EigenFaces
PCA

固有顔・主成分分析

EigenFaces（１／３）

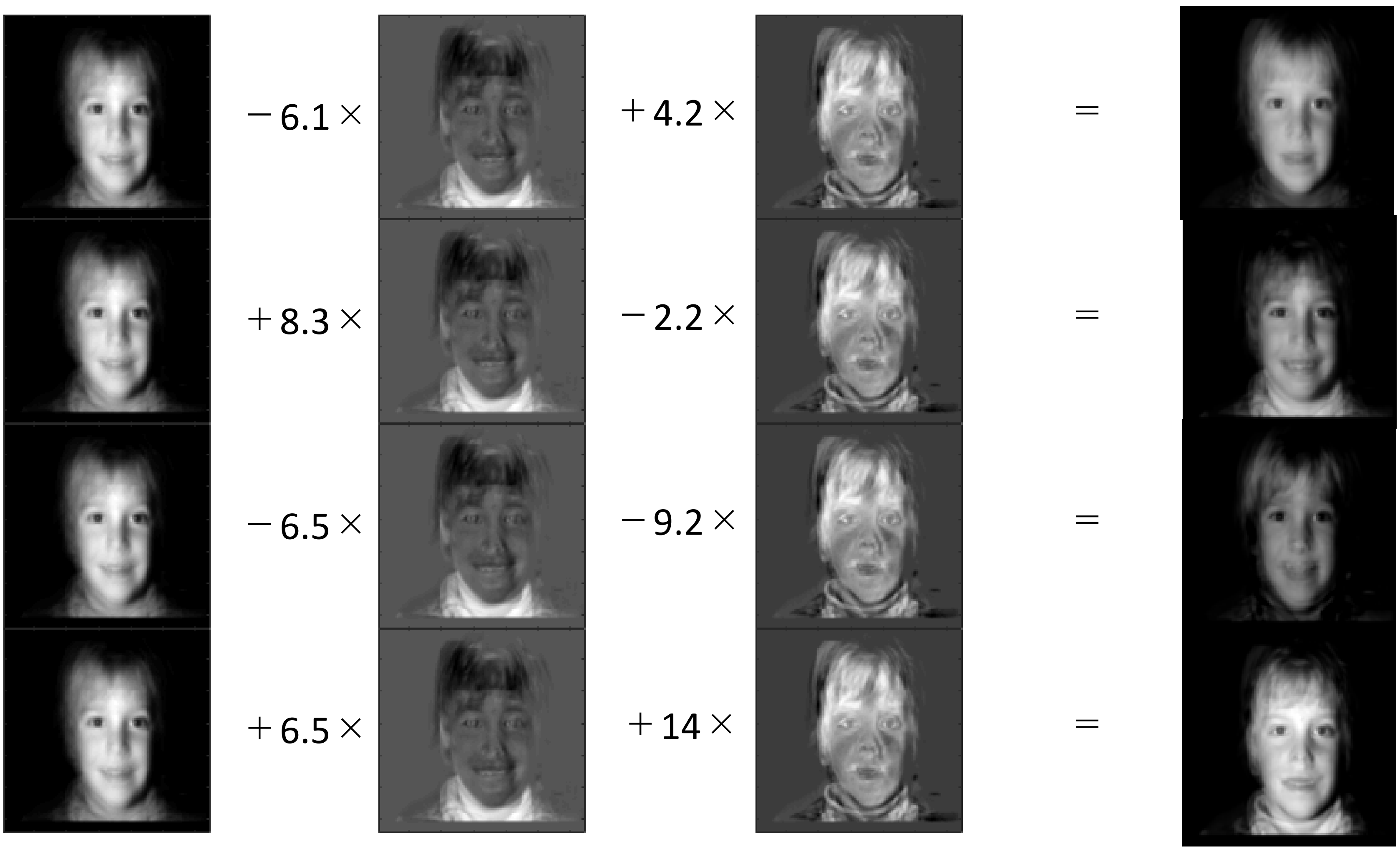
- 顔認識に関係する解析手法
  - 多数の顔写真に共通するパタンの解析
  - 主たるパタンの合成の仕方によっては，別の顔をつくることができる．

複数枚画像

パタン画像

EigenFaces（２／３）

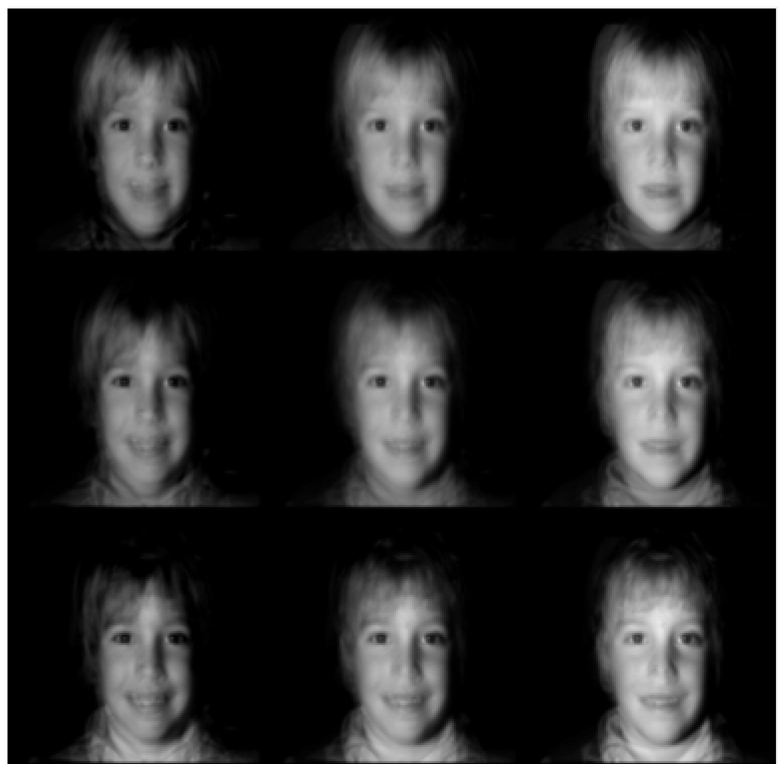
- パタンの合成に用いる重みを変更すると顔が変わる.



