FINANCE ET INGÉNIERIE DÉCISIONNELLE

Modèles de Valorisation des Options : Du Black-Scholes à Heston, une Exploration Théorique et Numérique

Réalisé par :
KERDOUN Wassim

Encadré par :
M. EL ASRI BRAHIM

27 avril 2025

Résumé

Ce document explore les modèles de valorisation des options, en mettant l'accent sur le modèle de Heston avec volatilité stochastique. Alors que le modèle de Black-Scholes repose sur une volatilité constante, le modèle de Heston permet de capturer des phénomènes de marché complexes, tels que le smile de volatilité et l'effet de levier. Nous présentons les fondements théoriques de ces modèles, leurs implémentations numériques via les schémas d'Euler et de Milstein, et leur application pour générer des surfaces de volatilité. Une application web interactive, développée avec Flask, est proposée pour visualiser les résultats des simulations. Ce travail s'adresse aux étudiants, chercheurs et professionnels en finance quantitative, offrant une compréhension approfondie des outils modernes de valorisation des options.

Mots-clés : Valorisation des options, modèle de Black-Scholes, modèle de Heston, volatilité stochastique, schéma d'Euler, schéma de Milstein, Flask, finance quantitative.

Abstract

This document explores option pricing models, with a focus on the Heston model with stochastic volatility. While the Black-Scholes model relies on constant volatility, the Heston model captures complex market phenomena such as the volatility smile and the leverage effect. We present the theoretical foundations of these models, their numerical implementations using the Euler and Milstein schemes, and their application in generating volatility surfaces. An interactive web application, developed with Flask, is proposed to visualize simulation results. This work is aimed at students, researchers, and professionals in quantitative finance, providing a comprehensive understanding of modern option pricing tools.

Keywords : Option pricing, Black-Scholes model, Heston model, stochastic volatility, Euler scheme, Milstein scheme, Flask, quantitative finance.

Table des matières

List of Algorithms

Introduction générale

Dans un monde financier en constante évolution, marqué par une complexité croissante et une interconnexion des marchés, la valorisation des options s'impose comme un outil indispensable pour la gestion des risques, la spéculation et l'arbitrage. Les options, instruments financiers offrant le droit d'acheter ou de vendre un actif à un prix prédéterminé, jouent un rôle clé dans les stratégies d'investissement et de couverture. Cependant, leur valorisation précise reste un défi de taille, en raison de la nature stochastique des marchés et de la volatilité des prix. Le modèle de Black-Scholes, pionnier en la matière, a posé les bases de la finance quantitative en proposant une formule analytique pour la valorisation des options européennes. Néanmoins, ses hypothèses simplificatrices, notamment celle d'une volatilité constante, montrent leurs limites face à la réalité des marchés, où la volatilité varie de manière imprévisible. Pour répondre à ces défis, des modèles plus avancés, tels que celui de Heston avec volatilité stochastique, ont été développés. Ces modèles permettent de mieux capturer des phénomènes complexes, comme le smile de volatilité et l'effet de levier, offrant ainsi une représentation plus fidèle des dynamiques de marché. Ce document se propose d'explorer en profondeur ces modèles, en abordant leurs fondements théoriques, leurs implémentations numériques et leurs applications pratiques. En outre, une application web interactive, développée avec Flask, est présentée pour visualiser les résultats des simulations et faciliter l'exploration des modèles. Destiné aux étudiants, chercheurs et professionnels en finance quantitative, ce travail vise à fournir une compréhension approfondie des outils modernes de valorisation des options, tout en ouvrant des perspectives pour des recherches futures.

Chapitre 1

Processus Brownien

1.1 Introduction

Lorsqu'on modélise des systèmes complexes, qu'ils soient physiques ou financiers, comprendre leur évolution est essentiel. Ces systèmes partagent une caractéristique commune : leur nature aléatoire et imprévisible. Par exemple, le mouvement brownien décrit le comportement erratique de particules en suspension, soumises à des collisions incessantes. De même, les prix des actifs financiers fluctuent sous l'influence de facteurs externes comme les nouvelles économiques ou les événements politiques. Cette incertitude est au cœur de la modélisation stochastique.

Les processus stochastiques, outils clés pour décrire ces phénomènes, se divisent en deux catégories : discrets (évoluant par sauts) et continus (comme le mouvement brownien). Ces modèles s'appliquent à des variables continues ou discrètes, selon le système étudié. En finance, le modèle de Black-Scholes-Merton repose sur l'hypothèse que les prix des actifs suivent un mouvement brownien géométrique, offrant une approximation puissante malgré ses simplifications.

Ainsi, les processus stochastiques, et notamment le mouvement brownien, fournissent un cadre mathématique robuste pour modéliser des systèmes complexes soumis à l'aléa. Ce chapitre explore ces concepts, en soulignant leur universalité et leur applicabilité dans divers domaines.

1.2 Fondements Théoriques

1.2.1 Processus stochastiques et probabilités

Les processus stochastiques sont des outils mathématiques essentiels pour modéliser des systèmes évoluant de manière aléatoire dans le temps. Formellement, un processus stochastique est une collection de variables aléatoires $\{X_t\}_{t\in T}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où :

- Ω est l'espace des états possibles,
- $\mathcal{F}$ est une tribu (σ-algèbre) représentant les événements mesurables,
- $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité,
- T est un ensemble d'indices, souvent interprété comme le temps (continu ou discret).

Pour chaque $t \in T$, X_t est une variable aléatoire représentant l'état du système à l'instant t. Un processus stochastique peut être décrit par sa **fonction de distribution**

jointe :

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute séquence $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$.

Les processus stochastiques se classent en deux grandes catégories :

1. **Processus discrets** : T est un ensemble dénombrable (par exemple, $T = \mathbb{N}$).
2. **Processus continus** : T est un intervalle réel (par exemple, $T = [0, \infty)$).

Un exemple fondamental est le **mouvement brownien** $\{W_t\}_{t \geq 0}$, qui satisfait les propriétés suivantes :

- $W_0 = 0$,
- Les accroissements $W_t - W_s$ sont indépendants et suivent une loi normale $\mathcal{N}(0, t-s)$ pour $0 \leq s < t$,
- Les trajectoires $t \mapsto W_t$ sont continues presque sûrement.

Ces concepts servent de base pour modéliser des phénomènes aléatoires dans des domaines variés, allant de la physique à la finance.

1.2.2 Filtration et information disponible

Une **filtration** $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus (σ-algèbres) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Elle représente l'accumulation d'information au fil du temps, où $\mathcal{F}_t$ contient tous les événements observables jusqu'à l'instant t. Formellement, pour $0 \leq s < t$, on a :

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}.$$

Une filtration est essentielle pour modéliser l'évolution de l'information dans un processus stochastique. Par exemple, dans un contexte financier, $\mathcal{F}_t$ peut représenter l'historique des prix d'un actif jusqu'au temps t. Un processus stochastique $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est dit **adapté** à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, c'est-à-dire que la valeur de X_t est connue à l'instant t.

La filtration permet également de définir des concepts clés comme :

- Les **temps d'arrêt** : une variable aléatoire τ à valeurs dans $[0, \infty]$ est un temps d'arrêt si $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.
- Les **martingales** : un processus $\{M_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}$ si $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ pour tout $s \leq t$.

En résumé, la filtration formalise l'idée d'information disponible et joue un rôle central dans l'étude des processus stochastiques, en particulier en finance pour modéliser l'évolution des marchés et la prise de décision en temps réel.

