Modèles de Valorisation des Options : Du Black-Scholes à Heston, une Exploration Théorique et Numérique

KERDOUN Wassim

FID 2
Encadré par : M. El Asri Brahim

24 avril 2025

Plan (Partie 1)

Plan (Partie 2)

4. Modèle de Heston
   - Hypothèses
   - Applications du schéma d'Euler et de Milshtein
5. Conclusion

Contexte

La valorisation des options constitue un enjeu central en ingénierie financière. Depuis le modèle de Black-Scholes, qui repose sur l'hypothèse d'une volatilité constante, de nombreuses extensions ont été proposées pour mieux capturer les dynamiques observées sur les marchés.
Parmi ces extensions, les modèles à volatilité stochastique, tels que celui de Heston, permettent d'intégrer une volatilité aléatoire, offrant ainsi une description plus réaliste du comportement des actifs sous-jacents. Ces modèles, bien que plus complexes, nécessitent des techniques numériques avancées pour leur simulation et leur calibration.

Objectifs

Les méthodes numériques ont pour objectif principal de simuler des équations différentielles stochastiques (EDS) sans avoir à résoudre ces dernières de manière analytique. Dans cette section, nous allons présenter les méthodes suivantes :

- Schéma d'Euler stochastique
- Schéma d'Euler stochastique implicite et semi-implicite
- Schéma de Milshtein
- Analyse de la convergence et estimation de l'erreur

Hypothèses du schéma d'Euler

Le schéma d'Euler permet une approximation de la solution d'une EDS sous certaines hypothèses :

- **Lipschitz local** : les fonctions $a(t,x)$ (drift) et $b(t,x)$ (diffusion) vérifient :

$$\exists L > 0, \quad |a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq L|x-y|$$

- **Croissance linéaire** : il existe $K > 0$ tel que :

$$|a(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

- **Pas de temps** Δt suffisamment petit pour garantir stabilité et précision.
- **Mouvement brownien standard** $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$.
- **Condition initiale** connue : $X_0 = x_0$.

Schéma d'Euler stochastique (explicite)

Soit une EDS de la forme :

$$dX_t = a(X_t, t)\,dt + b(X_t, t)\,dW_t$$

En discrétisant $[0, T]$ en N intervalles de taille $\Delta t = \frac{T}{N}$, on approxime X_t par une suite $X_i \approx X_{t_i}$, avec :

$$X_{i+1} = X_i + a(X_i, t_i)\Delta t + b(X_i, t_i)\Delta W_i$$

où $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Schéma d'Euler stochastique semi-implicite

Dans ce schéma, le terme de drift est évalué à l'instant futur t_{i+1}, tandis que la diffusion reste évaluée à t_i :

$$X_{i+1} = X_i + a(X_{i+1}, t_{i+1})\Delta t + b(X_i, t_i)\Delta W_i$$

Ce compromis améliore la stabilité sans complexifier excessivement la résolution.

Schéma d'Euler stochastique implicite

Dans la version complètement implicite, les deux termes sont évalués au futur :

$$X_{i+1} = X_i + a(X_{i+1}, t_{i+1})\Delta t + b(X_{i+1}, t_{i+1})\Delta W_i$$

Ce schéma est plus stable, mais nécessite souvent des méthodes numériques supplémentaires (ex. itérations de point fixe) pour résoudre l'équation à chaque pas.

Schéma de Milstein

Le schéma de Milstein est une amélioration du schéma d'Euler stochastique. Il intègre un terme correctif dérivé du développement d'Itô-Taylor, ce qui permet une meilleure précision dans l'approximation des trajectoires stochastiques.

La formule de récurrence devient :

$$X_{i+1} = X_i + a(X_i, t_i)\Delta t + b(X_i, t_i)\Delta W_i + \frac{1}{2} b(X_i, t_i) \frac{\partial b}{\partial x}(X_i, t_i) \left((\Delta W_i)^2 - \Delta t\right)$$

où :

- $a(X_i, t_i)$ est le terme de drift,
- $b(X_i, t_i)$ est le terme de diffusion,
- $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$,
- Le terme en rouge est la **correction spécifique au schéma de Milstein**, absente dans le schéma d'Euler.

