fonction réciproque

La question : montrer que $f(x)=0$ admet une seule solution $\alpha \in [a,b]$? passe par 3 étapes :

Q_1 – bijection de I sur $f(I)=J$

Q_2 – $0 \in f(I)=J$ donc 0 admet un seul antécédent...

Q_3 – $f(a)\cdot f(b)<0 \Longrightarrow$ TVI

Exemple :

soit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	$+$	
f	-2 $\nearrow$	$+\infty$

Q_1 : Mq f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=J$?

Mq f admet une fonction réciproque ?

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $f(]-\infty,+\infty[) = \underbrace{]-2,+\infty[}_{J}$

Q_2 : Mq $f(x)=0$ admet une seule solution $\alpha \in]-\infty,+\infty[$?

$0 \in]-2,+\infty[$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in]-\infty,+\infty[$; donc $f(x)=0$ admet une seule solution $\alpha \in]-\infty,+\infty[$.

Q_3 : Mq $a \le \alpha \le b$? ou $\alpha \in [a,b]$?

on calcul $f(a)$ et $f(b)$, on doit trouver une valeur positive et une autre négative

donc $f(a)\cdot f(b)<0 \Longrightarrow$ d'après le Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) $\alpha \in [a,b]$.

Quelque opérations sur la fonction réciproque f^{-1} :

ex : $f(2)=1 \Longleftrightarrow f^{-1}(1)=2$

Q_1 : Mq f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'(x_0)$?

$\left.\begin{array}{l} \to f \text{ est dérivable sur } I \\ \to f' \neq 0 \text{ sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur J

et $$\boxed{(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}}$$

Q_2 : Tracer la courbe de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$?

$\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est symétrique à $\mathcal{C}_f$ selon la droite $D : y=x$

$$\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_D(\mathcal{C}_f)$$

donc

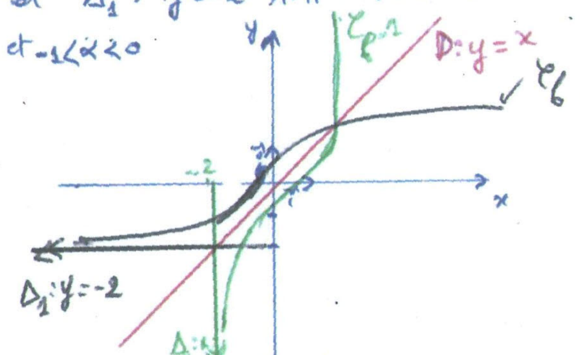
$\mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_{f^{-1}}$
$M(x_0,y_0)$ $\to$	$M'(y_0,x_0)$
tg / asy) horizontale $\to$	tg / Asy) verticale
tg / Asy) verticale $\to$	tg / Asy) horizontale

Exemple : reprenons le tableau précédent et soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

donc on a une B.P de dir $(O,\vec{i})$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

et $\Delta_1 : y=-2$ A.H au $\mathcal{V}(-\infty)$.

et $-1<\alpha<0$



pour tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ il faut tracer :

→ la droite $D : y=x$

→ $\Delta_1 : y=-2 \xrightarrow{\text{devient}} \Delta'_1 : x=-2$

→ B.P de dir $(O,\vec{i}) \xrightarrow{\text{devient}}$ B.P de dir $(O,\vec{j})$