数値積分

アギレ・エルナン

信州大学　電子情報システム工学部

数値計算

03/07/2022

数値積分

- 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値を知ることは、数学はもちろん、物理学や工学等多くの分野で必要になるが、$f(x)$ の形によっては原始関数が求められなかったり、求めるための計算が煩雑であったりすることがある。
- また、工学の応用面では関数 $f(x)$ 自体が未知であるため、x 有限個の点における関数値を実験や測定によって求め、そのデータをもとにして積分値を推定しなければならないという場合もある。
- このようなことから、積分値近似的に求める数値積分の方法がいろいろと考えられている。
- ここでは、台形方式、シンプソンの公式について述べる。

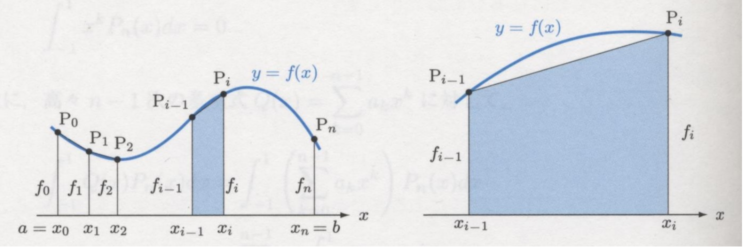
台形方式 1/3

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は、分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

と書ける。

$f(x)$ を各小区間 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ ごとに簡単に積分できる関数で近似して積分し、それらの値を合計して定積分の近似値とするのが数値積分の基本的な考える方の一つである。



点 x_j における $f(x)$ の値 $f(x_j)$ を f_j で、グラフ上の点 (x_j, f_j) を P_j でそれぞれ表す。

台形方式 2/3

$$y = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + f_{i-1}$$

であるから、上の積分は次のようなになる。

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} = f(x)dx = \left[\frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\frac{1}{2}(x - x_{i-1})^2 + f_{i-1}x\right]_{x_{i-1}}^{x_i}$$

$$\frac{1}{2}(f_i - f_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + f_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$

$$\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f_i + f_{i-1})$$

簡単のために、$h_i = x_i - x_{i-1}$ 各小区間の幅をとおけば、

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{1}{2}h_i(f_{i-1} + f_i), (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる。

台形方式 3/3

これらを全部加えると、

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i(f_{i-1} + f_i)$$

となり、右辺をさらに書き換えるよ、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}h_1(f_0 + f_1) + h_2(f_1 + f_2) + \cdots + h_n(f_{n-1} + f_n) \\ &= \frac{1}{2}h_1 f_0 \sum_{i=1}^{n-1}(h_i + h_{i+1})f_i + h_n f_n \\ &= \frac{1}{2}h\left\{f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right\}\end{aligned}$$

$f(a) = f_0 \quad f_n = f(b)$

となる。以上により、台形公式が得られる。

シンプソンの公式 1/4

- シンプソンの公式は、積分区間を偶数等分し、$f(x)$ を二つの小区間ごとに 2 次関数（放物線）で近似して積分するという考えで作られた公式である。
- 区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分して、図のように二つ分の区間 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ごとに 3 点

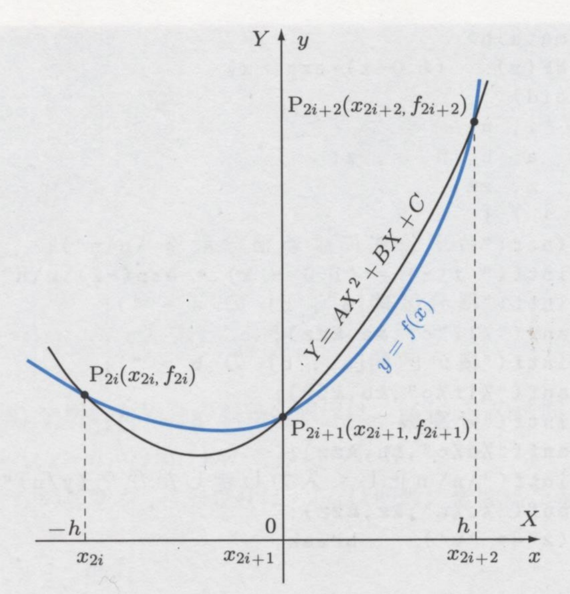
$$P_{2i}(x_{2i}, f_{2i}), P_{2i+1}(x_{2i+1}, f_{2i+1}), P_{2i+2}(x_{2i+2}, f_{2i+2})$$

  を通る 2 次関数を考える。
- 各分点は等間隔に並んでいるから、間隔を h で表そう。点 x_{2i+1} を改めて原点にとり、この新座標に関する上の 2 次関数の式を

$$Y = AX^2 + BX + C$$

  とすれば、これは 3 点 $(-h, f_{2i})$, $(0, f_{2i+1})$ (h, f_{2i+2}) を通っているから、

シンプソンの公式 2/4



Y
y
$\mathrm{P}_{2i+2}(x_{2i+2}, f_{2i+2})$
$Y = AX^2 + BX + C$
$y = f(x)$
$\mathrm{P}_{2i}(x_{2i}, f_{2i})$
$\mathrm{P}_{2i+1}(x_{2i+1}, f_{2i+1})$
$-h$
0
h
X
x_{2i}
x_{2i+1}
x_{2i+2}
x

シンプソンの公式 3/4

$$Ah^2 - Bh + C = f_{2i}, \quad C = f_{2i+1}, \quad Ah^2 + Bh + C = f_{2i+2}$$

となる。これより、$2(Ah^2 + C) = f_{2i} + f_{2i+2}$ となるしたがって、この 2 次関数を区間 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ で積分すると

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \int_{-h}^{h} (AX^2 + BX + C)dX \\ &= \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch = \frac{1}{3}h\{2(Ah^2 + C) + 4C\} \\ I_i &= \frac{1}{3}h\{f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\} \end{aligned}$$

となる。これをすべての $i = 0, 1, \ldots, n-1$ について合計すると、次のシンプソンの 1/3 公式が得られる。

シンプソンの公式 4/4

$\int_a^b f(x)dx$ において、積分区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分し、分点を
$a = x_0, x_1, \ldots, x_{2n} = b$
これらの点での関数値を $f_0, f_1, \ldots, f_{2n}$ とすると

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}) \\ &= \frac{h}{3}\{f_0 + f_{2n} \\ &+ 2(f2 + f4 + \cdots + f_{2n-2}) \\ &+ 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1})\}\end{aligned}$$

となる。ただし、$h = (b - a)/2n$ である