

# Modèles de Valorisation des Options : Du Black-Scholes à Heston, une Exploration Théorique et Numérique

**Encadré par :**  
M. EL ASRI BRAHIM

8 mars 2025



# Résumé

Ce document explore les modèles de valorisation des options, en mettant l'accent sur le modèle de Heston avec volatilité stochastique. Alors que le modèle de Black-Scholes repose sur une volatilité constante, le modèle de Heston permet de capturer des phénomènes de marché complexes, tels que le smile de volatilité et l'effet de levier. Nous présentons les fondements théoriques de ces modèles, leurs implémentations numériques via les schémas d'Euler et de Milstein, et leur application pour générer des surfaces de volatilité. Une application web interactive, développée avec Flask, est proposée pour visualiser les résultats des simulations. Ce travail s'adresse aux étudiants, chercheurs et professionnels en finance quantitative, offrant une compréhension approfondie des outils modernes de valorisation des options.

---

**Mots-clés :** Valorisation des options, modèle de Black-Scholes, modèle de Heston, volatilité stochastique, schéma d'Euler, schéma de Milstein, Flask, finance quantitative.

---

# Abstract

This document explores option pricing models, with a focus on the Heston model with stochastic volatility. While the Black-Scholes model relies on constant volatility, the Heston model captures complex market phenomena such as the volatility smile and the leverage effect. We present the theoretical foundations of these models, their numerical implementations using the Euler and Milstein schemes, and their application in generating volatility surfaces. An interactive web application, developed with Flask, is proposed to visualize simulation results. This work is aimed at students, researchers, and professionals in quantitative finance, providing a comprehensive understanding of modern option pricing tools.

---

**Keywords** : Option pricing, Black-Scholes model, Heston model, stochastic volatility, Euler scheme, Milstein scheme, Flask, quantitative finance.

---

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Processus Brownien</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Fondements Théoriques . . . . .	6
1.2.1 Processus stochastiques et probabilités . . . . .	6
1.2.2 Filtration et information disponible . . . . .	7
1.2.3 Martingales et mesure risque-neutre . . . . .	7
1.3 Mouvement Brownien standard et propriétés . . . . .	9
1.3.1 Définition du mouvement brownien standard . . . . .	9
1.3.2 Propriétés fondamentales du mouvement brownien . . . . .	9
1.3.3 Applications du mouvement brownien . . . . .	10
1.4 Mouvement Brownien Géométrique (GBM) . . . . .	10
1.4.1 Définition et Résolution de l'Équation Différentielle Stochastique (EDS) . . . . .	10
1.4.2 Propriétés du mouvement brownien géométrique . . . . .	12
1.4.3 Applications en finance . . . . .	12
1.4.4 Limites du mouvement brownien géométrique . . . . .	12
1.5 Volatilité stochastique et ses implications pour la valorisation des options .	13
1.5.1 Modèles de volatilité stochastique . . . . .	13
1.5.2 Implications pour la valorisation des options . . . . .	13
1.5.3 Avantages et limites . . . . .	14
1.5.4 Applications pratiques . . . . .	14
<b>2 Modèles de Valorisations des options</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	15
2.1.1 Objectifs de la valorisation des options . . . . .	15
2.1.2 Importance des modèles de valorisation . . . . .	15
2.1.3 Modèles de valorisation couramment utilisés . . . . .	15
2.1.4 Structure du chapitre . . . . .	16
2.2 Modèle de Black-Scholes . . . . .	16
2.2.1 Hypothèses du modèle de Black-Scholes . . . . .	16
2.2.2 Équation de Black-Scholes . . . . .	17
2.2.3 Résolution de l'équation de Black-Scholes . . . . .	17
2.2.4 Paramètres du modèle . . . . .	18

2.2.5	Applications du modèle de Black-Scholes . . . . .	18
2.2.6	Limites du modèle de Black-Scholes . . . . .	18
2.3	Simulation de Monte Carlo . . . . .	19
2.3.1	Simulation standard de la solution des SDE . . . . .	19
2.3.2	Discrétisation du GBM : schéma d'Euler-Maruyama . . . . .	20
2.3.3	Discrétisation du GBM : schéma d'Euler implicite . . . . .	21
2.3.4	Schéma de Milstein et comparaison . . . . .	23
2.3.5	Implémentation de la simulation pour la valorisation d'options . . .	26
2.4	Modèle de Heston (volatilité stochastique) . . . . .	29
2.4.1	Caractéristiques du modèle . . . . .	29
2.4.2	Valorisation numérique et impact de la volatilité stochastique . . .	30
<b>3</b>	<b>Implémentation et Développement</b>	<b>34</b>
3.1	Architecture de l'application Flask . . . . .	34
3.1.1	Composants principaux de l'architecture Flask . . . . .	34
3.1.2	Structure d'un projet Flask . . . . .	35
3.1.3	Initialisation de l'application . . . . .	35
3.1.4	Définition des routes . . . . .	36
3.1.5	Utilisation des templates . . . . .	36
3.1.6	Gestion des fichiers statiques . . . . .	36
3.1.7	Configuration de l'application . . . . .	36
3.1.8	Extensions Flask . . . . .	37
3.1.9	Conclusion . . . . .	37
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>38</b>
	<b>Appendice</b>	<b>40</b>

# Table des figures

3.1	Structure de l'application . . . . .	35
2	Convergence de la méthode de Monte Carlo pour la simulation du mouvement brownien géométrique (GBM). . . . .	40
3	Convergence de la méthode de Monte Carlo pour le modèle de Heston comparée au prix fixe du modèle de Black-Scholes. . . . .	40

# Introduction générale

Dans un monde financier en constante évolution, marqué par une complexité croissante et une interconnexion des marchés, la valorisation des options s'impose comme un outil indispensable pour la gestion des risques, la spéculation et l'arbitrage. Les options, instruments financiers offrant le droit d'acheter ou de vendre un actif à un prix prédéterminé, jouent un rôle clé dans les stratégies d'investissement et de couverture. Cependant, leur valorisation précise reste un défi de taille, en raison de la nature stochastique des marchés et de la volatilité des prix. Le modèle de Black-Scholes, pionnier en la matière, a posé les bases de la finance quantitative en proposant une formule analytique pour la valorisation des options européennes. Néanmoins, ses hypothèses simplificatrices, notamment celle d'une volatilité constante, montrent leurs limites face à la réalité des marchés, où la volatilité varie de manière imprévisible. Pour répondre à ces défis, des modèles plus avancés, tels que celui de Heston avec volatilité stochastique, ont été développés. Ces modèles permettent de mieux capturer des phénomènes complexes, comme le smile de volatilité et l'effet de levier, offrant ainsi une représentation plus fidèle des dynamiques de marché. Ce document se propose d'explorer en profondeur ces modèles, en abordant leurs fondements théoriques, leurs implémentations numériques et leurs applications pratiques. En outre, une application web interactive, développée avec Flask, est présentée pour visualiser les résultats des simulations et faciliter l'exploration des modèles. Destiné aux étudiants, chercheurs et professionnels en finance quantitative, ce travail vise à fournir une compréhension approfondie des outils modernes de valorisation des options, tout en ouvrant des perspectives pour des recherches futures.



# Chapitre 1

## Processus Brownien

### 1.1 Introduction

Lorsqu'on modélise des systèmes complexes, qu'ils soient physiques ou financiers, comprendre leur évolution est essentiel. Ces systèmes partagent une caractéristique commune : leur nature aléatoire et imprévisible. Par exemple, le mouvement brownien décrit le comportement erratique de particules en suspension, soumises à des collisions incessantes. De même, les prix des actifs financiers fluctuent sous l'influence de facteurs externes comme les nouvelles économiques ou les événements politiques. Cette incertitude est au cœur de la modélisation stochastique.

Les processus stochastiques, outils clés pour décrire ces phénomènes, se divisent en deux catégories : discrets (évoluant par sauts) et continus (comme le mouvement brownien). Ces modèles s'appliquent à des variables continues ou discrètes, selon le système étudié. En finance, le modèle de Black-Scholes-Merton repose sur l'hypothèse que les prix des actifs suivent un mouvement brownien géométrique, offrant une approximation puissante malgré ses simplifications.

Ainsi, les processus stochastiques, et notamment le mouvement brownien, fournissent un cadre mathématique robuste pour modéliser des systèmes complexes soumis à l'aléa. Ce chapitre explore ces concepts, en soulignant leur universalité et leur applicabilité dans divers domaines.

### 1.2 Fondements Théoriques

#### 1.2.1 Processus stochastiques et probabilités

Les processus stochastiques sont des outils mathématiques essentiels pour modéliser des systèmes évoluant de manière aléatoire dans le temps. Formellement, un processus stochastique est une collection de variables aléatoires  $\{X_t\}_{t \in T}$  définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , où :

- $\Omega$  est l'espace des états possibles,
- $\mathcal{F}$  est une tribu ( $\sigma$ -algèbre) représentant les événements mesurables,
- $\mathbb{P}$  est une mesure de probabilité,
- $T$  est un ensemble d'indices, souvent interprété comme le temps (continu ou discret).

Pour chaque  $t \in T$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire représentant l'état du système à l'instant  $t$ . Un processus stochastique peut être décrit par sa **fonction de distribution**

jointe :

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et toute séquence  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ .

Les processus stochastiques se classent en deux grandes catégories :

1. **Processus discrets** :  $T$  est un ensemble dénombrable (par exemple,  $T = \mathbb{N}$ ).
2. **Processus continus** :  $T$  est un intervalle réel (par exemple,  $T = [0, \infty)$ ).