Comparaison des schémas numériques

Méthode	**Dérive** $a(t,x)$	**Diffusion** $b(t,x)$	**Stabilité**	**Coût computationnel**
Euler explicite	en t_i	en t_i	faible	faible
Euler semi-implicite	en t_{i+1}	en t_i	moyenne	moyen
Euler implicite	en t_{i+1}	en t_{i+1}	forte	élevé
Milshtein	en t_i	en t_i + dérivée de b	moyenne à forte	élevé

Table – Comparaison des schémas d'Euler et de Milshtein

Convergence forte et faible

Les schémas numériques pour les EDS peuvent être évalués selon deux types de convergence :

- **Convergence forte** : mesure l'erreur moyenne quadratique entre la solution simulée et la solution réelle d'une trajectoire.

$$\mathbb{E}[|X_T - X_T^N|^2]^{1/2} \quad \text{(ordre fort)}$$

- **Convergence faible** : mesure l'erreur sur les espérances d'observables fonctionnelles.

$$|\mathbb{E}[f(X_T)] - \mathbb{E}[f(X_T^N)]| \quad \text{(ordre faible)}$$

Convergence forte et faible

Ordres de convergence selon le schéma utilisé :

Méthode	**Convergence forte**	**Convergence faible**
Euler explicite (EEMM)	$\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Euler semi-implicite (DIEMM)	$\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Euler implicite (FIEMM)	$\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$	$\mathcal{O}(\Delta t)$
Milstein	$\mathcal{O}(\Delta t)$	$\mathcal{O}(\Delta t)$

Hypothèses du modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes repose sur les hypothèses suivantes :

- Le marché est frictionless : absence de coûts de transaction, d'impôts, et possibilité de vente à découvert.
- Le taux d'intérêt sans risque r est constant et connu.
- L'actif sous-jacent ne verse pas de dividende pendant la durée de vie de l'option.
- Le rendement de l'actif suit un mouvement brownien géométrique sous probabilité $\mathbb{P}$:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

- Il est possible de construire un portefeuille parfaitement couvert (hedging) en continu.
- Les marchés sont efficients : toutes les informations disponibles sont immédiatement intégrées dans les prix.

Formule

En utilisant le théorème de Girsanov, on peut passer de la probabilité $\mathbb{Q}$ à la probabilité risque neutre $\mathbb{P}$, afin de récupérer l'EDS du modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

Sous certaines conditions d'existence et d'unicité de la solution (Lipschitz et croissance linéaire), on peut retirer la solution analytique et numérique de l'EDS :

$$C(t, S_t) = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

$$P(t, S_t) = -S_t \Phi(-d_1) + Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Formule

Les expressions de $C(t, S_t)$ et $P(t, S_t)$ découlent de la résolution de l'EDP du modèle, obtenue par la construction d'un portefeuille parfaitement couvert en continu, suivie d'un changement de variable permettant de transformer l'EDP en une équation de chaleur.
Pour la solution numérique du modèle, nous pouvons utiliser la formule d'Ito, ce qui nous donne l'expression suivante pour l'évolution du sous-jacent :

$$S_t = S_0 e^{\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)}$$

Cette expression permet de simuler des trajectoires du sous-jacent, qui sont ensuite utilisées pour le calcul du payoff des options européennes.

Formule

Le payoff d'un call européen est donné par :

$$V_0 = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Payoff}_i, \quad \text{avec} \quad \mathrm{Payoff} = \max(S_T - K, 0)$$

Tandis que celui du put est definit comme suivant :

$$\mathrm{Payoff} = \max(K - S_T, 0)$$

Application des schémas d'Euler et de Milshtein

Le schéma d'Euler stochastique permet de simuler les trajectoires du prix de l'actif sous-jacent S_t en discrétisant l'EDP du modèle de Black-Scholes. Voici les différentes formes de schémas d'Euler appliquées à l'EDS :