EigenFaces（3／3）

 $+ a \times$  $+ b \times$ 

$a =$ -7 0 7



-7

$b =$ 0

7

画像の読み込み

- マサチューセッツ工科大のデータの読み込み
  - 元の 2000 枚以上から 500 枚を抜き出したもの

  - ```
    load('../images/faces.mat');

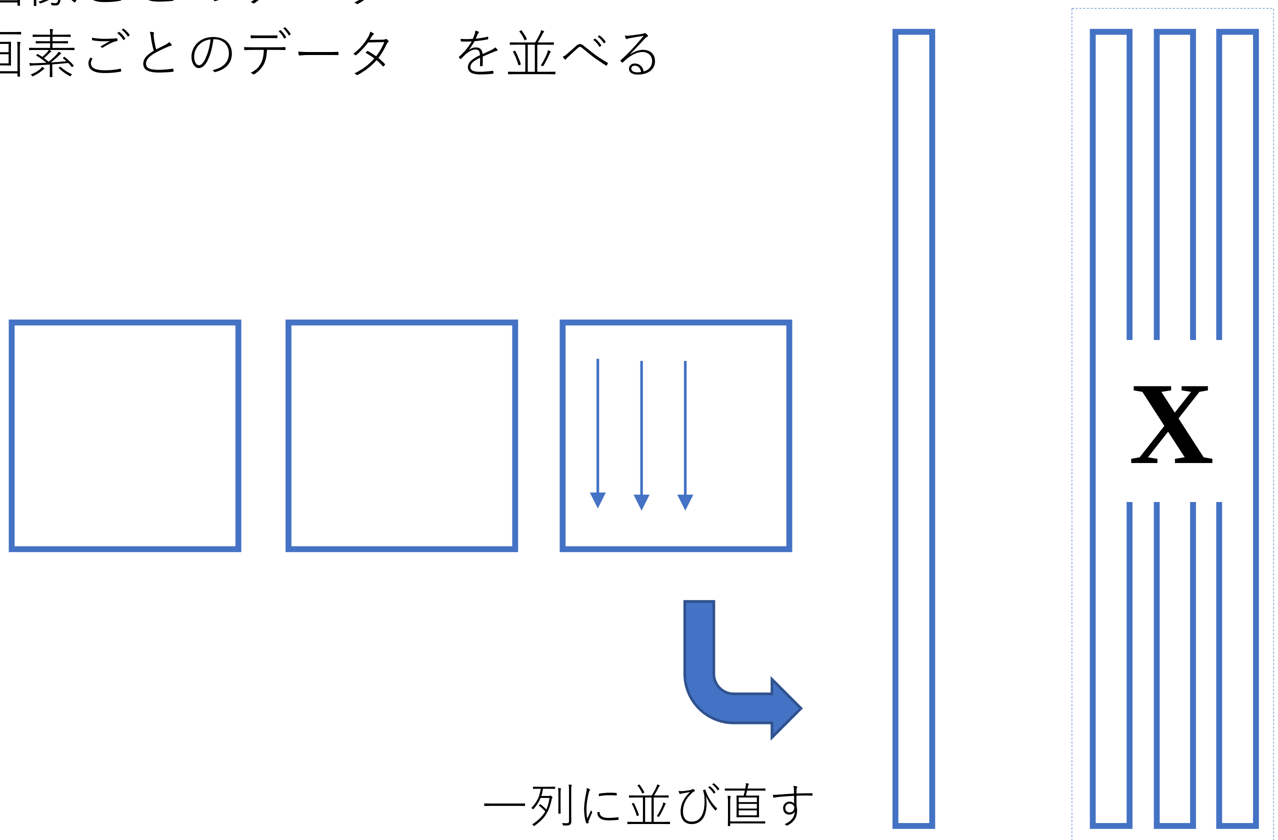
    K = 16;  % 処理に用いる画像枚数
    I_list = I_list(:,:,1:K);

    [sy,sx] = size( I_list(:,:,1) ); % 画像サイズ

    % 画像の一部を表示
    figure(1);
    for k = 1:16
      subplot(4,4,k);  imshow( I_list(:,:,k) );
    end
    ```
    ```

データ行列の作成

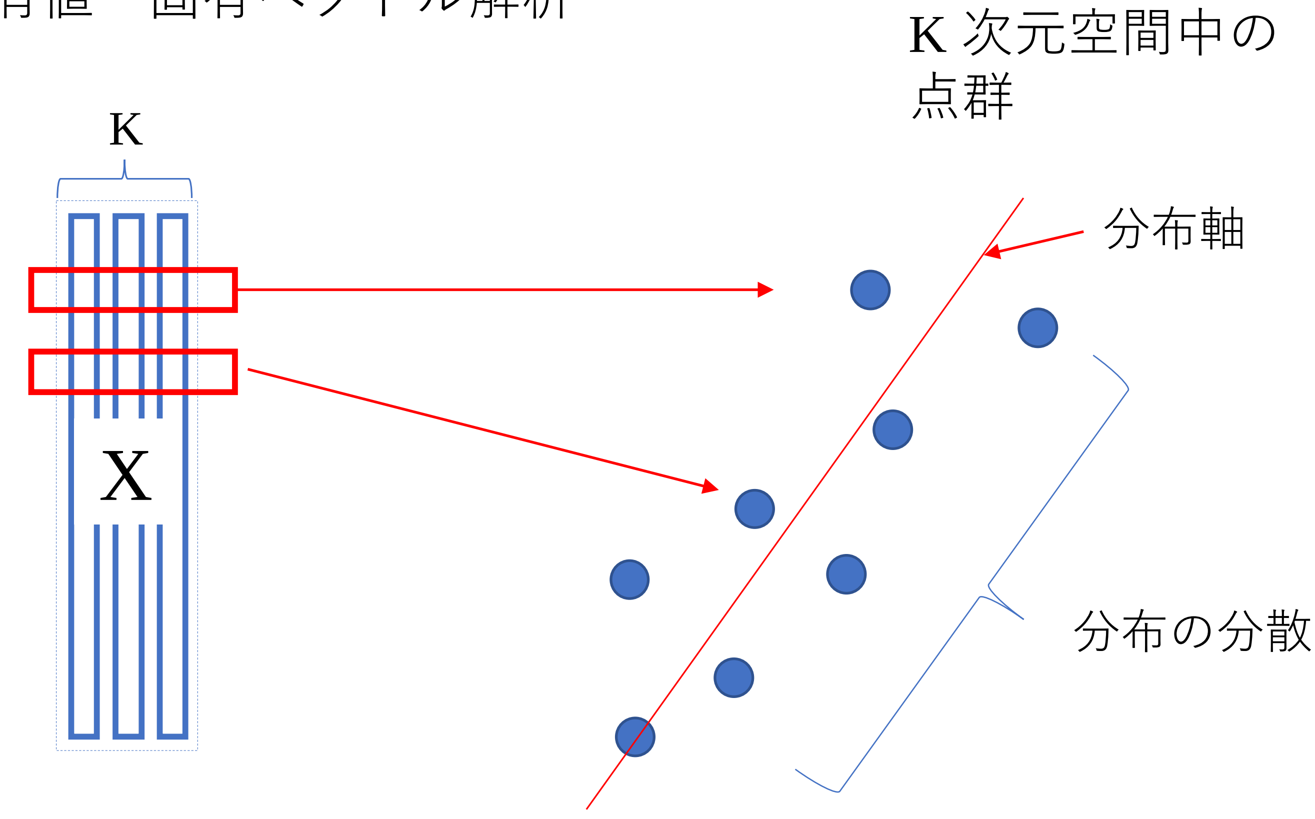
- データ行列
  - 複数の画像の画素値があるパタンに基づいて変化するかどうかを解析する
    - 各列に画像ごとのデータ
    - 各行に画素ごとのデータ　を並べる



主成分分析（PCA: Principal Component Analysis）

- データ値の分布の軸と分散を解析する
  - 手順

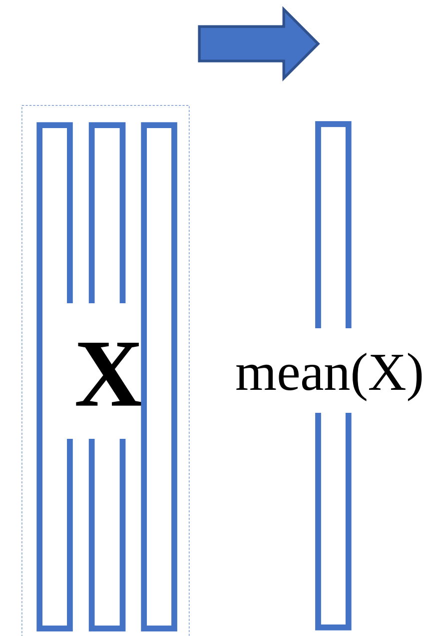
1. 中心化：画素ごとに画像間の画素値を 0 に移す
2. 共分散行列の計算
3. 固有値・固有ベクトル解析



中心化と共分散行列の計算

水平方向に
平均値を計算

なお，一般的には垂直方向
に計算する．今回の固有顔
の場合は水平に差し引く．

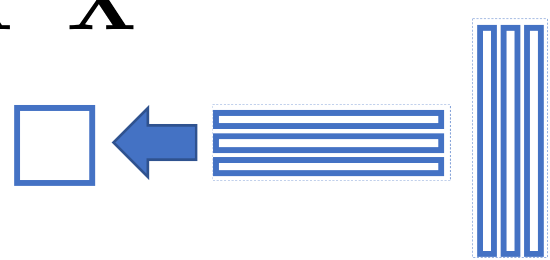


- 中心化
  - データの分布中心を原点に移す
  - 平均値を差し引く

$$\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \mathrm{mean}(\mathbf{X})$$

- 共分散行列
  - データの分散を表す行列

$$\mathbf{C} = \frac{1}{K}\overline{\mathbf{X}}^\top \overline{\mathbf{X}}$$

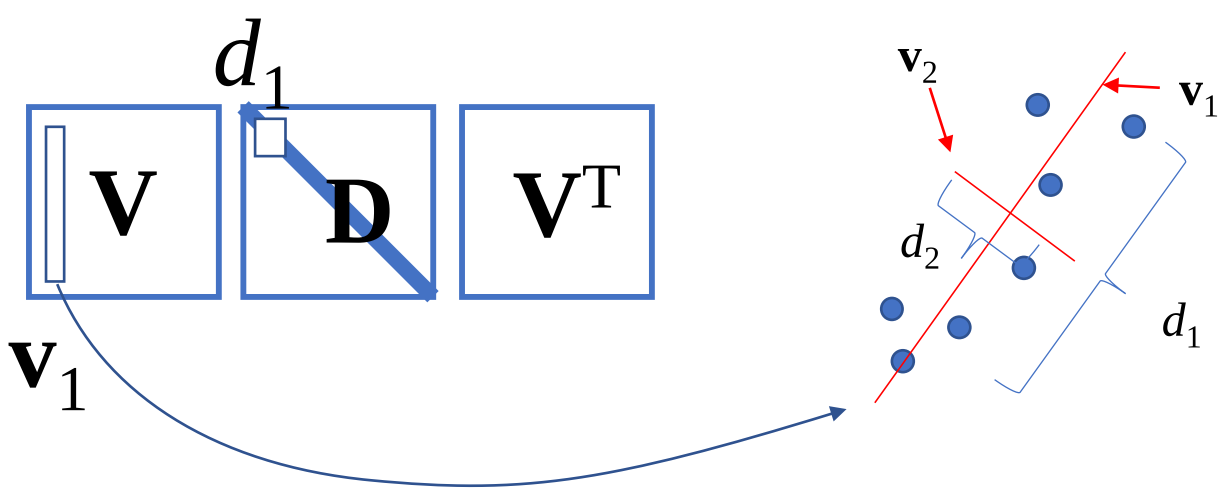


固有値分解

- 共分散行列の固有値分解
  - 固有ベクトル：　分布の軸を表す
  - 固有値：　　　　分布の分散を表す

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} \\
&= \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{\top}
\end{aligned}
$$

共分散行列の場合
・固有値分解と特異値分解が一致
・右の固有値の逆行列は転置行列と一致



主成分分析