Un exemple fondamental est le **mouvement brownien**  $\{W_t\}_{t \geq 0}$ , qui satisfait les propriétés suivantes :

- $W_0 = 0$ ,
- Les accroissements  $W_t - W_s$  sont indépendants et suivent une loi normale  $\mathcal{N}(0, t - s)$  pour  $0 \leq s < t$ ,
- Les trajectoires  $t \mapsto W_t$  sont continues presque sûrement.

Ces concepts servent de base pour modéliser des phénomènes aléatoires dans des domaines variés, allant de la physique à la finance.

### 1.2.2 Filtration et information disponible

Une **filtration**  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est une famille croissante de sous-tribus ( $\sigma$ -algèbres) sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Elle représente l'accumulation d'information au fil du temps, où  $\mathcal{F}_t$  contient tous les événements observables jusqu'à l'instant  $t$ . Formellement, pour  $0 \leq s < t$ , on a :

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}.$$

Une filtration est essentielle pour modéliser l'évolution de l'information dans un processus stochastique. Par exemple, dans un contexte financier,  $\mathcal{F}_t$  peut représenter l'historique des prix d'un actif jusqu'au temps  $t$ . Un processus stochastique  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  est dit **adapté** à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$  si, pour tout  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, c'est-à-dire que la valeur de  $X_t$  est connue à l'instant  $t$ .

La filtration permet également de définir des concepts clés comme :

- Les **temps d'arrêt** : une variable aléatoire  $\tau$  à valeurs dans  $[0, \infty]$  est un temps d'arrêt si  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  pour tout  $t \geq 0$ .
- Les **martingales** : un processus  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  est une martingale par rapport à  $\{\mathcal{F}_t\}$  si  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$  pour tout  $s \leq t$ .

En résumé, la filtration formalise l'idée d'information disponible et joue un rôle central dans l'étude des processus stochastiques, en particulier en finance pour modéliser l'évolution des marchés et la prise de décision en temps réel.

### 1.2.3 Martingales et mesure risque-neutre

Une **martingale** est un processus stochastique  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et adapté à une filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ . Pour être une martingale, le processus doit satisfaire les trois propriétés suivantes :

## Propriétés fondamentales des martingales

1. **Adaptation** : Le processus  $\{M_t\}$  est **adapté** à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$ , c'est-à-dire que pour tout  $t \geq 0$ ,  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Cela signifie que la valeur de  $M_t$  est connue à l'instant  $t$  en fonction de l'information disponible dans  $\mathcal{F}_t$ .
2. **Intégrabilité** : Le processus  $\{M_t\}$  est **intégrable**, c'est-à-dire que pour tout  $t \geq 0$ , on a :

$$\mathbb{E}[|M_t|] < \infty.$$

Cela garantit que l'espérance conditionnelle est bien définie.

3. **Propriété de martingale** : Pour tout  $0 \leq s \leq t$ , le processus satisfait :

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Cette propriété exprime que la meilleure prévision de  $M_t$ , conditionnellement à l'information disponible jusqu'à l'instant  $s$ , est la valeur actuelle  $M_s$ . Cela modélise un système "équitable" sans tendance à la hausse ou à la baisse.

## Exemples de martingales

- Un **mouvement brownien**  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  est une martingale sous la mesure  $\mathbb{P}$ , car il satisfait  $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s$  pour tout  $0 \leq s \leq t$ .
- Un processus de **marche aléatoire symétrique** est une martingale discrète.

## Mesure risque-neutre

En finance, la **mesure risque-neutre**  $\mathbb{Q}$  est une mesure de probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle le prix actualisé des actifs est une martingale. Formellement, si  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  est le prix d'un actif et  $r$  est le taux d'intérêt sans risque, alors sous  $\mathbb{Q}$ , le processus actualisé  $\{\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t\}_{t \geq 0}$  est une martingale :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t.$$

Cette transformation permet de simplifier la valorisation des produits dérivés, car sous  $\mathbb{Q}$ , le prix d'une option peut être exprimé comme l'espérance actualisée de son payoff :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T],$$

où  $V_T$  est le payoff à l'échéance  $T$ .

## Théorème de Girsanov et dérivée de Radon-Nikodym

Le passage de la mesure réelle  $\mathbb{P}$  à la mesure risque-neutre  $\mathbb{Q}$  est souvent réalisé grâce au **théorème de Girsanov**. Ce théorème repose sur la **dérivée de Radon-Nikodym**, qui est une fonction  $Z_t$  telle que :

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t,$$

où  $Z_t$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$  et satisfait  $Z_t > 0$  presque sûrement. Pour un mouvement brownien  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  sous  $\mathbb{P}$ , la dérivée de Radon-Nikodym est souvent donnée par :

$$Z_t = \exp \left( -\theta W_t - \frac{1}{2} \theta^2 t \right),$$

où  $\theta$  est le prix du risque. Sous  $\mathbb{Q}$ , le processus  $\{\tilde{W}_t = W_t + \theta t\}_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien.

## Implications du théorème de Girsanov

- Le théorème de Girsanov permet de transformer un mouvement brownien avec dérive sous  $\mathbb{P}$  en un mouvement brownien sans dérive sous  $\mathbb{Q}$ .
- Il est essentiel pour la valorisation des options dans le modèle de Black-Scholes, où la mesure risque-neutre élimine la dérive du prix de l'actif sous-jacent.
- Il généralise le changement de mesure pour des processus plus complexes, tels que les processus de diffusion avec volatilité stochastique.

En résumé, les martingales, la mesure risque-neutre, le théorème de Girsanov et la dérivée de Radon-Nikodym fournissent un cadre théorique puissant pour la modélisation financière et la gestion des risques. Ces outils permettent de transformer des problèmes complexes en formulations mathématiques exploitables, en éliminant les biais liés à l'aversion au risque des investisseurs.

## 1.3 Mouvement Brownien standard et propriétés

Le **mouvement brownien standard**, noté  $\{W_t\}_{t \geq 0}$ , est l'un des processus stochastiques les plus importants en probabilités et en finance. Il sert de fondement pour modéliser des phénomènes aléatoires continus, tels que les fluctuations des prix d'actifs financiers ou le mouvement désordonné de particules en physique. Le mouvement brownien standard est défini par les propriétés suivantes :

### 1.3.1 Définition du mouvement brownien standard

Un processus  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard s'il satisfait les conditions suivantes :

1. **Initialisation** :  $W_0 = 0$  presque sûrement.
2. **Accroissements indépendants** : Pour tout  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les accroissements  $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  sont des variables aléatoires indépendantes.
3. **Accroissements stationnaires et gaussiens** : Pour tout  $0 \leq s < t$ , l'accroissement  $W_t - W_s$  suit une loi normale de moyenne 0 et de variance  $t - s$  :

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

4. **Continuité des trajectoires** : Les trajectoires  $t \mapsto W_t$  sont continues presque sûrement. Autrement dit, le mouvement brownien ne présente pas de sauts.

### 1.3.2 Propriétés fondamentales du mouvement brownien

- **Martingale** : Le mouvement brownien standard est une martingale. Pour tout  $0 \leq s \leq t$ , on a :

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s.$$

- **Variation quadratique** : La variation quadratique du mouvement brownien sur l'intervalle  $[0, t]$  est égale à  $t$ . Formellement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = t \quad \text{presque sûrement,}$$

où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  est une partition de  $[0, t]$ .

- **Non-dérivabilité** : Les trajectoires du mouvement brownien sont continues mais nulle part dérivables presque sûrement. Cela reflète la nature extrêmement irrégulière du mouvement brownien.
- **Propriété de Markov** : Le mouvement brownien possède la propriété de Markov, c'est-à-dire que son évolution future ne dépend que de son état présent et non de son histoire passée. Formellement, pour tout  $0 \leq s \leq t$  :

$$\mathbb{P}(W_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(W_t \in A \mid W_s).$$

- **Loi d'échelle** : Pour tout  $c > 0$ , le processus  $\{\widetilde{W}_t = \frac{1}{\sqrt{c}} W_{ct}\}_{t \geq 0}$  est également un mouvement brownien standard. Cette propriété montre que le mouvement brownien est invariant par changement d'échelle de temps.

### 1.3.3 Applications du mouvement brownien

- En **finance**, le mouvement brownien est utilisé pour modéliser les prix des actifs dans des modèles tels que celui de Black-Scholes.
- En **physique**, il décrit le mouvement aléatoire des particules en suspension dans un fluide (mouvement brownien physique).
- En **biologie**, il est utilisé pour modéliser la diffusion de molécules dans les cellules.

En résumé, le mouvement brownien standard est un processus stochastique central en théorie des probabilités et en applications pratiques. Ses propriétés mathématiques, telles que la continuité, la non-dérivabilité et la variation quadratique, en font un outil puissant pour modéliser des phénomènes aléatoires dans divers domaines scientifiques.

## 1.4 Mouvement Brownien Géométrique (GBM)

Le **mouvement brownien géométrique** (Geometric Brownian Motion, GBM) est un processus stochastique largement utilisé pour modéliser l'évolution des prix d'actifs financiers, tels que les actions, les indices boursiers ou les taux de change. Il est une extension du mouvement brownien standard qui prend en compte une tendance (drift) et une volatilité proportionnelle au niveau du prix.

### 1.4.1 Définition et Résolution de l'Équation Différentielle Stochastique (EDS)

Un processus  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  suit un mouvement brownien géométrique s'il satisfait l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où :

- $S_t$  est le prix de l'actif à l'instant  $t$ ,
- $\mu$  est le taux de rendement moyen (drift),
- $\sigma$  est la volatilité de l'actif,

- $W_t$  est un mouvement brownien standard.