- **Schéma d'Euler explicite** :

$$S_{i+1} = S_i + rS_i\Delta t + \sigma S_i \Delta W_i$$

- **Schéma d'Euler semi-implicite** :

$$S_{i+1} = S_i + rS_{i+1}\Delta t + \sigma S_i \Delta W_i$$

$$\Longrightarrow \quad S_{i+1} = \frac{S_i(1+\sigma\Delta W_i)}{1 - r\Delta t}$$

Application des schémas d'Euler et de Milshtein

- **Schéma d'Euler implicite** :

$$S_{i+1} = S_i + rS_{i+1}\Delta t + \sigma S_{i+1}\Delta W_i$$
$$\Longrightarrow \quad S_{i+1} = \frac{S_i}{1 - r\Delta t - \sigma \Delta W_i}$$

- **Schéma de Milshtein** :

$$S_{i+1} = S_i \left(1 + r\Delta t + \sigma \Delta W_i + \frac{1}{2}\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial S}(\Delta W_i^2 - \Delta t)\right)$$

Hypothèses

- **Le sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique** :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S \tag{1}$$

où v_t représente la variance instantanée du sous-jacent à un instant donné, et W_t^S est un mouvement brownien standard.

- **La variance suit un processus de mean-reverting** : La variance instantanée v_t suit un processus de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross) :

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^v \tag{2}$$

où :

  - κ est le taux de vitesse de retour à la moyenne,
  - θ est la variance à long terme (moyenne de v_t),
  - σ_v est la volatilité de la variance,
  - W_t^v est un mouvement brownien indépendant de W_t^S.

Hypothèses (suite)

- **Corrélation entre les processus** : Les deux processus W_t^S et W_t^v sont corrélés, c'est-à-dire que :

$$\text{Corr}(dW_t^S, dW_t^v) = \rho dt$$

où ρ est le coefficient de corrélation entre les mouvements brownien du sous-jacent et de la variance.

- **Volatilité stochastique**.
- **Pas de dividendes**.
- **Taux sans risque constant**.
- **Pas de coûts de transaction**.

Applications des schémas d'Euler et de Milshtein

Sachant que la solution exacte du modèle de Heston n'existe pas, et qu'une solution semi-ferme, bien que possible, est assez complexe à démontrer, on peut recourir aux méthodes numériques définies précédemment pour obtenir une solution approximative. Cette solution découle des étapes suivantes :

1. **Simulation de l'équation (2)**.
2. **Assurer la corrélation**.
3. **Injection des volatilités dans l'equation (1)**.

Applications des schémas d'Euler et de Milshtein

le schéma d'Euler s'écrit :

$$\begin{cases} S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i} \Delta t + \sqrt{v_{t_i}} S_{t_i} \Delta W_t^S, \\ v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \kappa(\theta - v_{t_i}) \Delta t + \sigma_v \sqrt{v_{t_i}} \Delta W_t^v, \end{cases}$$

où :

- ΔW_t^S et ΔW_t^v sont des incréments browniens corrélés,
- $\Delta W_t^v = \rho \Delta W_t^S + \sqrt{1-\rho^2} \Delta Z_t$, avec ΔZ_t un mouvement brownien indépendant.

Applications des schémas d'Euler et de Milshtein

Le schéma de Milshtein s'écrit :

$$\begin{cases} S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i}\Delta t + \sqrt{v_{t_i}} S_{t_i}\Delta W_t^S + \frac{1}{2}\sqrt{v_{t_i}}\left((\Delta W_t^S)^2 - \Delta t\right), \\ v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \kappa(\theta - v_{t_i})\Delta t + \sigma_v\sqrt{v_{t_i}}\Delta W_t^v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\left((\Delta W_t^v)^2 - \Delta t\right). \end{cases}$$

Conclusion

Les méthodes numériques utilisées, comme les schémas d'Euler et de Milshtein, ont des limites en termes de coût computationnel et de précision. Des méthodes plus avancées, telles que Runge-Kutta ou les différences finies, pourraient améliorer la modélisation des EDS tout en restant efficaces.

Merci de votre attention.