インテリジェントシステム レポート課題 2

21T2166D 渡辺大樹

2023 年 7 月 10 日

1

成立するものは (a),(c),(d),(e) である。

誤っているのは (b),(f) となる。(b) は $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{\sum_y P(X|Y=y)}$ ではなく、$P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$ のため $P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{\sum_x P(X=x|Y)}$ が正しい。

(f) は $P(X_1, X_2, \cdots, X_n) = P(X_n) \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i|X_n, \cdots, X_{n-i+1})$ が与えられている。$n = 3$ のときを考えてみると与式は $P(X_1, X_2, X_3) = P(X_3)P(X_1|X_3)P(X_2|X_1)$ となり、ベイズの定理から式変形すると $P(X_1, X_2, X_3) = \frac{P(X_1,X_3)P(X_2,X_1)}{P(X_1)}$ となる。この式は確率変数 X がそれぞれ独立のときのみ成り立つため、一般に成り立つとは言えない。

2

(a)

$$P(\neg b) = 0.45$$

(b)

$$P(c) = 0.30$$

(c)

$$\begin{aligned} P(c|d) &= \frac{P(c,d)}{P(d)} \\ &= \frac{0.3}{0.8} \\ &= 0.37 \end{aligned}$$

(d)

$$P(a|d) = \frac{P(a,d)}{P(d)}$$

ここで $P(a, C, d) = P(a)P(C|a)P(d|C)$ より、

$$\begin{aligned} P(a, d) &= \sum_C P(a)P(C|a)P(d|C) \\ &= P(a)P(c|a)P(d|c) + P(a)P(\neg c|a)P(d|\neg c) \\ &= 0.298 \end{aligned}$$

したがって

$$P(a|d) = 0.37$$

3

(c),(d)

4

ややこしいのでノード集合を $\mathbb{C}$ で表す。
(a)$P(A, B) = P(A)P(B)$ を示す。

.

$C \notin \mathbb{C}$ より

$$\begin{aligned} P(A, B) &= \sum_C P(A, B, C) \\ &= \sum_C \frac{P(A)P(B)P(C|A, B)}{P(C)} \\ &= P(A)P(B) \sum_C \frac{P(C)}{P(C|A, B)} \end{aligned}$$

ここで $\sum_C \frac{P(C)}{P(C|A,B)} = 1$ より

$$P(A, B) = P(A)P(B)$$

証明終了

(b) 条件付き独立のため、$P(B, C|A) = P(B|A)P(C|A)$ を示す。

.

$A \in \mathbb{C}$ より

$$P(A,B,C) = P(A)P(B|A)P(C|A)$$
$$P(B,C|A) = \frac{P(A,B,C)}{P(A)}$$

$P(A,B,C) = P(A)P(B|A)P(C|A)$ を代入して

$$= P(B|A)P(C|A)$$

証明終了

(c) 条件付き独立 $P(A,C|B) = P(A|B)P(C|B)$ を示す。

.

$B \in \mathbb{C}$ より

$$P(A,B,C) = P(A)P(B|A)P(C|B)$$
$$P(A,C|B) = \frac{P(A)P(B|A)P(C|B)}{P(Y)}$$

ここで $P(A)P(B|A) = P(A,B)$ より

$$= \frac{P(A,B)}{P(B)}P(C|B)$$
$$= (A|B)P(C|B)$$

証明終了

5

(a)$P(A,B,C,D,E,F,G) = P(A)P(B)P(C|A)P(D|A,B)P(E|D)P(F|D)P(G|C,E)$
(b)A,B,f
(c)G,E,f

6

(a):

$$P(X_1, X_2, \cdots, X_n, Y) = P(Y)\prod_{i=1}^{n} P(X_i|Y)$$

(b):i が適切である。X_1, X_n は $X_2, X_3, \cdots, X_{n-1}$ に対して Y で条件付き独立となり周辺化をすることが容易となるからである。

(c):

(a) で用いた式を $X_2, \cdots, X_{n-1}, Y$ で周辺化すると

$$P(X_1, X_n) = P(X_1|Y)P(X_n|Y)\sum_{Y} P(Y)\prod_{i=2}^{n-1}\sum_{X_i} P(X_i|Y)$$

となる。

ここで $\sum_Y P(Y), \sum_{X_i} P(X_i|Y)$ がそれぞれ 1 になるので

$$P(X_1, X_n) = P(X_1|Y)P(X_n|Y)$$

$P(X_1|X_n) = \frac{P(X_1, X_n)}{P(X_n)}$ より

$$P(X_1|X_n = x_n) = \frac{P(X_1|Y)P(x_n|Y)}{P(x_n)}$$