通信システム実験 II

待ち行列シミュレーション

本実験では受講者各自のパソコンを活用する．シミュレーション実験のためにプログラム作成・実行環境が必要になるほか，表計算ソフトやプレゼンテーションソフトを使用する．

目的

スーパーのレジの行列，コンビニの在庫管理，保険会社の保険準備金，ネットワークにおけるパケット通信のレスポンス，回線交換で同時に通話可能な最大数の設計．これらはすべて待ち行列システムとして表すことができる．本実験では，バスの運行シミュレーションを通して待ち行列システムで起こる現象を体験する．

1　ベルヌーイ過程

1.1　確率変数

一般に，確率変数 Z が x という値をとる確率を $\Pr\{Z = x\}$ または $P_Z(x)$ と表す．確率変数 Z に対して $F_Z(x) \triangleq \Pr\{Z \le x\}$ と定義される関数を Z の累積分布関数あるいは単に**分布関数**という．分布関数は単調増加である．確率変数 Z が連続値を取るとき，$f_Z(x) \triangleq \frac{d}{dx}F_Z(x)$ と定義される関数を確率密度関数あるいは単に**密度関数**という．このとき

$$\Pr\{a < Z \le b\} = \int_a^b f_Z(x)dx = F_Z(b) - F_Z(a) \tag{1}$$

が成り立つ．

1.2　サイコロ

乱数の発生源として 10 面サイコロを考える．10 面サイコロは，数学的には 0 から 9 までの整数の上に一様に分布する確率変数とみなされる．この確率変数を記号で W と表すことにする．10 面サイコロの確率分布と分布関数を表 1 に示す．

表 1　10 面サイコロの確率分布

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Pr\{W = x\}$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\Pr\{W \le x\}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

例題 1.1 10 面サイコロの出る目が 0 から 9 までの等確率になっていることを確認するにはどうしたらよいか.

例題 1.2 0 から 99 までの整数値を等確率で発生させるにはどうしたらよいか.

例題 1.3 0 から 999 までの整数値を等確率で発生させるにはどうしたらよいか.

例題 1.4 0 以上 1 未満の実数値を 0.001 刻みで等確率に発生させるにはどうしたらよいか.

例題 1.5 0 以上 1 未満の実数値を 10^{-6} 刻みで等確率に発生させるにはどうしたらよいか.

10 面サイコロを使って, 0 と 1 の間の一様乱数を近似的に生成できることに注意せよ.

1.3 2 値確率変数

ふたつの値しか取らない確率変数を 2 値確率変数という. いま, 取る値は 0 と 1 とする. 2 値確率変数 B を考える.

例題 1.6 表 2 の (a) から (f) ような分布で 0 と 1 の乱数を発生させるにはどうしたらよいか.

表 2　2 値確率変数の分布

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
$\Pr\{B=0\}$	0.5	0.4	0.1	0.25	0.49	0.01
$\Pr\{B=1\}$	0.5	0.6	0.9	0.75	0.51	0.99

1.4 ベルヌーイ過程

時間を短い間隔 δ で区切る. ひとつの間隔をタイムスロットという. 各タイムスロットでは独立に確率的試行が行われ, 成功か失敗かが決まるとする.「試行が成功／失敗」という言い方の他に「イベントが生起する／しない」「到着がある／ない」なとど言うこともある. このような過程を**ベルヌーイ過程**という. ベルヌーイ過程の各タイムスロットには 2 値確率変数が対応していることがわかる. ここでは「到着がある／ない」という言い方をすることにする. 各タイムスロットで到着がある確率を p とすると, 到着の間隔の期待値は $\frac{\delta}{p}$ となる.

1.5 レポート課題と実験

レポート課題 1.1 確率変数の密度関数が与えられたとする. 密度関数を用いて分布関数を表せ.

レポート課題 1.2 間隔 δ のベルヌーイ過程で, 各スロットの到着確率を p とするとき, 到着間隔の期待値が $\frac{\delta}{p}$ となることを示せ.

レポート課題 1.3　10 面サイコロを振って 0 から 9 までのすべての目が 1 回以上出るためには，平均して何回サイコロを振る必要があるか.

実験 1　$\delta = 1, p = 0.1$ のベルヌーイ過程を乱数を使って発生させ，到着間隔の分布を実験的に調べよ.

2　ポアソン過程

2.1　指数分布

パラメータ λ の**指数分布**とは，非負実数値上の分布で密度関数が

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \tag{2}$$

と表される分布のことである．分布関数は

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{3}$$

と表される．パラメータ λ の指数分布の期待値は $\frac{1}{\lambda}$ である.

2.2　ポアソン過程

ベルヌーイ過程において，定数 λ を導入して到着確率 p がタイムスロット幅 δ の関数になるように $p = \lambda\delta$ と定める．到着間隔の期待値は $\frac{1}{\lambda}$ となる．ここで，$\delta \to 0$ の極限をとるとベルヌーイ過程は連続な時間をもった確率過程に収束する．それがポアソン過程である．ポアソン過程の到着間隔は指数分布である．この指数分布のパラメータは λ となり，単位時間当たりに平均して λ 個の到着が発生する．このことから，このようなポアソン過程を，レート λ の**ポアソン過程**という.

