Les fonctions

TÉLÉCHARGER EN PDF

Sommaire

I Dérivation

THÉORÈME **Dérivées des fonctions usuelles**

Soient un réel λ et un entier naturel *n* ; on désigne par D_f le domaine de définition de *f* et par $D_{f'}$ son domaine de dérivabilité.

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$
λ	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \geq 1)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}\ (n \geq 1)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$

THÉORÈME **Dérivées et opérations**

Soit un réel λ, on désigne par *u* et *v* deux fonctions dérivables sur un intervalle *I*.

f	f'
λu	$\lambda u'$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ (si *u* ne s'annule pas sur *I*)	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ (si *v* ne s'annule pas sur *I*)	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u^n\ (n \geq 1)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$ (si $u(x) > 0$ sur l'intervalle I)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

II Continuité

DÉFINITION **Fonction continue**

Une fonction *f* est continue sur un intervalle *I* si et seulement s'il est possible de tracer sa courbe représentative sur *I* sans lever le crayon.

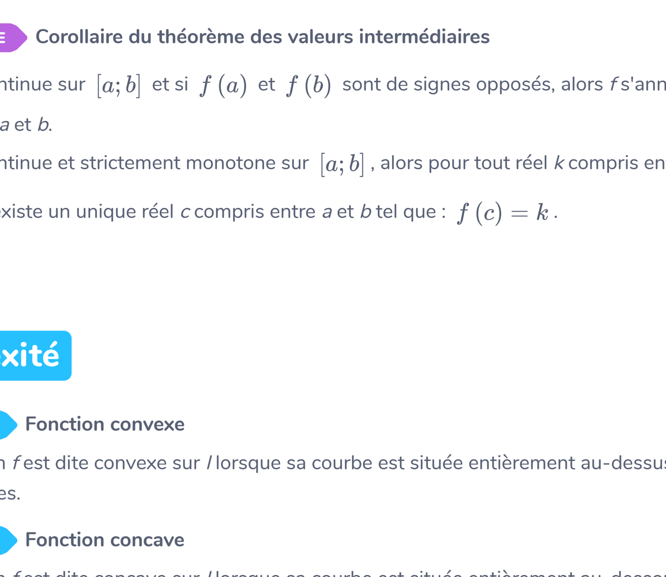
PROPRIÉTÉ

Toute fonction dérivable sur *I* est continue sur *I*. Attention, la réciproque est fausse.

THÉORÈME **Théorème des valeurs intermédiaires**

Soient *f* une fonction continue sur un intervalle *I*, et *a* et *b* deux réels de cet intervalle.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que : $f(c)=k$.



COROLLAIRE **Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**

- Si *f* est continue sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors *f* s'annule au moins une fois entre *a* et *b*.
- Si *f* est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel *c* compris entre *a* et *b* tel que : $f(c)=k$.

III Convexité

DÉFINITION **Fonction convexe**

Une fonction *f* est dite convexe sur *I* lorsque sa courbe est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

DÉFINITION **Fonction concave**

Une fonction *f* est dite concave sur *I* lorsque sa courbe est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

THÉORÈME **Fonction convexe et dérivées**

La fonction *f* est convexe sur *I* si et seulement si la dérivée *f'* est croissante sur *I*, c'est-à-dire si sa dérivée seconde *f''* est positive sur *I*.

THÉORÈME **Fonction concave et dérivées**

La fonction *f* est concave sur *I* si et seulement si la dérivée *f'* est décroissante sur *I*, c'est-à-dire si sa dérivée seconde *f''* est négative sur *I*.

DÉFINITION **Point d'inflexion**

Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente en ce point, c'est-à-dire là où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

IV Fonction exponentielle

DÉFINITION **La fonction exponentielle**

La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$.

THÉORÈME **Propriétés algébriques de la fonction exponentielle**

Soient deux réels *x* et *y*, et un entier *n*.

- $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$
- $e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$
- $e^{x+y}=e^x e^y$
- $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n=e^{nx}$

THÉORÈME **Dérivées**

Fonction	Dérivée
e^x	e^x
e^u	$u'e^u$

V Fonction logarithme népérien

DÉFINITION **Fonction logarithme népérien**

La fonction logarithme népérien, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $f(x)=\ln(x)$.

PROPRIÉTÉ

- Pour tout réel *x* : $\ln(e^x)=x$.
- Pour tout réel *x* strictement positif : $e^{\ln(x)}=x$.

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels strictement positifs *x* et *y*, et tout entier relatif *n* :

- $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln(x^n)=n\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$

THÉORÈME **Dérivées**

Fonction	Dérivée
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

VI Primitives

THÉORÈME **Primitives des fonctions usuelles**

Soient un entier *n*, *k* un réel ; la fonction *F* est une primitive de *f* sur l'intervalle *I*.

