continuité et dérivabilité

Sommaire : - continuité en un point x_0 / sur un intervalle I
- dérivabilité " "
- Interprétation géométrique
(tg ; demi-tg verticale, point anguleux)
- fonction composée.

Q1 : Continuité

① en un point x_0 :

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$$

② sur un intervalle I
(Rédaction).

② → polynôme, cos(), sin() ~~sont~~ continue sur $\mathbb{R}$.
→ toute fonction est continue sur son D_f (ouvert)

Rq : pour déterminer le domaine de définition :
→ dénominateur $\neq 0$.
→ sous la racine carrée ≥ 0.
→ à l'intérieur du ln() > 0.

exemple : Mq $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2+1}$ est continue sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$?

Rép : $x \mapsto 4x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) en particulier sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$ et positive (≥ 0) sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$

donc $x \mapsto \sqrt{4x+1}$ est continue sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$.

$x \mapsto x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) en particulier sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$ et $\neq 0$ sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$

donc $x \mapsto \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2+1}$ est continue sur $]-\frac{1}{4}, +\infty[$ comme étant le quotient de deux fonctions continues.

⚠ si l'intervalle est fermé $[a, b]$, il faut ajouter les bornes

exemple : Mq f est continue sur $[a, b]$:
→ continuité sur $]a, b[$ (Rédaction)
→ continuité à droite en a ($\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$)
→ continuité à gauche en b ($\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$).

Q2 : dérivabilité

① en un point x_0

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{réel fini}$$

② sur un intervalle I
(Rédaction)
comme la continuité.

Q3 : Interpréter géométriquement le résultat ?

→ les asymptotes (fiche de méthode séparée).

→ si f est dérivable en x_0 :
on a une tg d'équation :

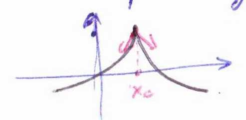
$$\boxed{T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

→ si f n'est pas dérivable en x_0 :

① $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$

② $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

① C_f admet un point anguleux



② C_f admet une demi-tg verticale
dirigée vers le haut si son signe $x_0^+ \to +\infty$, $x_0^- \to -\infty$
le bas si ≠ signe $x_0^+ \to -\infty$, $x_0^- \to +\infty$

Q4 : Continuité / dérivabilité d'une fonction composée ?

$$f \circ g(x) = f[g(x)].$$

Th : si g est continue / dérivable sur I.
f est continue / dérivable sur J : ($f(I) \subset J$).
(généralement $\mathbb{R}$).
donc $f \circ g$ est continue / dérivable sur I.

exemple : Mq $f(x) = \sin(6x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$.

$x \mapsto 6x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-1, 1[$
$x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($]-1, 1[\subset \mathbb{R}$).
$x \mapsto \sin(6x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$.

$$\boxed{(f \circ g)' = (f[g(x)])' = g'(x) \, f'[g(x)]}$$

exemple : $f'(x) = (\sin(6x))' = 6\cos(6x)$.

B. M Taki Eddine
23.390.248