Méthodes de Pricing des Options Financières

Kerdoun Wassim

Finance et Ingénierie décisionnelle

February 4, 2025

Contexte du Pricing d'Options

- Les options : instruments financiers dérivés complexes
- Objectifs de valorisation :
  - Trading
  - Gestion des risques
  - Stratégies d'investissement
- Défis principaux :
  - Modélisation mathématique
  - Incertitude des paramètres de marché
  - Variabilité économique

Méthodes étudiées :

- Modèle de Black-Scholes
- Simulation Monte Carlo
- Techniques d'amélioration

Modèle de Black-Scholes : Principes Fondamentaux

Hypothèses principales :

- Marché parfait et efficient
- Distribution log-normale des rendements
- Volatilité constante
- Pas de coûts de transaction

Hypothèses du portefeuille :

- Portefeuille composé d'une position dans l'actif sous-jacent et l'option
- Pas de risque de portefeuille (portefeuille sans risque)
- La réplication de l'option est possible en ajustant dynamiquement la position dans l'actif

Équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$

Modèle de Black-Scholes : Formules

Formule pour option call :

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Formule pour option put :

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Volatilité Implicite

Définition : Volatilité qui "explique" le prix de marché d'une option

Caractéristiques :

- Obtenue par inversion du modèle Black-Scholes
- Reflète les attentes du marché
- Varie selon :
  - Prix d'exercice
  - Maturité de l'option

Formulation :

$$\sigma_{\text{imp}} = \arg\min_{\sigma} \left| C_{\text{Marché}} - C_{\text{BS}}(\sigma) \right|$$

Simulation Monte Carlo Standard

Discrétisation par le schéma d'Euler-Maruyama :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

Algorithme de base :

$$S_{t+1} = S_t \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_t\right), \quad Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Estimation du prix de l'option :

$$\hat{C}_{MC} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{-r(T-t)} \max(S_T^i - K, 0)$$

Avantages :

- Flexibilité pour options complexes
- Facilement parallélisable
- Convergence en $O(1/\sqrt{N})$

Monte Carlo : Variables Antithétiques

Principe : Réduction de la variance par l'utilisation de paires de chemins opposés, en simulant Z et $-Z$.

Trajectoire antithétique :

$$S_{t+1}^{(A)} = S_t \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} Z_t\right)$$

où Z_t est simulé, puis $-Z_t$ pour la trajectoire antithétique.

Estimation du prix de l'option :

$$\hat{C}_{AV} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\left[\max(S_T^i - K, 0) + \max(S_T^{(A)i} - K, 0)\right]$$

Avantages :

- Réduction de la variance
- Convergence plus rapide avec $O(1/N)$
- Coût computationnel minimal

Monte Carlo : Variables de Contrôle

Motivation : Réduction de la variance en utilisant une **variable de contrôle** Z, corrélée avec Y, pour améliorer l'estimation.
Estimation améliorée :

$$\hat{C}_{CV} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i - \lambda \left(Z_i - \mathbb{E}[Z] \right)$$

où λ est un coefficient de pondération optimal.
Obtention du coefficient optimal :

$$\lambda = \frac{\mathrm{Cov}(Y, Z)}{\mathrm{Var}(Z)}$$

Caractéristiques :

- Utilise une variable de contrôle corrélée
- Réduit significativement la variance
- Applicable lorsque $\mathbb{E}[Z]$ est connu analytiquement
- Convergence en $O(1/N)$

Comparaison des Méthodes Monte Carlo

Critères	**MC Standard**	**Antithétiques**	**Contrôle**
Principe	Simulation directe	Z_t et $-Z_t$	Correction avec Z
Avantages	Flexibilité	Réduit variance	Moins de variance
Convergence	$O(1/\sqrt{N})$	$O(1/N)$	$O(1/N)$

Conclusion

Points clés :

- Black-Scholes : base théorique
- Volatilité implicite : vision du marché
- Monte Carlo : flexibilité numérique
- Techniques d'amélioration : précision accrue

Perspectives :

- Modèles plus sophistiqués
- Intelligence artificielle
- Nouvelles techniques numériques