Les probabilités

TÉLÉCHARGER EN PDF

I Probabilités conditionnelles

DÉFINITION Probabilités conditionnelles

Soient *A* et *B* deux événements, avec *A* de probabilité non nulle.
On définit la probabilité de *B* sachant *A* par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

THÉORÈME Formule des probabilités totales

Soit $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$ un système complet d'événements de l'univers Ω ayant chacun une probabilité non nulle.
Pour tout événement *A* de *E* :

$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3) + \ldots + P(A \cap E_k)$$

II Loi binomiale

DÉFINITION Loi binomiale

Soit un réel p compris entre 0 et 1 et *n* un entier naturel non nul.
Le nombre de succès dans la répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

Une variable aléatoire suit ainsi la loi binomiale de paramètres *n* et *p*, notée $B(n; p)$, si :

- $X(\Omega) = \{0; 1; \ldots; n\}$
- Pour tout entier $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de possibilités de placer les *k* succès parmi les *n* répétitions.

THÉORÈME Espérance et variance d'une loi binomiale

Si *X* suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*, on a :

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

III Lois à densité

A Loi uniforme

DÉFINITION Loi uniforme sur $[a; b]$

Fonction de densité sur $[a; b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$
Probabilité	Pour tous réels *c* et *d* tels que $a \leq c \leq d \leq b$: $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$
Espérance	$E(X) = \frac{a+b}{2}$

B Loi normale

DÉFINITION Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$

Fonction de densité sur $\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
Probabilité	$P(X \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$
Espérance	$E(X) = 0$
Variance	$V(X) = 1$

THÉORÈME Valeurs remarquables d'une loi normale centrée réduite

Si *X* suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$, on a les valeurs remarquables suivantes :

$$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0{,}683$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) \approx 0{,}954$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) \approx 0{,}997$$

$$P(-a \leq X \leq a) = 0{,}95 \text{ pour } a \approx 1{,}96$$

$$P(-a \leq X \leq a) = 0{,}99 \text{ pour } a \approx 2{,}58$$

DÉFINITION Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

Définition	Une variable aléatoire *X* suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ si la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
Espérance	$E(X) = \mu$
Variance	$V(X) = \sigma^2$

THÉORÈME Valeurs remarquables d'une loi normale

Si *X* suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, on a les valeurs remarquables suivantes :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$$

IV Intervalle de fluctuation et estimation

DÉFINITION Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

L'intervalle de fluctuation au seuil 95% de la fréquence d'apparition d'un caractère, de proportion connue *p*, dans un échantillon aléatoire de taille *n* (à condition d'avoir $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$) est :

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

DÉFINITION Intervalle de confiance

On considère une épreuve de Bernoulli dont on veut estimer la probabilité de succès *p*. On appelle f_n la fréquence d'apparition du succès après *n* répétitions indépendantes de cette épreuve. Si $n \geq 30$, $nf_n \geq 5$ et $n(1-f_n) \geq 5$, alors *p* appartient à l'intervalle suivant avec un niveau de confiance de 95% :

$$\left[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Il s'agit de l'intervalle de confiance à 95% de la proportion *p* du caractère étudié dans la population. C'est donc l'intervalle centré sur f_n dans lequel on s'attend à trouver la proportion *p* avec une probabilité de 95%.

Sommaire