

通信システム実験 2 待ち行列シミュレーション

21T2166D 渡辺大樹

2023 年 11 月 8 日

1 実験内容

本実験ではネットワークにおけるパケット通信のレスポンスなどに用いられる待ち行列理論をバスの運行シミュレーションを通してその理論の体験、理解を進める目的で行う。

実験 1 ではベルヌーイ過程を、実験 2 ではポアソン過程をシミュレーション、理解し、これらを用いて実験 3 でバスの運行シミュレーションを行う。

2 レポート課題

以下にレポート課題の解答を示す。

レポート課題 1.1

確率変数 Z の分布関数 $F_Z(x)$ を密度関数 $f_Z(x)$ で表すと

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) dx \quad (1)$$

となる。

レポート課題 1.2

到着確率の期待値が $\frac{\delta}{p}$ となることを示す。

タイムスロットの間隔を δ , 各スロットでの到着確率を p としたときの到着間隔の期待値を求める。到着間隔の確率変数を Z , 確率を $P_Z(n)$ とすると $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して確率 $P_Z(n)$ は

$$\begin{aligned} P_Z(1) &= p \\ P_Z(2) &= p(1-p) \\ P_Z(3) &= p(1-p)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

となる。期待値の式は確率変数とその時の確率を掛け合わせ、

$$E[Z] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta \cdot P_Z(n) \quad (3)$$

となる。

この式に先ほどの確率 $P_Z(n)$ の一般化した式を代入することで

$$E[Z] = \delta p \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} \quad (4)$$

という式が得られる。

ここでシグマの中身を部分和として計算していく。

$$S_n = \sum_{k=1}^n k(1-p)^{k-1} \quad (5)$$

とする。 S_n に $(1-p)$ を掛け算すると

$$(1-p)S_n = \sum_{k=1}^n k(1-p)^k \quad (6)$$

となる。(5) から (6) を引き算すると

$$pS_n = \sum_{k=1}^{n+1} (1-p)^{k-1} \quad (7)$$

という式が得られる。この式は初項 1 公比 $(1-p)$ の等比数列の和となるため公式を用いて計算すると

$$pS_n = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p} \quad (8)$$

となる。すなわち S_n は

$$S_n = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p^2} \quad (9)$$

となる。

S_n は部分和のため n について極限をとることで

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{1}{p^2} \quad (10)$$

となる。これを (4) 式に代入しなおすことで

$$E[Z] = \frac{\delta}{p} \quad (11)$$

が得られる。これにより題意は示された。

レポート課題 1.3

10 面サイコロの 0 9 の目をすべて出すために必要なサイコロを振る回数の平均を求める。これはサイコロを振る回数の期待値を求めることでその題意が求まるため、