Pour résoudre cette EDS, nous utilisons la méthode d'intégration stochastique (ou Itô). Prenons le logarithme naturel de  $S_t$  pour transformer l'équation multiplicative en une équation additive. Posons  $Y_t = \ln(S_t)$ . En appliquant la formule d'Itô, nous avons :

$$dY_t = d(\ln(S_t)).$$

La formule d'Itô pour une fonction  $f(S_t)$  est donnée par :

$$df(S_t) = f'(S_t) dS_t + \frac{1}{2} f''(S_t) (dS_t)^2.$$

Ici,  $f(S_t) = \ln(S_t)$ , donc :

$$f'(S_t) = \frac{1}{S_t}, \quad f''(S_t) = -\frac{1}{S_t^2}.$$

Substituons  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$  dans la formule d'Itô :

$$dY_t = \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma S_t dW_t)^2.$$

Sachant que  $(dW_t)^2 = dt$  (propriété du mouvement brownien), et que  $dW_t \cdot dt = 0$ , nous obtenons :

$$dY_t = \frac{\mu S_t}{S_t} dt + \frac{\sigma S_t}{S_t} dW_t + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma^2 S_t^2 dt).$$

Cela simplifie en :

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

Intégrons cette EDS sur l'intervalle  $[0, t]$  :

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s.$$

Sachant que  $Y_0 = \ln(S_0)$  et que les intégrales sont déterministes pour le premier terme et stochastiques pour le second, nous avons :

$$Y_t = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

Donc :

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

En exponentiant pour revenir à  $S_t$  :

$$S_t = \exp \left( \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right).$$

Ainsi, la solution explicite du GBM est :

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right).$$

### 1.4.2 Propriétés du mouvement brownien géométrique

- **Positivité** : Le mouvement brownien géométrique est toujours positif, c'est-à-dire  $S_t > 0$  pour tout  $t \geq 0$ . Cela reflète le fait que les prix des actifs ne peuvent pas devenir négatifs.
- **Distribution log-normale** : Le logarithme du prix  $\ln(S_t)$  suit une distribution normale :

$$\ln(S_t) \sim \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right).$$

Par conséquent,  $S_t$  suit une distribution log-normale.

- **Tendance et volatilité** : Le terme  $\mu$  représente la tendance (drift) du prix, tandis que  $\sigma$  contrôle l'amplitude des fluctuations aléatoires (volatilité).
- **Espérance et variance** : L'espérance et la variance de  $S_t$  sont données par :

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}, \quad \text{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

- **Propriété de Markov** : Comme le mouvement brownien standard, le GBM possède la propriété de Markov, c'est-à-dire que son évolution future ne dépend que de son état présent.
- **Indépendance des rendements** : Les logarithmes des ratios successifs  $\ln(S_{t_{i+1}}/S_{t_i})$  sont indépendants et suivent une loi normale, ce qui facilite la modélisation des rendements financiers.

### 1.4.3 Applications en finance

Le mouvement brownien géométrique est au cœur de nombreux modèles financiers, notamment :

- **Modèle de Black-Scholes** : Le GBM est utilisé pour modéliser le prix de l'actif sous-jacent dans le modèle de Black-Scholes, qui permet de valoriser des options européennes.
- **Simulation de prix d'actifs** : Le GBM est utilisé pour simuler des trajectoires de prix d'actions, d'indices boursiers ou d'autres actifs financiers.
- **Gestion des risques** : Il sert à estimer la valeur à risque (VaR) et d'autres mesures de risque pour des portefeuilles financiers.

### 1.4.4 Limites du mouvement brownien géométrique

- **Volatilité constante** : Le GBM suppose une volatilité  $\sigma$  constante, ce qui ne reflète pas toujours la réalité des marchés financiers (où la volatilité peut varier dans le temps, par exemple via des modèles comme GARCH).
- **Absence de sauts** : Le GBM ne prend pas en compte les sauts brusques de prix, qui peuvent survenir lors d'événements économiques ou politiques majeurs. Pour pallier cela, des modèles comme ceux de Lévy ou de Merton avec sauts sont parfois préférés.
- **Distribution log-normale stricte** : Le GBM suppose que les rendements suivent une loi log-normale, ce qui peut ne pas être exact pour certains actifs ou périodes de marché extrêmes (effets de "fat tails").

## 1.5 Volatilité stochastique et ses implications pour la valorisation des options

La **volatilité stochastique** est un concept clé en finance qui permet de modéliser la variation de la volatilité d'un actif financier au cours du temps. Contrairement au modèle de Black-Scholes, où la volatilité est supposée constante, les modèles à volatilité stochastique considèrent que la volatilité est elle-même un processus aléatoire. Cette approche permet de mieux capturer les dynamiques observées sur les marchés financiers, telles que les variations de volatilité et les effets de smile de volatilité.

### 1.5.1 Modèles de volatilité stochastique

Les modèles de volatilité stochastique décrivent la volatilité  $\sigma_t$  comme un processus stochastique, souvent corrélé avec le mouvement brownien qui pilote le prix de l'actif. Deux modèles célèbres sont :

- **Modèle de Heston (1993)** : Ce modèle suppose que la variance  $v_t = \sigma_t^2$  suit un processus de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross) :

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^v,$$

où :

- $\kappa$  est la vitesse de retour à la moyenne,
- $\theta$  est la variance à long terme,
- $\xi$  est la volatilité de la volatilité,
- $W_t^v$  est un mouvement brownien corrélé avec celui du prix de l'actif.

Le prix de l'actif  $S_t$  suit alors :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S,$$

où  $W_t^S$  et  $W_t^v$  sont corrélés avec un coefficient de corrélation  $\rho$ .

- **Modèle de SABR (2002)** : Ce modèle est utilisé pour les options sur taux d'intérêt et décrit la dynamique conjointe du prix de l'actif  $S_t$  et de sa volatilité  $\sigma_t$  :

$$dS_t = \sigma_t S_t^\beta dW_t^S, \quad d\sigma_t = \alpha \sigma_t dW_t^\sigma,$$

où  $\beta$  contrôle la forme du smile de volatilité et  $\alpha$  est la volatilité de la volatilité.

### 1.5.2 Implications pour la valorisation des options

- **Smile de volatilité** : Les modèles à volatilité stochastique permettent de reproduire le **smile de volatilité**, un phénomène observé sur les marchés où la volatilité implicite varie avec le strike et la maturité des options. Cela contraste avec le modèle de Black-Scholes, qui prédit une volatilité implicite constante.
- **Dynamique de la volatilité** : Ces modèles capturent les variations de la volatilité au cours du temps, ce qui est crucial pour la gestion des risques et la valorisation d'options exotiques.
- **Corrélation entre prix et volatilité** : La corrélation  $\rho$  entre le prix de l'actif et sa volatilité permet de modéliser des effets comme l'effet de levier (leverage effect), où une baisse des prix s'accompagne souvent d'une hausse de la volatilité.



### 1.5.3 Avantages et limites

- **Avantages :**
  - Meilleure adéquation aux données de marché, en particulier pour les options hors de la monnaie (out-of-the-money).
  - Capacité à modéliser des dynamiques de volatilité réalistes.
- **Limites :**
  - Complexité accrue : les modèles à volatilité stochastique sont plus difficiles à calibrer et à implémenter que le modèle de Black-Scholes.
  - Temps de calcul plus long pour la valorisation des options, en particulier pour les options exotiques.

### 1.5.4 Applications pratiques

- **Valorisation d'options :** Les modèles à volatilité stochastique sont utilisés pour valoriser des options vanilles et exotiques, en particulier lorsque le smile de volatilité est prononcé.
- **Gestion des risques :** Ils permettent une meilleure estimation des risques, tels que la valeur à risque (VaR) ou les grecques (delta, gamma, vega).
- **Calibration sur les marchés :** Ces modèles sont calibrés sur les prix de marché des options pour obtenir des dynamiques de volatilité cohérentes.

En résumé, la volatilité stochastique est un outil essentiel pour modéliser les dynamiques complexes des marchés financiers. Bien que plus complexes que les modèles à volatilité constante, les modèles à volatilité stochastique offrent une meilleure adéquation aux données de marché et sont largement utilisés pour la valorisation des options et la gestion des risques.

# Chapitre 2

## Modèles de Valorisations des options

### 2.1 Introduction

La valorisation des options est un domaine central en finance quantitative, visant à déterminer le prix théorique d'une option en fonction des caractéristiques du marché et des paramètres du contrat. Une option est un instrument financier qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (option d'achat, ou *call*) ou de vendre (option de vente, ou *put*) un actif sous-jacent à un prix prédéterminé (le prix d'exercice, ou *strike*) à une date future (l'échéance).

#### 2.1.1 Objectifs de la valorisation des options

- **Évaluer le prix équitable** : Déterminer un prix théorique pour l'option qui reflète les conditions du marché et les caractéristiques du contrat.
- **Gérer les risques** : Utiliser les modèles de valorisation pour évaluer et couvrir les risques associés aux positions sur options.
- **Identifier les opportunités d'arbitrage** : Détecter les écarts entre le prix de marché et le prix théorique pour profiter des opportunités d'arbitrage.

#### 2.1.2 Importance des modèles de valorisation

Les modèles de valorisation des options jouent un rôle crucial dans les marchés financiers pour plusieurs raisons :

- **Transparence des prix** : Ils fournissent un cadre pour évaluer le prix des options, ce qui contribue à la liquidité et à l'efficacité des marchés.
- **Gestion des portefeuilles** : Les investisseurs et les gestionnaires de portefeuilles utilisent ces modèles pour évaluer les stratégies d'options complexes.
- **Conformité réglementaire** : Les institutions financières doivent souvent valoriser leurs positions en options pour respecter les normes réglementaires.

