La continuité

Cours

TÉLÉCHARGER EN PDF

I La continuité sur un intervalle

DÉFINITION **Continuité d'une fonction**

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* et *a* un réel de *I*. *f* est dite continue en *a* lorsque :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

De plus, *f* est dite continue sur *I* lorsque *f* est continue en tout point de *I*.

EXEMPLE

Considérons la fonction définie pour tout réel *x* par :

$$f(x) = 2x + 5$$

On a :

- $f(6) = 2 \times 6 + 5 = 17$
- $\lim_{x \to 6} f(x) = 17$

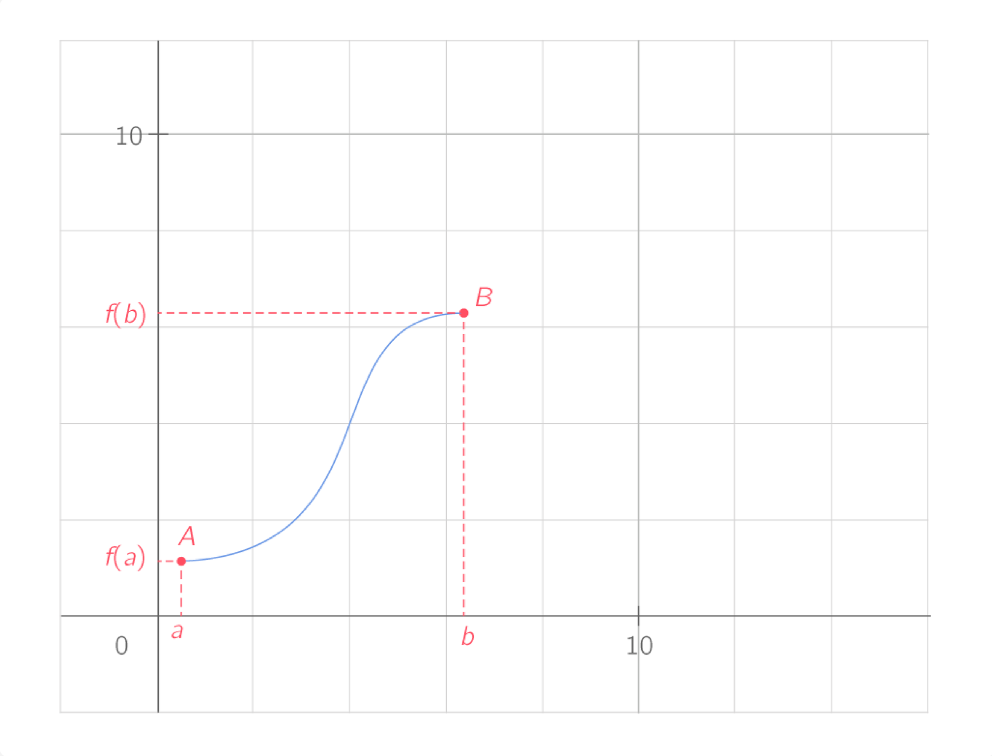
Donc la fonction *f* est continue en 6.

REMARQUE

Une fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement s'il est possible de tracer sa courbe représentative sur I sans lever le crayon.

