المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية – أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

RAPPORT DU PROJET

Réalisé par:

KERDOUN Wassim

Filière: Finance et ingénierie décisionelle

Options Pricing
cas des : Options Européennes

Encadré par:

Prof. EL ASRI Brahim

Déposé le: **11/02/2025**

Résumé

Ce document présente une étude approfondie des concepts fondamentaux en finance quantitative, en se concentrant sur les options financières, les processus stochastiques et leurs applications pratiques. Il débute par une introduction aux options, abordant leur définition, leur terminologie, les différents types (tels que les options européennes), les structures de payoff et la parité call-put. Ensuite, il explore les processus stochastiques, incluant les notions de filtration, d'espérance conditionnelle, de processus de Markov, de martingales et de mouvement brownien, avec des applications concrètes dans la modélisation des prix des actions et des méthodes numériques en finance.

Le modèle de Black-Scholes-Merton est ensuite analysé en détail, en mettant en lumière son contexte historique, ses hypothèses fondamentales et la dérivation de l'équation différentielle stochastique (EDS) qui sous-tend la valorisation des options. La formule de Black-Scholes pour les options call et put est également présentée, ainsi que les "Grecs" (Delta, Gamma, Theta, Vega, Rho), qui mesurent la sensibilité des prix des options aux différents paramètres de marché.

Le document aborde également la simulation de Monte Carlo comme outil puissant pour l'évaluation des options, en détaillant les méthodes de discrétisation des EDS, les techniques de réduction de variance (variables antithétiques et variables de contrôle) et leur application pratique. Enfin, la volatilité implicite est examinée, avec une discussion sur sa définition mathématique, son calcul via des méthodes de minimisation et son utilisation dans les modèles financiers.

Une section est consacrée à l'implémentation de ces modèles à l'aide de technologies modernes, telles que Python, Flask et les technologies web, permettant une intégration efficace dans des applications pratiques. Des tests et validations sont également réalisés pour assurer la robustesse des modèles. Ce document offre ainsi une vision complète et appliquée des outils mathématiques et numériques essentiels en finance quantitative.

Mots-clés : Options financières, Processus stochastiques, Mouvement brownien, Modèle Black-Scholes-Merton, Volatilité implicite, Simulation de Monte Carlo, Grecs (Delta, Gamma, Theta, Vega, Rho), Finance quantitative, Python, Technologies web.

List of Figures

List of Tables

Listings

Table of Contents:

1 Introduction

La tarification des options est un aspect crucial des marchés financiers, offrant une méthode pour évaluer les dérivés qui accordent le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif à un prix spécifié avant une date d'expiration fixée. Ce processus est vital pour gérer le risque d'investissement, élaborer des stratégies de trading et optimiser la performance du portefeuille. Le domaine a évolué grâce à des jalons significatifs : le modèle Black-Scholes-Merton de 1973 a introduit une formule pour tarifer les options européennes en prenant en compte le prix de l'actif, le prix d'exercice, le temps jusqu'à l'échéance, le taux sans risque et la volatilité. Cependant, le modèle Black-Scholes suppose une volatilité et des taux d'intérêt constants, ce qui n'est souvent pas vrai dans les marchés réels, limitant ainsi sa précision. Pour remédier à ces limitations, des méthodes de simulation Monte Carlo ont été employées, offrant une approche flexible pour tarifer les options en simulant une large gamme de trajectoires possibles pour l'actif sous-jacent. Proposées pour la première fois par Phelim Boyle en 1977, les méthodes Monte Carlo sont particulièrement utiles pour tarifer des dérivés complexes et gérer les risques financiers. Malgré leurs avantages, les méthodes Monte Carlo peuvent être intensivement calculatoires et converger lentement, surtout pour les options avec des caractéristiques d'exercice anticipé comme les options américaines. Les progrès récents visent à améliorer l'efficacité et la précision de ces simulations, y compris l'intégration de techniques d'apprentissage automatique pour mieux capturer les complexités des marchés financiers. À côté de ces modèles de tarification, des stratégies de couverture efficaces sont essentielles pour gérer les risques liés au trading d'options. La couverture consiste à utiliser des instruments financiers ou des stratégies pour compenser les pertes potentielles sur les investissements. Des techniques telles que la couverture delta-neutre, qui vise à rendre la valeur du portefeuille insensible aux petites variations du prix de l'actif sous-jacent, la couverture delta-gamma pour tenir compte de la courbure du mouvement de prix de l'option, et la couverture gamma-vega pour gérer les risques liés à la volatilité et aux changements du prix de l'actif sous-jacent, sont cruciales. De plus, la création d'options synthétiques peut fournir des solutions de couverture sur mesure. Ces stratégies aident à stabiliser les rendements et à se protéger contre les mouvements défavorables du marché, garantissant que les investisseurs peuvent gérer le risque tout en poursuivant leurs objectifs financiers.

Concepts Fondamentaux sur les Options 2

1 Introduction aux Options

L'introduction aux options sert de base à la compréhension des options en tant que dérivés financiers. Les options sont des contrats qui accordent à l'acheteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (option d'achat) ou de vendre (option de vente) un actif sous-jacent à un prix spécifique (prix d'exercice) à ou avant une date préétablie (date d'expiration). Cette section décrit comment les options diffèrent d'autres instruments financiers tels que les actions et les obligations, en mettant l'accent sur leur rôle dans la couverture, la spéculation et l'amplification des stratégies d'investissement. L'introduction abordera également le contexte historique du trading d'options, y compris les développements clés tels que la création de la Chicago Board Options Exchange (CBOE) en 1973 et l'émergence des modèles de tarification d'options comme le modèle Black-Scholes. L'objectif est de comprendre les options comme des outils polyvalents qui répondent à différents appétits pour le risque et objectifs d'investissement, avec des applications allant de la gestion des risques aux opportunités spéculatives.

2 Définitions et Terminologie

Cette section pose les bases du trading d'options en définissant des termes critiques qui seront utilisés tout au long du document. Il est essentiel de comprendre les concepts de base tels que :

- **Prix d'exercice (K)** : Le prix convenu auquel le détenteur de l'option peut acheter ou vendre l'actif sous-jacent.
- **Date d'expiration (T)** : La dernière journée où l'option peut être exercée.
- **Prime** : Le prix payé par l'acheteur de l'option au vendeur pour les droits accordés par le contrat.
- **Actif sous-jacent** : L'actif financier (tel qu'une action, un indice ou une matière première) sur lequel repose l'option.

Ces termes constituent l'épine dorsale de toute stratégie de trading d'options, apportant une clarté sur la structure des options. Cette section discutera probablement de la distinction entre options in-the-money, at-the-money et out-of-the-money, chacune définissant la relation entre le prix d'exercice et le prix actuel de l'actif sous-jacent. Comprendre ces concepts est critique, car ils influencent directement la valeur et le profil de risque de l'option.

3 Types d'Options

Ici, les différentes variétés de contrats d'options sont expliquées en détail. La section commence par la distinction principale entre les options d'achat (qui donnent au détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent) et les options de vente (qui donnent le droit de vendre). Ces deux types de base sont explorés dans le contexte de diverses stratégies de trading et conditions de marché. En outre, cette section discutera des options européennes, qui ne peuvent être exercées qu'à l'échéance.