1.2.3 Martingales et mesure risque-neutre

Une **martingale** est un processus stochastique $\{M_t\}_{t \geq 0}$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et adapté à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Pour être une martingale, le processus doit satisfaire les trois propriétés suivantes :

Propriétés fondamentales des martingales

1. **Adaptation** : Le processus $\{M_t\}$ est **adapté** à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Cela signifie que la valeur de M_t est connue à l'instant t en fonction de l'information disponible dans $\mathcal{F}_t$.
2. **Intégrabilité** : Le processus $\{M_t\}$ est **intégrable**, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, on a :
$$\mathbb{E}[|M_t|] < \infty.$$
Cela garantit que l'espérance conditionnelle est bien définie.
3. **Propriété de martingale** : Pour tout $0 \leq s \leq t$, le processus satisfait :
$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s.$$
Cette propriété exprime que la meilleure prévision de M_t, conditionnellement à l'information disponible jusqu'à l'instant s, est la valeur actuelle M_s. Cela modélise un système "équitable" sans tendance à la hausse ou à la baisse.

Exemples de martingales

- Un **mouvement brownien** $\{W_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale sous la mesure $\mathbb{P}$, car il satisfait $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$ pour tout $0 \leq s \leq t$.
- Un processus de **marche aléatoire symétrique** est une martingale discrète.

1.2.3.1 Mesure risque-neutre

En finance, la **mesure risque-neutre** $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle le prix actualisé des actifs est une martingale. Formellement, si $\{S_t\}_{t\geq 0}$ est le prix d'un actif et r est le taux d'intérêt sans risque, alors sous $\mathbb{Q}$, le processus actualisé $\{\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale :
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\widetilde{S}_t \mid \mathcal{F}_s] = \widetilde{S}_s \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t.$$
Cette transformation permet de simplifier la valorisation des produits dérivés, car sous $\mathbb{Q}$, le prix d'une option peut être exprimé comme l'espérance actualisée de son payoff :
$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T],$$
où V_T est le payoff à l'échéance T.

1.2.3.2 Théorème de Girsanov et dérivée de Radon-Nikodym

Le passage de la mesure réelle $\mathbb{P}$ à la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ est souvent réalisé grâce au **théorème de Girsanov**. Ce théorème repose sur la **dérivée de Radon-Nikodym**, qui est une fonction Z_t telle que :
$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t,$$
où Z_t est une martingale sous $\mathbb{P}$ et satisfait $Z_t > 0$ presque sûrement. Pour un mouvement brownien $\{W_t\}_{t\geq 0}$ sous $\mathbb{P}$, la dérivée de Radon-Nikodym est souvent donnée par :
$$Z_t = \exp\left(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right),$$
où θ est le prix du risque. Sous $\mathbb{Q}$, le processus $\{\widetilde{W}_t = W_t + \theta t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Implications du théorème de Girsanov

- Le théorème de Girsanov permet de transformer un mouvement brownien avec dérive sous $\mathbb{P}$ en un mouvement brownien sans dérive sous $\mathbb{Q}$.
- Il est essentiel pour la valorisation des options dans le modèle de Black-Scholes, où la mesure risque-neutre élimine la dérive du prix de l'actif sous-jacent.
- Il généralise le changement de mesure pour des processus plus complexes, tels que les processus de diffusion avec volatilité stochastique.

En résumé, les martingales, la mesure risque-neutre, le théorème de Girsanov et la dérivée de Radon-Nikodym fournissent un cadre théorique puissant pour la modélisation financière et la gestion des risques. Ces outils permettent de transformer des problèmes complexes en formulations mathématiques exploitables, en éliminant les biais liés à l'aversion au risque des investisseurs.

1.3 Mouvement Brownien standard et propriétés

Le **mouvement brownien standard**, noté $\{W_t\}_{t\geq 0}$, est l'un des processus stochastiques les plus importants en probabilités et en finance. Il sert de fondement pour modéliser des phénomènes aléatoires continus, tels que les fluctuations des prix d'actifs financiers ou le mouvement désordonné de particules en physique. Le mouvement brownien standard est défini par les propriétés suivantes :

1.3.1 Définition du mouvement brownien standard

Un processus $\{W_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard s'il satisfait les conditions suivantes :

1. **Initialisation** : $W_0 = 0$ presque sûrement.
2. **Accroissements indépendants** : Pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, les accroissements $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes.
3. **Accroissements stationnaires et gaussiens** : Pour tout $0 \leq s < t$, l'accroissement $W_t - W_s$ suit une loi normale de moyenne 0 et de variance $t - s$:
$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$
4. **Continuité des trajectoires** : Les trajectoires $t \mapsto W_t$ sont continues presque sûrement. Autrement dit, le mouvement brownien ne présente pas de sauts.

1.3.2 Propriétés fondamentales du mouvement brownien

- **Martingale** : Le mouvement brownien standard est une martingale. Pour tout $0 \leq s \leq t$, on a :
$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s.$$
- **Variation infinitésimale** : On définit la variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X sur $[0, T]$ associé a une subdivision $\Pi_n = (t_1, \ldots, t_n)$ de $[0, T]$ avec $t_1^n < \cdots < t_n^n)$ par :
$$V_T^P(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^p$$

Pour le mouvement brownien, le comportement limite dépend de p :

— Si $p = 1$: variation totale infinie.

— Si $p = 2$: variation quadratique finie.

— Si $p > 2$: variation nulle.

- **Variation total** : La variation totale du mouvement Brownien sur l'intervalle $[0, t$ diverge.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| = +\infty \quad \text{presque sûrement}$$

où $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ est une subdivision de $[0, t$

- **Variation quadratique** : La variation quadratique du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, t]$ est égale à t dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Formellement :

$$\lim_{\Pi\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = t \quad \text{presque sûrement,}$$

où $||\Pi_n||_\infty = max_{i\leq n}|t_i - t_{i-1}|$ est le pas de la subdivision.
De plus, si la subdivision Π_n est satisfait $\sum_{i=1}^{n} \Pi_n < +\infty$, on a la convergence presque sûr, et puis $V_t^2(\Pi_n)$ converge presque surement vers t.

- **Non-dérivabilité** : Les trajectoires du mouvement brownien sont continues mais nulle part dérivables presque sûrement. Cela reflète la nature extrêmement irrégulière du mouvement brownien.

1.3.3 Applications du mouvement brownien

- En **finance**, le mouvement brownien est utilisé pour modéliser les prix des actifs dans des modèles tels que celui de Black-Scholes.
- En **physique**, il décrit le mouvement aléatoire des particules en suspension dans un fluide (mouvement brownien physique).
- En **biologie**, il est utilisé pour modéliser la diffusion de molécules dans les cellules.

En résumé, le mouvement brownien standard est un processus stochastique central en théorie des probabilités et en applications pratiques. Ses propriétés mathématiques, telles que la continuité, la non-dérivabilité et la variation quadratique, en font un outil puissant pour modéliser des phénomènes aléatoires dans divers domaines scientifiques.

1.4 Mouvement Brownien Géométrique (GBM)

Le **mouvement brownien géométrique** (Geometric Brownian Motion, GBM) est un processus stochastique largement utilisé pour modéliser l'évolution des prix d'actifs financiers, tels que les actions, les indices boursiers ou les taux de change. Il est une extension du mouvement brownien standard qui prend en compte une tendance (drift) et une volatilité proportionnelle au niveau du prix.

1.4.1 Définition et Résolution de l'Équation Différentielle Stochastique (EDS)

1.4.1.1 Conditions d'existence et d'unicité

Pour qu'une EDS admette une solution unique, les coefficients doivent vérifier :

- **Condition de Lipschitz** :

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0.$$

- **Condition de croissance linéaire** :

$$|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0.$$

Pour le mouvement brownien géométrique (GBM), ces conditions sont satisfaites car $\mu(t,x) = \mu x$ et $\sigma(t,x) = \sigma x$ sont linéaires en x.