#### 2.1.3 Modèles de valorisation couramment utilisés

Plusieurs modèles sont utilisés pour valoriser les options, chacun avec ses hypothèses et ses domaines d'application :

- **Modèle de Black-Scholes** : Le modèle de Black-Scholes est le plus célèbre et le plus largement utilisé pour valoriser les options européennes. Il suppose une volatilité constante et un mouvement brownien géométrique pour le prix de l'actif sous-jacent.
- **Modèle de Heston** : Le modèle de Heston introduit une volatilité stochastique, ce qui permet de mieux capturer les dynamiques de marché, telles que le smile de volatilité.
- **Modèles à sauts** : Ces modèles prennent en compte les sauts brusques dans le prix de l'actif sous-jacent, ce qui est utile pour modéliser les marchés volatils.
- **Modèles numériques** : Les méthodes numériques, telles que la simulation de Monte Carlo et les arbres binomiaux, sont utilisées pour valoriser des options complexes ou exotiques.

### 2.1.4 Structure du chapitre

Ce chapitre explore les principaux modèles de valorisation des options, en mettant l'accent sur leurs hypothèses, leurs avantages et leurs limites. Nous commençons par le modèle de Black-Scholes, puis nous examinons des modèles plus avancés, tels que le modèle de Heston et les méthodes numériques. Enfin, nous discutons des applications pratiques et des défis liés à la valorisation des options dans les marchés réels.

En résumé, la valorisation des options est un outil essentiel pour les participants aux marchés financiers, permettant de déterminer des prix équitables, de gérer les risques et d'identifier les opportunités d'arbitrage. Les modèles de valorisation, bien que basés sur des hypothèses simplificatrices, fournissent un cadre robuste pour comprendre et analyser les options.

## 2.2 Modèle de Black-Scholes

Le **modèle de Black-Scholes** (Black-Scholes-Merton, BSM) est l'un des modèles les plus influents en finance, utilisé pour la valorisation des options européennes. Développé par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton dans les années 1970, ce modèle fournit une formule analytique pour calculer le prix théorique d'une option en fonction de plusieurs paramètres. Il repose sur des hypothèses spécifiques et offre une solution élégante à l'équation différentielle partielle qui régit le prix des options.

### 2.2.1 Hypothèses du modèle de Black-Scholes

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- **Marché efficient** : Les prix des actifs reflètent toute l'information disponible.
- **Absence d'arbitrage** : Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sans risque.
- **Actif sous-jacent** : Le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où :

- $\mu$  est le taux de rendement espéré,
- $\sigma$  est la volatilité constante,

- $W_t$  est un mouvement brownien standard.
- **Taux d'intérêt sans risque constant** : Le taux d'intérêt  $r$  est constant et connu.
- **Pas de dividendes** : L'actif sous-jacent ne verse pas de dividendes pendant la durée de vie de l'option.
- **Options européennes** : Les options ne peuvent être exercées qu'à l'échéance.

### 2.2.2 Équation de Black-Scholes

Le prix d'une option européenne  $V(S_t, t)$  satisfait l'équation différentielle partielle de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0.$$

Cette équation découle de la construction d'un portefeuille sans risque composé de l'option et de l'actif sous-jacent, en utilisant le lemme d'Itô pour éliminer le risque lié aux fluctuations du marché.

### 2.2.3 Résolution de l'équation de Black-Scholes

Pour résoudre l'équation de Black-Scholes, on utilise une transformation qui permet de la ramener à une équation de la chaleur, bien connue en physique. Voici les étapes clés :

1. **Changement de variables** : On introduit les variables suivantes :

$$\tau = T - t, \quad x = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \quad v(x, \tau) = V(S_t, t).$$

Cela permet de transformer l'équation de Black-Scholes en :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial v}{\partial x} - rv.$$

2. **Transformation en équation de la chaleur** : En posant :

$$v(x, \tau) = e^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau),$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont choisis pour éliminer les termes en  $\frac{\partial v}{\partial x}$  et  $v$ , on obtient l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. **Solution de l'équation de la chaleur** : La solution générale de l'équation de la chaleur est donnée par :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}} dy,$$

où  $u_0(y)$  est la condition initiale.

4. **Retour aux variables originales** : En appliquant les conditions aux limites pour une option call (payoff  $V(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$ ) et une option put (payoff  $V(S_T, T) = \max(K - S_T, 0)$ ), on obtient les formules analytiques suivantes :

- **Option d'achat (Call) :**

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

- **Option de vente (Put) :**

$$P(S_t, t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1),$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

et  $N(x)$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

## 2.2.4 Paramètres du modèle

- $S_t$  : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- $K$  : Prix d'exercice (strike) de l'option.
- $T$  : Temps jusqu'à l'échéance de l'option.
- $r$  : Taux d'intérêt sans risque.
- $\sigma$  : Volatilité de l'actif sous-jacent.

## 2.2.5 Applications du modèle de Black-Scholes

- **Valorisation des options** : Le modèle est utilisé pour calculer le prix théorique des options européennes.
- **Grecques** : Le modèle permet de calculer les sensibilités du prix de l'option (delta, gamma, vega, theta, rho), utiles pour la gestion des risques.
- **Stratégies de trading** : Les traders utilisent le modèle pour identifier des opportunités d'arbitrage ou pour couvrir des positions.

## 2.2.6 Limites du modèle de Black-Scholes

- **Volatilité constante** : Le modèle suppose une volatilité constante, ce qui ne reflète pas toujours la réalité des marchés.
- **Absence de sauts** : Le modèle ne prend pas en compte les sauts brusques de prix.
- **Options américaines** : Le modèle ne s'applique pas directement aux options américaines, qui peuvent être exercées avant l'échéance.

En résumé, le modèle de Black-Scholes est un outil fondamental en finance pour la valorisation des options européennes. Bien qu'il repose sur des hypothèses simplificatrices, il reste largement utilisé en pratique et sert de base à de nombreux modèles plus sophistiqués.

## 2.3 Simulation de Monte Carlo

La **simulation de Monte Carlo** est une méthode numérique largement utilisée en finance pour estimer la valeur d'options ou d'autres instruments financiers en générant des trajectoires aléatoires de l'actif sous-jacent. Cette méthode est particulièrement utile lorsque les modèles sont trop complexes pour être résolus analytiquement, comme dans le cas des équations différentielles stochastiques (SDE) avec des dynamiques non linéaires ou des conditions aux limites complexes.

### 2.3.1 Simulation standard de la solution des SDE

Une **équation différentielle stochastique (SDE)** décrit l'évolution d'un processus aléatoire dans le temps. Elle prend généralement la forme :

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t,$$

où :

- $X_t$  est le processus stochastique à simuler,
- $a(X_t, t)$  est le terme de dérive (drift),
- $b(X_t, t)$  est le terme de diffusion (volatilité),
- $W_t$  est un mouvement brownien standard.

La solution d'une SDE est un processus stochastique continu, mais en pratique, on ne peut pas simuler directement une solution continue. Au lieu de cela, on utilise des méthodes de discrétisation pour approximer la solution sur une grille de temps discrète.

#### Problème de la discrétisation

La discrétisation consiste à diviser l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $N$  pas de temps de taille  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . On cherche alors à approximer la solution  $X_t$  aux points de temps  $t_0, t_1, \dots, t_N$ , où  $t_i = i\Delta t$ .

L'objectif est de construire une approximation  $X_{t_i}$  qui converge vers la vraie solution  $X_t$  lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ . Plusieurs schémas de discrétisation existent, chacun avec ses avantages et ses limites.

#### Simulation standard des SDE

La simulation standard des SDE repose sur la génération de trajectoires discrètes du processus  $X_t$  en utilisant des incréments du mouvement brownien. Les étapes générales sont les suivantes :

1. **Initialisation** : Fixer la valeur initiale  $X_0$ .
2. **Discrétisation du temps** : Diviser l'intervalle  $[0, T]$  en  $N$  pas de temps  $\Delta t$ .
3. **Génération des incréments browniens** : Pour chaque pas de temps  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , générer un incrément brownien  $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ , où  $\Delta W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ .
4. **Mise à jour du processus** : Utiliser un schéma de discrétisation (comme Euler-Maruyama ou Milstein) pour mettre à jour  $X_{t_{i+1}}$  à partir de  $X_{t_i}$ ,  $\Delta t$  et  $\Delta W_{t_i}$ .
5. **Répétition** : Répéter les étapes 3 et 4 pour générer une trajectoire complète. Répéter l'ensemble du processus pour un grand nombre de trajectoires afin d'estimer des quantités statistiques (espérance, variance, etc.).

## Exemple de simulation standard

Considérons une SDE simple, comme le mouvement brownien géométrique (GBM) :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

La simulation standard consiste à :

- Initialiser  $S_0$ .
- Pour chaque pas de temps  $i$ , générer  $\Delta W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ .
- Mettre à jour  $S_{t_{i+1}}$  en utilisant un schéma de discrétisation approprié.

### 2.3.2 Discrétisation du GBM : schéma d'Euler-Maruyama

Le **schéma d'Euler-Maruyama** est l'une des méthodes de discrétisation les plus simples et les plus couramment utilisées pour simuler des SDE. Il est particulièrement adapté aux SDE linéaires, comme le mouvement brownien géométrique (GBM).