Exemples :

Option d'achat
Considérons la situation d'un investisseur qui achète une option d'achat européenne avec un prix d'exercice de \$100 pour acheter 100 actions d'une certaine entreprise. Supposons que le cours actuel de l'action est de \$98, la date d'expiration de l'option est dans 4 mois, et le prix de l'option pour acheter une action est de \$5. L'investissement initial est de \$500. Étant donné que l'option est européenne, l'investisseur ne peut exercer qu'à la date d'expiration. Si le cours de l'action à cette date est inférieur à \$100, l'investisseur choisira clairement de ne pas exercer. (Il n'y a aucun intérêt à acheter pour \$100 une action dont la valeur de marché est inférieure à \$100.) Dans ces circonstances, l'investisseur perd l'intégralité de son investissement initial de \$500. Si le cours de l'action est supérieur à \$100 à la date d'expiration, l'option sera exercée. Supposons, par exemple, que le cours de l'action soit de \$115. En exerçant l'option, l'investisseur peut acheter 100 actions pour \$100 par action. Si les actions sont vendues immédiatement, l'investisseur réalise un gain de \$15 par action, soit \$1,500, en ignorant les coûts de transaction. Lorsque le coût initial de l'option est pris en compte, le bénéfice net pour l'investisseur est de \$1,000.

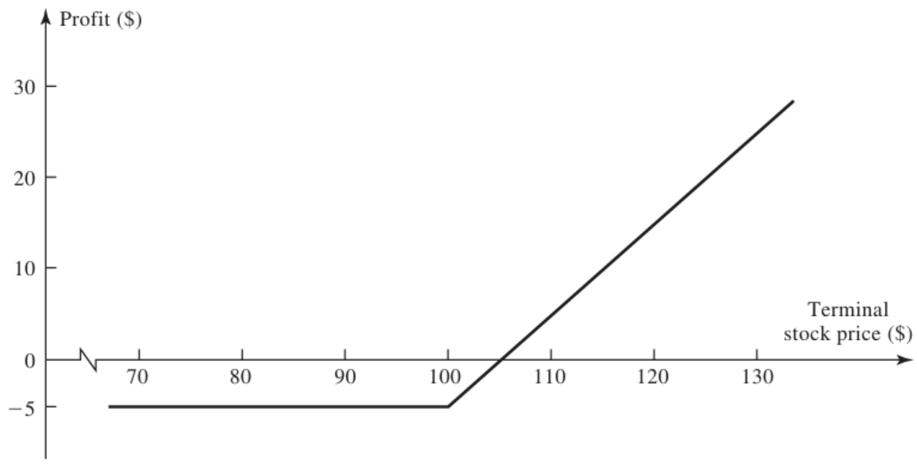

Figure 2.1: Bénéfice provenant de l'achat d'une option d'achat européenne sur une action. Prix de l'option = \$5; prix d'exercice = \$100

Option de vente
Alors que l'acheteur d'une option d'achat espère que le cours de l'action augmentera, l'acheteur d'une option de vente espère qu'il diminuera. Considérons un investisseur qui achète une option de vente européenne avec un prix d'exercice de $70 pour vendre 100 actions d'une certaine entreprise. Supposons que le cours actuel de l'action est de $65, la date d'expiration de l'option est dans 3 mois, et le prix de l'option pour vendre une action est de $7. L'investissement initial est de $700. Étant donné que l'option est européenne, elle ne sera exercée que si le cours de l'action est inférieur à $70 à la date d'expiration.

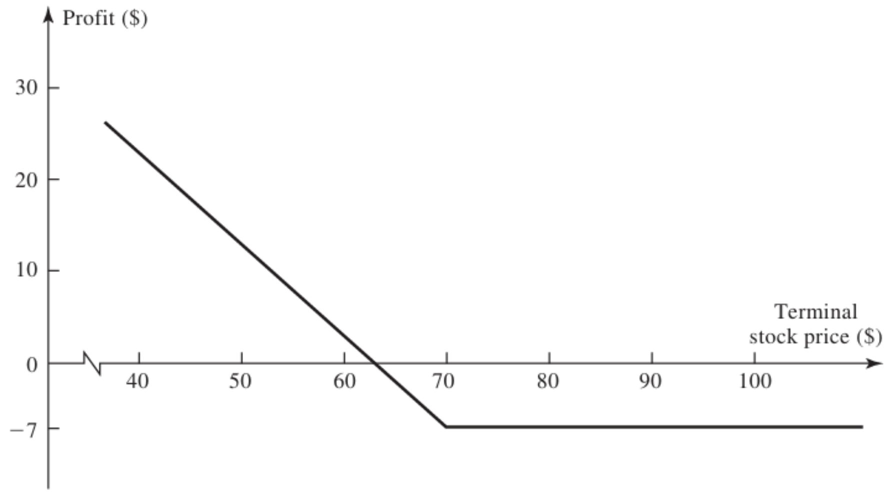

Figure 2.2: Bénéfice provenant de l'achat d'une option de vente européenne sur une action. Prix de l'option = $7; prix d'exercice = $70.

4 Structure de Payoff des Options

Le concept de structures de payoff est crucial pour comprendre l'impact financier de la détention ou de l'écriture d'options. Pour une **option d'achat**, le payoff augmente lorsque le prix de l'actif sous-jacent dépasse le prix d'exercice, reflétant des gains potentiels illimités avec un risque limité (la prime payée).
Le payoff d'une option d'achat européenne est donné tel que :

$$C = \max(S_T - K, 0)$$

où, S_T est le prix de l'actif sous-jacent à l'échéance T et K est le prix d'exercice de l'option d'achat.
Inversement, l'**option de vente** génère des profits si le prix de l'actif tombe en dessous du prix d'exercice, protégeant contre le risque baissier.
Le payoff d'une option de vente européenne est également donné tel que :

$$P = \max(K - S_T, 0)$$

Pour résumer cette section, nous considérons le tableau ci-dessous :

Type d'Options	Limite Supérieure	Limite Inférieure
Option d'achat	$C \leq S_0$, $c \leq S_0$	$c \geq \max(S_0 - K, 0)$
Option de vente	$P \leq K$, $p \leq K$	$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$

Table 2.1: Comparaison des Limites Supérieures et Inférieures pour les Options Européennes

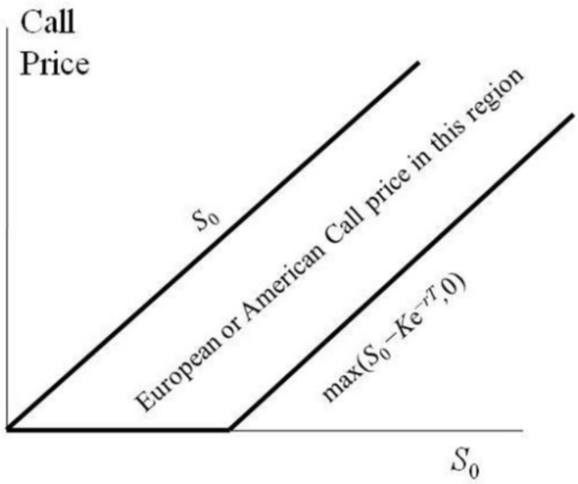

Figure 2.3: Limites pour les Options d'Achat Européennes (Pas de Dividendes)

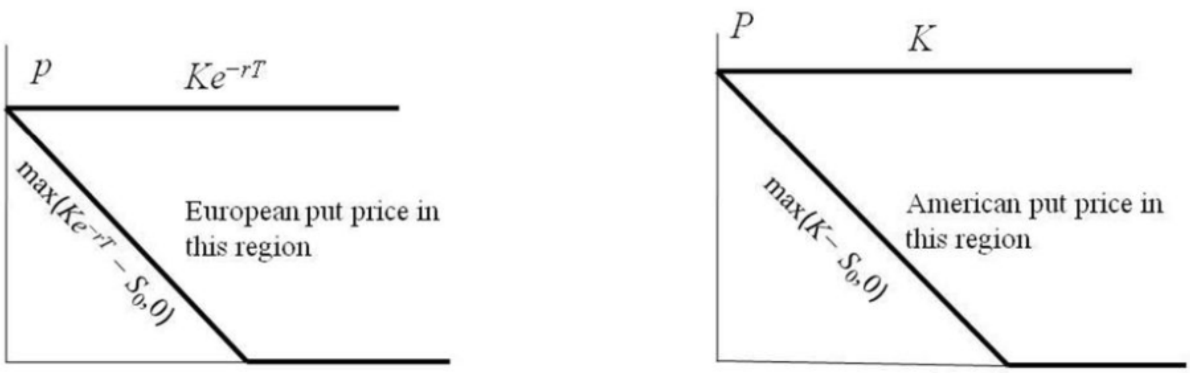

Figure 2.4: Limites pour les Options de Vente Européennes (Pas de Dividendes)

