2)i)(x-(y+1)i)}{(x+(y+1)i)(x-(y+1)i)}$

$$\boxed{z' = \frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2} + i\,\frac{-x}{x^2+(y+1)^2}}$$

déterminer $E = \{M(z) \in P / z' \text{ est réel}\}$.

$F = \{M(z) \in P / z' \text{ est imaginaire pur}\}$

* z' est réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{x^2+(y+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$

donc E = droite $\Delta : x = 0$ privé du point $B(0,-1)$

* z' est imaginaire pur $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z') = 0$

$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-y-2 = 0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$

$F = \mathcal{C}_{\left(I\left(0,\frac{1}{2}\right), \frac{3}{2}\right)}$ privé du point $B(0,-1)$

② avec module : on transforme les modules en distance $AM = |z - z_A|$

on a 3 cas :

+ $AM = R \Leftrightarrow E = \mathcal{C}_{(A,R)}$
+ $AM = BM \Leftrightarrow E = \text{med}[AB]$
+ $AM = \alpha BM \Leftrightarrow E = \mathcal{C}_{[IJ]}$

avec I barycentre des points $(A,1)$ et (B,α)

J " " $(A,1)$ et $(B,-\alpha)$

exemple :

$E' = \{M(z) \in P / |z'| = 1\}$

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-2i|}{|z+i|} = 1$

on pose $z_A = 2i$ et $z_B = -i$

donc $\dfrac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AM}{BM} = 1$

$\Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow E' = \text{med}[AB]$

B.M Taki Eddine
23 390 248