

SITUATION

Pour déterminer l'écriture explicite d'une suite, on peut avant tout montrer que la suite est géométrique et déterminer sa raison.

ÉNONCÉ

On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$v_{n+1} = 4v_n + 1$$

On s'intéresse alors à la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = v_n + \frac{1}{3}$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique et déterminer sa raison.

ETAPE 1

Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$

Pour tout entier naturel  $n$ , on factorise l'expression donnant  $u_{n+1}$  de manière à faire apparaître  $u_n$ , en simplifiant au maximum le facteur que multiplie  $u_n$ .

APPLICATION

Soit  $n$  un entier naturel :

$$u_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{3}.$$

On remplace  $v_{n+1}$  par son expression en fonction de  $v_n$  :

$$u_{n+1} = 4v_n + 1 + \frac{1}{3}$$

On remplace  $v_n$  par son expression en fonction de  $u_n$  :

$$u_{n+1} = 4\left(u_n - \frac{1}{3}\right) + 1 + \frac{1}{3}$$

$$u_{n+1} = 4u_n - \frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3}$$

$$u_{n+1} = 4u_n$$

ETAPE 2

Identifier l'éventuelle raison de la suite

On vérifie qu'il existe un réel  $q$  indépendant de la variable  $n$  tel que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

APPLICATION

En posant  $q = 4$ , on a bien, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = qu_n$ .

ETAPE 3

Conclure sur la nature de la suite

S'il existe un réel  $q$  indépendant de la variable  $n$  tel que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = q \times u_n$ , on peut conclure que la suite est géométrique de raison  $q$ . On précise alors son premier terme.

APPLICATION

La suite  $(u_n)$  est donc une suite géométrique de raison 4. Son premier terme vaut :

$$u_0 = v_0 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Sommaire

- 1 Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$
- 2 Identifier l'éventuelle raison de la suite
- 3 Conclure sur la nature de la suite