5 Parité Achats-Ventes

5.1 Options Européennes

La parité achats-ventes est un principe fondamental dans la tarification des options qui définit la relation entre le prix des options d'achat et de vente européennes ayant le même prix d'exercice et la même date d'expiration. Ce principe affirme que le prix d'une option d'achat plus la valeur actuelle du prix d'exercice doit être égal au prix d'une option de vente plus le prix de l'actif sous-jacent. Mathématiquement, cela s'exprime comme suit :

$$C - P = S - K \cdot e^{-rT}$$

où C est le prix de l'option d'achat, P est le prix de l'option de vente, S est le prix actuel de l'actif sous-jacent, K est le prix d'exercice, r est le taux d'intérêt sans risque, et T est le temps jusqu'à l'échéance.

Pour prouver cette affirmation, supposons qu'elle ne tient pas et montrons qu'il est possible de réaliser des profits sans risque. Nous utiliserons des nombres pour plus de clarté. Supposons $S = 110$, $K = 100$, $t = 1$, $r = 0$. Supposons également $C = 12$ et $P = 5$. Ainsi, l'option d'achat est sous-évaluée et/ou l'option de vente est surestimée, étant donné $S = 110$ et $K = 100$. Construisons un arbitrage en achetant l'option "bon marché" à \$12 et en vendant l'option "chère" à \$5. Rappelons que posséder une option d'achat et vendre une option de vente génèrent tous deux des profits lorsque S augmente. Par conséquent, nous complétons l'arbitrage en vendant court S à \$110. Notre portefeuille aujourd'hui :

- Flux de trésorerie
- Acheter 1 option d'achat : \$-12
- Vendre court (écrire) 1 option de vente : \$5
- Vendre court 1 action : \$110
- Investir les produits : \$-103
- Net : \$0

Examinons ce qui se passe à l'échéance (dans 1 an) si $S > K$ et si $S < K$.

Si $S \geq K$:

- Exercer l'option d'achat : \$100
- Livrer contre la vente court
- Option de vente expire sans valeur : \$0
- Recevoir les produits de l'investissement : \$103
- Bénéfice : \$3

Si $S < K$:

- Option d'achat expire sans valeur
- Option de vente est exercée contre vous
- Prendre l'action reçue de l'option de vente et la restituer contre la vente court : \$0 - 100
- Recevoir les produits de l'investissement : \$103

- Bénéfice : \$3

Il y a un bénéfice garanti de \$3 quel que soit ce qui arrive. Ce bénéfice correspond à la "mauvaise évaluation" de $C - P$ par rapport à $S - K$:

$$C - P = 12 - 5 = 7$$

$$S - K = 110 - 100 = 10$$

Une autre manière de penser à cela est : Acheter l'option d'achat pour \$12 et vendre l'option de vente pour \$5 permet d'être long sur l'action sous-jacente (y compris le coût d'exercice de \$100) pour \$107. Puisque vous avez vendu l'action pour \$110, vous êtes donc entitled à \$3. Étant donné que notre position est rentable et sans risque, nous le faisons autant que possible, ce qui fait augmenter la valeur de C et baisser celle de P jusqu'à ce qu'elles diffèrent exactement de \$10. Ainsi, C augmente de \$12 et P diminue de \$5. Que C soit \$14 et P soit \$4 ou C soit \$15 et P soit \$5 ou encore C soit \$12 et P soit \$2 dépend de l'évaluation de l'option d'achat (ou de vente) selon un modèle tel que Black-Scholes. La parité achats-ventes donne simplement la valeur relative de C versus P étant donné S et K.

Illustration :
Considérons une option d'achat européenne cotée à \$10 et une option de vente cotée à \$5, toutes deux avec un prix d'exercice de \$95. Si le prix de l'actif sous-jacent est de \$100, le taux d'intérêt sans risque est de 5% par an, et le temps jusqu'à l'échéance est de 0,5 an, la valeur actuelle du prix d'exercice est calculée comme suit :

$$K \cdot e^{-rT} = 95 \cdot e^{-0.05\times0.5} \approx 95 \cdot 0.975 = 92.625$$

Ainsi,

$$S - K \cdot e^{-rT} = 100 - 92.625 = 7.375$$

Selon la parité achats-ventes, la différence entre les prix de l'option d'achat et de vente devrait être :

$$C - P = 10 - 5 = 5$$

Dans ce cas, la valeur calculée de $S - K \cdot e^{-rT}$ est de \$7.375, tandis que $C - P$ est de \$5. Cette disparité indique que la parité achats-ventes est violée, indiquant une opportunité d'arbitrage. Les traders peuvent exploiter de telles inefficacités de prix en engageant des stratégies d'arbitrage—en achetant les options sous-évaluées et en vendant les options surestimées ou vice versa. Comprendre la parité achats-ventes est crucial pour les traders cherchant à identifier et à profiter de ces inefficacités de marché. Cette section examinera les applications pratiques de ce principe, démontrant comment de telles disparités peuvent être exploitées dans des stratégies de trading.

Processus Brownien et Concepts Associés

3

1 Introduction

Le mouvement brownien est un concept fondamental qui a révolutionné notre compréhension des phénomènes aléatoires dans divers domaines scientifiques et pratiques. Découvert initialement par un botaniste en 1827 lors de l'observation du mouvement erratique de particules dans un liquide sous un microscope, ce phénomène a rapidement attiré l'attention des physiciens et des mathématiciens. Un physicien a fourni une explication théorique rigoureuse du mouvement brownien en 1905, démontrant qu'il résulte des collisions aléatoires entre les particules et les molécules du milieu environnant. Depuis lors, le mouvement brownien s'est imposé comme un outil indispensable pour modéliser des processus stochastiques dans une multitude de disciplines, allant de la physique statistique à la finance quantitative.

Dans le domaine des mathématiques, le mouvement brownien est souvent désigné comme un processus de Wiener, en hommage à un mathématicien qui formalisa ses propriétés mathématiques dans les années 1920. Ce processus est caractérisé par plusieurs propriétés clés : ses trajectoires sont continues mais non différentiables, ses accroissements sont indépendants et normalement distribués, et il est centré autour de zéro avec une variance proportionnelle au temps écoulé. Ces caractéristiques font du mouvement brownien un modèle naturel pour représenter des fluctuations aléatoires continues, telles que celles observées dans les marchés financiers ou les systèmes physiques complexes.

En finance, le mouvement brownien joue un rôle central dans la modélisation des prix des actifs. Par exemple, un célèbre modèle utilise un mouvement brownien géométrique pour décrire les variations des prix des actions et évaluer les options financières. Cependant, bien que ce modèle soit puissant, il repose sur plusieurs hypothèses simplificatrices, telles que la normalité des retours et la constance de la volatilité, qui peuvent ne pas toujours refléter la réalité des marchés. Ainsi, des extensions et des alternatives ont été développées pour capturer des comportements plus complexes, tels que les mouvements browniens fractionnaires ou les processus de Lévy.