```
% 並び替え
X = reshape( I_list, [sy*sx, K] );

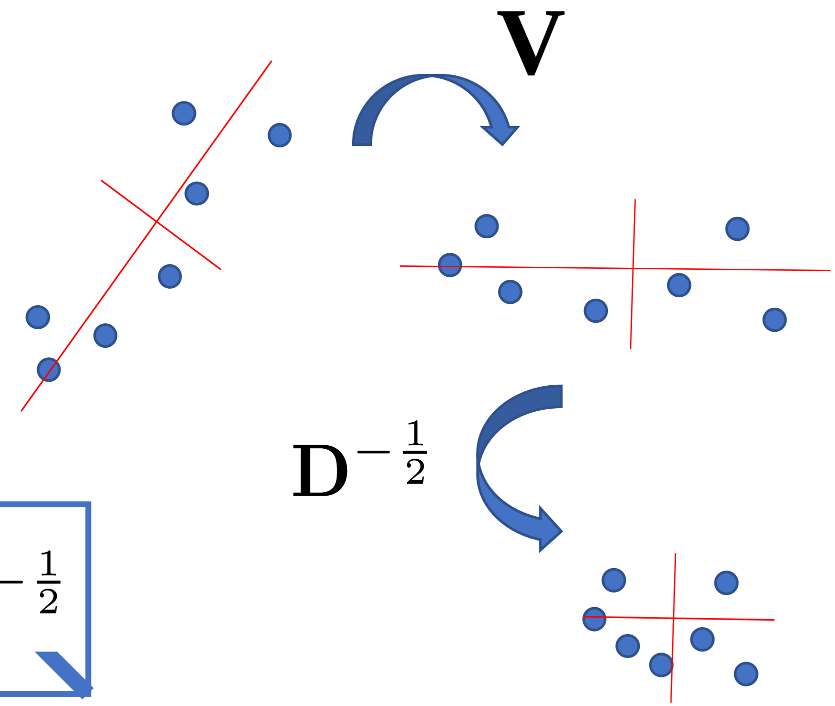
% 中心化
mu = mean( X, 2 );
X_  = X - mu;

