解析学特論 II 講義ノート

定義 0.1（Random Matrix）
ランダム行列 $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ とは，各成分 x_{ij} が確率変数であるような行列のことである．

1　Gaussian Unitary Ensemble

V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間であり，各要素は $r \in \mathbb{R}$ として $\mathcal{N}(0,r)$ に従う実数確率変数であるとする．ただし，$r=0$ の場合も確率変数 0 とみなして許容する．

例　$g_1,\dots,g_d \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ としたとき，$V = \{\sum_{i=1}^d \lambda_i g_i \mid (\lambda_1,\dots,\lambda_d) \in \mathbb{R}^d\}$ は gaussian space．実際，すべての gaussian space はこのように表現できる．

1.1　Wick's Theorem

$g_1,\dots,g_n \in V$ を考え，$E[g_1\cdots g_n]$ の値がどうなるかを考えたい．$E[g_1\cdots g_n]$ が有限であることは Hölder の不等式から導ける．また，n が奇数の場合にこの値が 0 となることは容易にわかる．

定義 1.1（pair partition $\mathcal{P}_2(n)$）

(1) $n \in \mathcal{N}$ に対して $[n] = \{1,\dots,n\}$ と表記する．
(2) $[n]$ の pairing π とは，$[n]$ を被りのないように 2 つずつ選んだ数のペアに分割することである．すなわち，$\pi = \{V_1,\dots,V_k\}$ は $i,j=1,\dots,k$（ただし $i \neq j$）に対して
- $V_i \subset [n]$
- $|V_i| = 2$
- $V_i \cap V_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^k V_i = [n]$

をみたす．なお，必然的に $k = n/2$ となる．
(3) $[n]$ の pair partition $\mathcal{P}_2(n)$ は
$$\mathcal{P}_2(n) = \{\pi \mid \pi \text{ is pairing of } [n]\}$$
で定義される．

命題 1.2
$$\#\mathcal{P}_2(n) = \begin{cases} 0 & (n\text{は奇数}) \\ (n-1)!! & (n\text{は偶数}) \end{cases}$$

証明　$\mathcal{P}_2(n)$ のうちで，まず 1 とのペアを考えると，その選び方は $n-1$ 通りある．このペアを取り除くと，

pairing を作る数は $n-2$ 個残っている．したがって $\#\mathcal{P}_2(n) = (n-1)\cdot\#\mathcal{P}_2(n-2)$ が成り立つ．また，$\#\mathcal{P}_2(1) = 0$, $\#\mathcal{P}_2(2) = 1$ であることと合わせれば，証明は終了する． ■

例 $\mathcal{P}_2(2) = \{\{\{1,2\}\}\}$，$\mathcal{P}_2(4) = \{\{\{1,2\},\{3,4\}\},\{\{1,3\},\{2,4\}\},\{\{1,4\},\{2,3\}\}\}$.

定義 1.3 $E_\pi[X_1,\dots,X_n] = \prod_{(i,j)\in\pi} E[X_iX_j]$

例

$$\begin{aligned} E[X_1X_2X_3X_4] &= E_{\{\{1,2\},\{3,4\}\}}[X_1,X_2,X_3,X_4] + E_{\{\{1,3\},\{2,4\}\}}[X_1,X_2,X_3,X_4] + E_{\{\{1,4\},\{2,3\}\}}[X_1,X_2,X_3,X_4] \\ &= E[X_1X_2]E[X_3X_4] + E[X_1X_3]E[X_2X_4] + E[X_1X_4]E[X_2X_3] \end{aligned}$$

補題 1.4 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として，n 重線形対称関数 $\varphi : V^n \to \mathbb{R}$ を考える．このとき，$\varphi(x,\cdots,x) = \phi(x)$ とおくと

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}(-1)^{n-k}\phi(x_{j_1}+\cdots+x_{j_k})$$

が成り立つ．

注意 上の補題において対称とは，$\sigma\in S_n$ に対して $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$ が成り立つことである．

注意 この等式は，偏極恒等式の一般化である．$n=2$ の場合は偏極恒等式

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)) = \frac{1}{4}(\phi(x+y)-\phi(x-y))$$