La question se pose alors : comment le mouvement brownien, dans sa forme classique ou étendue, peut-il être utilisé pour mieux comprendre et modéliser les phénomènes aléatoires dans des contextes variés ? Ce chapitre vise à explorer cette question en détail, en examinant les propriétés mathématiques du mouvement brownien, ses applications pratiques, ainsi que ses limitations et extensions. Nous commencerons par une présentation des concepts de base liés aux processus stochastiques, puis nous examinerons les spécificités du mouvement brownien standard et de ses variantes. Enfin, nous discuterons de ses implications dans des domaines tels que la finance, la physique, et d'autres sciences appliquées.

2 Processus Stochastique : Concepts de Base

2.1 Filtration

Une filtration $\mathcal{F}_t$ est une famille croissante de tribus sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Elle représente l'information disponible jusqu'à un instant t.

Cette notion est fondamentale en théorie des probabilités car elle permet de modéliser l'évolution de l'information au cours du temps. En pratique, on peut voir la filtration comme une succession de "photos" de plus en plus précises de notre information : chaque nouvelle observation enrichit notre connaissance du système, et cette information ne peut pas être "oubliée".
Un processus stochastique (X_t) est dit adapté à la filtration si, pour tout t, X_t est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$, ce qui signifie que la valeur du processus à l'instant t ne dépend que de l'information disponible jusqu'à cet instant.

2.2 Espérance Conditionnelle

L'espérance conditionnelle $E[X|\mathcal{F}_t]$ d'une variable aléatoire X par rapport à une tribu $\mathcal{F}_t$ est un concept central qui généralise l'idée de moyenne en tenant compte de l'information partielle disponible. Elle satisfait la relation fondamentale :

$$\int_A E[X|\mathcal{F}_t]dP = \int_A XdP, \quad \forall A \in \mathcal{F}_t$$

Cette définition abstraite cache une interprétation intuitive importante : l'espérance conditionnelle représente notre meilleure prédiction de X étant donné l'information disponible dans $\mathcal{F}_t$.
Elle possède des propriétés remarquables comme la linéarité et la tour des espérances conditionnelles:

- Linéarité : $E[aX + bY|\mathcal{F}_t] = aE[X|\mathcal{F}_t] + bE[Y|\mathcal{F}_t]$
- Tour des espérances : $E[E[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E[X|\mathcal{F}_s]$ pour $s \leq t$

3 Processus de Markov

3.1 Les Actions et la Propriété de Markov

Un processus (X_t) est dit de Markov s'il satisfait la propriété suivante :

$$P(X_{t+s} \in A|\mathcal{F}_t) = P(X_{t+s} \in A|X_t), \quad \forall A \in \mathcal{B}(R)$$

Cette propriété, fondamentale en théorie des probabilités, signifie que l'évolution future du processus ne dépend du passé qu'à travers le présent. En d'autres termes, toute l'information pertinente pour prédire le futur est contenue dans l'état présent.
Les implications pratiques de cette propriété sont nombreuses :

- Simplification des calculs de probabilités conditionnelles
- Réduction de la complexité des simulations numériques
- Base pour de nombreux modèles en physique et finance

3.2 Exemple d'un Processus de Markov : La Marche Aléatoire

Une marche aléatoire symétrique (S_n) est un exemple classique de processus de Markov discret. Elle est définie par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

où (X_i) sont des variables aléatoires i.i.d. telles que $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.
La marche aléatoire possède plusieurs propriétés remarquables :

- Elle est récurrente en dimensions 1 et 2
- Elle est transiente en dimension 3 et plus
- Sa variance croît linéairement avec le temps : $\text{Var}(S_n) = n$
- Elle converge après normalisation vers un mouvement brownien (théorème de Donsker)

4 Martingales

4.1 Définition et Propriétés

Une martingale (M_t) est un processus stochastique qui satisfait la relation :

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s, \quad \forall s \leq t$$

Cette définition encode plusieurs propriétés importantes :

- L'intégrabilité : $E[|M_t|] < \infty$ pour tout t
- L'adaptabilité : (M_t) est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$
- La propriété de martingale proprement dite

Les martingales sont fondamentales en finance mathématique car elles modélisent les jeux équitables et les prix d'actifs dans un marché efficient.

4.2 Exemple et Applications

Le mouvement brownien standard (W_t) est l'exemple canonique de martingale continue. Il satisfait :

$$E[W_t|\mathcal{F}_s] = W_s, \quad \forall s \leq t$$

Les applications des martingales incluent :

- La théorie de l'arbitrage en finance
- Les théorèmes de convergence en probabilités
- L'étude des temps d'arrêt optimaux
- La modélisation des jeux de hasard équitables

5 Mouvement Brownien

5.1 Mouvement Brownien avec Drift

Un mouvement brownien avec drift (X_t) est défini par :

$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

où μ est le drift et $\sigma > 0$ est la volatilité.
Les propriétés principales sont :

- Espérance : $E[X_t] = \mu t$
- Variance : $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 t$
- Continuité des trajectoires
- Non-dérivabilité des trajectoires presque partout

5.2 Processus Brownien Standard

Un processus brownien standard (W_t) satisfait quatre propriétés fondamentales :

1. $W_0 = 0$ presque sûrement
2. Les accroissements $W_t - W_s$ sont indépendants pour $s < t$
3. Les accroissements suivent une loi normale : $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$
4. Les trajectoires sont continues presque sûrement

Ces propriétés ont plusieurs conséquences importantes :

- La propriété de Markov
- La propriété de martingale
- L'invariance par changement d'échelle
- La récurrence en dimension 2 et moins

6 Applications en Finance

6.1 Mouvement des Prix des Actions

Dans le modèle Black-Scholes-Merton, les prix des actions suivent un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

avec solution explicite :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Ce modèle présente plusieurs avantages :

- Positivité des prix garantie
- Rendements log-normaux
- Simplicité mathématique
- Solution analytique pour de nombreuses options

6.2 Implémentation Numérique

La simulation utilise la méthode d'Euler-Maruyama :

```
import numpy as np

def simulate_brownian_motion_with_drift(mu, sigma, T, n):
    dt = T / n
    dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt), n)
    X = np.zeros(n + 1)
    t = np.linspace(0, T, n + 1)

    for i in range(n):
        X[i + 1] = X[i] + mu * dt + sigma * dW[i]
```

```
    return t, X

def simulate_gbm(S0, mu, sigma, T, n):
    dt = T / n
    dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt), n)
    S = np.zeros(n + 1)
    S[0] = S0
    t = np.linspace(0, T, n + 1)

    for i in range(n):
        S[i + 1] = S[i] * np.exp((mu - 0.5 * sigma**2) * dt
                                + sigma * dW[i])

    return t, S
```

7 Conclusion

Cette présentation des processus stochastiques couvre les concepts fondamentaux et leurs applications principales. Les processus décrits forment la base de nombreuses applications en finance quantitative, en physique statistique et en théorie des probabilités.

Modèle Black-Scholes-Merton

4

1 Introduction

Le **modèle Black-Scholes-Merton**, développé au début des années 1970 par les économistes **Fischer Black**, **Myron Scholes** et **Robert Merton**, représente une avancée majeure dans la théorie financière moderne. Ce modèle a révolutionné non seulement la tarification des options mais aussi l'ensemble de l'industrie financière.

1.1 Contexte Historique

Avant l'introduction de ce modèle, la tarification des options était principalement basée sur l'intuition et l'expérience des traders. Les méthodes existantes manquaient de fondements théoriques solides et conduisaient souvent à des incohérences dans les prix. Les travaux préliminaires de Louis Bachelier au début du 20ème siècle sur le mouvement brownien appliqué aux marchés financiers ont posé les bases mathématiques, mais c'est véritablement Black, Scholes et Merton qui ont développé un cadre cohérent et applicable.