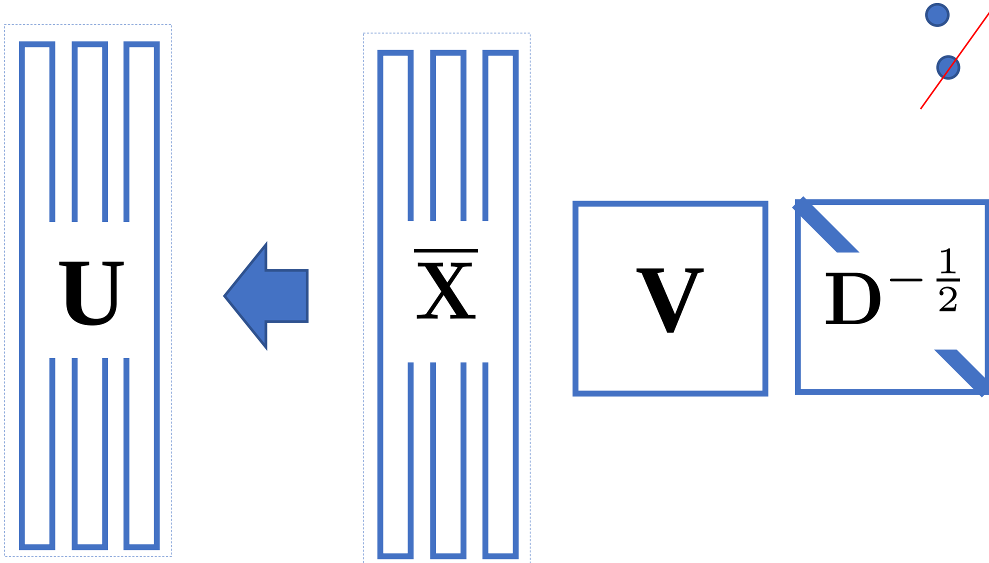
% 共分散行列
C  = (X_'*X_) / size(X,2);

% 固有値分解（特異値分解で代用）
[V, D, ~] = svd( C );
```

固有顔の取得

- 白色化
  - データの軸を回転させ，標準基底に合わせ
  - 分布幅（標準偏差）を 1 にする





白色化，及び，固有顔の表示

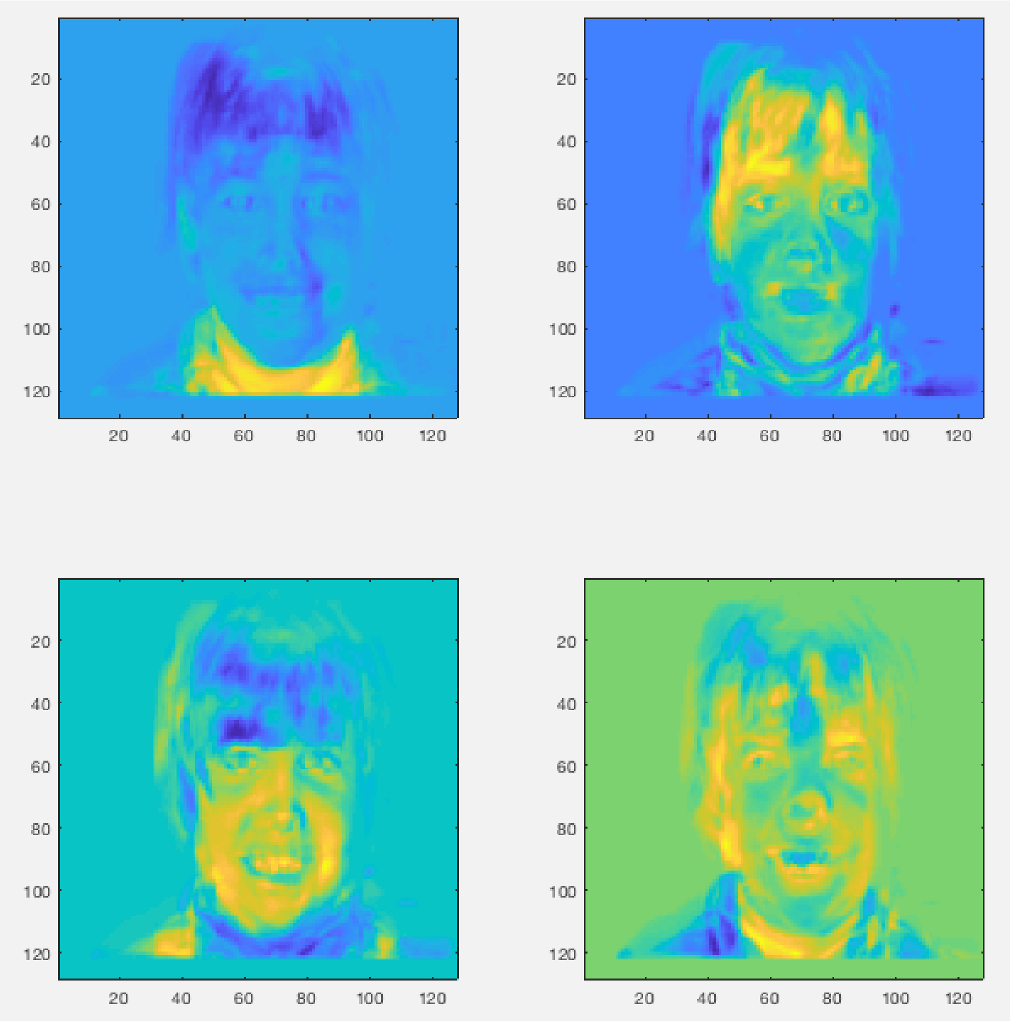
```
% 白色化
D_inv = diag(1./diag(D));
U = X_ * V * sqrt( D_inv );