となる．

証明

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}(-1)^k\phi(x_{j_1}+\cdots+x_{j_k}) &= \sum_{A\subset[n]}(-1)^{|A|}\phi\left(\sum_{a\in A}x_a\right) \\ &= \sum_{A\subset[n]}(-1)^{|A|}\sum_{f:[n]\to A}\varphi(x_{f(1)},\dots,x_{f(n)}) \\ &= \sum_{f:[n]\to[n]}\varphi(x_{f(1)},\dots,x_{f(n)})\sum_{\mathrm{Im}f\subset A\subset[n]}(-1)^{|A|} \\ &= \sum_{f\in S_n}\varphi(x_{f(1)},\dots,x_{f(n)})(-1)^n \\ &= (-1)^n n!\varphi(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

となることから従う．ただし，$\mathrm{Im}f\neq[n]$ のときは

$$\begin{aligned} \sum_{\mathrm{Im}f\subset A\subset[n]}(-1)^{|A|} &= \sum_{j=0}^{n-|\mathrm{Im}f|}(-1)^j\,{}_{n-|\mathrm{Im}f|}C_j \\ &= (1+(-1))^{n-|\mathrm{Im}f|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることを利用した． ■

補題 1.5 n 重線形対称関数 $\phi : V^n \to \mathbb{R}$ に対して，任意の $x_1,\dots,x_n\in V$ に対して $\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0$ が成り立つことと，任意の $x\in V$ に対して $\varphi(x,\dots,x) = \phi(x) = 0$ が成り立つことは同値．

証明 十分性は容易．必要性は先の補題において右辺に現れる各 $\phi(x_{j_1}+\cdots+x_{j_k})=0$ となるときを考えることになるため，$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ が成り立つ． ■

定理 1.6（Wick）
$g_1,\ldots,g_n \in V$ に対して，以下が成り立つ：

$$E[g_1\cdots g_n]=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(n)}E_\pi[g_1,\ldots,g_n]$$

証明 まずは $g_1=\cdots=g_n=g\in V$ のときに成り立つことを示す．いま，V の仮定から $E[g]=0$ である．さらに，$E[g^2]=1$ と置いても一般性は失われない（以下の議論で g を $g/E[g^2]$ に置き換えればよい）．左辺は

$$\begin{aligned}
E[g_1\cdots g_n]&=E[g^n]\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}x^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\
&=(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}x^{n-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\
&=\cdots\\
&=(n-1)!!
\end{aligned}$$

であり，右辺は

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(n)}E_\pi[g,\cdots,g]&=(n-1)!!E[g^2]^{\frac{n}{2}}\\
&=(n-1)!!
\end{aligned}$$

となることから成り立つ．いま，補題において $\varphi(g_1,\ldots,g_n)=E[g_1\cdots g_n]-\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(n)}E_\pi[g_1,\ldots,g_n]$ と置けば，$\varphi(g,\ldots,g)=0$ は確認したので $\varphi(g_1,\ldots,g_n)=0$ も成り立つ．よって示された． ■

1.2 Gaussian Unitary Ensemble and Wiegner's Theorem

定義 1.7（Gaussian Unitary Ensemble）
Gaussian Unitary Ensemble とは，行列 $H=(h_{ij})_{i,j=1}^n$ であって，すべての $i,j=1,\ldots,n$ に対して $h_{ij}=\overline{h}_{ji}$ を満たし，$\{h_{ij}\mid i\geq j\}$ は独立同分布で $\mathcal{N}(0,1/n)$ に従うようなもののことである．H のガウス測度（すなわち，H のすべての要素の同時分布）は

$$d\mu(H)=\frac{1}{Z}e^{-\frac{n}{2}\mathrm{tr}H^2}dH$$

となる．ただし $Z=2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{1}{2}n^2}$，$dH=\prod_{i\geq j}dh_{ij}$．

例 ランダム行列 X は GUE(n) であるとする．このとき，$E[X_{ij}X_{kl}]=\delta_{il}\delta_{jk}/n$ が成り立つ．また，Wick の定理より $E[X_{i_1j_1}\cdots X_{i_kj_k}]=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(k)}n^{-k/2}\delta_{\pi_{ij}}$

定義 1.8（互換の数）
k 次の対称群の元 $\sigma\in S_k$ に対して $|\sigma|$ を互換の数として定める．

定義 1.9（サイクルの数）
k 次の対称群の元 $\sigma\in S_k$ に対して $\#(\sigma)$ を，巡回置換の積に分解したときのサイクルの数として定める．