1.2 Innovation et Impact

La contribution majeure du modèle réside dans plusieurs aspects révolutionnaires :

- **Couverture Dynamique** : Introduction du concept de couverture delta-neutre, permettant d'éliminer le risque directionnel
- **Absence d'Arbitrage** : Utilisation du principe d'absence d'opportunité d'arbitrage pour la détermination des prix
- **Solution Analytique** : Obtention d'une formule fermée pour la tarification des options européennes
- **Cadre Théorique** : Développement d'un cadre mathématique rigoureux pour l'évaluation des produits dérivés

1.3 Reconnaissance Académique

En 1997, Myron Scholes et Robert Merton ont reçu le prix Nobel d'économie pour leurs travaux. Fischer Black, décédé en 1995, n'a malheureusement pas pu recevoir cette distinction, le prix Nobel n'étant pas décerné à titre posthume. Leur contribution a été saluée pour avoir :

- Établi une nouvelle méthode de détermination de la valeur des produits dérivés
- Facilité une gestion plus efficace des risques financiers
- Stimulé la croissance de nouveaux instruments financiers
- Contribué à une plus grande efficience des marchés financiers

2 Hypothèses du Modèle Black-Scholes-Merton

2.1 Hypothèses sur le Marché

Marchés Parfaits

Le modèle suppose des marchés parfaits caractérisés par :

- **Absence de Frictions** : Pas de coûts de transaction, taxes ou autres frais
- **Divisibilité Parfaite** : Les actifs peuvent être achetés et vendus en n'importe quelle quantité, même fractionnaire
- **Liquidité Infinie** : Les transactions n'affectent pas les prix du marché
- **Trading Continu** : Les opérations peuvent être effectuées en continu et sans limitation

Conditions de Marché

- **Taux Sans Risque** : Existence d'un taux d'intérêt sans risque constant r pour emprunter et prêter
- **Ventes à Découvert** : Autorisation des ventes à découvert sans restriction ni coût supplémentaire
- **Absence d'Arbitrage** : Impossibilité de réaliser des profits sans risque supérieurs au taux sans risque

2.2 Hypothèses sur l'Actif Sous-jacent

Dynamique des Prix

Le prix de l'actif sous-jacent suit un **Mouvement Brownien Géométrique** caractérisé par :

- **Processus Continu** : Les variations de prix sont continues (pas de sauts)
- **Distribution Log-normale** : Les rendements logarithmiques suivent une distribution normale
- **Volatilité Constante** : La volatilité σ reste constante sur toute la durée de vie de l'option
- **Rendements Indépendants** : Les variations de prix sont indépendantes du passé

Autres Caractéristiques

- **Absence de Dividendes** : L'actif ne verse pas de dividendes pendant la durée de vie de l'option
- **Disponibilité Continue** : L'actif peut être négocié en continu sur le marché

3 Dérivation de l'Équation Différentielle Partielle

3.1 Équation Différentielle Stochastique (EDS) pour le prix de l'actif

Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit le **Mouvement Brownien Géométrique (GBM)** :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

où :

- S_t est le prix de l'actif au temps t,
- μ est le drift (rendement attendu) de l'actif,
- σ est la volatilité de l'actif,
- dW_t est l'incrément d'un processus de Wiener (ou mouvement brownien), représentant les fluctuations aléatoires du prix de l'actif.

Cette équation décrit l'évolution continue du prix de l'actif, où le premier terme représente la composante déterministe et le second terme représente le bruit stochastique.

3.2 Lemme d'Itô pour le prix de l'option

Soit $C(S_t, t)$ le prix d'une option d'achat européenne au temps t, avec le prix de l'actif sous-jacent S_t. Pour dériver l'équation de tarification, nous appliquons le **lemme d'Itô** au prix de l'option $C(S_t, t)$. Le lemme d'Itô pour une fonction $f(S_t, t)$ est donné par :

$$df(S_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}\, dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\, (dS_t)^2$$

Pour le prix de l'option $C(S_t, t)$, en appliquant le lemme d'Itô, on obtient :

$$dC(S_t, t) = \frac{\partial C}{\partial t}\, dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\, dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\, (dS_t)^2$$

En substituant l'expression pour $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$:

$$dC(S_t, t) = \frac{\partial C}{\partial t}\, dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\, (\mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\, \left(\sigma^2 S_t^2\, dt\right)$$

En simplifiant :

$$dC(S_t, t) = \frac{\partial C}{\partial t}\, dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\, \mu S_t\, dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\, \sigma S_t\, dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\, \sigma^2 S_t^2\, dt$$

3.3 Construction du Portefeuille Sans Risque

Nous construisons ensuite un portefeuille contenant Δ unités de l'actif et étant court sur une option d'achat. La valeur du portefeuille Π est :

$$\Pi = \Delta S_t - C(S_t, t)$$

Pour éliminer le risque dans ce portefeuille, il faut que sa valeur évolue de manière déterministe (sans composante stochastique). La différentielle de la valeur du portefeuille est :

$$d\Pi = \Delta\, dS_t - dC(S_t, t)$$

En substituant dS_t et $dC(S_t, t)$:

$$d\Pi = \Delta\, (\mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t) - \left(\frac{\partial C}{\partial t}\, dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\, \mu S_t\, dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\, \sigma S_t\, dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\, \sigma^2 S_t^2\, dt\right)$$

En regroupant les termes avec dt et dW_t :

$$d\Pi = \left(\Delta \mu S_t - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial S_t}\mu S_t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt + \left(\Delta \sigma S_t - \frac{\partial C}{\partial S_t}\sigma S_t\right) dW_t$$

3.4 Absence d'Arbitrage et Portefeuille Sans Risque

Pour que le portefeuille soit **sans risque**, le coefficient de dW_t doit s'annuler, car il représente les fluctuations aléatoires du prix de l'actif. Nous posons donc :

$$\Delta \sigma S_t = \frac{\partial C}{\partial S_t} \sigma S_t$$

En résolvant pour Δ :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_t}$$

Maintenant, les termes restants dans $d\Pi$ doivent donner le rendement déterministe, qui est égal au taux sans risque r. Ainsi, la différentielle de la valeur du portefeuille est :

$$d\Pi = r\Pi dt$$

En substituant la valeur du portefeuille $\Pi = \Delta S_t - C(S_t, t)$ dans cette équation :

$$r\left(\Delta S_t - C(S_t, t)\right) dt = \left(\Delta \mu S_t - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial S_t} \mu S_t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2\right) dt$$

En substituant $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_t}$ dans l'équation :

$$r\left(\frac{\partial C}{\partial S_t} S_t - C(S_t, t)\right) dt = \left(\frac{\partial C}{\partial S_t} \mu S_t - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial S_t} \mu S_t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2\right) dt$$

En simplifiant :

$$rC(S_t, t) = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S_t}$$

$$0 = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + (r - \mu) S_t \frac{\partial C}{\partial S_t}$$

Ainsi, l'**Équation Différentielle Partielle de Black-Scholes** est :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r - \mu) S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = 0$$

Cette équation différentielle partielle décrit l'évolution du prix de l'option $C(S_t, t)$ dans le temps.

4 Formule Black-Scholes pour les Options Call/Put

Le prix d'une option d'achat européenne au temps t est donné par la formule Black-Scholes :

$$f(S_t, t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

où :

- $f(S_t, t)$ est le prix de l'option,
- S_t est le prix actuel de l'actif sous-jacent,
- K est le prix d'exercice de l'option,
- r est le taux d'intérêt sans risque,

- T est le temps à maturité,
- $N(\cdot)$ est la fonction de distribution cumulative (CDF) de la loi normale standard.