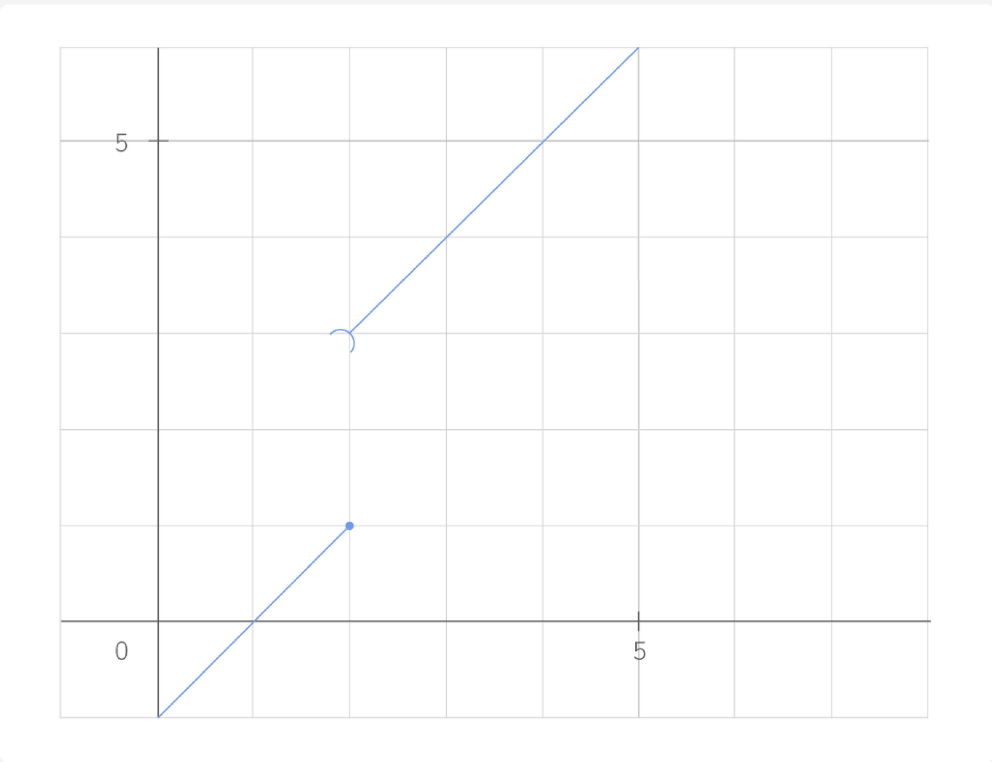
EXEMPLE

Soient a et b deux réels ($a < b$). On peut relier les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ sans lever le crayon, donc *f* est continue sur $[a; b]$.



EXEMPLE

La fonction dont la courbe est représentée ci-dessous n'est pas continue en 2.



PROPRIÉTÉ

- Les fonctions usuelles (affines, polynomiales, inverse, exponentielle, logarithme, puissance,...) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Toute fonction construite comme somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions continues sur un intervalle I, est continue sur I.

PROPRIÉTÉ

Toute fonction dérivable sur I est continue sur I. En revanche, la réciproque est fausse.

II Le théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME **Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*, et *a* et *b* deux réels de cet intervalle. Pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que $f(c) = k$.

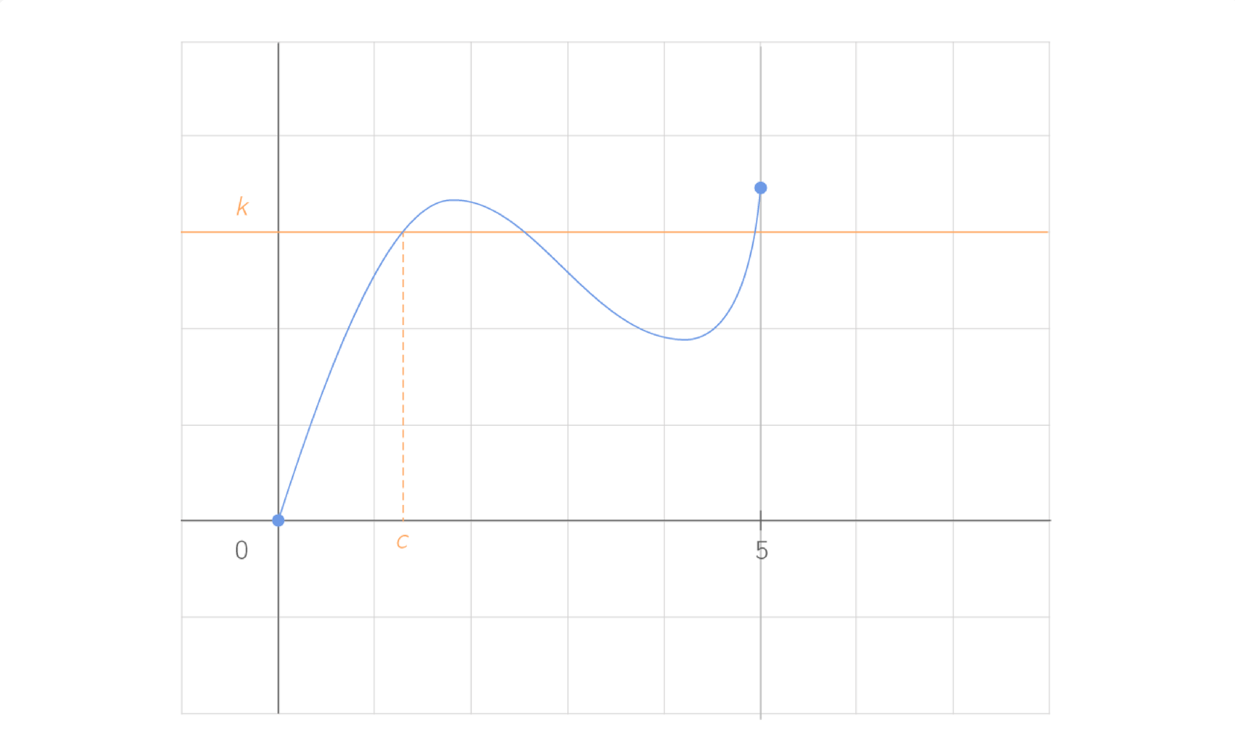
Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de *f* coupe au moins une fois la droite d'équation $y = k$ sur l'intervalle $[a; b]$

