Suites adjacentes / suite TAF / somme

Sommaire :
- Somme d'une suite $\sum_{k=0}^{n} U_k$
- Astuce : $(-1)^n$; $n!$
- Suites adjacentes
- Suite TAF

Q1 : Déterminer la somme $\sum_{k=0}^{n} U_k$?

* Somme d'une constante α :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \alpha = \alpha(\text{nbre de terme})} = \alpha(n-0+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha = \alpha(n+1)$$

ex: $\sum_{k=20}^{50} 3 = 3(50-20+1) = 3 \times 31$

* $\sum_{k=0}^{n} k = (\text{nbre de terme})\left(\frac{1^{er}\text{ valeur} + \text{dernier}}{2}\right)$

$$\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)\frac{(0+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

ex: $\sum_{k=10}^{n} 6k-4 = 6\sum_{k=10}^{n} k - \sum_{k=10}^{n} 4$

$$= 6.(n-10+1)\frac{(10+n)}{2} - 4\boxed{(n-10+1)}$$

$$= 3(n-9)(n+10) - 4(n-9)$$

* Somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{\text{nbre de terme}}}{1-q}$$

ex: $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^k = \alpha \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$= \alpha \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\alpha\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

* Somme de deux termes consécutifs :

$$\sum_{k=0}^{n} (U_k - U_{k+1}) = (U_0 - \cancel{U_1}) + (\cancel{U_1} - \cancel{U_2}) + \dots + (\cancel{U_n} - U_{n+1})$$

$$= U_0 - U_{n+1}$$

exemple: $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\cancel{\frac{1}{2}} - 1\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n}}\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - 1.$$

⚠ l'idée est de laisser seulement deux termes

Q2 : Astuce :

$(-1)^n \rightarrow (-1)^{2p} = 1$; $(-1)^{2p+1} = -1$

$n! = n(n-1)!$; ex: $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$

Q3 : Suites adjacentes :

Th : $\begin{cases} U_n \text{ est } \nearrow \\ V_n \text{ est } \searrow \\ \lim_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0 \end{cases} \Rightarrow U_n$ et V_n sont adjacentes.

exemple 1 : $U_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

Mq U_{2p} et U_{2p+1} sont deux suites adjacentes ?

Rép : $U_{2p} = 1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$.

Etudions la monotonie de U_{2p} :

$$U_{2(p+1)} - U_{2p} = U_{2p+2} - U_{2p} = \left(1 + \frac{1}{2p+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2p}\right)$$

$$= \frac{1}{2p+2} - \frac{1}{2p} = \frac{2p-(2p+2)}{(2p+2)2p} = \frac{-2}{(2p+2)2p} < 0.$$

donc U_{2p} est décroissante.

Etudions la monotonie de U_{2p+1} :

$$U_{2(p+1)+1} - U_{2p+1} = U_{2p+3} - U_{2p+1} = \left(1 + \frac{(-1)^{2p+3}}{2p+3}\right) - \left(1 + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{2p+3} + \frac{1}{2p+1} = \frac{-(2p+1)+(2p+3)}{(2p+3)(2p+1)} = \frac{2}{(2p+3)(2p+1)} > 0.$$

donc U_{2p+1} est $\nearrow$.

$$\lim_{p\to+\infty} U_{2p} - U_{2p+1} = \lim_{p\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2p}\right) - \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)$$

$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1} = 0$$

donc U_{2p} et U_{2p+1} sont adjacentes