Les termes d_1 et d_2 sont définis comme suit :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

où :

- σ est la volatilité de l'actif sous-jacent.

Ainsi, le prix exact de l'option d'achat est :

$$f(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

5 Les Grecs : Définitions et Formules

Les **Grecs** sont des outils clés de gestion des risques pour les traders d'options. Ils représentent la sensibilité du prix d'une option à divers facteurs tels que le prix de l'actif sous-jacent, le temps à maturité, la volatilité et les taux d'intérêt. Dans cette section, nous définirons chacun des Grecs et fournirons leurs formules respectives.

5.1 Delta (Δ)

Définition : Delta mesure la sensibilité du prix d'une option aux variations du prix de l'actif sous-jacent. Autrement dit, il représente le taux de changement du prix de l'option par rapport à un petit changement du prix de l'actif sous-jacent. Delta est la première dérivée du prix de l'option par rapport au prix de l'actif sous-jacent. Pour une option d'achat, Delta est positif, car le prix de l'option augmente avec le prix de l'actif sous-jacent. Pour une option de vente, Delta est négatif, car le prix de l'option diminue lorsque le prix de l'actif sous-jacent augmente.
Formule : Pour une option d'achat européenne :

$$\Delta = \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial S_t} = N(d_1)$$

Pour une option de vente européenne :

$$\Delta = N(d_1) - 1$$

Où :

- $f(S_t, t)$ est le prix de l'option,
- S_t est le prix actuel de l'actif sous-jacent,
- d_1 est l'un des termes de la formule Black-Scholes,
- $N(d_1)$ est la fonction de distribution cumulative (CDF) de la loi normale standard.

Interprétation :

- Pour une option d'achat, $\Delta = N(d_1)$ indique de combien le prix de l'option va changer pour un changement de 1 unité du prix de l'actif sous-jacent.
- Pour une option de vente, $\Delta = N(d_1) - 1$, qui est la sensibilité du prix de l'option aux variations du prix de l'actif sous-jacent.

5.2 Gamma (Γ)

Définition : Gamma mesure le taux de changement de Delta par rapport aux variations du prix de l'actif sous-jacent. Autrement dit, Gamma nous dit de combien Delta va changer lorsque le prix de l'actif sous-jacent change. Gamma est la deuxième dérivée du prix de l'option par rapport au prix de l'actif sous-jacent. Gamma est toujours positif pour les options d'achat et de vente, car le taux de changement de Delta est toujours convexe.
Formule : Pour les options d'achat et de vente :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 f(S_t, t)}{\partial S_t^2} = \frac{N'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$$

Où :

- $N'(d_1)$ est la fonction de densité de probabilité (PDF) de la loi normale standard évaluée en d_1,
- S_t est le prix actuel de l'actif sous-jacent,
- σ est la volatilité de l'actif sous-jacent,
- $T-t$ est le temps à maturité.

Interprétation :

- Gamma représente la convexité du prix de l'option par rapport au prix de l'actif sous-jacent. Un Gamma élevé signifie que Delta est plus sensible aux mouvements de prix de l'actif sous-jacent.

5.3 Theta (Θ)

Définition : Theta mesure la sensibilité du prix de l'option au passage du temps, appelé décroissance temporelle. Il représente le taux auquel la valeur de l'option change lorsque le temps à maturité diminue, toutes autres choses étant égales. Avec le temps, la valeur de l'option diminue généralement en raison de la décroissance temporelle.
Formule : Pour une **option d'achat**, la formule pour Theta est :

$$\Theta_{\text{call}} = -\frac{S_t N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Pour une **option de vente**, la formule pour Theta est :

$$\Theta_{\text{put}} = -\frac{S_t N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

Où :

- S_t est le prix actuel de l'actif sous-jacent,
- $N'(d_1)$ est la fonction de densité de probabilité (PDF) de la loi normale standard évaluée en d_1,
- σ est la volatilité de l'actif sous-jacent,
- T est le temps à maturité,
- t est le temps actuel,
- K est le prix d'exercice de l'option,

- r est le taux d'intérêt sans risque,
- $N(d_2)$ est la fonction de distribution cumulative (CDF) de la loi normale standard évaluée en d_2,
- $N(-d_2)$ est la CDF de la loi normale standard évaluée en $-d_2$.

Interprétation :

- Theta représente la quantité par laquelle le prix d'une option diminue lorsque le temps passe, avec toutes les autres variables inchangées. Le Theta pour une option d'achat est généralement négatif, ce qui signifie que le prix de l'option diminue avec le temps. Pour les options de vente, Theta est également négatif, mais le taux de décroissance est affecté par la direction de la valeur intrinsèque de l'option.

5.4 Vega (ν)

Définition : Vega mesure la sensibilité du prix de l'option aux variations de la volatilité de l'actif sous-jacent. La volatilité est un déterminant clé du prix d'une option, et Vega permet aux traders d'évaluer comment les fluctuations de volatilité affectent la valeur de l'option.
Formule : Pour les options d'achat et de vente :

$$\nu = \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{T-t} N'(d_1)$$

Où :

- $N'(d_1)$ est la fonction de densité de probabilité (PDF) de la loi normale standard évaluée en d_1,
- S_t est le prix actuel de l'actif sous-jacent,
- σ est la volatilité de l'actif sous-jacent,
- $T-t$ est le temps à maturité.

Interprétation :

- Vega montre de combien le prix de l'option va changer pour une variation de 1

5.5 Rho (ρ)

Définition : Rho mesure la sensibilité du prix de l'option aux variations du taux d'intérêt sans risque. Il montre comment le prix de l'option va changer lorsque le taux d'intérêt change, toutes autres choses étant égales.
Formule : Pour une option d'achat européenne :

$$\rho = \frac{\partial f(S_t, t)}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Pour une option de vente européenne :

$$\rho = -K(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Où :

- r est le taux d'intérêt sans risque,
- K est le prix d'exercice de l'option,

- $T - t$ est le temps à maturité,
- $N(d_2)$ est la fonction de distribution cumulative (CDF) de la loi normale standard évaluée en d_2.

Interprétation :

- Rho nous dit à quel point le prix de l'option est sensible aux variations du taux d'intérêt. Un Rho positif signifie que le prix de l'option d'achat augmentera avec une augmentation du taux d'intérêt, tandis qu'un Rho négatif signifie que le prix de l'option de vente augmentera lorsque le taux d'intérêt augmente.

6 Conclusion

Ce chapitre présente le modèle Black-Scholes-Merton de manière générale. Bien que les hypothèses initiales puissent sembler simplistes, soulignant la nécessité de considérations plus complexes, le résultat final reste pertinent même si les hypothèses de départ sont moins réalistes. La dérivation est présentée avec un certain degré d'informalité, malgré l'existence d'approches plus formelles, notamment celles basées sur l'évaluation neutre en risque. De plus, les Grecs—Delta (Δ), Gamma (Γ), Vega (ν), Theta (Θ) et Rho (ρ)—sont des composants essentiels du modèle. Ils représentent la sensibilité du prix de l'option à divers facteurs tels que le prix de l'actif sous-jacent, la volatilité, la décroissance temporelle et les taux d'intérêt. Chaque Greek joue un rôle crucial dans la gestion des risques et aide les traders et les gérants de portefeuilles à prendre des décisions plus informées concernant la tarification des options, la couverture et l'exposition globale aux risques. La compréhension et le calcul des Grecs complètent donc le modèle Black-Scholes-Merton, offrant des insights plus approfondis sur la dynamique de la tarification des options.