1.4.1.2 Formulation du problème

Un processus $\{S_t\}_{t\geq 0}$ suit un mouvement brownien géométrique s'il satisfait l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t,$$

où :

- S_t est le prix de l'actif à l'instant t,
- μ est le taux de rendement moyen (drift),
- σ est la volatilité de l'actif,
- W_t est un mouvement brownien standard.

Pour résoudre cette EDS, nous utilisons la méthode d'intégration stochastique (ou Itô). Prenons le logarithme naturel de S_t pour transformer l'équation multiplicative en une équation additive. Posons $Y_t = \ln(S_t)$. En appliquant la formule d'Itô, nous avons :

$$dY_t = d(\ln(S_t)).$$

La formule d'Itô pour une fonction $f(S_t)$ est donnée par :

$$df(S_t) = f'(S_t)\, dS_t + \frac{1}{2} f''(S_t)\, (dS_t)^2.$$

Ici, $f(S_t) = \ln(S_t)$, donc :

$$f'(S_t) = \frac{1}{S_t}, \quad f''(S_t) = -\frac{1}{S_t^2}.$$

Substituons $dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$ dans la formule d'Itô :

$$dY_t = \frac{1}{S_t}(\mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(\sigma S_t \, dW_t)^2.$$

Sachant que $(dW_t)^2 = dt$ (propriété du mouvement brownien), et que $dW_t \cdot dt = 0$, nous obtenons :

$$dY_t = \frac{\mu S_t}{S_t}\, dt + \frac{\sigma S_t}{S_t}\, dW_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(\sigma^2 S_t^2\, dt).$$

Cela simplifie en :

$$dY_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2\, dt = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dW_t.$$

Intégrons cette EDS sur l'intervalle $[0, t]$:

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \int_0^t \sigma\, dW_s.$$

Sachant que $Y_0 = \ln(S_0)$ et que les intégrales sont déterministes pour le premier terme et stochastiques pour le second, nous avons :

$$Y_t = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t.$$

Donc :

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t.$$

En exponentiant pour revenir à S_t :

$$S_t = \exp\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right).$$

Ainsi, la solution explicite du GBM est :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right).$$

1.4.1.3 Propriétés de la solution

- **Espérance** : $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$
- **Variance** : $\mathrm{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$
- **Distribution** : S_t suit une loi log-normale

1.4.2 Limites du mouvement brownien géométrique

- **Volatilité constante** : Le GBM suppose une volatilité σ constante, ce qui ne reflète pas toujours la réalité des marchés financiers (où la volatilité peut varier dans le temps, par exemple via des modèles comme GARCH).
- **Absence de sauts** : Le GBM ne prend pas en compte les sauts brusques de prix, qui peuvent survenir lors d'événements économiques ou politiques majeurs. Pour pallier cela, des modèles comme ceux de Lévy ou de Merton avec sauts sont parfois préférés.
- **Distribution log-normale stricte** : Le GBM suppose que les rendements suivent une loi log-normale, ce qui peut ne pas être exact pour certains actifs ou périodes de marché extrêmes (effets de "fat tails").

1.5 Volatilité stochastique et ses implications pour la valorisation des options

La **volatilité stochastique** est un concept clé en finance qui permet de modéliser la variation de la volatilité d'un actif financier au cours du temps. Contrairement au modèle de Black-Scholes, où la volatilité est supposée constante, les modèles à volatilité stochastique considèrent que la volatilité est elle-même un processus aléatoire. Cette approche permet de mieux capturer les dynamiques observées sur les marchés financiers, telles que les variations de volatilité et les effets de smile de volatilité.

1.5.1 Modèles de volatilité stochastique

Les modèles de volatilité stochastique décrivent la volatilité σ_t comme un processus stochastique, souvent corrélé avec le mouvement brownien qui pilote le prix de l'actif. Deux modèles célèbres sont :

- **Modèle de Heston (1993)** : Ce modèle suppose que la variance $v_t = \sigma_t^2$ suit un processus de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross) :

  $$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi\sqrt{v_t}\, dW_t^v,$$

  où :
  - κ est la vitesse de retour à la moyenne,
  - θ est la variance à long terme,
  - ξ est la volatilité de la volatilité,
  - W_t^v est un mouvement brownien corrélé avec celui du prix de l'actif.

  Le prix de l'actif S_t suit alors :

  $$dS_t = \mu S_t\, dt + \sqrt{v_t} S_t\, dW_t^S,$$

  où W_t^S et W_t^v sont corrélés avec un coefficient de corrélation ρ.
- **Modèle de SABR (2002)** : Ce modèle est utilisé pour les options sur taux d'intérêt et décrit la dynamique conjointe du prix de l'actif S_t et de sa volatilité σ_t :

  $$dS_t = \sigma_t S_t^\beta\, dW_t^S, \quad d\sigma_t = \alpha\sigma_t\, dW_t^\sigma,$$

  où β contrôle la forme du smile de volatilité et α est la volatilité de la volatilité.

1.5.2 Implications pour la valorisation des options

- **Smile de volatilité** : Les modèles à volatilité stochastique permettent de reproduire le **smile de volatilité**, un phénomène observé sur les marchés où la volatilité implicite varie avec le strike et la maturité des options. Cela contraste avec le modèle de Black-Scholes, qui prédit une volatilité implicite constante.
- **Dynamique de la volatilité** : Ces modèles capturent les variations de la volatilité au cours du temps, ce qui est crucial pour la gestion des risques et la valorisation d'options exotiques.
- **Corrélation entre prix et volatilité** : La corrélation ρ entre le prix de l'actif et sa volatilité permet de modéliser des effets comme l'effet de levier (leverage effect), où une baisse des prix s'accompagne souvent d'une hausse de la volatilité.

1.5.3 Avantages et limites

- **Avantages** :
  - Meilleure adéquation aux données de marché, en particulier pour les options hors de la monnaie (out-of-the-money).
  - Capacité à modéliser des dynamiques de volatilité réalistes.
- **Limites** :
  - Complexité accrue : les modèles à volatilité stochastique sont plus difficiles à calibrer et à implémenter que le modèle de Black-Scholes.
  - Temps de calcul plus long pour la valorisation des options, en particulier pour les options exotiques.

1.5.4 Applications pratiques

- **Valorisation d'options** : Les modèles à volatilité stochastique sont utilisés pour valoriser des options vanilles et exotiques, en particulier lorsque le smile de volatilité est prononcé.
- **Gestion des risques** : Ils permettent une meilleure estimation des risques, tels que la valeur à risque (VaR) ou les grecques (delta, gamma, vega).
- **Calibration sur les marchés** : Ces modèles sont calibrés sur les prix de marché des options pour obtenir des dynamiques de volatilité cohérentes.

En résumé, la volatilité stochastique est un outil essentiel pour modéliser les dynamiques complexes des marchés financiers. Bien que plus complexes que les modèles à volatilité constante, les modèles à volatilité stochastique offrent une meilleure adéquation aux données de marché et sont largement utilisés pour la valorisation des options et la gestion des risques.

Chapitre 2

Modèles de Valorisations des options

2.1 Introduction

La valorisation des options est un domaine central en finance quantitative, visant à déterminer le prix théorique d'une option en fonction des caractéristiques du marché et des paramètres du contrat. Une option est un instrument financier qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (option d'achat, ou *call*) ou de vendre (option de vente, ou *put*) un actif sous-jacent à un prix prédéterminé (le prix d'exercice, ou *strike*) à une date future (l'échéance).

