Encadrer une intégrale

TÉLÉCHARGER EN PDF

MÉTHODE 1

En encadrant la fonction intégrée

SITUATION

Lorsque l'on ne peut pas calculer la valeur de $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ car on ne connaît pas de primitive de la fonction sous l'intégrale, l'énoncé peut demander d'encadrer cette intégrale. On peut obtenir cet encadrement à partir d'un encadrement de la fonction *f*.

ÉNONCÉ

Soit *n* un entier naturel. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 x^n e^{-x}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$

ETAPE 1

Repérer les éléments à conserver dans l'expression de *f*

L'encadrement voulu est toujours donné par l'énoncé. On y repère donc les éléments qui doivent être conservés lors de l'encadrement de *f*.

APPLICATION

On constate que l'entier *n* est présent dans le terme de droite. Il faut donc penser à le conserver quand on majorera $x^n e^{-x}$.

ETAPE 2

Encadrer la fonction *f*

On encadre la fonction *f* sur $[a;b]$. On démontre donc un encadrement de la forme suivante :

$\forall x \in [a;b], u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

APPLICATION

On encadre d'abord e^{-x} sur $[0;1]$.

Soit *x* un réel compris entre 0 et 1. On a :

$-1 \leqslant -x \leqslant 0$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant e^{-0}$

En gardant uniquement la majoration, on a :

$e^{-x} \leqslant 1$

On multiplie par x^n qui est positif. On obtient donc :

$x^n e^{-x} \leqslant x^n$

ETAPE 3

Utiliser les comparaisons d'intégrales

On s'assure que $a \leqslant b$.

Grâce à l'encadrement trouvé dans l'étape précédente, on a alors, par comparaison d'intégrales :

$\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b v(x)\ \mathrm{d}x$

On calcule $\int_a^b u(x)\ \mathrm{d}x$ et $\int_a^b v(x)\ \mathrm{d}x$ pour obtenir l'encadrement voulu.

APPLICATION

0 est bien inférieur à 1. Donc, d'après l'inégalité précédente, par comparaison d'intégrales, on a :

$\int_0^1 x^n e^{-x}\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x$

Or :

$\int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

On peut donc conclure :

$\int_0^1 x^n e^{-x}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$

MÉTHODE 2

En utilisant l'inégalité de la moyenne

SITUATION

On peut parfois obtenir directement un encadrement d'intégrale grâce à l'inégalité de la moyenne.

ÉNONCÉ

Démontrer l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant \int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x \leqslant e$$

ETAPE 1

Énoncer les propriétés de l'inégalité de la moyenne

Si *f* est une fonction continue sur $[a;b]$ ($a \leqslant b$), minorée par *m* et majorée par *M* sur cet intervalle, on a, d'après l'inégalité de la moyenne :

$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

APPLICATION

Si *f* est une fonction continue sur $[a;b]$ ($a \leqslant b$), minorée par *m* et majorée par *M* sur cet intervalle, on a, d'après l'inégalité de la moyenne :

$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

ETAPE 2

Déterminer un majorant et un minorant de *f*

On détermine tout d'abord un minorant et un majorant de la fonction *f* sur $[a;b]$, ce qui revient à démontrer une inégalité de la forme $m \leqslant f(x) \leqslant M$, où *m* et *M* ne dépendent pas de *x*.

APPLICATION

Soit *x* un réel compris entre 0 et 1. On a :

- $0 \leqslant x \leqslant 1$
- $e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Les deux quantités étant positives, par produit, on a :

$0 \times e^0 \leqslant xe^x \leqslant 1 \times e$

Soit :

$0 \leqslant xe^x \leqslant e$

ETAPE 3

Écrire l'inégalité obtenue

On remplace *m* et *M* par les valeurs trouvées dans l'étape 1 pour obtenir l'encadrement souhaité.

APPLICATION

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction $f : x \longmapsto xe^x$ entre 0 et 1, d'après le résultat de l'étape 2, on a :

$0 \times (1-0) \leqslant \int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x \leqslant e \times (1-0)$

On peut donc conclure :

$0 \leqslant \int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x \leqslant e$