% 固有顔の表示
U_im = reshape( U, [sy,sx,K] );

figure(2);
for k = 1:4
  subplot(2,2,k);
  imagesc( U_im(:,:,k) );
  axis image;
end
```

処理結果

- 固有顔



補足

- 実は，特異値分解（economy 分解モード）で One コマンドで求まる．
  - `[U,S,V] = svd( X_, 'econ' );`

$$\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top$$

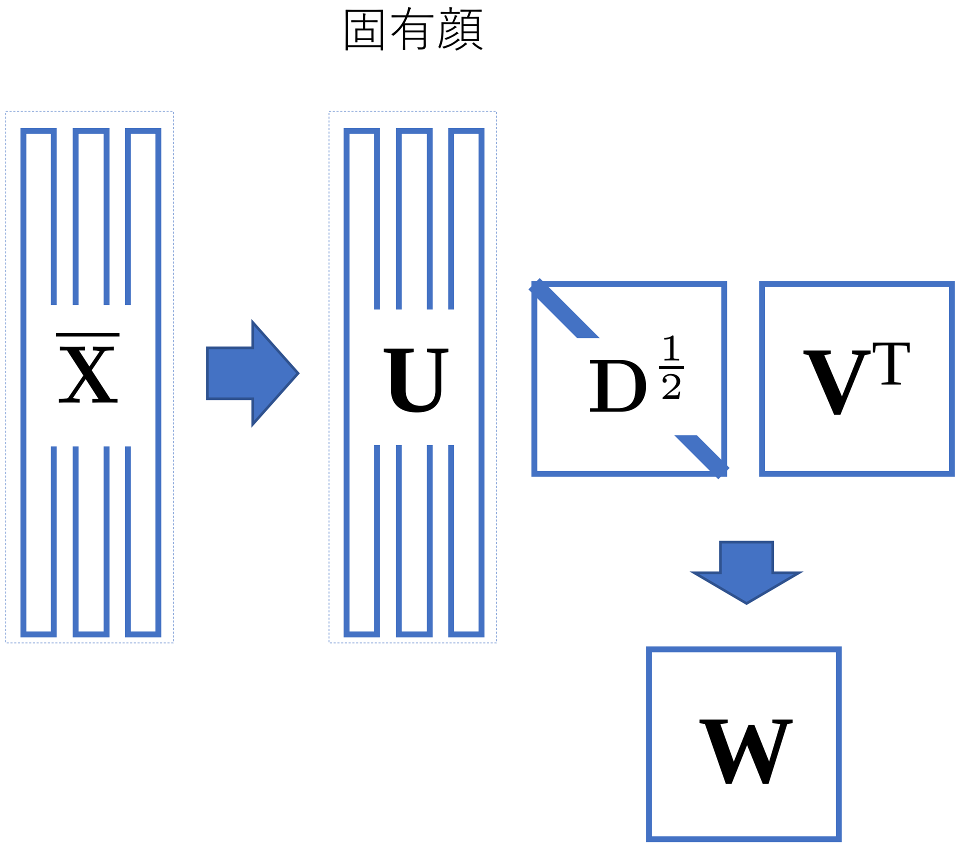
- 今までの計算は何？
- 特異値分解の　固有値分解を介する計算方法
- 主成分分析や白色化に関わる重要な変換　の勉強

$$\overline{\mathbf{X}}^\top\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top \qquad \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\overline{\mathbf{X}}\mathbf{V}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{U}$$

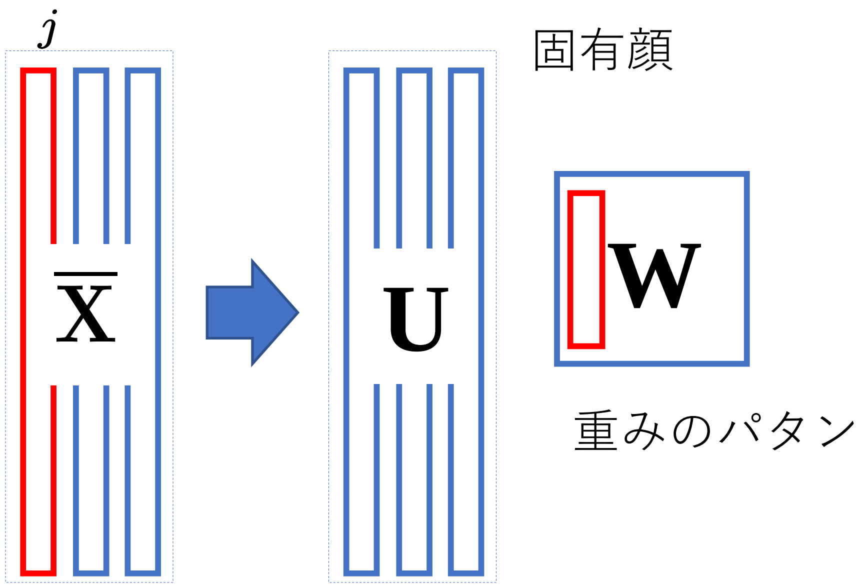
固有顔の合成と合成重み（１／３）

- 行列 $\mathbf{D}^{1/2}$ と $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ を計算し，$\mathbf{W}$ とする



固有顔の合成と合成重み（２／３）

- $\mathbf{X}$ の j 列目は,
  $\mathbf{U}$ と $\mathbf{W}$ の j 列目のベクトルの掛け算で求まる

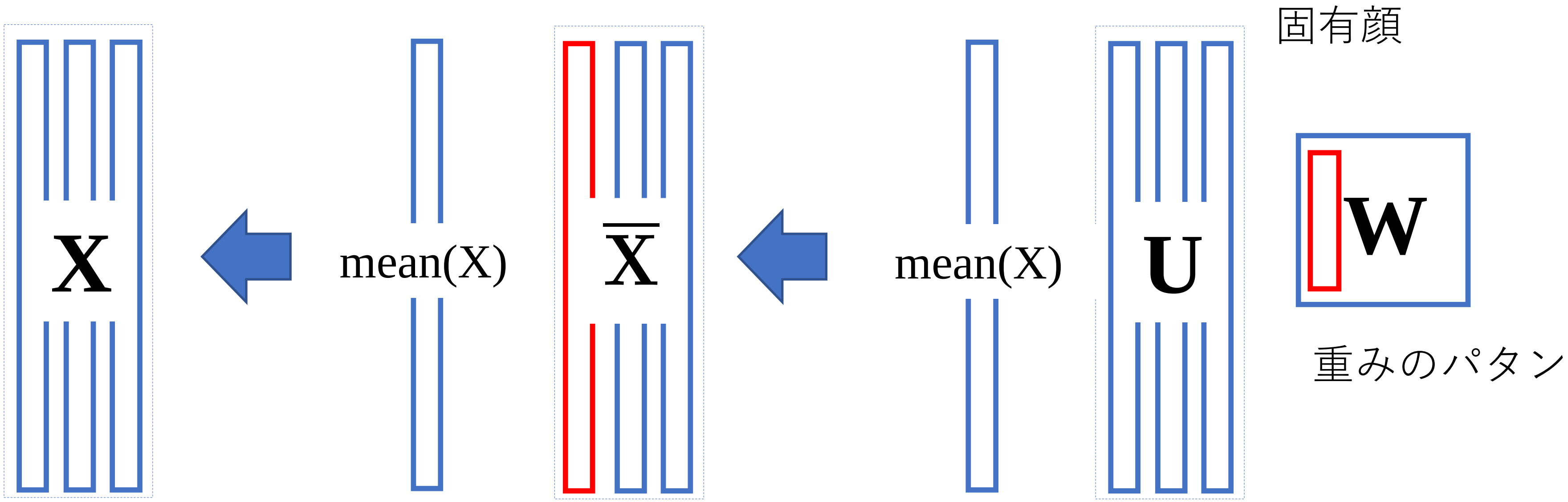


$$\mathbf{X}_j = \sum_k w_j(k)\mathbf{u}_k$$

$$= w_j(1)\mathbf{u}_1 + w_j(2)\mathbf{u}_2 + w_j(3)\mathbf{u}_3 + \ldots$$

固有顔の合成と合成重み（３／３）

- 平均値ベクトルを加えれば，もとに戻る



固有顔からの復元（１／２）