$f(x)$	$F(x)$	*I*
k	kx	$\mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	si $n \geq 1$: $\mathbb{R}$ si $n \leq -2$: $]-\infty;0[\,\text{U}\,]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

THÉORÈME **Opérations et primitives**

Soit un entier *n* différent de 0 et −1. On désigne par *u* et *v* deux fonctions dérivables sur l'intervalle *I* ; la fonction *F* est une primitive de *f* sur l'intervalle *I*.

f	*F*	Conditions
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n \leq -2$: $u(x) \neq 0$ sur *I*
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u>0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u>0$
$u'e^u$	e^u	

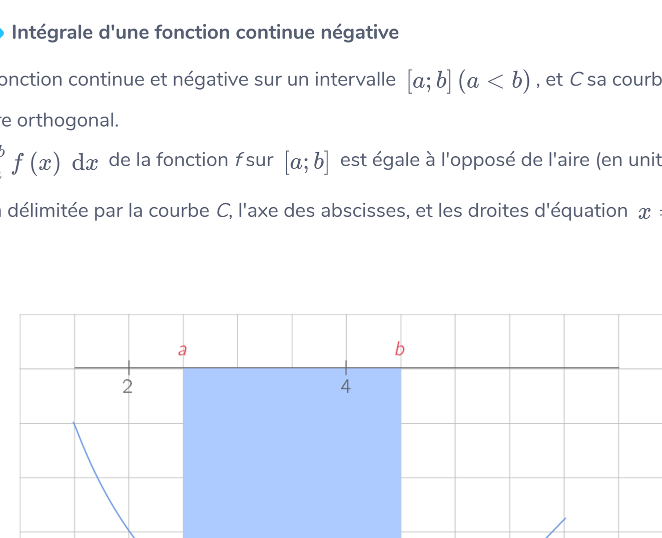
VII Intégrales

A Aires et intégrales

DÉFINITION **Intégrale d'une fonction continue positive**

Soient *f* une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]\ (a<b)$, et *C* sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

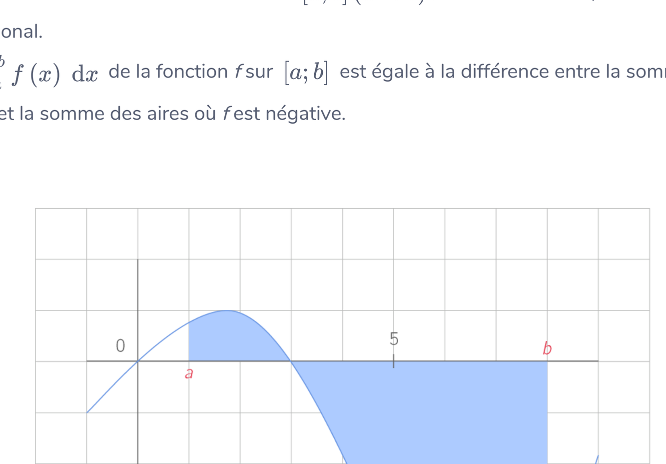
L'intégrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de la fonction *f* sur $[a;b]$ est égale à l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe *C*, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



DÉFINITION **Intégrale d'une fonction continue négative**

Soient *f* une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]\ (a<b)$, et *C* sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

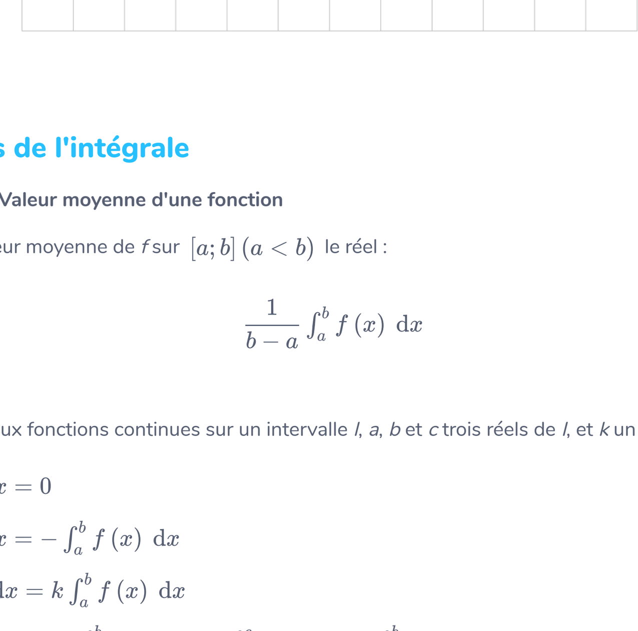
L'intégrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de la fonction *f* sur $[a;b]$ est égale à l'opposé de l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe *C*, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



DÉFINITION **Intégrale d'une fonction continue**

Soient *f* une fonction continue sur un intervalle $[a;b]\ (a<b)$, et *C* sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'intégrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ de la fonction *f* sur $[a;b]$ est égale à la différence entre la somme des aires où *f* est positive et la somme des aires où *f* est négative.



B Propriétés de l'intégrale

DÉFINITION **Valeur moyenne d'une fonction**

On appelle valeur moyenne de *f* sur $[a;b]\ (a<b)$ le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

PROPRIÉTÉ

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle *I*, *a*, *b* et *c* trois réels de *I*, et *k* un réel quelconque.

- $\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x=0$
- $\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int_a^b kf(x)\ \mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- Linéarité : $\int_a^b (f(x)+g(x))\ \mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

PROPRIÉTÉ

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur un intervalle *I*, *a* et *b* deux réels de *I* tels que $a \leq b$, *m* et *M* deux réels tels que $m \leq f \leq M$ sur $[a;b]$.

- Positivité : si $f \geq 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$.
- Comparaison : si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.
- Inégalité de la moyenne : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

C Intégrale et primitives

THÉORÈME **Intégrale et primitives**

Soient *f* une fonction continue sur *I* et *F* une primitive de *f* sur *I*, *a* et *b* deux réels de *I* :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t=F(b)-F(a)$$