2.1.1 Objectifs de la valorisation des options

- **Évaluer le prix équitable** : Déterminer un prix théorique pour l'option qui reflète les conditions du marché et les caractéristiques du contrat.
- **Gérer les risques** : Utiliser les modèles de valorisation pour évaluer et couvrir les risques associés aux positions sur options.
- **Identifier les opportunités d'arbitrage** : Détecter les écarts entre le prix de marché et le prix théorique pour profiter des opportunités d'arbitrage.

2.1.2 Importance des modèles de valorisation

Les modèles de valorisation des options jouent un rôle crucial dans les marchés financiers pour plusieurs raisons :

- **Transparence des prix** : Ils fournissent un cadre pour évaluer le prix des options, ce qui contribue à la liquidité et à l'efficacité des marchés.
- **Gestion des portefeuilles** : Les investisseurs et les gestionnaires de portefeuilles utilisent ces modèles pour évaluer les stratégies d'options complexes.
- **Conformité réglementaire** : Les institutions financières doivent souvent valoriser leurs positions en options pour respecter les normes réglementaires.

2.1.3 Modèles de valorisation couramment utilisés

Plusieurs modèles sont utilisés pour valoriser les options, chacun avec ses hypothèses et ses domaines d'application :

- **Modèle de Black-Scholes** : Le modèle de Black-Scholes est le plus célèbre et le plus largement utilisé pour valoriser les options européennes. Il suppose une volatilité constante et un mouvement brownien géométrique pour le prix de l'actif sous-jacent.
- **Modèle de Heston** : Le modèle de Heston introduit une volatilité stochastique, ce qui permet de mieux capturer les dynamiques de marché, telles que le smile de volatilité.
- **Modèles à sauts** : Ces modèles prennent en compte les sauts brusques dans le prix de l'actif sous-jacent, ce qui est utile pour modéliser les marchés volatils.
- **Modèles numériques** : Les méthodes numériques, telles que la simulation de Monte Carlo et les arbres binomiaux, sont utilisées pour valoriser des options complexes ou exotiques.

2.1.4 Structure du chapitre

Ce chapitre explore les principaux modèles de valorisation des options, en mettant l'accent sur leurs hypothèses, leurs avantages et leurs limites. Nous commençons par le modèle de Black-Scholes, puis nous examinons des modèles plus avancés, tels que le modèle de Heston et les méthodes numériques. Enfin, nous discutons des applications pratiques et des défis liés à la valorisation des options dans les marchés réels.

En résumé, la valorisation des options est un outil essentiel pour les participants aux marchés financiers, permettant de déterminer des prix équitables, de gérer les risques et d'identifier les opportunités d'arbitrage. Les modèles de valorisation, bien que basés sur des hypothèses simplificatrices, fournissent un cadre robuste pour comprendre et analyser les options.

2.2 Modèle de Black-Scholes

Le **modèle de Black-Scholes** (Black-Scholes-Merton, BSM) est l'un des modèles les plus influents en finance, utilisé pour la valorisation des options européennes. Développé par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton dans les années 1970, ce modèle fournit une formule analytique pour calculer le prix théorique d'une option en fonction de plusieurs paramètres. Il repose sur des hypothèses spécifiques et offre une solution élégante à l'équation différentielle partielle qui régit le prix des options.

2.2.1 Hypothèses du modèle de Black-Scholes

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- **Marché efficient** : Les prix des actifs reflètent toute l'information disponible.
- **Absence d'arbitrage** : Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sans risque.
- **Actif sous-jacent** : Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un mouvement brownien géométrique :

  $$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t,$$

  où :

  - μ est le taux de rendement espéré,
  - σ est la volatilité constante,

- W_t est un mouvement brownien standard.

- **Taux d'intérêt sans risque constant** : Le taux d'intérêt r est constant et connu.
- **Pas de dividendes** : L'actif sous-jacent ne verse pas de dividendes pendant la durée de vie de l'option.
- **Options européennes** : Les options ne peuvent être exercées qu'à l'échéance.

2.2.2 Équation de Black-Scholes

Le prix d'une option européenne $V(S_t, t)$ satisfait l'équation différentielle partielle de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0.$$

Cette équation découle de la construction d'un portefeuille sans risque composé de l'option et de l'actif sous-jacent, en utilisant le lemme d'Itô pour éliminer le risque lié aux fluctuations du marché.

2.2.3 Résolution de l'équation de Black-Scholes

Pour résoudre l'équation de Black-Scholes, on utilise une transformation qui permet de la ramener à une équation de la chaleur, bien connue en physique. Voici les étapes clés :

1. **Changement de variables** : On introduit les variables suivantes :

$$\tau = T - t, \quad x = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \quad v(x,\tau) = V(S_t, t).$$

Cela permet de transformer l'équation de Black-Scholes en :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial v}{\partial x} - rv.$$

2. **Transformation en équation de la chaleur** : En posant :

$$v(x,\tau) = e^{-\alpha x - \beta \tau} u(x,\tau),$$

où α et β sont choisis pour éliminer les termes en $\frac{\partial v}{\partial x}$ et v, on obtient l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. **Solution de l'équation de la chaleur** : La solution générale de l'équation de la chaleur est donnée par :

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}} \, dy,$$

où $u_0(y)$ est la condition initiale.

4. **Retour aux variables originales** : En appliquant les conditions aux limites pour une option call (payoff $V(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$) et une option put (payoff $V(S_T, T) = \max(K - S_T, 0)$), on obtient les formules analytiques suivantes :

- **Option d'achat (Call)** :

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

- **Option de vente (Put)** :

$$P(S_t, t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1),$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

et $N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2.2.4 Applications du modèle de Black-Scholes

- **Valorisation des options** : Le modèle est utilisé pour calculer le prix théorique des options européennes.
- **Grecques** : Le modèle permet de calculer les sensibilités du prix de l'option (delta, gamma, vega, theta, rho), utiles pour la gestion des risques.
- **Stratégies de trading** : Les traders utilisent le modèle pour identifier des opportunités d'arbitrage ou pour couvrir des positions.

2.2.5 Limites du modèle de Black-Scholes

- **Volatilité constante** : Le modèle suppose une volatilité constante, ce qui ne reflète pas toujours la réalité des marchés.
- **Absence de sauts** : Le modèle ne prend pas en compte les sauts brusques de prix.
- **Options américaines** : Le modèle ne s'applique pas directement aux options américaines, qui peuvent être exercées avant l'échéance.

En résumé, le modèle de Black-Scholes est un outil fondamental en finance pour la valorisation des options européennes. Bien qu'il repose sur des hypothèses simplificatrices, il reste largement utilisé en pratique et sert de base à de nombreux modèles plus sophistiqués.

2.3 Simulation de Monte Carlo

La **simulation de Monte Carlo** est une méthode numérique largement utilisée en finance pour estimer la valeur d'options ou d'autres instruments financiers en générant des trajectoires aléatoires de l'actif sous-jacent. Cette méthode est particulièrement utile lorsque les modèles sont trop complexes pour être résolus analytiquement, comme dans le cas des équations différentielles stochastiques (EDS) avec des dynamiques non linéaires ou des conditions aux limites complexes.

2.3.1 Simulation standard de la solution des EDS

Une **équation différentielle stochastique (EDS)** modélise l'évolution dans le temps d'un phénomène aléatoire influencé à la fois par une dynamique déterministe (dérive) et un bruit aléatoire (diffusion). Elle prend généralement la forme :

$$dX_t = a(X_t, t)\, dt + b(X_t, t)\, dW_t,$$

où :

- X_t est le processus stochastique à simuler,
- $a(X_t, t)$ est le terme de dérive (drift),
- $b(X_t, t)$ est le terme de diffusion (volatilité),
- W_t est un mouvement brownien standard.