5

Simulation de Monte Carlo

1 Introduction

La simulation de Monte Carlo est une technique statistique puissante utilisée pour modéliser et résoudre des problèmes impliquant de l'incertitude ou du hasard. Inspirée par le casino de Monte Carlo à Monaco, cette méthode repose sur un échantillonnage aléatoire répété pour obtenir des résultats numériques. En finance, elle est particulièrement précieuse pour modéliser des systèmes complexes tels que l'évaluation des options, où les prix des actifs sous-jacents sont influencés par divers facteurs imprévisibles.
Dans le contexte de l'évaluation des options, les méthodes de Monte Carlo simulent les trajectoires futures des prix des actifs pour estimer la valeur correspondante de l'option. Ces simulations génèrent un grand nombre de chemins aléatoires pour l'actif sous-jacent, permettant ainsi de calculer la valeur moyenne de l'option à maturité en considérant différentes conditions de marché potentielles. La méthode de Monte Carlo est particulièrement utile lorsque les modèles mathématiques classiques, comme le modèle Black-Scholes-Merton, ne capturent pas pleinement les complexités du monde réel, telles que la volatilité changeante ou les distributions non lognormales des prix.

2 Hypothèses clés pour la simulation de Monte Carlo

Avant d'appliquer la simulation de Monte Carlo à l'évaluation des options, il est essentiel de comprendre les hypothèses fondamentales sur lesquelles repose cette méthode :

- Le prix de l'actif suit un mouvement brownien géométrique (GBM), ce qui signifie qu'il évolue selon une équation différentielle stochastique spécifique.
- Il existe un taux sans risque constant utilisé pour actualiser les flux de trésorerie futurs.
- La volatilité de l'actif est constante pendant toute la durée de vie de l'option.
- Les marchés sont efficients, c'est-à-dire que les prix reflètent toutes les informations disponibles.
- Il n'existe aucune opportunité d'arbitrage.

Ces hypothèses simplifient le cadre théorique mais permettent d'obtenir des estimations raisonnables des prix des options.

3 Solution de l''Equation Différentielle Stochastique (EDS)

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante modélisant un mouvement brownien géométrique (GBM) :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{5.1}$$

ou S_t représente le prix de l'actif à l'instant t, μ est le taux de rendement espéré, σ est la volatilité et W_t est un mouvement brownien standard.

3.1 Preuve de la Solution de l'EDS

Appliquons le lemme d'Itô à la fonction $f(S_t) = \ln S_t$. En utilisant la règle d'Itô :

$$d(\ln S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(\sigma^2 S_t^2 dt). \tag{5.2}$$

En substituant l'expression de dS_t donnée par l'EDS :

$$d(\ln S_t) = \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \tag{5.3}$$

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t. \tag{5.4}$$

Intégrons des deux côtés de $t = 0$ à $t = T$:

$$\ln S_T - \ln S_0 = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int_0^T \sigma dW_t. \tag{5.5}$$

$$\ln S_T = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma W_T. \tag{5.6}$$

Par exponentiation, la solution explicite est :

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma W_T\right]. \tag{5.7}$$

3.2 Discrétisation du temps et résolution des EDS

Considérons l'EDS générale :

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0$$

La résolution numérique par le schéma d'Euler-Maruyama se décompose comme suit :
1. Partition de l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles : $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ 2. Pas de temps : $\Delta t = \frac{T}{N}$ 3. Approximation itérative :

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)\Delta t + b(t_k, X_k)\sqrt{\Delta t} Z_{k+1}$$

où $Z_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
Le schéma de Milstein, d'ordre supérieur, s'écrit :

$$X_{k+1} = X_k + a\Delta t + b\Delta W + \frac{1}{2} b \frac{\partial b}{\partial x}[(\Delta W)^2 - \Delta t]$$

L'erreur forte de ces schémas est caractérisée par :

$$E[|X_T - X_N|^2]^{1/2} \leq C\Delta t^\gamma$$

où $\gamma = 0.5$ pour Euler-Maruyama et $\gamma = 1$ pour Milstein.

3.3 Estimation de l'erreur

L'erreur globale ϵ se décompose en :

$$\epsilon = \epsilon_{disc} + \epsilon_{MC}$$

où ϵ_{disc} est l'erreur de discrétisation et ϵ_{MC} l'erreur Monte Carlo.
L'intervalle de confiance à 95

$$[\hat{\mu} - 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}]$$

où $\hat{\mu}$ est la moyenne empirique et $\hat{\sigma}^2$ la variance empirique :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2$$

4 Méthode des Variables Antithétiques

4.1 Principe des variables antithétiques

Pour une fonction f et une variable aléatoire X, l'estimateur antithétique est :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}[f(X_i) + f(-X_i)]$$

La variance de cet estimateur est :

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{4n}[Var(f(X)) + Var(f(-X)) + 2Cov(f(X), f(-X))]$$

4.2 Variables antithétiques multidimensionnelles

Pour un vecteur gaussien Z, la transformation optimale s'écrit :

$$\tilde{Z} = -\Sigma^{-1/2}\Sigma^{1/2}Z = -Z$$

L'estimateur multidimensionnel devient :

$$\hat{\theta}_m = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}[f(Z_i) + f(\tilde{Z}_i)]$$

5 Méthode des Variables de Contrôle

5.1 Principe des variables de contrôle

Soit Y la variable d'intérêt et X la variable de contrôle, l'estimateur avec contrôle s'écrit :

$$Y_c = Y - \beta(X - E[X])$$

La variance de cet estimateur est :

$$Var(Y_c) = Var(Y) + \beta^2 Var(X) - 2\beta Cov(Y, X)$$

Le coefficient optimal β^* minimisant cette variance est :

$$\beta^* = \frac{Cov(Y, X)}{Var(X)}$$

5.2 Variables de contrôle multiples

Pour un vecteur de variables de contrôle $X = (X_1, \ldots, X_p)$, l'estimateur devient :

$$Y_c = Y - \beta^T(X - E[X])$$

Le vecteur optimal β^* est donné par :

$$\beta^* = \Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}$$

où :

$$\Sigma_{XX} = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_p) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p, X_1) & Cov(X_p, X_2) & \cdots & Var(X_p) \end{pmatrix}$$

et :

$$\Sigma_{XY} = \begin{pmatrix} Cov(X_1, Y) \\ Cov(X_2, Y) \\ \vdots \\ Cov(X_p, Y) \end{pmatrix}$$

La variance de l'estimateur multiple est alors :

$$Var(Y_c) = Var(Y) - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}$$

6 Application à l'évaluation d'options

Pour une option d'achat européenne, le payoff est :

$$C_T = \max(S_T - K, 0)$$

où S_T suit le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

La solution analytique est :

$$S_T = S_0 \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T\right)$$

L'estimateur Monte Carlo du prix est :

$$\hat{C}_0 = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(S_T^{(i)} - K, 0)$$

Avec variables de contrôle, l'estimateur devient :

$$\hat{C}_0^c = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\max(S_T^{(i)} - K, 0) - \beta(S_T^{(i)} - S_0e^{rT})]$$

6 Volatilité Implicite

1 Introduction

La volatilité implicite (VI) est un concept clé dans la tarification des options. Elle représente l'estimation du marché quant à la volatilité future d'un actif sous-jacent en fonction du prix de ses options. Contrairement à la volatilité historique, qui est mesurée à partir des données passées, la VI est déduite des prix de marché actuels des options. Ce chapitre explore les fondements mathématiques de son calcul, en particulier l'utilisation de la méthode numérique **fsolve** pour résoudre les équations non linéaires associées.

