Limites $\lim_{x \to x_0} f(x) = ?$

sommaire : on a 5 méthodes :

- → méthode 1 : simple
- → méthode 2 : polynôme à $\pm\infty$
- → méthode 3 : $\frac{0}{0}$ sans $\sqrt{\ }$
- → méthode 4 : $\frac{0}{0}$ avec $\sqrt{\ }$
- → méthodes 5 : $\left(\frac{\infty}{\infty} ;\ 0\times\infty ;\ +\infty-\infty\right)$

Méthode 1 : on remplace x par x_0 :

ex : $\lim_{x \to (-2)} x^3 - 2x^2 + 12 = (-2)^3 - 2 \cdot 2^2 + 12$

$= -8 - 8 + 12 = -4$

Méthode 2 : si $f(x)$ est un polynôme et $x_0 = \pm\infty$

on garde le monôme le plus haut degré

ex : $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{-7x^2 + x + 12} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2}{-7x^2} = \frac{5}{-7}$

Rappel 1 : si $\alpha \neq 0$

$\frac{\alpha}{\pm\infty} = 0$

$\frac{\alpha}{0^{\pm}} = \pm\infty$ (avec règle de signe)

Rappel 2 :

$2^+ = 2,1$ / $2^- = 1,9$

$(-3)^+ = -2,9$

ex : $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3 + 1}{-5x^4 - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3}{-5x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{5x} = \frac{2}{-\infty} = 0$

si on trouve une forme indéterminée F.I $\left(\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; 0\times\infty ; +\infty - \infty\right)$

3 ; 4 ; 5

⚠ $\frac{0}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{0} = \infty$ ne sont pas des F.I

Méthode 3 : si on trouve $\frac{0}{0}$ sans $\sqrt{\ }$:

on met en facteur $\frac{\cancel{(x-x_0)}(\ldots)}{(x-x_0)(\ldots)}$, puis on simplifie.

Rq : souvent on aura 3 cas de polynôme :

1er degré : $ax + b = a(x - x_0)$

2ème degré : $ax^2 + bx \pm c = (x - x_0)\left(ax \mp \frac{c}{x_0}\right)$

3ème degré : produit remarquable :

$(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

ex1 : $\lim_{x \to 1} \frac{7x^2 - 2x - 5}{-3x^2 + x + 2} = \frac{0}{0}$ F.I

$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(7x+5)}{\cancel{(x-1)}(-3x-2)} = \frac{12}{-5}$

ex2 : $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{-3x + 6} = \frac{0}{0}$ F.I

$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)}{-3\cancel{(x-2)}} = \frac{12}{-3} = 4$

ex3 : $\lim_{x \to (-3)} \frac{x^2 + x - 6}{2x + 6} = \frac{0}{0}$ F.I

$= \lim_{x \to (-3)} \frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{2\cancel{(x+3)}} = \frac{-5}{2}$

Méthode 4 : si on trouve $\frac{0}{0}$ avec $\sqrt{\ }$:

on multiplie par l'expression conjuguée $\left((a-b)(a+b) = a^2 - b^2\right)$ puis on revient à la **Méthode 3**

ex1 : $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{3x^2 - 2x - 8} = \frac{0}{0}$ F.I

$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(3x^2 - 2x - 8)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2) - 4}{(3x^2 - 2x - 8)(\sqrt{x+2} + 2)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(3x+4)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(3x+4)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{40}$

⚠ n'oublions pas de revenir à la 3ème méthode.

Méthode 5 : si on trouve $\left(\frac{\infty}{\infty} ;\ 0\times\infty ;\ +\infty - \infty\right)$.

elle est souvent sous forme :

$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \alpha x$

→ si $\sqrt{a} = \pm\alpha$ (expression conjugué)

→ si $\sqrt{a} \neq \pm\alpha$ (x en facteur)

⚠ $\sqrt{x^2} = |x|$

→ x si $x \to +\infty$

→ $-x$ si $x \to -\infty$

exemple :

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} - x = +\infty - \infty$ F.I.

$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} =$

$= \lim_{x \to +\infty} |x| \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{2 + \underset{0}{\frac{1}{x}} + \underset{0}{\frac{1}{x^2}}}$

$= +\infty$

B.M Taki'Eddine

23.390.248