#### Équation du GBM

Le GBM est décrit par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

#### Schéma d'Euler-Maruyama

Le schéma d'Euler-Maruyama approche la solution de l'EDS en discrétisant le temps et en approximant les termes de dérive et de diffusion. Pour le GBM, il s'écrit :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i} \Delta t + \sigma S_{t_i} \Delta W_{t_i},$$

où :

- $S_{t_i}$  est le prix de l'actif à l'instant  $t_i$ ,
- $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  est le pas de temps,
- $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$  est l'incrément du mouvement brownien, qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ .

#### Convergence du schéma d'Euler-Maruyama

Le schéma d'Euler-Maruyama est une méthode d'ordre faible 1, ce qui signifie que l'erreur d'approximation décroît linéairement avec  $\Delta t$ . Cependant, il présente une erreur de discrétisation due à l'approximation des termes stochastiques. Pour améliorer la précision, on peut utiliser des schémas plus sophistiqués, comme le schéma de Milstein.

#### Algorithme de simulation

Voici les étapes pour simuler une trajectoire du GBM à l'aide du schéma d'Euler-Maruyama :

1. Initialiser  $S_0$  (prix initial de l'actif).
2. Pour chaque pas de temps  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  :

- Générer un incrément brownien  $\Delta W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ .
- Mettre à jour le prix de l'actif :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i} \Delta t + \sigma S_{t_i} \Delta W_{t_i}.$$

3. Répéter pour un grand nombre de trajectoires afin d'estimer la valeur de l'option.

### Exemple de code (Python)

Voici un exemple de code Python pour simuler une trajectoire du GBM avec le schéma d'Euler-Maruyama :

```
import numpy as np

def simulate_gbm(S0, mu, sigma, T, N):
    dt = T / N
    t = np.linspace(0, T, N+1)
    S = np.zeros(N+1)
    S[0] = S0
    for i in range(1, N+1):
        dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        S[i] = S[i-1] + mu * S[i-1] * dt + sigma * S[i-1] * dW
    return t, S
```

### Avantages et limites

- **Avantages :**
  - Simplicité d'implémentation.
  - Applicable à des modèles complexes (volatilité stochastique, sauts, etc.).
- **Limites :**
  - Convergence lente : la précision de la méthode dépend du nombre de simulations, ce qui peut être coûteux en temps de calcul.
  - Erreur de discrétisation : le schéma d'Euler-Maruyama introduit une erreur due à l'approximation de l'EDS.

En résumé, la simulation standard des SDE repose sur la génération de trajectoires discrètes en utilisant des incréments browniens. Le schéma d'Euler-Maruyama est une méthode simple et efficace pour simuler des SDE, bien qu'il présente certaines limites. Il reste néanmoins un outil essentiel en finance pour la valorisation d'options et la gestion des risques.

### 2.3.3 Discrétisation du GBM : schéma d'Euler implicite

Le **schéma d'Euler implicite** est une alternative au schéma d'Euler-Maruyama qui offre une meilleure stabilité numérique, notamment pour les équations différentielles stochastiques (SDE) présentant des termes rigides ou des pas de temps relativement grands. Bien que moins courant que son homologue explicite en finance, il est particulièrement utile dans les cas où la stabilité est une priorité.



## Équation du GBM

Le mouvement brownien géométrique (GBM) est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

## Schéma d'Euler implicite

Contrairement au schéma d'Euler-Maruyama, qui utilise les valeurs au temps  $t_i$  pour estimer  $S_{t_{i+1}}$ , le schéma d'Euler implicite évalue les termes de dérive et de diffusion au temps  $t_{i+1}$ . Pour le GBM, le schéma s'écrit :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_{i+1}} \Delta t + \sigma S_{t_{i+1}} \Delta W_{t_i},$$

où :

- $S_{t_i}$  est le prix de l'actif à l'instant  $t_i$ ,
- $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  est le pas de temps,
- $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$  est l'incrément du mouvement brownien, qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ .

Pour résoudre cette équation implicite, on doit isoler  $S_{t_{i+1}}$  :

$$S_{t_{i+1}} - \mu S_{t_{i+1}} \Delta t - \sigma S_{t_{i+1}} \Delta W_{t_i} = S_{t_i}.$$

En factorisant  $S_{t_{i+1}}$  à gauche, on obtient :

$$S_{t_{i+1}} (1 - \mu \Delta t - \sigma \Delta W_{t_i}) = S_{t_i},$$

d'où :

$$S_{t_{i+1}} = \frac{S_{t_i}}{1 - \mu \Delta t - \sigma \Delta W_{t_i}}.$$

## Convergence du schéma d'Euler implicite

Comme le schéma d'Euler-Maruyama, le schéma d'Euler implicite est d'ordre faible 1 en termes de convergence, avec une erreur qui décroît linéairement avec  $\Delta t$ . Cependant, sa stabilité accrue le rend plus robuste pour des pas de temps plus grands ou des paramètres rigides, bien que cela puisse introduire des défis numériques si le dénominateur devient proche de zéro ou négatif.

## Algorithme de simulation

Voici les étapes pour simuler une trajectoire du GBM avec le schéma d'Euler implicite :

1. Initialiser  $S_0$  (prix initial de l'actif).
2. Pour chaque pas de temps  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  :
  - Générer un incrément brownien  $\Delta W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ .
  - Mettre à jour le prix de l'actif :

$$S_{t_{i+1}} = \frac{S_{t_i}}{1 - \mu \Delta t - \sigma \Delta W_{t_i}}.$$

3. Répéter pour un grand nombre de trajectoires afin d'estimer la valeur de l'option.

## Exemple de code (Python)

Voici un exemple de code Python pour simuler une trajectoire du GBM avec le schéma d'Euler implicite :

```
import numpy as np

def simulate_gbm_implicit(S0, mu, sigma, T, N):
    dt = T / N
    t = np.linspace(0, T, N+1)
    S = np.zeros(N+1)
    S[0] = S0
    for i in range(1, N+1):
        dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        denom = 1 - mu * dt - sigma * dW
        S[i] = S[i-1] / denom if denom != 0 else S[i-1] # Éviter division par zéro
    return t, S
```

## Avantages et limites

- **Avantages :**
  - Stabilité numérique accrue par rapport au schéma explicite, particulièrement pour des pas de temps grands.
  - Moins sensible aux oscillations ou divergences dans certains cas rigides.
- **Limites :**
  - Complexité accrue : nécessite la résolution d'une équation implicite à chaque pas (ici simplifiée pour le GBM, mais plus complexe pour d'autres modèles).
  - Risque de division par zéro ou valeurs négatives dans le dénominateur, nécessitant des garde-fous.
  - Moins intuitif pour les termes stochastiques, car l'implication complète des termes de diffusion est rare dans la pratique.

En résumé, le schéma d'Euler implicite offre une alternative stable pour la simulation des SDE comme le GBM, bien qu'il soit moins fréquemment utilisé en finance que le schéma d'Euler-Maruyama en raison de sa complexité et des défis liés à l'interprétation des termes stochastiques. Il peut toutefois être un outil précieux dans des contextes où la stabilité prime sur la simplicité, comme dans certains modèles à volatilité stochastique.

### 2.3.4 Schéma de Milstein et comparaison

Le **schéma de Milstein** est une méthode de discrétisation des équations différentielles stochastiques (SDE) qui améliore la précision du schéma d'Euler-Maruyama en prenant en compte les termes d'ordre supérieur dans l'approximation stochastique. Il est particulièrement utile pour les SDE où le terme de diffusion  $b(X_t, t)$  dépend de l'état  $X_t$ .

#### Schéma de Milstein

Pour une SDE générale de la forme :

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t,$$

le schéma de Milstein s'écrit :

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a(X_{t_i}, t_i)\Delta t + b(X_{t_i}, t_i)\Delta W_{t_i} + \frac{1}{2}b(X_{t_i}, t_i)\frac{\partial b}{\partial X}(X_{t_i}, t_i) ((\Delta W_{t_i})^2 - \Delta t),$$

où :

- $X_{t_i}$  est la valeur du processus à l'instant  $t_i$ ,
- $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  est le pas de temps,
- $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$  est l'incrément du mouvement brownien, qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ ,
- $\frac{\partial b}{\partial X}$  est la dérivée partielle du terme de diffusion par rapport à  $X$ .

### Preuve du schéma de Milstein

Le schéma de Milstein peut être dérivé en utilisant le lemme d'Itô pour développer le terme de diffusion  $b(X_t, t)$  dans une SDE générale. Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t.$$

En appliquant le lemme d'Itô à  $b(X_t, t)$ , on obtient :

$$db(X_t, t) = \left( \frac{\partial b}{\partial t} + a(X_t, t)\frac{\partial b}{\partial X} + \frac{1}{2}b(X_t, t)^2\frac{\partial^2 b}{\partial X^2} \right) dt + b(X_t, t)\frac{\partial b}{\partial X}dW_t.$$

En intégrant cette expression entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , on a :

$$b(X_{t_{i+1}}, t_{i+1}) = b(X_{t_i}, t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( \frac{\partial b}{\partial t} + a(X_t, t)\frac{\partial b}{\partial X} + \frac{1}{2}b(X_t, t)^2\frac{\partial^2 b}{\partial X^2} \right) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(X_t, t)\frac{\partial b}{\partial X}dW_t.$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur et en approximant les intégrales, on obtient :

$$b(X_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \approx b(X_{t_i}, t_i) + b(X_{t_i}, t_i)\frac{\partial b}{\partial X}(X_{t_i}, t_i)\Delta W_{t_i}.$$

En substituant cette approximation dans l'EDS originale et en intégrant entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , on arrive au schéma de Milstein :

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a(X_{t_i}, t_i)\Delta t + b(X_{t_i}, t_i)\Delta W_{t_i} + \frac{1}{2}b(X_{t_i}, t_i)\frac{\partial b}{\partial X}(X_{t_i}, t_i) ((\Delta W_{t_i})^2 - \Delta t).$$

Ce terme supplémentaire permet de mieux approximer les trajectoires stochastiques, en particulier lorsque le terme de diffusion  $b(X_t, t)$  dépend fortement de  $X_t$ .

