

SITUATION

Il est souvent demandé de déterminer la position relative d'une courbe et d'une droite (le plus souvent une tangente ou une asymptote), c'est-à-dire de déterminer laquelle est graphiquement située au-dessus de l'autre. Ce problème revient à étudier le signe d'une différence.

ÉNONCÉ

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

Déterminer la position relative de C_f et de la droite D d'équation $y = x - 1$.

ETAPE 1

Énoncer la démarche

Avant de commencer les calculs, on explique la démarche :

"Pour étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = ax + b$, on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$."

APPLICATION

Pour étudier la position relative de C_f et de D , on étudie le signe de $f(x) - (x - 1)$ pour tout réel x différent de -1 .

ETAPE 2

Calculer et simplifier $f(x) - (ax + b)$

On calcule et simplifie autant que possible la différence $f(x) - (ax + b)$, de manière à obtenir une expression dont on puisse facilement déterminer le signe.

APPLICATION

Pour tout réel x différent de -1 , on a :

$$f(x) - (x - 1) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} - (x - 1)$$

$$f(x) - (x - 1) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} - \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1}$$

On réduit au même dénominateur et on reconnaît une identité remarquable du type $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, pour tous réels a et b .

$$f(x) - (x - 1) = \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{x + 1}$$

Soit :

$$f(x) - (x - 1) = \frac{2}{x + 1}$$

ETAPE 3

Étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$

On étudie alors le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$ en distinguant les cas selon les valeurs de x si nécessaire. Un tableau de signes peut s'avérer utile dans les cas les plus compliqués.

APPLICATION

On a :

- $2 > 0$
- $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

On en déduit donc le signe de la différence :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
2	+		+
$x + 1$	-	○	+
$f(x) - (x - 1)$	-		+

ETAPE 4

Conclure sur la position relative

Finalement, on conclut :

- Sur les intervalles où $f(x) - (ax + b) > 0$, C_f est au-dessus de D .
- Sur les intervalles où $f(x) - (ax + b) < 0$, C_f est en dessous de D .
- Lorsque $f(x) - (ax + b) = 0$, C_f et D ont un point d'intersection.

APPLICATION

Finalement, on peut conclure :

- C_f est au-dessus de D sur $] -1; +\infty[$.
- C_f est en dessous de D sur $] -\infty; -1[$.

Sommaire

1 Énoncer la démarche

2 Calculer et simplifier $f(x) - (ax + b)$

3 Étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$

4 Conclure sur la position relative

Tout le contenu
en illimité avec
nos offres Premium

S'ABONNER

