matrice

Sommaire :

- → Opérations sur les matrices
- → déterminant d'une matrice carré (d'ordre 2/d'ordre 3)
- → Inverse d'une matrice carré (d'ordre 2/ d'ordre 3)
- → Résolution d'un système d'équations.

Opérations sur les matrices :

→ addition / soustraction :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

→ multiplication par un réel α :

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha & 0 \\ 3\alpha & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

astuce : pour éviter les calculs difficiles:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 2 & -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 12 & -6 & 12 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

→ multiplication de deux matrices :

il faut que le nbre de colonne du premier soit égale au nbre de ligne du deuxième.

$$(n,k) \times (k,p) = (n,p)$$

le m̂

ex 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(2,4) \times (4,2) = (2,2)$$

ex 2 :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 8 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

⚠ → la division n'existe pas dans les matrices

→ l'élément neutre de la multiplication est I :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée :

d'ordre 2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ; \; \boxed{\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2$

d'ordre 3 :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

on développe selon une ligne ou une colonne avec un signe alterné.

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -12 - 10 - 12 = -34$$

Propriétés du Déterminant :

P_1 : le déterminant d'une matrice qui possède deux lignes (ou deux colonnes) identiques est nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

P_2 : le déterminant change de signe si on permute deux lignes (ou deux colonnes) :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

P_3 : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de sa diagonale :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-5) \times 1 = -10.$$

P_4 : le déterminant reste le même si on fait une combinaison linéaire des lignes.

$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (pivot de Gauss).

Inverse d'une matrice carrée :

Th : A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$

d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

donc A est inversible $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$