指数分布に従う乱数を発生させる方法として，実験 1 のような手順がある.

例題 2.1　実験 1 と同様の手順で $\delta = 0.01, p = 0.001$ のベルヌーイ過程を発生させるとき，計算量はどの程度増えるか．特に間隔を一つ得るための計算量や，単位時間分の過程を発生させるための計算量を考えよ.

2.3　確率密度法による乱数生成

0 と 1 の間の一様分布を任意の連続分布に変換する方法がある．0 と 1 の間の一様分布に従う乱数を U とおく．U の確率密度関数は

$$f_U(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{4}$$

と表される．ゆえに分布関数は

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \tag{5}$$

となる．

さて，一様分布に従う乱数 U を使って任意の分布の乱数を実現したい．つまり，一様乱数 U の実現値に何らかの変換をして，別の分布に従う確率変数から出てきた値であるかのように見せたい．このとき後者の確率変数をターゲット乱数という．

任意の分布を考え，これに従う確率変数 X をターゲット乱数とする．ターゲット乱数 X は一様乱数 U を使って以下のように実現できる．一様乱数 U と X の分布関数 $F_X(x)$ を用いて

$$Y = F_X^{-1}(U) \tag{6}$$

という乱数 Y を考える．ここに，F_X^{-1} は F_X の逆関数である．分布関数は単調増加なので逆関数は必ず存在することに注意せよ．ここで Y の分布関数を考えると

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \Pr\{Y \leq x\} &(7)\\ &= \Pr\{F_X^{-1}(U) \leq x\} &(8)\\ &= \Pr\{U \leq F_X(x)\} &(9)\\ &= F_U(F_X(x)) &(10)\\ &= F_X(x) &(11) \end{aligned}$$

となり，Y は X と同じ分布であることが分かる．

2.4 指数分布に従う乱数の生成

パラメータ λ の指数分布の分布関数 (3) の逆関数は

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\log_e(1-x) \tag{12}$$

であることに注意して，一様乱数 U を用いて確率変数 X を

$$X = -\frac{1}{\lambda}\log_e(1-U) \tag{13}$$

と定めると，X はパラメータ λ の指数分布に従う乱数となる．

2.5 レポート課題と実験

レポート課題 2.1 密度関数が式 (2) で与えられるとき，その分布関数が式 (3) となることを示せ．

レポート課題 2.2 パラメータ λ の指数分布の期待値が $\frac{1}{\lambda}$ であることを示せ．

レポート課題 2.3 パラメータ λ の指数分布の分布関数 (3) の逆関数が式 (12) となることを示せ．

実験 2 上記の方法で指数分布に従う乱数を発生させよ．累積相対頻度のグラフを描き，平均値を求めよ．指数分布の分布関数や期待値と比較せよ．

3 バスの運行シミュレーション

ひとつのバス停を考える．このバス停にはレート λ_1 のポアソン過程にしたがって空のバスが到着する．また，このバス停にはレート λ_2 のポアソン過程にしたがって乗客が到着する．バス停に来た乗客はバスが来るまで待っていて，バスが到着すると待っていた乗客はすべてそのバスに乗車する．

実験 3 上記のバスの運行をシミュレーションし，以下の視点で現象を計測せよ．

1. あなたはバスの運転手である．あなたのバスはどのくらい混むだろうか? つまりバスには平均して何人の乗客が乗るか? その分布は?
2. あなたは乗客である．あなたが乗るバスはどのくらい混むだろうか? つまり乗客から見て，バスには平均して何人の同乗者がいるか? その分布は?
3. 乗客はバス停でどのくらい待つか? 分布と平均値は?

レポート課題 3 社会の中でランダムな到着とみなせる現象を 2 つ以上見つけて説明せよ．

4 考察

1. 実験 3 において，バスの平均乗客数と乗客の平均同乗者数を比較し，その関係を考察せよ．
2. 実験 3 において，乗客の平均待ち時間とバスの平均間隔を比較し，その関係を考察せよ．

今までのレポート課題と実験を個人の実験レポートとしてまとめて提出せよ．また，実験 3 のプレゼンテーションを各班で準備せよ．

5　プレゼンテーション

1. 各班のプレゼンテーション．
2. 提出されたレポートおよびプレゼンテーションに関して質疑応答．

参考文献

[1] 高橋幸雄，森村英典，混雑と待ち，朝倉書店，2001 年．

[2] Sheldon Ross, *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, Inc., 1996.

[3] Robert Gallager, *Discrete Stochastic Processes*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[4] Randolph Nelson, *Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory*, Springer-Verlag, 1995.

（2023 年 9 月 11 日版）