### Application au mouvement brownien géométrique (GBM)

Pour le GBM, où  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ , le schéma de Milstein devient :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i}\Delta t + \sigma S_{t_i}\Delta W_{t_i} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_{t_i} ((\Delta W_{t_i})^2 - \Delta t).$$

Ici,  $\frac{\partial b}{\partial S} = \sigma$ , ce qui simplifie l'expression.

## Convergence du schéma de Milstein

Le schéma de Milstein est une méthode d'ordre faible 1, mais il a une convergence forte d'ordre 1 (contre 0.5 pour Euler-Maruyama). Cela signifie qu'il est plus précis pour simuler des trajectoires individuelles, en particulier lorsque le terme de diffusion  $b(X_t, t)$  dépend fortement de  $X_t$ .

## Comparaison avec le schéma d'Euler-Maruyama

- **Précision :**

- Le schéma de Milstein est plus précis que le schéma d'Euler-Maruyama car il prend en compte les termes d'ordre supérieur dans l'approximation stochastique.
- Pour les SDE avec un terme de diffusion non linéaire, le schéma de Milstein réduit significativement l'erreur de discrétisation.

- **Complexité :**

- Le schéma de Milstein est légèrement plus complexe à implémenter que le schéma d'Euler-Maruyama, car il nécessite le calcul de la dérivée  $\frac{\partial b}{\partial X}$ .
- Pour certaines SDE, cette dérivée peut être difficile à calculer analytiquement.

- **Performance :**

- Le schéma de Milstein est plus coûteux en temps de calcul que le schéma d'Euler-Maruyama en raison du terme supplémentaire.
- Cependant, sa meilleure précision permet souvent de réduire le nombre de simulations nécessaires pour atteindre une certaine précision.

## Exemple de code (Python)

Voici un exemple de code Python pour simuler une trajectoire du GBM avec le schéma de Milstein :

```
import numpy as np

def simulate_gbm_milstein(S0, mu, sigma, T, N):
    dt = T / N
    t = np.linspace(0, T, N+1)
    S = np.zeros(N+1)
    S[0] = S0
    for i in range(1, N+1):
        dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        S[i] = S[i-1] + mu * S[i-1] * dt + sigma * S[i-1] * dW \
            + 0.5 * sigma**2 * S[i-1] * (dW**2 - dt)
    return t, S
```

## Avantages et limites

- **Avantages :**

- Meilleure précision que le schéma d'Euler-Maruyama, en particulier pour les SDE non linéaires.

- Convergence forte d'ordre 1, ce qui le rend plus adapté pour simuler des trajectoires individuelles.
- **Limites :**
  - Plus complexe à implémenter en raison du terme supplémentaire.
  - Nécessite le calcul de la dérivée  $\frac{\partial b}{\partial X}$ , ce qui peut être difficile pour certaines SDE.

### Quand utiliser le schéma de Milstein ?

Le schéma de Milstein est particulièrement utile dans les cas suivants :

- Lorsque le terme de diffusion  $b(X_t, t)$  dépend fortement de  $X_t$ .
- Lorsqu'une haute précision est requise pour simuler des trajectoires individuelles.
- Pour des SDE où l'erreur de discrétisation du schéma d'Euler-Maruyama est trop importante.

En résumé, le schéma de Milstein est une amélioration du schéma d'Euler-Maruyama qui offre une meilleure précision au prix d'une complexité accrue. Il est particulièrement adapté aux SDE non linéaires et aux applications où la précision des trajectoires individuelles est cruciale.

### 2.3.5 Implémentation de la simulation pour la valorisation d'options

La **simulation de Monte Carlo** est une méthode numérique puissante pour valoriser des options, en particulier lorsque les modèles analytiques ne sont pas disponibles ou sont trop complexes. Cette méthode repose sur la génération de trajectoires simulées du prix de l'actif sous-jacent, suivie du calcul de la valeur espérée du payoff de l'option.

#### Étapes de la simulation pour la valorisation d'options

1. **Modélisation du prix de l'actif :** Le prix de l'actif sous-jacent est modélisé par une équation différentielle stochastique (EDS), telle que le mouvement brownien géométrique (GBM) :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

2. **Discrétisation de l'EDS :** L'EDS est discrétisée en utilisant un schéma numérique, tel que le schéma d'Euler-Maruyama ou le schéma de Milstein, pour générer des trajectoires simulées du prix de l'actif.
3. **Génération des trajectoires :** Pour chaque simulation, on génère une trajectoire du prix de l'actif sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ , où  $T$  est la maturité de l'option.
4. **Calcul du payoff :** Pour chaque trajectoire, on calcule le payoff de l'option à l'échéance. Par exemple, pour une option d'achat (call) européenne, le payoff est :

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K, 0),$$

où  $S_T$  est le prix de l'actif à l'échéance et  $K$  est le prix d'exercice.

5. **Actualisation et moyenne** : Le payoff est actualisé au taux d'intérêt sans risque  $r$ , et la valeur de l'option est estimée comme la moyenne des payoffs actualisés sur toutes les simulations :

$$V_0 = e^{-rT} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Payoff}_i,$$

où  $N$  est le nombre de simulations.

### Implémentation avec le schéma d'Euler-Maruyama

Voici un exemple de code Python pour valoriser une option d'achat européenne en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama :

```
import numpy as np

def monte_carlo_euler(S0, K, T, r, sigma, N, M):
    """
    S0 : Prix initial de l'actif
    K : Prix d'exercice de l'option
    T : Maturité de l'option
    r : Taux d'intérêt sans risque
    sigma : Volatilité de l'actif
    N : Nombre de pas de temps
    M : Nombre de simulations
    """
    dt = T / N
    payoffs = np.zeros(M)

    for i in range(M):
        S = S0
        for _ in range(N):
            dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
            S = S + r * S * dt + sigma * S * dW
        payoffs[i] = max(S - K, 0)

    option_price = np.exp(-r * T) * np.mean(payoffs)
    return option_price
```

### Implémentation avec le schéma de Milstein

Voici un exemple de code Python pour valoriser une option d'achat européenne en utilisant le schéma de Milstein :

```
import numpy as np

def monte_carlo_milstein(S0, K, T, r, sigma, N, M):
    """
    S0 : Prix initial de l'actif
    K : Prix d'exercice de l'option
    T : Maturité de l'option
```

```

r : Taux d'intérêt sans risque
sigma : Volatilité de l'actif
N : Nombre de pas de temps
M : Nombre de simulations
"""
dt = T / N
payoffs = np.zeros(M)

for i in range(M):
    S = S0
    for _ in range(N):
        dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        S = S + r * S * dt + sigma * S * dW + 0.5 * sigma**2
            * S * (dW**2 - dt)
    payoffs[i] = max(S - K, 0)

option_price = np.exp(-r * T) * np.mean(payoffs)
return option_price

```

## Comparaison des schémas

- **Précision** : Le schéma de Milstein est plus précis que le schéma d'Euler-Maruyama, en particulier pour les options avec une forte volatilité ou des termes de diffusion non linéaires.
- **Complexité** : Le schéma de Milstein est légèrement plus complexe à implémenter en raison du terme supplémentaire.
- **Temps de calcul** : Le schéma de Milstein peut être plus coûteux en temps de calcul, mais sa meilleure précision permet souvent de réduire le nombre de simulations nécessaires.

## Exemple numérique

Supposons les paramètres suivants :

- $S_0 = 100$  (prix initial de l'actif),
- $K = 100$  (prix d'exercice),
- $T = 1$  an (maturité),
- $r = 0.05$  (taux d'intérêt sans risque),
- $\sigma = 0.2$  (volatilité),
- $N = 100$  (nombre de pas de temps),
- $M = 10\,000$  (nombre de simulations).

En utilisant le schéma d'Euler-Maruyama, on obtient un prix d'option d'environ 10.45, tandis que le schéma de Milstein donne un prix d'environ 10.47. Ces résultats sont proches du prix théorique donné par le modèle de Black-Scholes (environ 10.45).

## Avantages et limites

- **Avantages :**

- Flexibilité : La simulation de Monte Carlo peut être appliquée à des modèles complexes (volatilité stochastique, sauts, etc.).
- Facilité d'implémentation : Les schémas d'Euler-Maruyama et de Milstein sont relativement simples à implémenter.

- **Limites :**

- Temps de calcul : La méthode peut être coûteuse en temps de calcul pour un grand nombre de simulations.
- Erreur de discrétisation : Les schémas numériques introduisent une erreur due à l'approximation de l'EDS.

En résumé, la simulation de Monte Carlo est une méthode flexible et puissante pour valoriser des options, en particulier lorsque les modèles analytiques ne sont pas disponibles. Les schémas d'Euler-Maruyama et de Milstein permettent de générer des trajectoires simulées du prix de l'actif, avec des compromis entre précision et complexité.

## 2.4 Modèle de Heston (volatilité stochastique)

Le **modèle de Heston**, introduit par Steven Heston en 1993, est un modèle de volatilité stochastique largement utilisé en finance pour valoriser des options. Contrairement au modèle de Black-Scholes, qui suppose une volatilité constante, le modèle de Heston permet à la volatilité de varier de manière stochastique, ce qui le rend plus réaliste pour capturer les dynamiques observées sur les marchés financiers.

