Démontrer qu'une courbe admet une asymptote verticale

TÉLÉCHARGER EN PDF

SITUATION

La courbe représentative d'une fonction *f* peut admettre une asymptote verticale en un réel *a*.

ÉNONCÉ

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-2;3\right\}$ par :

$$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x+4}{\left(x+2\right)\left(x-3\right)}$$

Déterminer les éventuelles asymptotes verticales de C_f.

ETAPE 1

Repérer les bornes ouvertes finies du domaine de définition

Si C_f admet une asymptote verticale, c'est nécessairement en un réel *a* correspondant à une borne finie (c'est-à-dire réelle) et ouverte (c'est-à-dire exclue) du domaine de définition de *f*.

On liste donc tous les réels *a* vérifiant cette condition.

ASTUCE

Si la fonction est sous la forme de quotient, il pourra y avoir des asymptotes verticales aux valeurs interdites.

APPLICATION

On écrit le domaine de définition de *f* sous la forme d'une réunion d'intervalles :

$$D_f=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-2;3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$$

Les bornes finies ouvertes sont donc –2 et 3.

ETAPE 2

Déterminer la limite de *f* en chacune de ces bornes

- Si *f* n'est pas définie à gauche de a_k, on détermine la limite à droite de *f* en a_k : $\lim\limits_{x \to a_k^+} f\left(x\right)$.
- Si *f* n'est pas définie à droite de a_k, on détermine la limite à gauche de *f* en a_k : $\lim\limits_{x \to a_k^-} f\left(x\right)$.
- Si *f* est définie à gauche et à droite de a_k, on détermine les limites à droite et à gauche de *f* en a_k : $\lim\limits_{x \to a_k^+} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x \to a_k^-} f\left(x\right)$.

APPLICATION

On a :

- $\lim\limits_{x \to -2^-} \left(x+2\right) = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to -2^+} \left(x+2\right) = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+3x+4}{x-3} = -\dfrac{2}{5}$

Par quotient, on peut donc en conclure :

- $\lim\limits_{x \to -2^-} f\left(x\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -2^+} f\left(x\right) = -\infty$

De même, on a :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} \left(x-3\right) = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(x-3\right) = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+3x+4}{x+2} = \dfrac{22}{5}$

Par quotient, on peut donc en conclure :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f\left(x\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f\left(x\right) = +\infty$

ETAPE 3

Conclure sur l'existence d'asymptotes verticales

On peut conclure que la droite d'équation $x=a_k$ est asymptote verticale à C_f dans les trois cas suivants :

- Si *f* n'est pas définie à gauche de a_k et $\lim\limits_{x \to a_k^+} f\left(x\right) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a_k^+} f\left(x\right) = -\infty$
- Si *f* n'est pas définie à droite de a_k et $\lim\limits_{x \to a_k^-} f\left(x\right) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a_k^-} f\left(x\right) = -\infty$
- Si *f* est définie à gauche et à droite de a_k et les limites de *f* à droite et à gauche de a_k sont infinies (mais pas forcément égales).

APPLICATION

f est définie à droite et à gauche de –2 et les limites à droite et à gauche de *f* en –2 sont infinies.

De même, *f* est définie à droite et à gauche de 3 et les limites à droite et à gauche de *f* en 3 sont infinies.

On peut donc conclure que les droites d'équation $x=-2$ et $x=3$ sont asymptotes verticales à C_f.

Sommaire