数値微分

アギレ・エルナン

信州大学　電子情報システム工学部

数値計算

2022 年 7 月 10 日

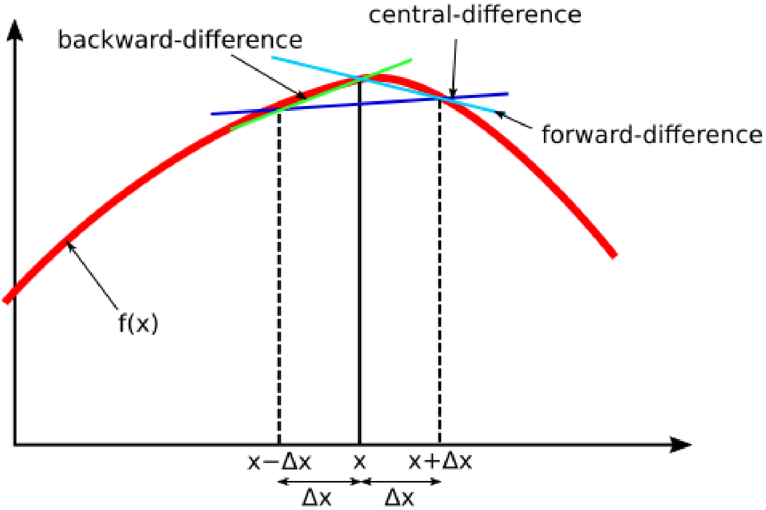
差分（数値微分）

関数 f(x) を x で微分する

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

微分の定義は Δ を無限小にする操作を含んでいるが、一定間隔ごとの x における関数 $f(x)$ の値についての離散的なデータしかない場合，このような極限をとることはできない。そこで，微分の近似として差分を用いる。

差分（数値微分）


central-difference
backward-difference
forward-difference
f(x)
x−Δx
x
x+Δx
Δx
Δx

前進差分近似

関数 を Taylor 展開してみる

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \cdots \tag{1}$$

h は十分小さいが有限（無限小ではない）の正の値をもつとする。 h ≪ 2 だから， h の 2 乗以上の項を無視して式変形すると，次の前進差分近似公式が得られる。

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

後退差分近似

関数 の Taylor 展開は，次のようなものも考えられる。

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \cdots \tag{3}$$

同じく h の 2 乗以上の項を無視して式変形すると次の後退差分近似公式が得られる。

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{4}$$

中心差分近似

今度は，h の 2 乗項まで考慮にいれ，h の 3 乗以上の項を無視することにする。(3) 式と (5) 式の差をとると，h の 2 乗項はキャンセルされてしまう。

$$f(x+h) - f(x-h) \approx 2hf'(x) \tag{5}$$

この式を変形すると，次の中心差分近似公式が得られる

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{6}$$

ちなみに，二階微分の中心差分近似公式は次のようになる。

$$f'' \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{7}$$

課題

1. ニュートン法で近似微分（差分）を使用し、$f_1(x) = 0, \cdots, f_4(x) = 0$ のすべての解 x を見つける
2. 3 次以上の 3 つの関数を追加する $(f_5(x), f_6(x), f_7(x))$
3. ニュートン法で近似微分（差分）を使用し、$f_5(x) = 0, f_6(x) = 0, f_7(x) = 0$ のすべての解 x を見つける
4. 中心差分、後退差分、前進差分を使用して、得られた解の違いを確認する。