

MÉTHODE 1

En encadrant la fonction intégrée

**SITUATION**  
Lorsque l'on ne peut pas calculer la valeur de  $\int_a^b f(x) \, dx$  car on ne connaît pas de primitive de la fonction sous l'intégrale, l'énoncé peut demander d'encadrer cette intégrale. On peut obtenir cet encadrement à partir d'un encadrement de la fonction  $f$ .

ÉNONCÉ

Soit  $n$  un entier naturel. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 x^n e^{-x} \, dx \leq \frac{1}{n+1}$$

ETAPE 1

**Repérer les éléments à conserver dans l'expression de  $f$**   
L'encadrement voulu est toujours donné par l'énoncé. On y repère donc les éléments qui doivent être conservés lors de l'encadrement de  $f$ .

APPLICATION

On constate que l'entier  $n$  est présent dans le terme de droite. Il faut donc penser à le conserver quand on majorera  $x^n e^{-x}$ .

ETAPE 2

**Encadrer la fonction  $f$**   
On encadre la fonction  $f$  sur  $[a; b]$ . On démontre donc un encadrement de la forme suivante :

$$\forall x \in [a; b], u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

APPLICATION

On encadre d'abord  $e^{-x}$  sur  $[0; 1]$ .

Soit  $x$  un réel compris entre 0 et 1. On a :

$$-1 \leq -x \leq 0$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  :

$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0}$$

En gardant uniquement la majoration, on a :

$$e^{-x} \leq 1$$

On multiplie par  $x^n$  qui est positif. On obtient donc :

$$x^n e^{-x} \leq x^n$$

ETAPE 3

**Utiliser les comparaisons d'intégrales**  
On s'assure que  $a \leq b$ .

Grâce à l'encadrement trouvé dans l'étape précédente, on a alors, par comparaison d'intégrales :

$$\int_a^b u(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b v(x) \, dx$$

On calcule  $\int_a^b u(x) \, dx$  et  $\int_a^b v(x) \, dx$  pour obtenir l'encadrement voulu.

APPLICATION

0 est bien inférieur à 1. Donc, d'après l'inégalité précédente, par comparaison d'intégrales, on a :

$$\int_0^1 x^n e^{-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx$$

Or :

$$\int_0^1 x^n \, dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On peut donc conclure :

$$\int_0^1 x^n e^{-x} \, dx \leq \frac{1}{n+1}$$

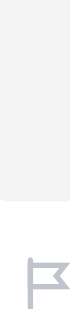
MÉTHODE 2

En utilisant l'inégalité de la moyenne

**SITUATION**  
On peut parfois obtenir directement un encadrement d'intégrale grâce à l'inégalité de la moyenne.

ÉNONCÉ

Démontrer l'inégalité suivante :

$$0 \leq \int_0^1 x e^x \, dx \leq e$$


ETAPE 1

**Énoncer les propriétés de l'inégalité de la moyenne**  
Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$  ( $a \leq b$ ), minorée par  $m$  et majorée par  $M$  sur cet intervalle, on a, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$$

APPLICATION

Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$  ( $a \leq b$ ), minorée par  $m$  et majorée par  $M$  sur cet intervalle, on a, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$$

ETAPE 2

**Déterminer un majorant et un minorant de  $f$**   
On détermine tout d'abord un minorant et un majorant de la fonction  $f$  sur  $[a; b]$ , ce qui revient à démontrer une inégalité de la forme  $m \leq f(x) \leq M$ , où  $m$  et  $M$  ne dépendent pas de  $x$ .

APPLICATION

Soit  $x$  un réel compris entre 0 et 1. On a :

- $0 \leq x \leq 1$
- $e^0 \leq e^x \leq e^1$  car la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

Les deux quantités étant positives, par produit, on a :

$$0 \times e^0 \leq x e^x \leq 1 \times e$$

Soit :

$$0 \leq x e^x \leq e$$

ETAPE 3

**Écrire l'inégalité obtenue**  
On remplace  $m$  et  $M$  par les valeurs trouvées dans l'étape 1 pour obtenir l'encadrement souhaité.

APPLICATION

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction  $f : x \mapsto x e^x$  entre 0 et 1, d'après le résultat de l'étape 2, on a :

$$0 \times (1-0) \leq \int_0^1 x e^x \, dx \leq e \times (1-0)$$

On peut donc conclure :

$$0 \leq \int_0^1 x e^x \, dx \leq e$$

conserver dans l'expression de  $f$

- 2 Encadrer la fonction  $f$
- 3 Utiliser les comparaisons d'intégrales

 En utilisant l'inégalité de la moyenne

- 1 Énoncer les propriétés de l'inégalité de la moyenne
- 2 Déterminer un majorant et un minorant de  $f$
- 3 Écrire l'inégalité obtenue