### 2.4.1 Caractéristiques du modèle

Le modèle de Heston décrit l'évolution du prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  et de sa volatilité  $v_t$  par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S, \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^v, \end{cases}$$

où :

- $S_t$  est le prix de l'actif sous-jacent à l'instant  $t$ ,
- $v_t$  est la variance instantanée (volatilité au carré) de l'actif,
- $\mu$  est le taux de rendement espéré de l'actif,
- $\kappa$  est la vitesse de retour à la moyenne de la variance,
- $\theta$  est la variance à long terme (niveau moyen de la variance),
- $\xi$  est la volatilité de la volatilité (vol of vol),
- $W_t^S$  et  $W_t^v$  sont deux mouvements browniens corrélés avec un coefficient de corrélation  $\rho$ .



## Propriétés du modèle de Heston

- **Volatilité stochastique** : La variance  $v_t$  suit un processus de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross), qui garantit que  $v_t$  reste positive si  $2\kappa\theta \geq \xi^2$  (condition de Feller).
- **Corrélation entre prix et volatilité** : Le coefficient de corrélation  $\rho$  entre  $W_t^S$  et  $W_t^v$  permet de modéliser l'effet de levier (leverage effect), où une baisse des prix s'accompagne souvent d'une hausse de la volatilité.
- **Smile de volatilité** : Le modèle de Heston reproduit le smile de volatilité observé sur les marchés, où la volatilité implicite varie avec le strike et la maturité de l'option.

### 2.4.2 Valorisation numérique et impact de la volatilité stochastique

La valorisation d'options dans le modèle de Heston nécessite des méthodes numériques, car il n'existe pas de formule analytique fermée pour le prix des options. La simulation de Monte Carlo est couramment utilisée, et elle peut être implémentée avec différents schémas de discrétisation, tels que les schémas d'\*\*Euler\*\* et de \*\*Milstein\*\*.

#### Simulation avec le schéma d'Euler

Le schéma d'Euler est une méthode simple pour discrétiser le système d'équations différentielles stochastiques (EDS) du modèle de Heston. Pour le modèle de Heston :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S, \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^v, \end{cases}$$

le schéma d'Euler s'écrit :

$$\begin{cases} S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i} \Delta t + \sqrt{v_{t_i}} S_{t_i} \Delta W_t^S, \\ v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \kappa(\theta - v_{t_i}) \Delta t + \xi \sqrt{v_{t_i}} \Delta W_t^v, \end{cases}$$

où :

- $\Delta W_t^S$  et  $\Delta W_t^v$  sont des incréments browniens corrélés,
- $\Delta W_t^v = \rho \Delta W_t^S + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta Z_t$ , avec  $\Delta Z_t$  un mouvement brownien indépendant.

#### Exemple de code (Python) pour le schéma d'Euler

Voici un exemple de code Python pour simuler le modèle de Heston en utilisant le schéma d'Euler :

```
import numpy as np

def heston_euler(S0, K, T, r, v0, kappa, theta, xi, rho, N, M):
    """
    S0 : Prix initial de l'actif
    K : Prix d'exercice de l'option
    T : Maturité de l'option
    r : Taux d'intérêt sans risque
    v0 : Variance initiale
```

```

kappa : Vitesse de retour à la moyenne
theta : Variance à long terme
xi : Volatilité de la volatilité
rho : Corrélation entre prix et volatilité
N : Nombre de pas de temps
M : Nombre de simulations
"""
dt = T / N
payoffs = np.zeros(M)

for i in range(M):
    S = S0
    v = v0
    for _ in range(N):
        dW_S = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        dW_v = rho * dW_S + np.sqrt(1 - rho**2) *
            np.random.normal(0, np.sqrt(dt))

        # Mise à jour de la variance (schéma d'Euler)
        v = max(v + kappa * (theta - v) * dt + xi * np.sqrt(v) * dW_v, 0)

        # Mise à jour du prix (schéma d'Euler)
        S = S + r * S * dt + np.sqrt(v) * S * dW_S

    payoffs[i] = max(S - K, 0)

option_price = np.exp(-r * T) * np.mean(payoffs)
return option_price

```

## Simulation avec le schéma de Milstein

Le schéma de Milstein améliore la précision du schéma d'Euler en prenant en compte les termes d'ordre supérieur dans l'approximation stochastique. Pour le modèle de Heston, le schéma de Milstein pour la variance  $v_t$  s'écrit :

$$v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \kappa(\theta - v_{t_i})\Delta t + \xi\sqrt{v_{t_i}}\Delta W_t^v + \frac{1}{2}\xi^2((\Delta W_t^v)^2 - \Delta t).$$

Pour le prix de l'actif  $S_t$ , le schéma reste similaire à celui d'Euler, car le terme de diffusion ne dépend pas directement de  $S_t$ .

## Exemple de code (Python) pour le schéma de Milstein

Voici un exemple de code Python pour simuler le modèle de Heston en utilisant le schéma de Milstein :

```

import numpy as np

def heston_milstein(S0, K, T, r, v0, kappa, theta, xi, rho, N, M):
    """

```

```

S0 : Prix initial de l'actif
K : Prix d'exercice de l'option
T : Maturité de l'option
r : Taux d'intérêt sans risque
v0 : Variance initiale
kappa : Vitesse de retour à la moyenne
theta : Variance à long terme
xi : Volatilité de la volatilité
rho : Corrélation entre prix et volatilité
N : Nombre de pas de temps
M : Nombre de simulations
"""
dt = T / N
payoffs = np.zeros(M)

for i in range(M):
    S = S0
    v = v0
    for _ in range(N):
        dW_S = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        dW_v = rho * dW_S + np.sqrt(1 - rho**2) *
            np.random.normal(0, np.sqrt(dt))

        # Mise à jour de la variance (schéma de Milstein)
        v = max(v + kappa * (theta - v) * dt + xi * np.sqrt(v) * dW_v
            + 0.5 * xi**2 * (dW_v**2 - dt), 0)

        # Mise à jour du prix (schéma d'Euler,
        # car pas de terme supplémentaire)
        S = S + r * S * dt + np.sqrt(v) * S * dW_S

    payoffs[i] = max(S - K, 0)

option_price = np.exp(-r * T) * np.mean(payoffs)
return option_price

```

## Comparaison des schémas

- **Précision** : Le schéma de Milstein est plus précis que le schéma d'Euler, en particulier pour la variance  $v_t$ , car il prend en compte les termes d'ordre supérieur.
- **Complexité** : Le schéma de Milstein est légèrement plus complexe à implémenter en raison du terme supplémentaire.
- **Temps de calcul** : Le schéma de Milstein peut être plus coûteux en temps de calcul, mais sa meilleure précision permet souvent de réduire le nombre de simulations nécessaires.

## Impact de la volatilité stochastique

- **Smile de volatilité** : Le modèle de Heston reproduit le smile de volatilité, ce qui permet une meilleure adéquation aux prix de marché des options.
- **Dynamique de la volatilité** : La volatilité stochastique capture les variations de la volatilité au cours du temps, ce qui est crucial pour la gestion des risques.
- **Effet de levier** : La corrélation  $\rho$  entre le prix de l'actif et la volatilité permet de modéliser l'effet de levier, où une baisse des prix s'accompagne souvent d'une hausse de la volatilité.

## Avantages et limites

- **Avantages** :
  - Meilleure adéquation aux données de marché, en particulier pour les options hors de la monnaie (out-of-the-money).
  - Capacité à modéliser des dynamiques de volatilité réalistes.
- **Limites** :
  - Complexité accrue : le modèle est plus difficile à calibrer et à implémenter que le modèle de Black-Scholes.
  - Temps de calcul plus long pour la valorisation des options, en particulier pour les options exotiques.

En résumé, le modèle de Heston est un outil essentiel pour modéliser les dynamiques complexes des marchés financiers. Bien que plus complexe que le modèle de Black-Scholes, il offre une meilleure adéquation aux données de marché et est largement utilisé pour la valorisation des options et la gestion des risques.

# Chapitre 3

## Implémentation et Développement

### 3.1 Architecture de l'application Flask

Flask est un micro-framework web léger et flexible écrit en Python. Il est particulièrement adapté pour développer des applications web de petite à moyenne taille, ainsi que des API RESTful. L'architecture d'une application Flask est conçue pour être simple, modulaire et extensible, ce qui permet aux développeurs de structurer leur code de manière claire et maintenable.

#### 3.1.1 Composants principaux de l'architecture Flask

Une application Flask typique est composée des éléments suivants :

- **Application Flask** : Le cœur de l'application, qui gère les requêtes HTTP et les réponses. Elle est instanciée à l'aide de la classe `Flask`.
- **Routes** : Les routes définissent les points d'entrée de l'application. Elles associent des URL à des fonctions Python (appelées vues) qui traitent les requêtes et renvoient des réponses.
- **Vues** : Les vues sont des fonctions Python qui gèrent la logique métier et renvoient des réponses HTTP (par exemple, du HTML, du JSON, etc.).
- **Modèles** : Les modèles représentent les données de l'application et interagissent avec la base de données. Ils sont souvent implémentés à l'aide d'un ORM (Object-Relational Mapping) comme SQLAlchemy.
- **Templates** : Les templates sont des fichiers HTML qui définissent la structure des pages web. Flask utilise le moteur de templates Jinja2 pour générer dynamiquement du contenu HTML.
- **Static Files** : Les fichiers statiques (CSS, JavaScript, images, etc.) sont servis directement par le serveur web et ne nécessitent pas de traitement côté serveur.
- **Configuration** : La configuration de l'application est gérée à l'aide de variables d'environnement ou de fichiers de configuration. Flask permet de charger la configuration de manière flexible.
- **Extensions** : Flask dispose d'un écosystème riche d'extensions pour ajouter des fonctionnalités supplémentaires, telles que l'authentification, la gestion des formulaires, ou l'intégration avec des bases de données.

