補間方法 2:曲線のあてはめ

アギレ・エルナン

信州大学　電子情報システム工学部

数値計算

22/05/2023

曲線のあてはめ

実験や観測等によって 2 変数に関するデータが得られているとき、それらを座標にもつ点 (x,y) を平面上にプロットし、それらの点あるいは近くを通るなめらかな曲線を求めることを、曲線のあてはめという。

スプライン関数 1/4

- 平面上にいくつの点が与えられたとき、それらの点を通るなめらかな曲線を描きたいとしよう。
- 製図では雲形定規を使って描くことになるが、このような曲線を数式でとらえようとして考えられたのが、スプライン (spline) 関数である。

- スプライン関数とは、いくつの隣合う区間の上で定義された同じ次数の多項式を、それらがいくつの連続条件を満たすようにつなぎ合わせてできる区分的多項式のことである。
- 素の多項式次数が n 次のとき、n 次のスプライン関数という。
- それぞれの多項式のつなぎ目を節点という。

スプライン関数 2/4

- xy 平面上に n+1 個のデータ点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ が与えられているとする。 ただし、$x_{j-1} < x_j, (j = 1, 2, \dots, n)$ とする。
- これらの x_j を端点にもつ n 個の小区間 $I_j = [x_{j-1}, x_j], (j = 1, 2, \dots, n)$ の上で次の条件 (A),(B) を満たす３次関数 $S_j(x)$ を考える。

(A) $S_j(x)$ はその区間 I_j の両端でデータ点を通る。すなわち、

$$S_j(x_{j-1}) = y_{j-1}$$

$$S_j(x_j) = y_j$$

(B) 隣合う関数はその節点で 2 次の微分係数まで一致する。すなわち、

$$S_j'(x_j) = S_{j+1}'(x_j)$$

$$S_j''(x_j) = S_{j+1}''(x_j)$$

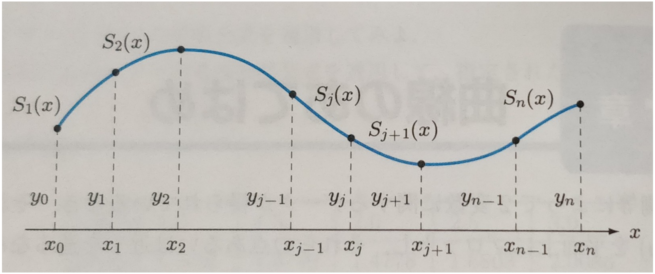
スプライン関数 3/4

これらの $S_j(x)$ をつないで、区間 $[x_0, x_n]$ 上の関数 $S(x)$ を次のように定める

$$S(x) = S_j(x), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

この $S(x)$ を、(3 次の) スプライン関数という。

- (A) はスプライン関数区間 $[x_0, x_n]$ で連続であることを要求している。
- (B) はスプライン関数の 1 次、2 次導関数が区間 $[x_0, x_n]$ で連続になることを要求している。



スプライン関数 4/4

- それは、そのつなぎ目での接続がきわめてなめらかになるようにという条件にほかならない。
- スプライン関数 $S(x)$ を構成する区間 I_j 上の 3 次関数 $S_j(x), (j = 1, 2, \ldots, n)$ を求めよう。

$$S_j(x) = A_j(x - x_{j-1})^3 + B_j(x - x_{j-1})^2 + C_j(x - x_{j-1}) + D_j,$$

A_j, B_j, C_j, D_j は定数、$(j = 1, 2, \ldots, n)$

スプライン関数の定め方 (1 次係数法）1/2

xy 平面上に $n+1$ 個データ点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ を与えられているとする、ただし、$x_{j-1} < x_j, (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする。このとき、名区間 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ 上の関数 $S_j(x)$ を

$$S_j(x) = A_j(x - x_{j-1})^3 + B_j(x - x_{j-1})^2 + C_j(x - x_{j-1}) + D_j,$$

とおき、次の記法を用いる。

$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad u_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$

名係数は次のようにして定める。

スプライン関数の定め方 (1 次係数法) 2/2

(1) **定数項**: $D_j = y_{j-1}$
(2) 1 **次の係数**: x_0, x_n **における接続の傾き** C_1, C_{n+1} **を適当に定め、**1 **次係数に関する連立方程式**
$h_j C_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)C_j + h_{j-1}C_{j+1} = 3(h_j u_{j-1} + h_{j-1}u_j)$ **から**
$C_2, C_3, \ldots, C_n$ **を求める。**
(3) 2 **次の係数**:$B_1, B_2, \ldots, B_n$ **の値は次の式で定める。**

$$B_j = \frac{3u_j - 2C_j - C_{j+1}}{h_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

(4) 3 **次の係数**:$A_1, A_2, \ldots, A_n$ **の値は次の式で定める。**

$$A_j = \frac{u_j - h_j B_j - C_j}{h_j^2} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

これらの $S_j(x)$ **をつないでスプライン関数** $S(x)$ **が得られる。**

スプライン関数の定め方 (2 次係数法）1/2

xy 平面上に $n+1$ 個データ点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ を与えられているとする、ただし、$x_{j-1} < x_j, (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする。このとき、名区間 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ 上の関数 $S_j(x)$ を

$$S_j(x) = A_j(x - x_{j-1})^3 + B_j(x - x_{j-1})^2 + C_j(x - x_{j-1}) + D_j,$$

とおき、次の記法を用いる。

$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad u_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$

スプライン関数の定め方 (2 次係数法) 2/2

名係数は次のようにして定める。

1. 定数項: $D_j = y_{j-1}$
2. ２次の係数: x_0, x_n における B_1, B_{n+1} の値を適当に定め、2 次係数に関する連立方程式
   $h_j B_j + 2(h_j + h_{j+1})B_{j+1} + h_{j+1}B_{j+2} = 3(u_{j-1} - u_j)$ から
   $B_2, B_3, \ldots, B_n$ を求める。
3. 3 次の係数:$A_1, A_2, \ldots, A_n$ の値は次の式で定める。

$$A_j = \frac{B_{j+1} - B_j}{3h_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

4. 1 次の係数:$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の値は次の式で定める。

$$C_j = u_j - h_j^2 A_j - h_j B_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

これらの $S_j(x)$ をつないでスプライン関数 $S(x)$ が得られる。

例題 - 次のデータからスプライ関数を求めよ

解：例題資料.pdf を読んでください。

x	0.0	1.0	1.5	2.0	3.0
y	2.0	4.0	3.0	1.0	2.0

全区間の左端点における 1 次微分係数は $= 5$

全区間の右端点における 1 次微分係数は $= 3$

x 座標の範囲を何等分して補間値を求めますか？ 12

スプライ関数

x	0.0	1.0	1.5	2.0	3.0
y	2.0	4.0	3.0	1.0	2.0