```
% 重み行列の計算
W = sqrt(D)*V';

% 固有顔から，元の画像の合成

j = 1;    % <-- いろいろ変えてみる

w_j = W(:,j);

y_j = U * w_j + mu;

J_j = reshape( y_j, [sy,sx] );

figure(3); imshow( J_j );
```

固有顔からの復元（２／２）

- % 少数の固有顔から，元の画像の合成

```
j = 1;
l = 2; % <-- いろいろ変えてみる

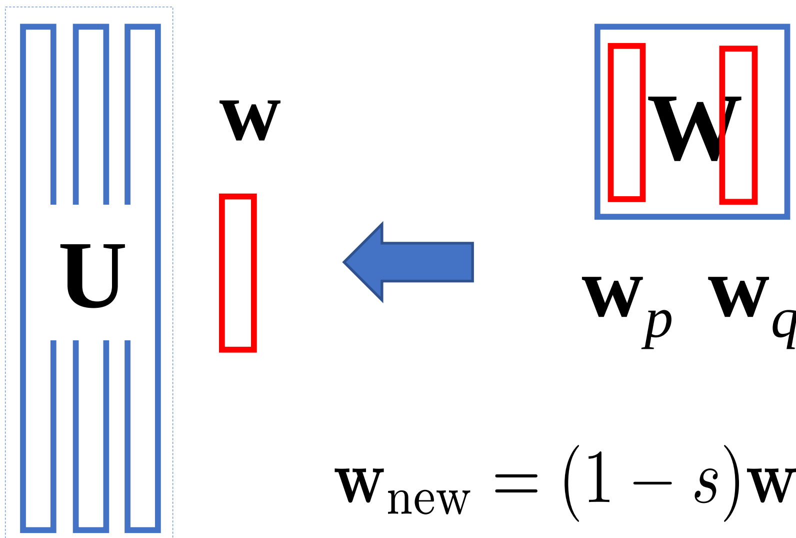
y_jl = U(:,1:l) * W(1:l,j) + mu;

J_jl = reshape( y_jl, [sy,sx] );

figure(4); imshow( J_jl );
```

中間画像の生成

- 重みによって合成結果が変わる
  - ２つの重みの線形和を用いたらどうなるか？



$$\mathbf{w}_{\mathrm{new}} = (1-s)\mathbf{w}_p + s\mathbf{w}_q, \quad s \in [0,1]$$

固有顔からの復元（２／２）

- ```
  p = 2;
  q = 3;
  S = (0:4)/4;

  w_p = W(:,p);  w_q = W(:,q);

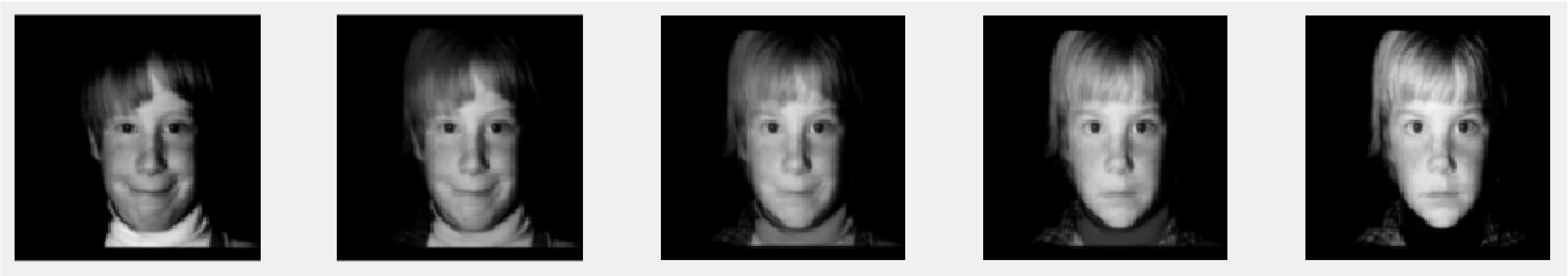
  cnt = 0;
  for s = S
    w = (1-s) * w_p + s * w_q;
    y_pq = U * w + mu;
    J_pq = reshape( y_pq, [sy,sx] );

    cnt = cnt + 1;
    figure(5); subplot(1,length(S),cnt);
    imshow( J_pq );
  end
  ```
  ```

処理結果

- 中間画像の生成

p = 2, q = 3



p = 5, q = 15

固有顔の問題点や使い方など

- データの位置合わせが重要
  - 位置を合わせるのは大変.
- 中間画像を生成できるので
  - 影の当て方や，角度を変えて撮影した画像から
    中間画像を生成すれば,
    ３Ｄのように見える（かもしれない）．
- 画像データ行列の分解方法に依存する
  - 特異値分解は初歩的な分解.
    制約を加えれば，また違った結果が得られる.
- 画像生成は
  - 深層学習の GAN に置き換わりつつある.