2 Définition Mathématique

La volatilité implicite est définie comme la valeur de σ qui satisfait l'équation suivante :

$$C_{\text{marché}} = C_{\text{Black-Scholes}}(S_0, K, T, r, \sigma_{\text{VI}})$$

où :

- $C_{\text{marché}}$ est le prix observé du marché de l'option.
- $C_{\text{Black-Scholes}}$ est le prix théorique donné par le modèle Black-Scholes-Merton.
- S_0 est le prix actuel de l'actif sous-jacent.
- K est le prix d'exercice.
- T est le temps jusqu'à l'échéance.
- r est le taux d'intérêt sans risque.
- σ_{VI} est la volatilité implicite à déterminer.

Cette équation n'admet pas de solution analytique explicite en σ, ce qui nécessite une résolution numérique.

3 Formulation en Problème de Minimisation

Déterminer la volatilité implicite revient à trouver la racine de la fonction résiduelle :

$$f(\sigma) = C_{\text{Black-Scholes}}(S_0, K, T, r, \sigma) - C_{\text{marché}}$$

On cherche donc σ^* tel que :

$$f(\sigma^*) = 0$$

Mathématiquement, ceci revient à minimiser la norme de l'écart :

$$\min_{\sigma} |C_{\text{Black-Scholes}}(S_0, K, T, r, \sigma) - C_{\text{marché}}|$$

Puisque la fonction $C_{\text{Black-Scholes}}$ est strictement croissante en σ, une racine unique existe si $C_{\text{Black-Scholes}}(S_0, K, T, r, 0) < C_{\text{marché}}$.

4 Méthode de Résolution : fsolve

La fonction **fsolve**, issue des algorithmes de résolution numérique de type Newton généralisé, est utilisée pour trouver σ tel que :

$$f(\sigma) = 0$$

4.1 Justification Théorique

fsolve repose sur des méthodes de type Newton-Kantorovich qui garantissent la convergence sous certaines conditions. En particulier :

1. La fonction $f(\sigma)$ doit être continue et différentiable sur R^+.
2. L'hypothèse de Lipschitz sur $f'(\sigma)$ garantit une convergence quadratique locale.
3. Si $f'(\sigma)$ est proche de zéro, la convergence peut être lente (effet de platitude).

4.2 Application Numérique

Considérons les paramètres suivants :

- $S_0 = 100$, le prix de l'actif sous-jacent.
- $K = 105$, le prix d'exercice.
- $T = 0.5$, le temps restant avant l'échéance.
- $r = 0.02$, le taux sans risque.
- $C_{\text{marché}} = 4.50$, le prix de l'option d'achat observé.

Nous cherchons σ qui annule $f(\sigma)$. En utilisant **fsolve**, on obtient :

$$\sigma_{\text{fsolve}} = 0.25 \text{ (soit 25\% de volatilité annualisée)}$$

5 Conclusion

L'estimation de la volatilité implicite est essentielle pour la tarification des options et la gestion des risques. Ce chapitre a présenté la méthodologie mathématique sous-jacente à la résolution de l'équation de Black-Scholes en σ. La méthode **fsolve** offre une solution efficace pour ce problème en minimisant l'écart entre les prix théoriques et les prix de marché. En comprenant la nature du problème sous forme d'optimisation et les conditions de convergence, on peut affiner les estimations initiales et améliorer la rapidité de calcul.

Implémentation des Modèles à l'Aide de Python, Flask et Technologies Web

7

1 Introduction

Cette section détaille l'implémentation des modèles de pricing d'options à l'aide de Python, Flask et des technologies web. Les modèles ont été implémentés en Python, intégrés dans une application web à l'aide de Flask, et testés en termes de précision et de vitesse de convergence.

2 Pile Technologique

L'implémentation a utilisé les technologies suivantes :

- **Python** : Pour implémenter les modèles Arbre Binomial, Black-Scholes-Merton et Monte Carlo.
- **Flask** : Un framework web léger pour intégrer les modèles Python dans une application web.
- **HTML/CSS** : Pour concevoir l'interface utilisateur de l'application web.
- **JavaScript** : Pour améliorer l'interaction utilisateur et le contenu dynamique sur le frontend.

3 Implémentation du Modèle Black-Scholes-Merton

Le modèle Black-Scholes-Merton a été implémenté pour calculer les prix des options européennes. Les composants clés incluaient :

- La formule Black-Scholes pour les options d'achat et de vente.
- Le calcul des Grecs (Delta, Gamma, Theta, Vega, Rho).

4 Implémentation de la Simulation de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo a été implémentée avec les fonctionnalités suivantes :

- Simulation des trajectoires de prix des actifs à l'aide du mouvement brownien géométrique.
- Réduction de variance à l'aide de variables antithétiques.
- Calcul des prix des options basé sur les trajectoires simulées.

5 Intégration dans une Application Web

Les modèles Python ont été intégrés dans une application web à l'aide de Flask :

- **Frontend** : HTML/CSS et JavaScript pour la saisie utilisateur et l'affichage des résultats.
- **Backend** : Routes Flask pour gérer les requêtes utilisateur, appeler les fonctions Python et retourner les résultats.
- **Interface Utilisateur** : Champs de saisie pour les paramètres des options (par exemple, prix d'exercice, volatilité) et boutons pour déclencher les calculs.

6 Test et Validation

Les modèles implémentés ont été rigoureusement testés :

- **Tests Unitaires** : Le framework `unittest` de Python a été utilisé pour tester les fonctions individuelles.
- **Validation** : Les résultats ont été comparés avec des valeurs connues issues de calculateurs financiers et de la littérature.
- **Vitesse de Convergence** : La simulation de Monte Carlo a été testée pour sa vitesse de convergence, en comparant les résultats avec et sans variables antithétiques.

7 Conclusion

L'implémentation a réussi à intégrer les modèles Arbre Binomial, Black-Scholes-Merton et Monte Carlo dans une application web. Les tests ont confirmé la précision et l'efficacité des modèles, avec une amélioration notable de la convergence de la simulation de Monte Carlo grâce aux variables antithétiques. Des travaux futurs pourraient inclure l'ajout de plus de modèles de pricing et l'optimisation des performances computationnelles.

Bibliography

Black-Scholes-Merton Model

- Black, Fischer, and Scholes, Myron (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy.
  The foundational paper that introduced the Black-Scholes model, detailing its assumptions, derivation, and closed-form solution for European options.
- Merton, Robert C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science.
  Provides extensions to the Black-Scholes framework, offering a more comprehensive derivation using continuous-time finance and risk-neutral valuation.
- Hull, John C. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 11th Edition.
  This textbook covers the Black-Scholes model in depth, including its application, limitations, and numerical methods for option pricing.

Greeks and Sensitivities

- Wilmott, Paul (2006). *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*. 2nd Edition.
  Offers detailed explanations and interpretations of the Greeks (Delta, Gamma, Vega, Theta, and Rho), including their practical applications for hedging.
- Natenberg, Sheldon (1994). *Option Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques*.
  Focuses on volatility and the Greeks, providing insights into how these metrics are used in options trading strategies.

Monte Carlo Simulation

- Glasserman, Paul (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*.
  Comprehensive resource on Monte Carlo techniques, detailing their use in option pricing, model assumptions, and convergence properties.
- Jäckel, Peter (2002). *Monte Carlo Methods in Finance*.
  Provides practical implementations of Monte Carlo simulation methods for pricing complex derivatives.

Implied Volatility

- Hull, John C. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 11th Edition.
  Includes detailed discussions on implied volatility, iterative methods like Newton-Raphson for estimation, and regression techniques using OLS.
- Wilmott, Paul (2006). *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*. 2nd Edition.
  Discusses numerical techniques for solving nonlinear equations related to implied volatility.
- Christoffersen, Peter (2012). *Elements of Financial Risk Management*.
  Provides a clear explanation of OLS regression for implied volatility surface estimation and the use of iterative methods like Newton-Raphson.