### 3.1.2 Structure d'un projet Flask

Une application Flask est généralement organisée selon une structure de répertoires modulaire. Voici un exemple de structure de projet :

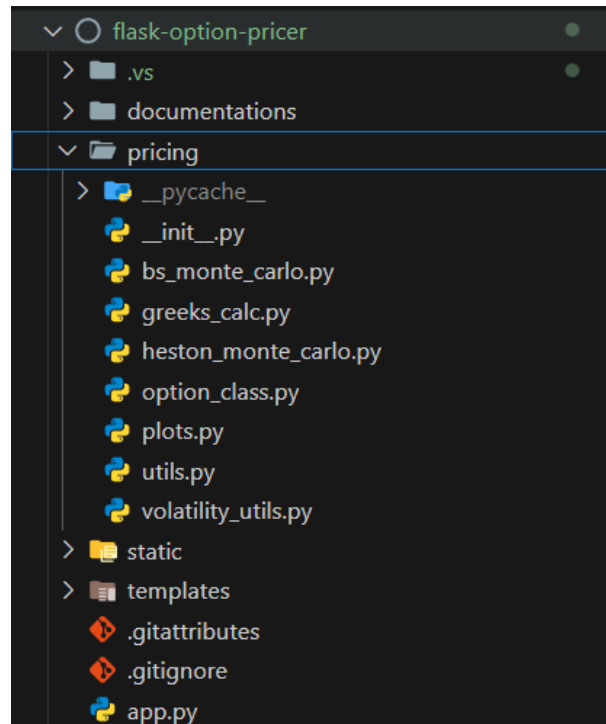


FIGURE 3.1 – Structure de l'application

### 3.1.3 Initialisation de l'application

L'initialisation de l'application se fait dans le fichier `__init__.py`. Ce fichier crée une instance de l'application Flask et configure les extensions nécessaires. Par exemple :

```
from flask import Flask
from flask_sqlalchemy import SQLAlchemy

# Création de l'application Flask
app = Flask(__name__)

# Chargement de la configuration
app.config.from_pyfile('config.py')

# Initialisation des extensions
db = SQLAlchemy(app)

# Importation des routes
from app import routes
```

### 3.1.4 Définition des routes

Les routes sont définies dans un fichier séparé (par exemple, `routes.py`). Chaque route est associée à une fonction qui traite la requête et renvoie une réponse. Par exemple :

```
from flask import render_template
from app import app

@app.route('/')
def index():
    return render_template('index.html')

@app.route('/api/data')
def get_data():
    return {'data': [1, 2, 3, 4, 5]}
```

### 3.1.5 Utilisation des templates

Les templates HTML sont stockés dans le dossier `templates/`. Flask utilise le moteur de templates Jinja2 pour générer dynamiquement du contenu. Par exemple, un template `index.html` pourrait ressembler à ceci :

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="fr">
<head>
    <meta charset="UTF-8">
    <title>Mon Application Flask</title>
</head>
<body>
    <h1>Bienvenue sur mon application Flask !</h1>
</body>
</html>
```

### 3.1.6 Gestion des fichiers statiques

Les fichiers statiques (CSS, JavaScript, images) sont stockés dans le dossier `static/`. Ils peuvent être référencés dans les templates à l'aide de la fonction `url_for`. Par exemple :

```
<link rel="stylesheet" href="{ url_for('static', filename='css/style.css') }">
```

### 3.1.7 Configuration de l'application

La configuration de l'application est gérée dans un fichier `config.py`. Ce fichier contient des variables de configuration, telles que la clé secrète, les paramètres de la base de données, etc. Par exemple :

```
import os

class Config:
    SECRET_KEY = os.environ.get('SECRET_KEY') or 'une_clé_secrète'
```

```
SQLALCHEMY_DATABASE_URI = os.environ.get('DATABASE_URL') or \
    'sqlite:///app.db'
SQLALCHEMY_TRACK_MODIFICATIONS = False
```

### 3.1.8 Extensions Flask

Flask dispose d'un large écosystème d'extensions pour ajouter des fonctionnalités supplémentaires. Voici quelques extensions couramment utilisées :

- **Flask-SQLAlchemy** : Pour l'intégration avec une base de données relationnelle.
- **Flask-WTF** : Pour la gestion des formulaires et la validation des données.
- **Flask-Login** : Pour la gestion de l'authentification des utilisateurs.
- **Flask-RESTful** : Pour la création d'API RESTful.

### 3.1.9 Conclusion

L'architecture d'une application Flask est conçue pour être simple, modulaire et extensible. En organisant le code en composants distincts (routes, vues, modèles, templates, etc.), les développeurs peuvent créer des applications web robustes et maintenables. Flask est un choix idéal pour les projets nécessitant une grande flexibilité et une prise en main rapide.



# Conclusion et perspectives

Ce document a exploré les modèles de valorisation des options, en mettant l'accent sur le modèle de Heston avec volatilité stochastique. Nous avons commencé par revisiter le modèle de Black-Scholes, un pilier de la finance quantitative, tout en soulignant ses limites, notamment l'hypothèse d'une volatilité constante. Pour surmonter ces limitations, le modèle de Heston a été introduit, offrant une représentation plus réaliste des dynamiques de marché grâce à sa volatilité stochastique et sa capacité à reproduire des phénomènes tels que le smile de volatilité et l'effet de levier. Les méthodes numériques, telles que les schémas d'Euler et de Milstein, ont été présentées pour simuler les trajectoires des prix d'actifs et valoriser les options. Enfin, une application web interactive, développée avec Flask, a été proposée pour visualiser les résultats des simulations et faciliter l'exploration des modèles.

Cependant, plusieurs pistes de recherche et développement restent à explorer. L'amélioration des méthodes numériques, par exemple via l'utilisation de schémas plus avancés comme les méthodes de Runge-Kutta, pourrait accroître la précision et l'efficacité des simulations. L'extension du modèle de Heston à des modèles multi-facteurs, incluant des sauts dans les prix ou une volatilité de volatilité stochastique, permettrait de capturer des dynamiques de marché encore plus complexes. Par ailleurs, l'intégration de techniques d'apprentissage automatique pour la calibration des modèles et la prédiction des surfaces de volatilité représente une voie prometteuse. Le développement d'outils interactifs plus sophistiqués, intégrant des interfaces utilisateur intuitives et des visualisations avancées, pourrait également rendre ces modèles accessibles à un public plus large. Enfin, des études empiriques approfondies sur des données de marché réelles permettraient de valider et d'affiner les modèles théoriques, en tenant compte des spécificités des différents actifs et marchés.

En conclusion, la valorisation des options reste un domaine riche et en constante évolution. Les modèles à volatilité stochastique, comme celui de Heston, offrent des outils puissants pour comprendre et anticiper les dynamiques de marché. Cependant, leur complexité et leurs limites soulignent la nécessité de poursuivre les recherches et les innovations dans ce domaine. Ce document espère avoir apporté une contribution utile à cette quête, en fournissant une base solide pour les travaux futurs.

# Bibliographie

- [1] El Asri Brahim. Calcul Stochastique pour la finance - Notes de Cours
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.
- [3] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2) :327–343, 1993.
- [4] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- [5] J. C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, 11th edition, 2021.
- [6] Fabrice Douglas Rouah. *Euler and Milstein Discretization*.

# Appendice

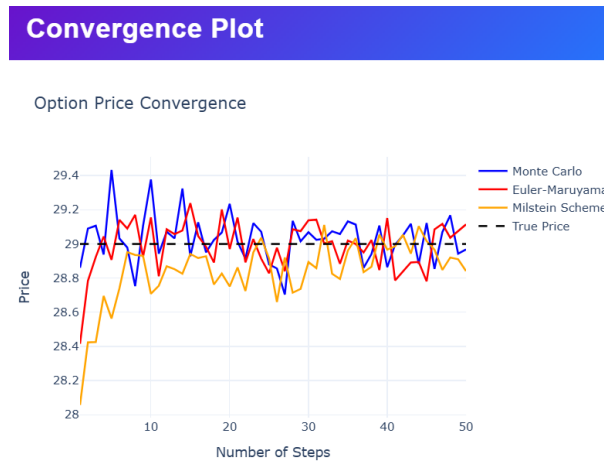


FIGURE 2 – Convergence de la méthode de Monte Carlo pour la simulation du mouvement brownien géométrique (GBM).

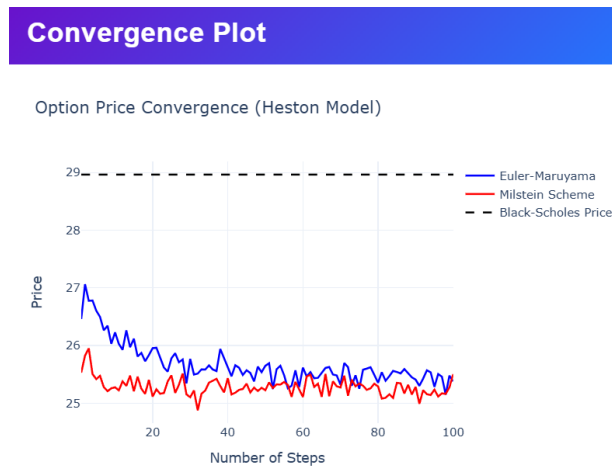


FIGURE 3 – Convergence de la méthode de Monte Carlo pour le modèle de Heston comparée au prix fixe du modèle de Black-Scholes.