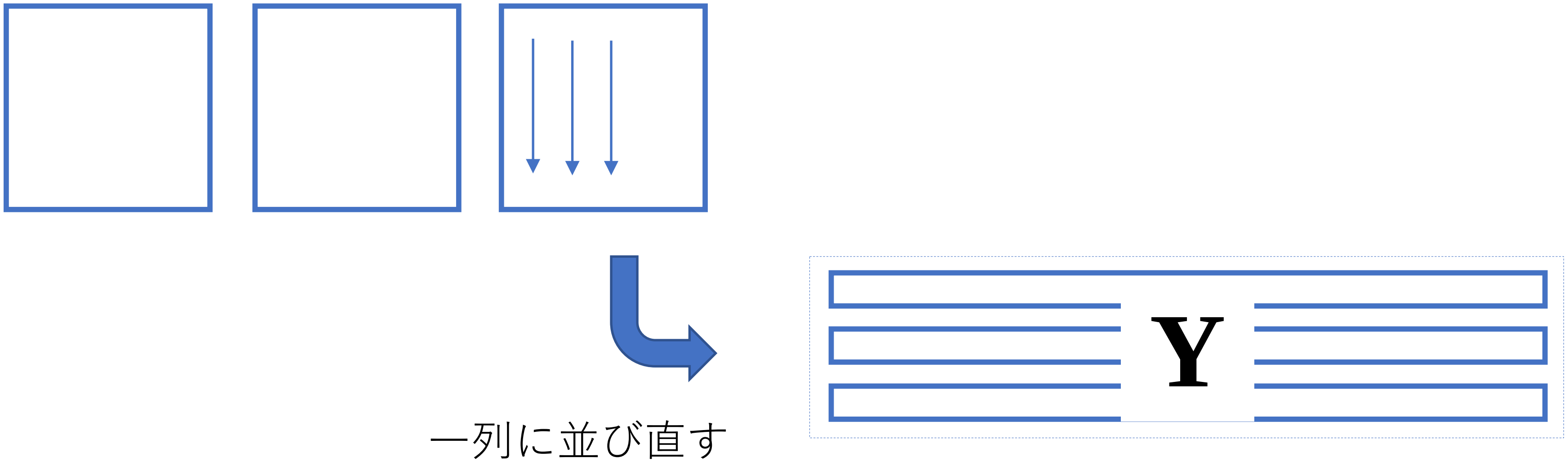
補足

固有顔の分解について，詳細

データ行列の作成

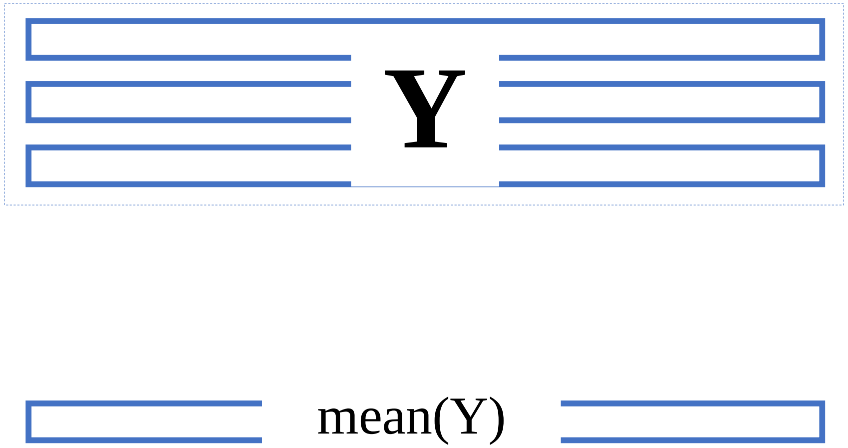
- データ行列
  - データ行列は通常,
    - 各行に画像ごとのデータ
    - 各列に画素ごとのデータ　を並べる

    - 演習で用いたデータ行列とは転置の関係にある.



中心化

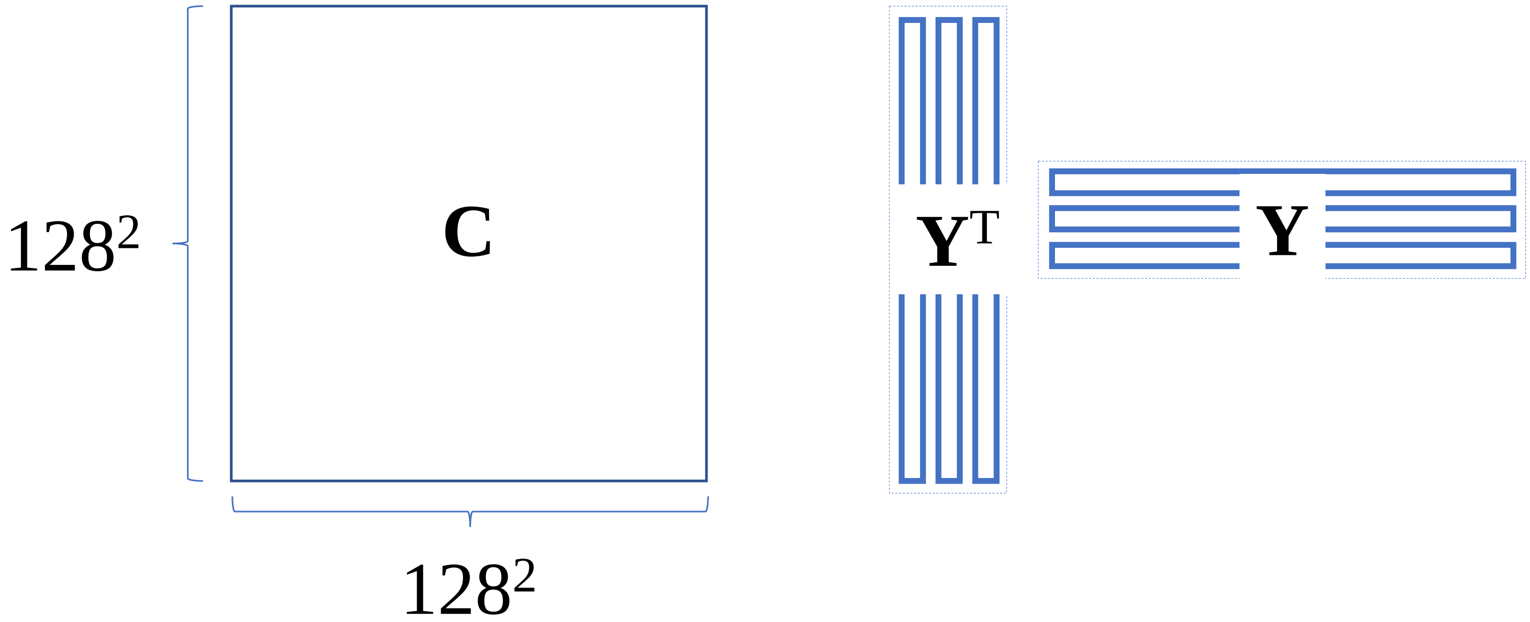
- 中心化は通常,
  - 垂直方向に行う



$$\overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathrm{mean}(\mathbf{Y})$$

