d'ordre 3 : on a deux méthodes :

→ Commatrice (Calcul direct)

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t com(A)}$$

exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -34 \neq 0$ donc A est inversible.

$$Com(A) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Com(A) = \begin{pmatrix} -12 & +10 & 6 \\ -5 & 7 & -6 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t Com(A) = \begin{pmatrix} -12 & -5 & -4 \\ 10 & 7 & -8 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

le transposé : écrire les lignes sous forme de colonnes.

donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t com(A) = \frac{-1}{34} \begin{pmatrix} -12 & -5 & -4 \\ 10 & 7 & -8 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

→ à travers le Théorème $A \cdot A^{-1} = I_3$ (Calcul indirect).

exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1°/ Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = \tilde{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2°/ En déduire l'inverse de A.

Rép :

1°/ $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

du calcul : $A^2 - 3A + 2I_3 = \tilde{0}$

2°/ $A^2 - 3A + 2I_3 = \tilde{0} \iff A^2 - 3A = -2I_3$

$\frac{1}{-2}(A^2 - 3A) = I_3 \iff A\left(\underbrace{\frac{1}{-2}(A - 3I_3)}_{A^{-1}}\right) = I_3$

donc $A^{-1} = \frac{1}{-2}(A - 3I_3)$

⚠ à ne pas oublier.

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Résolution d'un système d'équation

soit le système suivant :

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x - 4z = -1 \\ 3x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

le sys s'écrit sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

donc $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \frac{-1}{34} \begin{pmatrix} -12 & -5 & -4 \\ 10 & 7 & -8 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -15 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/34 \\ -19/34 \\ -16/34 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{15}{34}, \frac{-19}{34}, \frac{-16}{34} \right) \right\}.$$

B. M Taki'Eddine
23.390.248