L'objectif est de **simuler une trajectoire approchée de la solution** du processus X_t qui satisfait l'équation intégrale suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s)\, ds + \int_0^t b(X_s, s)\, dW_s.$$

Simulation exacte pour certaines EDS : cas du GBM

Pour certaines EDS particulières, comme le **Mouvement Brownien Géométrique (GBM)** associé au modèle de Black-Scholes,

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t,$$

la solution exacte est connue et donnée par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right).$$

Par discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en N pas de taille Δt, on simule les trajectoires selon :

$$S_{i+1} = S_i \times \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_i\right),$$

où $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sont des variables normales indépendantes.

Algorithm 1 Simulation d'une trajectoire exacte d'un Mouvement Brownien Géométrique (GBM)

```
1: Choisir T, N, Δt = T/N
2: Initialiser S_0
3: for i = 0 to N − 1 do
4:     Générer Z_i ∼ N(0, 1)
5:     S_{i+1} = S_i × exp((μ − ½σ²) Δt + σ√Δt Z_i)
6: end for
```

2.3.2 Simulation des EDS

Une **équation différentielle stochastique (EDS)** modélise l'évolution dans le temps d'un phénomène aléatoire influencé à la fois par une dynamique déterministe (dérive) et un bruit aléatoire (diffusion). Elle prend généralement la forme :

$$dX_t = a(X_t, t)\, dt + b(X_t, t)\, dW_t,$$

L'objectif est de **simuler une trajectoire approchée de la solution** du processus X_t qui satisfait l'équation intégrale suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s)\, ds + \int_0^t b(X_s, s)\, dW_s.$$

Cette solution est en général inaccessible analytiquement. On utilise donc une méthode de discrétisation, telle que le schéma d'Euler-Maruyama, pour approximer X_t sur une grille discrète de temps.

Problème de la discrétisation

On divise l'intervalle de temps $[0, T]$ en N pas de temps de taille $\Delta t = \frac{T}{N}$, avec des points $t_i = i\Delta t$. On note $X_i \approx X_{t_i}$. Le schéma d'Euler-Maruyama consiste à approximer la solution de la EDS par la récurrence suivante :

$$X_{i+1} = X_i + a(X_i, t_i)\, \Delta t + b(X_i, t_i)\, \Delta W_i,$$

où $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Ce schéma permet de générer une trajectoire discrète $(X_0, X_1, \ldots, X_N)$ approchant la trajectoire continue de la solution.

Simulation standard des EDS

Les étapes générales de la simulation sont les suivantes :

Algorithm 2 Schéma d'Euler explicite pour une EDS d'Itô

Choisir T, N, $\Delta t = T/N$
Initialiser X_0
for $i = 0$ to $N - 1$ **do**
    Générer $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$
    $X_{i+1} = X_i + b(t_i, X_i)\Delta t + \sigma(t_i, X_i)\Delta W_i$
end for

Exemple : Mouvement Brownien Géométrique (GBM)

Considérons une EDS classique pour le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t.$$

La méthode d'Euler stochastique pour simuler cette EDS en discrétisant le temps t avec un pas Δt est donnée par la récurrence suivante :

$$S_{i+1} = S_i \left(1 + \mu \Delta t + \sigma \Delta W_i\right),$$

Cela permet de simuler numériquement les trajectoires du processus S_t à partir de la condition initiale S_0. La formule est une approximation discrète de la solution continue, utilisée pour calculer les valeurs successives $S_1, S_2, \ldots, S_N$.

2.3.2.1 Convergence du schéma d'Euler-Maruyama

Le schéma d'Euler-Maruyama permet d'obtenir une approximation numérique de la solution d'une EDS. Il est important de distinguer deux notions de convergence associées aux méthodes de simulation stochastique :

- **Convergence forte** : elle concerne la trajectoire simulée elle-même. On dit que le schéma converge fortement avec un ordre $\gamma > 0$ si :
$$\mathbb{E}\left[|X_T - X_T^{\Delta t}|\right] = \mathcal{O}(\Delta t^{\gamma}),$$
où X_T est la vraie solution de la EDS et $X_T^{\Delta t}$ son approximation numérique. Pour le schéma d'Euler-Maruyama, l'ordre de convergence forte est $\gamma = \frac{1}{2}$.
- **Convergence faible** : elle concerne les statistiques du processus, comme l'espérance. Le schéma converge faiblement avec un ordre $\beta > 0$ si, pour toute fonction test f régulière,
$$\left|\mathbb{E}[f(X_T)] - \mathbb{E}[f(X_T^{\Delta t})]\right| = \mathcal{O}(\Delta t^{\beta}).$$
Le schéma d'Euler-Maruyama a un ordre de convergence faible $\beta = 1$.

Ces résultats supposent que les coefficients $a(x,t)$ et $b(x,t)$ satisfont certaines conditions de régularité (Lipschitz et croissance linéaire). Pour améliorer la convergence, notamment en forte, des schémas plus avancés comme le schéma de Milstein peuvent être utilisés.

2.3.3 Discrétisation du GBM : schéma d'Euler implicite et semi-implicite

Le **schéma d'Euler implicite** est une alternative au schéma d'Euler-Maruyama qui offre une meilleure stabilité numérique, notamment pour les équations différentielles stochastiques (EDS) présentant des termes rigides ou des pas de temps relativement grands. Bien que moins courant que son homologue explicite en finance, il est particulièrement utile dans les cas où la stabilité est une priorité. Cependant, l'implicite peut parfois devenir instable, notamment dans des conditions de grande volatilité ou des petits pas de temps.

Afin d'éviter certains problèmes d'instabilité, une approche **semi-implicite** a été développée. Ce schéma combine les avantages de l'implicite et de l'explicite, tout en réduisant certains des défis liés à l'implicite.

2.3.3.1 Équation du GBM

Le mouvement brownien géométrique (GBM) est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :
$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t,$$

Schéma d'Euler implicite

Contrairement au schéma d'Euler-Maruyama, qui utilise les valeurs au temps t_i pour estimer $S_{t_{i+1}}$, le schéma d'Euler implicite évalue les termes de dérive et de diffusion au temps t_{i+1}. Pour le GBM, le schéma s'écrit :
$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_{i+1}}\Delta t + \sigma S_{t_{i+1}}\Delta W_{t_i},$$
où :

- S_{t_i} est le prix de l'actif à l'instant t_i,
- $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ est le pas de temps,
- $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ est l'incrément du mouvement brownien, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Pour résoudre cette équation implicite, on doit isoler $S_{t_{i+1}}$:

$$S_{t_{i+1}} - \mu S_{t_{i+1}} \Delta t - \sigma S_{t_{i+1}} \Delta W_{t_i} = S_{t_i}.$$

En factorisant $S_{t_{i+1}}$ à gauche, on obtient :

$$S_{t_{i+1}}(1 - \mu \Delta t - \sigma \Delta W_{t_i}) = S_{t_i},$$

d'où :

$$S_{t_{i+1}} = \frac{S_{t_i}}{1 - \mu \Delta t - \sigma \Delta W_{t_i}}.$$

L'algorithme de simulation selon le schéma d'Euler semi-implicite est :

Algorithm 3 Schéma d'Euler semi-implicite pour une EDS d'Itô

1: Choisir T, N, $\Delta t = T/N$
2: Initialiser X_0
3: **for** $i = 0$ to $N - 1$ **do**
4: Générer $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$
5: Résoudre X_{i+1} de manière approximative par :

$$X_{i+1} = X_i + b(t_{i+1}, X_{i+1})\Delta t + \sigma(t_i, X_i)\Delta W_i$$

6: **end for**

2.3.3.2 Schéma d'Euler semi-implicite

Le schéma **semi-implicite** combine les deux approches. Les termes de dérive sont traités de manière implicite (évalués au temps t_{i+1}), tandis que les termes de diffusion sont traités de manière explicite (évalués au temps t_i). Cela permet de réduire la complexité tout en améliorant la stabilité par rapport au schéma explicite.