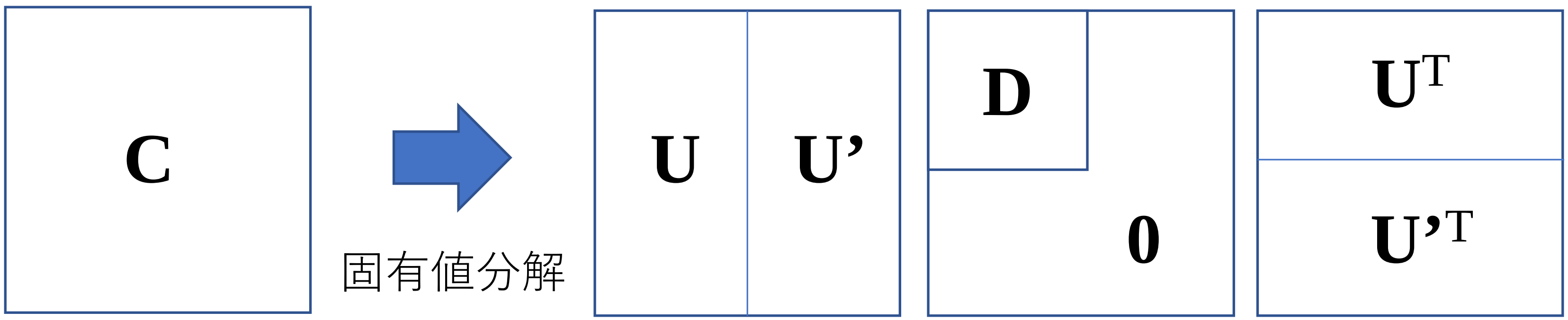
共分散行列

- ここで問題が生じる
  - 得られる行列が大規模になる
  - 大きなサイズの画像では,
    メモリが足りなくなる



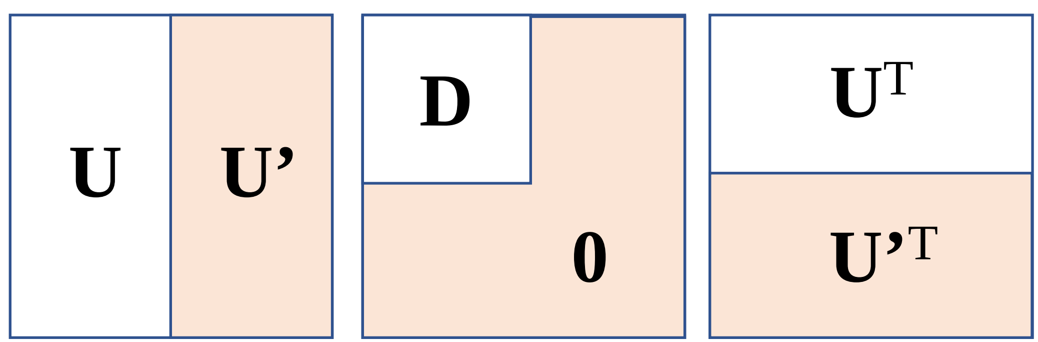
固有値分解

- 仮にメモリが確保でき，分解できるとすると，**U** が得られる



U’ はカーネルと呼ばれる
CU’ = **0** となる特殊なベクトル

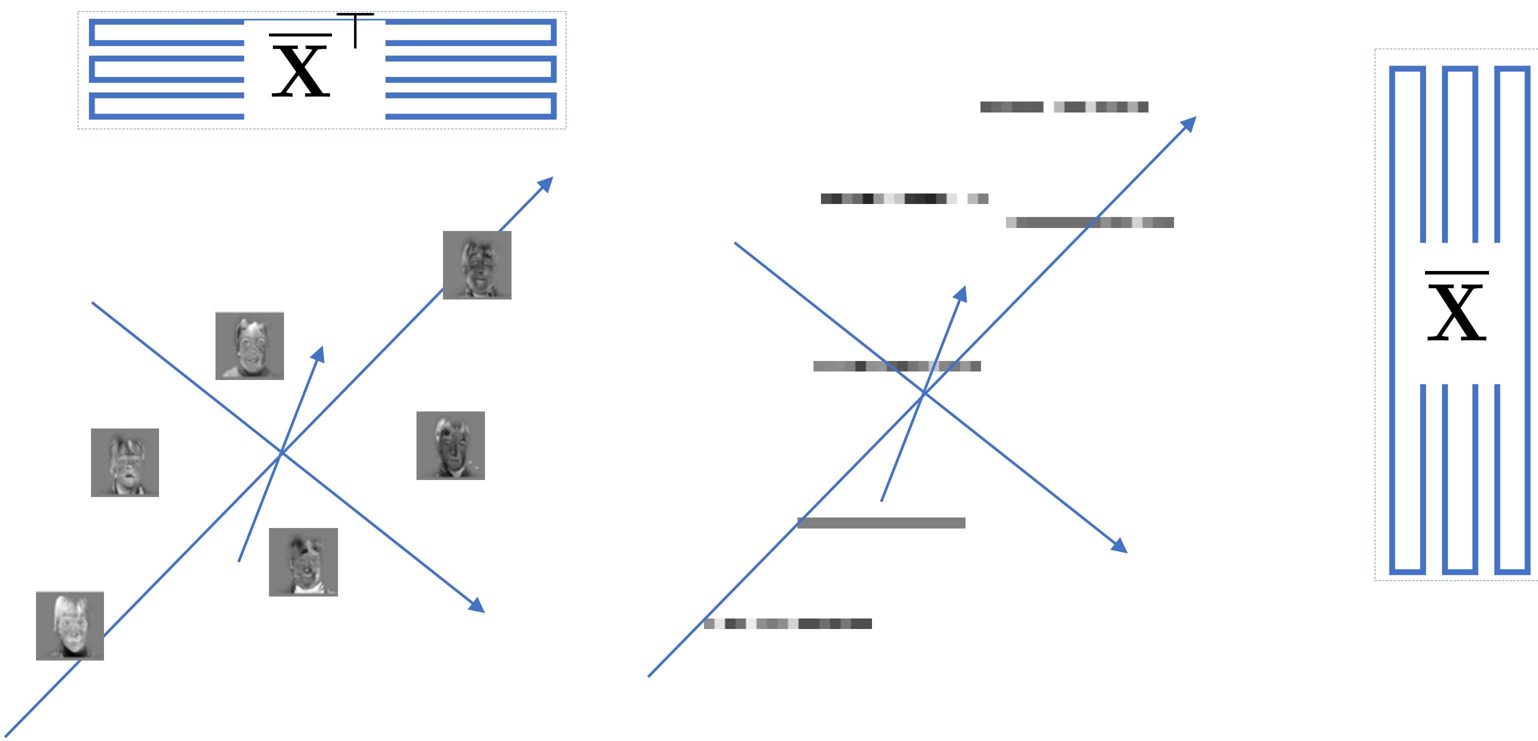
大部分は **0** で
一部に **D** をもつ



中央の行列に 0 がある
範囲のベクトルは
合成時には 0 がかかり
用いられないため不要

分析しているもの

- 顔画像データ点（平均を引いたもの）の分布
- 各画素で生じる変化量の分布



何が言いたい？

- 行列 $\mathbf{Y}$ に関する主成分分析をして，
  固有顔 $\mathbf{U}$ を得たい．

- しかし，計算量が膨大となる．

- よって，行列 $\mathbf{X}$ に関する主成分分析を介して
  固有顔 $\mathbf{U}$ を得る．

- 行列 $\mathbf{X}$ を介しての計算は，白色化などと関係する．

- あるデータ行列 $\mathbf{X}$ とその転置行列 $\mathbf{Y}$ に関する
  主成分分析は，それぞれ別の意味を持つが
  裏では関係している．