EXEMPLE

Soit *f* une fonction continue sur $[0; 5]$ telle que :

- $f(0) = 0$
- $f(5) = 3{,}5$

$3 \in [0; 3{,}5]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet au moins une solution sur $[0; 5]$. Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de *f* coupe nécessairement au moins une fois la droite d'équation $y = 3$ sur l'intervalle $[0; 5]$.



Sur le graphique ci-dessus, on remarque que la courbe représentative coupe trois fois la droite d'équation $y = 3$.

THÉORÈME **Cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires**

Si *f* est continue sur $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois entre *a* et *b*.

COROLLAIRE **Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**

Si *f* est continue et **strictement monotone** sur $[a; b]$, alors pour tout réel *k* compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel *c* compris entre *a* et *b* tel que : $f(c) = k$.

III La fonction partie entière

DÉFINITION **Partie entière**

Soit un réel *x*. La partie entière de *x* est l'unique entier relatif $E(x)$ tel que :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

EXEMPLE

La partie entière de 2,156 est 2.

La partie entière de −2,156 est −3.

DÉFINITION **Fonction partie entière**

La fonction partie entière est la fonction *f* définie pour tout réel *x* par :

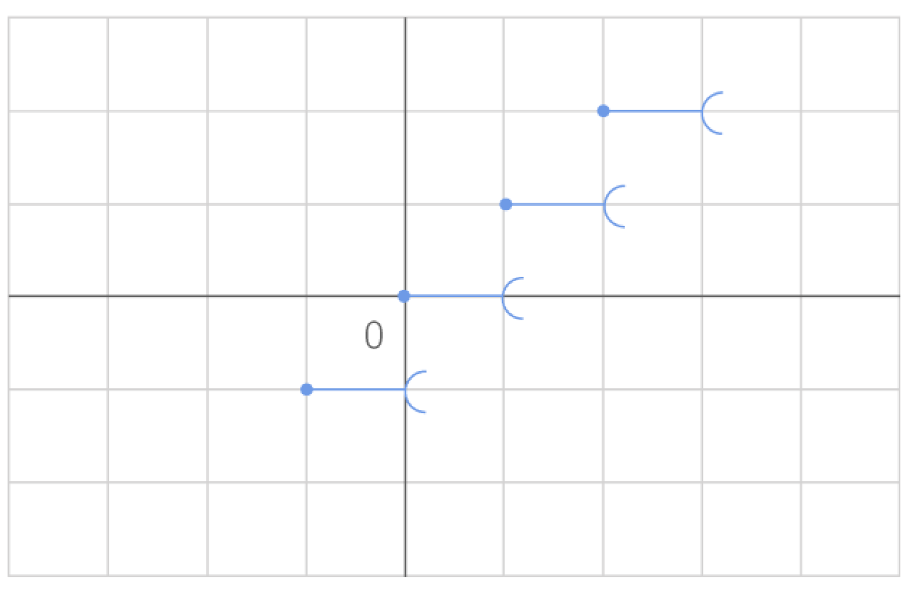
$$f(x) = E(x)$$

PROPRIÉTÉ

Soit *n* un entier relatif et *f* la fonction partie entière :

- $f(n) = n$
- $\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1 \neq f(n)$

Ce qui prouve que la fonction partie entière est discontinue en tout entier relatif, comme on le visualise sur sa courbe représentative :



Sommaire

I La continuité sur un intervalle
II Le théorème des valeurs intermédiaires
III La fonction partie entière