Le schéma semi-implicite pour le GBM s'écrit :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_{i+1}} \Delta t + \sigma S_{t_i} \Delta W_{t_i}.$$

Dans ce schéma, la dérive est évaluée à t_{i+1}, ce qui implique que $S_{t_{i+1}}$ dépend de lui-même et nécessite la résolution d'une équation implicite pour chaque itération. Le terme de diffusion est évalué à t_i, ce qui permet une gestion explicite du bruit stochastique.

Ici, nous avons implicitement mis à jour le terme de dérive, tout en laissant le terme de diffusion explicitement dépendant de S_{t_i}. En réarrangeant cette équation pour isoler $S_{t_{i+1}}$, nous obtenons :

$$S_{t_{i+1}}(1 - \mu \Delta t) = S_{t_i} + \sigma S_{t_i} \Delta W_{t_i},$$

d'où :

$$S_{t_{i+1}} = \frac{S_{t_i} + \sigma S_{t_i} \Delta W_{t_i}}{1 - \mu \Delta t}.$$

L'algorithme de simulation selon le schéma d'Euler implicite est :

Algorithm 4 Schéma d'Euler implicite pour une EDS d'Itô

Choisir T, N, $\Delta t = T/N$
Initialiser X_0
for $i = 0$ to $N - 1$ **do**
    Générer $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$
    Résoudre X_{i+1} en satisfaisant :

$$X_{i+1} = X_i + b(t_{i+1}, X_{i+1})\Delta t + \sigma(t_{i+1}, X_{i+1})\Delta W_i$$

end for

Convergence du schéma d'Euler implicite et semi-implicite

Le schéma d'Euler implicite et semi-implicite ont tous deux une convergence d'ordre faible 1, c'est-à-dire que l'erreur de simulation décroît linéairement avec le pas de temps Δt. Cependant, le schéma semi-implicite bénéficie de l'équilibre entre la stabilité de l'implicite pour la dérive et la simplicité de l'explicite pour la diffusion, ce qui le rend moins coûteux que le schéma entièrement implicite tout en maintenant une bonne stabilité.

Le schéma d'Euler implicite est particulièrement robuste lorsqu'il s'agit de termes rigides (comme dans les modèles à forte volatilité), mais il peut devenir instable si les conditions de solvabilité sont mauvaises, par exemple, si le dénominateur dans la mise à jour devient trop petit.

Le schéma semi-implicite est plus souple et peut mieux gérer certains types de volatilité tout en réduisant la charge de calcul par rapport à l'implicite complet.

Avantages et limites

- **Avantages** :
  - Stabilité accrue par rapport au schéma explicite, tout en réduisant la complexité par rapport au schéma entièrement implicite.
  - Bon compromis entre stabilité numérique et coût de calcul.
- **Limites** :
  - Risque d'instabilité si les termes de dérive sont trop grands, bien que moins que dans le schéma implicite complet.
  - Peut ne pas être adapté aux modèles avec une forte volatilité stochastique où une implicite complète serait préférable.

En résumé, le schéma d'Euler semi-implicite offre un bon compromis entre stabilité et simplicité de calcul. Il est particulièrement utile dans des scénarios financiers où la dérive est plus importante que la diffusion, tout en offrant un meilleur contrôle de la stabilité numérique que les schémas explicites.

2.3.4 Schéma de Milstein et comparaison

Le **schéma de Milstein** est une méthode de discrétisation des équations différentielles stochastiques (EDS) qui améliore la précision du schéma d'Euler-Maruyama en prenant en compte les termes d'ordre supérieur dans l'approximation stochastique. Il est particulièrement utile pour les EDS où le terme de diffusion $b(X_t, t)$ dépend de l'état X_t.

Schéma de Milstein

Pour une EDS générale de la forme :

$$dX_t = a(X_t, t)\, dt + b(X_t, t)\, dW_t,$$

le schéma de Milstein s'écrit :

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a(X_{t_i}, t_i)\Delta t + b(X_{t_i}, t_i)\Delta W_{t_i} + \frac{1}{2} b(X_{t_i}, t_i) \frac{\partial b}{\partial X}(X_{t_i}, t_i) \left((\Delta W_{t_i})^2 - \Delta t\right),$$

où :

- X_{t_i} est la valeur du processus à l'instant t_i,
- $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ est le pas de temps,
- $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ est l'incrément du mouvement brownien, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \Delta t)$,
- $\frac{\partial b}{\partial X}$ est la dérivée partielle du terme de diffusion par rapport à X.

Preuve du schéma de Milstein

Le schéma de Milstein peut être dérivé en utilisant le lemme d'Itô pour développer le terme de diffusion $b(X_t, t)$ dans une EDS générale. Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = a(X_t, t)\, dt + b(X_t, t)\, dW_t.$$

En appliquant le lemme d'Itô à $b(X_t, t)$, on obtient :

$$db(X_t, t) = \left(\frac{\partial b}{\partial t} + a(X_t, t) \frac{\partial b}{\partial X} + \frac{1}{2} b(X_t, t)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial X^2} \right) dt + b(X_t, t) \frac{\partial b}{\partial X} dW_t.$$

En intégrant cette expression entre t_i et t_{i+1}, on a :

$$b(X_{t_{i+1}}, t_{i+1}) = b(X_{t_i}, t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + a(X_t, t) \frac{\partial b}{\partial X} + \frac{1}{2} b(X_t, t)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial X^2} \right) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(X_t, t) \frac{\partial b}{\partial X} dW_t.$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur et en approximant les intégrales, on obtient :

$$b(X_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \approx b(X_{t_i}, t_i) + b(X_{t_i}, t_i) \frac{\partial b}{\partial X}(X_{t_i}, t_i) \Delta W_{t_i}.$$

En substituant cette approximation dans l'EDS originale et en intégrant entre t_i et t_{i+1}, on arrive au schéma de Milstein :

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a(X_{t_i}, t_i)\Delta t + b(X_{t_i}, t_i)\Delta W_{t_i} + \frac{1}{2} b(X_{t_i}, t_i) \frac{\partial b}{\partial X}(X_{t_i}, t_i) \left((\Delta W_{t_i})^2 - \Delta t\right).$$

Ce terme supplémentaire permet de mieux approximer les trajectoires stochastiques, en particulier lorsque le terme de diffusion $b(X_t, t)$ dépend fortement de X_t.

L'algorithme de simulation selon le schéma de Milstein est :

Algorithm 5 Schéma de Milstein pour une EDS d'Itô

Choisir T, N, $\Delta t = T/N$
Initialiser X_0
for $i = 0$ to $N-1$ **do**
    Générer $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$
    Calculer la dérivée $\sigma_x(t_i, X_i) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t_i, X_i)$
    Mettre à jour :

$$X_{i+1} = X_i + b(t_i, X_i)\Delta t + \sigma(t_i, X_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}\sigma(t_i, X_i)\sigma_x(t_i, X_i)\left((\Delta W_i)^2 - \Delta t\right)$$

end for

Application au mouvement brownien géométrique (GBM)

Pour le GBM, où $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$, le schéma de Milstein devient :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i}\Delta t + \sigma S_{t_i}\Delta W_{t_i} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_{t_i}\left((\Delta W_{t_i})^2 - \Delta t\right).$$

Ici, $\frac{\partial b}{\partial S} = \sigma$, ce qui simplifie l'expression.

