Q_4 : Suite TAF :

Th des inégalités des accroissements finis :

$$\left.\begin{array}{l} ①\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ ②\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ ③\ |f'(x)| \leq m \end{array}\right\} \xrightarrow{TAF} |f(b)-f(a)| \leq m\,|b-a|$$

méthode : l'exercice d'une suite TAF est une série de questions comme suit :

Soit $f(x) = \dots$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

① montrer par récurrence $a \leq U_n \leq b$.

② Mq $f(x) = x$ admet une seule solution $\alpha \in I$.

③ Mq $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

④ Mq $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

⑤ Montrer par récurrence $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

⑥ En déduire que U_n est CV et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice :

$g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\forall x \in I$.

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

① Mq $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq 2$

② Calculer $g'(x)$; puis Mq $|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\forall x \in [1,2]$.

③ Mq $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$

④ Mq $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1-\alpha|$

(α est l'unique solution de $g(x) = x$).

⑤ En déduire que U_n est CV et déterminer sa limite.

Rép :

① Récurrence classique

② $g'(x) = \dots = \dfrac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$ $\forall x \in [1,2]$.

$|g'(x)| = \dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 1+x^2 \leq 5 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5^{3/2}} \leq \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \leq \dfrac{1}{2^{3/2}} \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{5^{3/2}} \leq \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \leq \frac{2}{2^{3/2}}$$

$|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\forall x \in [1,2]$.

③ il faut mq g est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $[1,2]$ (par rédaction) puis d'après le Th d'inégalité des accroissements finis on a :

$|g(b) - g(a)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|b-a|$

on prendra $a = \alpha$ et $b = U_n$ car $\in [1,2]$.

donc $|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$

$$\boxed{|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|}$$

④ montrons par récurrence : "$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1-\alpha|$"

→ pour $n = 0$: $|U_0 - \alpha| = |1-\alpha|$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 |1-\alpha| = |1-\alpha|$

donc $|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 |1-\alpha|$

la propriété est vraie pour $n = 0$.

→ soit $n \in \mathbb{N}$; supp que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1-\alpha|$

et mq $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} |1-\alpha|$.

d'après ③ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$

donc $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1-\alpha|$

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} |1-\alpha|$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1-\alpha|$

⑤ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha}$ donc U_n est CV

B.M Taki Eddine
23 390 248