MethodX
Pour le soutien scolaire et Universitaire
Tél: 23 390 248 / 92 711 919

Intégrale

1) Calcul Intégrale
2) Calcul d'aire
3) Suite avec Intégrale
4) Fonction définie par Intégrale.

1) Calcul Intégrale:

→ Si On connaît la Primitive :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple: ① $\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

② $\int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = -\frac{1}{e} + 1$

③ $\int_0^1 e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}$

$\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$\int e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$

→ Si On ne connaît pas la Primitive : On fait une Intégration par partie (IPP) : $\overset{u(x)}{P(x)}e^x$; $\overset{u(x)}{P(x)}\,\text{trig}(x)$; $\overset{u(x)}{\ln(x)}$;

$P(x)\underbrace{\ln(x)}_{u(x)}$, $\underbrace{e^x\,\text{trig}(x)}_{2\,IPP}$

Exemple:

① $I_1 = \int_0^1 x e^x dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$I_1 = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= (e - 0) - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1)$

$= 1$

② $I_2 = \int_1^e \ln(x)\,dx$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$I_2 = \left[x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e 1\,dx$

$= (e - 0) - \left[x\right]_1^e = e - (e-1) = 1$

③ $I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,e^x\,dx$

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = e^x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$I_3 = \left[\sin(x).e^x\right]_0^{\pi/2} - \underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos(x)\,e^x\,dx}_{J_3} = e^{\pi/2} - J_3$

⚠ Il faut garder le m̂ choix :

$$\begin{cases} u(x) = \cos(x) \\ v'(x) = e^x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'(x) = -\sin(x) \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$J_3 = \left[\cos(x).e^x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\sin(x)\,e^x\,dx = -1 + I_3$

$\iff I_3 = e^{\pi/2} + 1 - I_3$

$\iff 2I_3 = e^{\pi/2} + 1 \implies I_3 = \frac{e^{\pi/2}+1}{2}$

* Propriétés :

→ $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$

→ $-\int_a^b f = \int_b^a f$

→ $\int_a^a f = 0$

→ $\int_{-a}^a f =$ → $2\int_0^a f$ (Si f est paire)
→ 0 (Si f est Impaire)

→ Si $a < b$, $f < g \iff \int_a^b f < \int_a^b g$