Convergence du schéma de Milstein

Le schéma de Milstein est une méthode d'ordre faible 1, mais il a une convergence forte d'ordre 1 (contre 0.5 pour Euler-Maruyama). Cela signifie qu'il est plus précis pour simuler des trajectoires individuelles, en particulier lorsque le terme de diffusion $b(X_t, t)$ dépend fortement de X_t.

Comparaison avec le schéma d'Euler-Maruyama

- **Précision** :
  - Le schéma de Milstein est plus précis que le schéma d'Euler-Maruyama car il prend en compte les termes d'ordre supérieur dans l'approximation stochastique.
  - Pour les EDS avec un terme de diffusion non linéaire, le schéma de Milstein réduit significativement l'erreur de discrétisation.
- **Complexité** :
  - Le schéma de Milstein est légèrement plus complexe à implémenter que le schéma d'Euler-Maruyama, car il nécessite le calcul de la dérivée $\frac{\partial b}{\partial X}$.
  - Pour certaines EDS, cette dérivée peut être difficile à calculer analytiquement.
- **Performance** :
  - Le schéma de Milstein est plus coûteux en temps de calcul que le schéma d'Euler-Maruyama en raison du terme supplémentaire.
  - Cependant, sa meilleure précision permet souvent de réduire le nombre de simulations nécessaires pour atteindre une certaine précision.

Avantages et limites

- **Avantages** :
  - Meilleure précision que le schéma d'Euler-Maruyama, en particulier pour les EDS non linéaires.
  - Convergence forte d'ordre 1, ce qui le rend plus adapté pour simuler des trajectoires individuelles.
- **Limites** :
  - Plus complexe à implémenter en raison du terme supplémentaire.
  - Nécessite le calcul de la dérivée $\frac{\partial b}{\partial X}$, ce qui peut être difficile pour certaines EDS.

Quand utiliser le schéma de Milstein ?

Le schéma de Milstein est particulièrement utile dans les cas suivants :

- Lorsque le terme de diffusion $b(X_t, t)$ dépend fortement de X_t.
- Lorsqu'une haute précision est requise pour simuler des trajectoires individuelles.
- Pour des EDS où l'erreur de discrétisation du schéma d'Euler-Maruyama est trop importante.

En résumé, le schéma de Milstein est une amélioration du schéma d'Euler-Maruyama qui offre une meilleure précision au prix d'une complexité accrue. Il est particulièrement adapté aux EDS non linéaires et aux applications où la précision des trajectoires individuelles est cruciale.

2.3.5 Implémentation de la simulation pour la valorisation d'options

La **simulation de Monte Carlo** est une méthode numérique puissante pour valoriser des options, en particulier lorsque les modèles analytiques ne sont pas disponibles ou sont trop complexes. Cette méthode repose sur la génération de trajectoires simulées du prix de l'actif sous-jacent, suivie du calcul de la valeur espérée du payoff de l'option.

Étapes de la simulation pour la valorisation d'options

1. **Modélisation du prix de l'actif** : Le prix de l'actif sous-jacent est modélisé par une équation différentielle stochastique (EDS), telle que le mouvement brownien géométrique (GBM) :
$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t.$$
2. **Discrétisation de l'EDS** : L'EDS est discrétisée en utilisant un schéma numérique, tel que le schéma d'Euler-Maruyama ou le schéma de Milstein, pour générer des trajectoires simulées du prix de l'actif.
3. **Génération des trajectoires** : Pour chaque simulation, on génère une trajectoire du prix de l'actif sur l'intervalle de temps $[0, T]$, où T est la maturité de l'option.
4. **Calcul du payoff** : Pour chaque trajectoire, on calcule le payoff de l'option à l'échéance. Par exemple, pour une option d'achat (call) européenne, le payoff est :
$$\text{Payoff} = \max(S_T - K, 0),$$

où S_T est le prix de l'actif à l'échéance et K est le prix d'exercice.

5. **Actualisation et moyenne** : Le payoff est actualisé au taux d'intérêt sans risque r, et la valeur de l'option est estimée comme la moyenne des payoffs actualisés sur toutes les simulations :
$$V_0 = e^{-rT} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \text{Payoff}_i,$$
où N est le nombre de simulations.

Comparaison des schémas

- **Précision** : Le schéma de Milstein est plus précis que le schéma d'Euler-Maruyama, en particulier pour les options avec une forte volatilité ou des termes de diffusion non linéaires.
- **Complexité** : Le schéma de Milstein est légèrement plus complexe à implémenter en raison du terme supplémentaire.
- **Temps de calcul** : Le schéma de Milstein peut être plus coûteux en temps de calcul, mais sa meilleure précision permet souvent de réduire le nombre de simulations nécessaires.

Exemple numérique

Supposons les paramètres suivants :

- $S_0 = 100$ (prix initial de l'actif),
- $K = 100$ (prix d'exercice),
- $T = 1$ an (maturité),
- $r = 0.05$ (taux d'intérêt sans risque),
- $\sigma = 0.2$ (volatilité),
- $N = 100$ (nombre de pas de temps),
- $M = 10\,000$ (nombre de simulations).

En utilisant le schéma d'Euler-Maruyama, on obtient un prix d'option d'environ 10.45, tandis que le schéma de Milstein donne un prix d'environ 10.47. Ces résultats sont proches du prix théorique donné par le modèle de Black-Scholes (environ 10.45).

Avantages et limites

- **Avantages** :
  - Flexibilité : La simulation de Monte Carlo peut être appliquée à des modèles complexes (volatilité stochastique, sauts, etc.).
  - Facilité d'implémentation : Les schémas d'Euler-Maruyama et de Milstein sont relativement simples à implémenter.
- **Limites** :
  - Temps de calcul : La méthode peut être coûteuse en temps de calcul pour un grand nombre de simulations.
  - Erreur de discrétisation : Les schémas numériques introduisent une erreur due à l'approximation de l'EDS.

En résumé, la simulation de Monte Carlo est une méthode flexible et puissante pour valoriser des options, en particulier lorsque les modèles analytiques ne sont pas disponibles. Les schémas d'Euler-Maruyama et de Milstein permettent de générer des trajectoires simulées du prix de l'actif, avec des compromis entre précision et complexité.

2.4 Modèle de Heston (volatilité stochastique)

Le **modèle de Heston**, introduit par Steven Heston en 1993, est un modèle de volatilité stochastique largement utilisé en finance pour valoriser des options. Contrairement au modèle de Black-Scholes, qui suppose une volatilité constante, le modèle de Heston permet à la volatilité de varier de manière stochastique, ce qui le rend plus réaliste pour capturer les dynamiques observées sur les marchés financiers.

2.4.1 Caractéristiques du modèle

Le modèle de Heston décrit l'évolution du prix de l'actif sous-jacent S_t et de sa volatilité v_t par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t \, dt + \sqrt{v_t} S_t \, dW_t^S, \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) \, dt + \xi \sqrt{v_t} \, dW_t^v, \end{cases}$$

où :

- S_t est le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t,
- v_t est la variance instantanée (volatilité au carré) de l'actif,
- μ est le taux de rendement espéré de l'actif,
- κ est la vitesse de retour à la moyenne de la variance,
- θ est la variance à long terme (niveau moyen de la variance),
- ξ est la volatilité de la volatilité (vol of vol),
- W_t^S et W_t^v sont deux mouvements browniens corrélés avec un coefficient de corrélation ρ.

