Nombre complexe (partie calcul).

sommaire : (partie calcul).

- les différents formes d'un nbre complexe.
- la racine carrée d'un nbre complexe $\Delta = \delta^2$.
- Résolution d'une équation $2^{ème}$ degré.
- Résolution d'une équation $3^{ème}$ degré.

Q_1 : le ABC :

→ $\boxed{i^2 = -1}$

→ soit $z = a+ib$; le conjugué $\boxed{\bar{z} = a - ib}$

exemple : $z_1 = 1+3i \quad \bar{z}_1 = 1-3i$

$z_2 = -i-3 \quad \bar{z}_2 = +i-3$

→ $\boxed{z = a+ib}$ forme algébrique / cartésienne.

a : partie réelle ; b : partie imaginaire

$\boxed{z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))}$ forme trigonométrique

$\boxed{z = re^{i\theta}}$ forme exponentielle

avec : $\boxed{r = \sqrt{Re^2 + Im^2}}$ module

tip

θ : argument.

Q_2 : mettre sous forme algébrique :

il faut multiplier par le conjugué du dénominateur

$z\bar{z} = Re^2 + Im^2$.

exemple : $z = \dfrac{1-i}{2-3i} = \dfrac{(1-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{2+3i-2i+3}{2^2+(-3)^2}$

$= \dfrac{5}{13} + \dfrac{1}{13}i$

Q_3 : mettre sous forme trigonométrique :

il faut calculer le module $r = \sqrt{Re^2 + Im^2}$

puis déterminer θ avec

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re}{r} \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im}{r} \end{cases} \Rightarrow \theta.$$

exemple : $z_1 = 1 - i$;

$r = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Astuce : pour déterminer θ on peut utiliser la calculatrice :

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cdots \Gamma 180 = 1 \Gamma 4$

avec le signe de $\sin(\theta)$ donc $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}}$

donc $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

Q_4 : mettre sous forme exponentielle $\pm 1 \pm e^{i\theta}$?

il faut connaître : $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

et les formules d'Euler :

$$\begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta) \end{cases}$$

exemple : 1/ $1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

il faut vérifier que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ à l'aide du cercle trigonométrique.

2/ $-i - e^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{i\theta} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} - e^{-i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)$

$= 2i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

$= 2e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

$= 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

il faut vérifier que $\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

Q_5 : Déterminer la racine carrée de $\Delta = \delta^2$:

on a 3 cas

→ si $\Delta \in \mathbb{R}_-$: $\Delta = -\alpha \Rightarrow \delta = \sqrt{\alpha}\, i$

exemple : $\Delta = -8 \longrightarrow \delta = \sqrt{8}\, i$

$\Delta = -9 \longrightarrow \delta = 3i$

→ si $\Delta \in i\mathbb{R}$; $\Delta = \alpha i$ il faut savoir que $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$

~~exe~~ $\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1 \pm i)$

exemple : $\Delta = 8i = 4 \times 2i = 2^2(1+i)^2$

$\delta = 2(1+i)$

→ $\Delta = a+ib$ et $\delta = x+iy$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$$