Propriétés du modèle de Heston

- **Volatilité stochastique** : La variance v_t suit un processus de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross), qui garantit que v_t reste positive si $2\kappa\theta \geq \xi^2$ (condition de Feller).
- **Corrélation entre prix et volatilité** : Le coefficient de corrélation ρ entre W_t^S et W_t^v permet de modéliser l'effet de levier (leverage effect), où une baisse des prix s'accompagne souvent d'une hausse de la volatilité.
- **Smile de volatilité** : Le modèle de Heston reproduit le smile de volatilité observé sur les marchés, où la volatilité implicite varie avec le strike et la maturité de l'option.

2.4.2 Valorisation numérique et impact de la volatilité stochastique

La valorisation d'options dans le modèle de Heston nécessite des méthodes numériques, car il n'existe pas de formule analytique fermée pour le prix des options. La simulation de Monte Carlo est couramment utilisée, et elle peut être implémentée avec différents schémas de discrétisation, tels que les schémas d'**Euler** et de **Milstein**.

Simulation avec le schéma d'Euler

Le schéma d'Euler est une méthode simple pour discrétiser le système d'équations différentielles stochastiques (EDS) du modèle de Heston. Pour le modèle de Heston :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t \, dt + \sqrt{v_t} S_t \, dW_t^S, \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) \, dt + \xi \sqrt{v_t} \, dW_t^v, \end{cases}$$

le schéma d'Euler s'écrit :

$$\begin{cases} S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i} \Delta t + \sqrt{v_{t_i}} S_{t_i} \Delta W_t^S, \\ v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \kappa(\theta - v_{t_i}) \Delta t + \xi \sqrt{v_{t_i}} \Delta W_t^v, \end{cases}$$

où :

- ΔW_t^S et ΔW_t^v sont des incréments browniens corrélés,
- $\Delta W_t^v = \rho \Delta W_t^S + \sqrt{1-\rho^2} \Delta Z_t$, avec ΔZ_t un mouvement brownien indépendant.

Simulation avec le schéma de Milstein

Le schéma de Milstein améliore la précision du schéma d'Euler en prenant en compte les termes d'ordre supérieur dans l'approximation stochastique. Pour le modèle de Heston, le schéma de Milstein s'écrit :

$$\begin{cases} S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu S_{t_i} \Delta t + \sqrt{v_{t_i}} S_{t_i} \Delta W_t^S + \frac{1}{2} \sqrt{v_{t_i}} \left((\Delta W_t^S)^2 - \Delta t \right), \\ v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \kappa(\theta - v_{t_i}) \Delta t + \xi \sqrt{v_{t_i}} \Delta W_t^v + \frac{1}{2} \xi^2 \left((\Delta W_t^v)^2 - \Delta t \right). \end{cases}$$

Comparaison des schémas

- **Précision** : Le schéma de Milstein est plus précis que le schéma d'Euler, en particulier pour la variance v_t, car il prend en compte les termes d'ordre supérieur.
- **Complexité** : Le schéma de Milstein est légèrement plus complexe à implémenter en raison du terme supplémentaire.
- **Temps de calcul** : Le schéma de Milstein peut être plus coûteux en temps de calcul, mais sa meilleure précision permet souvent de réduire le nombre de simulations nécessaires.

Impact de la volatilité stochastique

- **Smile de volatilité** : Le modèle de Heston reproduit le smile de volatilité, ce qui permet une meilleure adéquation aux prix de marché des options.
- **Dynamique de la volatilité** : La volatilité stochastique capture les variations de la volatilité au cours du temps, ce qui est crucial pour la gestion des risques.
- **Effet de levier** : La corrélation ρ entre le prix de l'actif et la volatilité permet de modéliser l'effet de levier, où une baisse des prix s'accompagne souvent d'une hausse de la volatilité.

Avantages et limites

- **Avantages** :
  - Meilleure adéquation aux données de marché, en particulier pour les options hors de la monnaie (out-of-the-money).
  - Capacité à modéliser des dynamiques de volatilité réalistes.
- **Limites** :
  - Complexité accrue : le modèle est plus difficile à calibrer et à implémenter que le modèle de Black-Scholes.
  - Temps de calcul plus long pour la valorisation des options, en particulier pour les options exotiques.

En résumé, le modèle de Heston est un outil essentiel pour modéliser les dynamiques complexes des marchés financiers. Bien que plus complexe que le modèle de Black-Scholes, il offre une meilleure adéquation aux données de marché et est largement utilisé pour la valorisation des options et la gestion des risques.

Conclusion et perspectives

Ce document a exploré les modèles de valorisation des options, en mettant l'accent sur le modèle de Heston avec volatilité stochastique. Nous avons commencé par revisiter le modèle de Black-Scholes, un pilier de la finance quantitative, tout en soulignant ses limites, notamment l'hypothèse d'une volatilité constante. Pour surmonter ces limitations, le modèle de Heston a été introduit, offrant une représentation plus réaliste des dynamiques de marché grâce à sa volatilité stochastique et sa capacité à reproduire des phénomènes tels que le smile de volatilité et l'effet de levier. Les méthodes numériques, telles que les schémas d'Euler et de Milstein, ont été présentées pour simuler les trajectoires des prix d'actifs et valoriser les options. Enfin, une application web interactive, développée avec Flask, a été proposée pour visualiser les résultats des simulations et faciliter l'exploration des modèles.

Cependant, plusieurs pistes de recherche et développement restent à explorer. L'amélioration des méthodes numériques, par exemple via l'utilisation de schémas plus avancés comme les méthodes de Runge-Kutta, pourrait accroître la précision et l'efficacité des simulations. L'extension du modèle de Heston à des modèles multi-facteurs, incluant des sauts dans les prix ou une volatilité de volatilité stochastique, permettrait de capturer des dynamiques de marché encore plus complexes. Par ailleurs, l'intégration de techniques d'apprentissage automatique pour la calibration des modèles et la prédiction des surfaces de volatilité représente une voie prometteuse. Le développement d'outils interactifs plus sophistiqués, intégrant des interfaces utilisateur intuitives et des visualisations avancées, pourrait également rendre ces modèles accessibles à un public plus large. Enfin, des études empiriques approfondies sur des données de marché réelles permettraient de valider et d'affiner les modèles théoriques, en tenant compte des spécificités des différents actifs et marchés.

En conclusion, la valorisation des options reste un domaine riche et en constante évolution. Les modèles à volatilité stochastique, comme celui de Heston, offrent des outils puissants pour comprendre et anticiper les dynamiques de marché. Cependant, leur complexité et leurs limites soulignent la nécessité de poursuivre les recherches et les innovations dans ce domaine. Ce document espère avoir apporté une contribution utile à cette quête, en fournissant une base solide pour les travaux futurs.

Bibliographie

[1] El Asri Brahim. Calcul Stochastique pour la finance - Notes de Cours

[2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.

[3] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2) :327–343, 1993.

[4] J. C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives.* Pearson, 11th edition, 2021.

[5] Fabrice Douglas Rouah. *Euler and Milstein Discretization.*

[6] Benjamin Jourdain *Méthodes de Monte Carlo pour les processus financiers*

[7] Ganiyu A. A., Kayode S. J., Augustine A. C., & Fakunle I. (2024). *On Drift-Implicit and Full-Implicit Euler-Maruyama Methods for Solution of First Order Stochastic Differential*