命題 1.10

(1) $\sigma, \tau \in S_k$ に対して，対応 $(\sigma, \tau) \mapsto |\sigma\tau^{-1}|$ を考えると，これは S_k の距離となる．すなわち，この対応を d で表すと以下の 3 つが成り立つ：

- $d(\sigma, \tau) = 0 \Leftrightarrow \tau = \sigma$
- $d(\sigma_1, \sigma_2) + d(\sigma_2, \sigma_3) \geq d(\sigma_1, \sigma_3)$
- $d(\sigma_1, \sigma_2) = d(\sigma_2, \sigma_1)$

(2) $\sigma \in S_k$ について，$|\sigma| + \#(\sigma) = k$ が成り立つ．

例 以下のいずれの場合でも $|\sigma| + \#(\sigma) = k$ が成立していることが確認できる．

- $\sigma = e \in S_k$ を考えると，$|\sigma| = 0$．$\sigma = (1)(2)\cdots(k)$ より $\#(e) = k$．
- $\sigma = (1\,2) \in S_k$ を考えると，$|\sigma| = 1$，$\sigma = (1\,2)(3)\cdots(k)$ より $\#(\sigma) = k - 1$．
- $\sigma = (1\,2\,\cdots\,k) \in S_k$ を考えると，$|\sigma| = |(1\,2)\cdots(k-1\,k)| = k - 1$．$\#(\sigma) = 1$．

定義 1.11（normalized trace）
n 次元正方行列 X に対して $\mathrm{tr}X = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}X$ と定める．

定理 1.12 X を GUE(n) とする．このとき，$\gamma = (1\,2\,\cdots\,k) \in S_k$ として以下が成り立つ：

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} n^{-1-\frac{k}{2}+\#(\gamma\pi)}$$

証明

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n} E[X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}]$$

ここで，Wick の定理より

$$\begin{aligned} E[X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}] &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} E_\pi[X_{i_1 i_2}, X_{i_2 i_3}, \ldots, X_{i_k i_1}] \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} \prod_{(a,b) \in \pi} E[X_{i_a i_{a+1}} X_{i_b i_{b+1}}] \end{aligned}$$

ただし $i_{k+1} = i_1$ とする．ここで

$$E[X_{i_a i_{a+1}} X_{i_b i_{b+1}}] = \frac{1}{n} \delta_{i_a i_{a+1}} \delta_{i_b i_{b+1}}$$

であることと，$(a, b) \in \pi$ は $\pi(a) = b, \pi(b) = a$ であるということなので

$$\prod_{(a,b) \in \pi} \delta_{i_a i_{a+1}} \delta_{i_b i_{b+1}} = \prod_{a=1}^{k} \delta_{i_a i_{\pi(a)+1}}$$

となる．ここで shift permutation $\gamma \in S_k$（すなわち $\gamma = (1\,2\,\cdots\,k), \gamma(a) = a + 1 \mod k$）を定めると結局

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \frac{1}{n} \frac{1}{n^{k/2}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n} \prod_{a=1}^{k} \delta_{i_a i_{\gamma\pi(a)}}$$

となる．ここで $\prod_{a=1}^{k} \delta_{i_a i_{\gamma\pi(a)}} \neq 0$ であるのは $\gamma\pi$ のサイクル上で一定となっていることである．したがって

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} n^{\#(\gamma\pi)}$$

■

上の定理の別の表記を与える．

定理 1.13 X を GUE(n) とする．このとき，$\gamma = (1\,2\,\cdots\,k) \in S_k$ として

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} n^{|\gamma|-|\pi|-|\gamma\pi|}$$

が成り立つ．

証明 $|\gamma| = k-1$，$|\pi| = k/2$，$|\gamma\pi| = k - \#(\gamma\pi)$ であることから確認できる． ■

例 X が GUE(n) であるとき，$E[\mathrm{tr}X^4] = 2 + \frac{1}{n}$

証明 定義と Wick の定理から計算すれば

$$\begin{aligned} E[\mathrm{tr}X^4] &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_{ij}X_{jk}X_{kl}X_{li}] \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (E_{\pi_1} + E_{\pi_2} + E_{\pi_3})[X_{ij}X_{jk}X_{kl}X_{li}] \end{aligned}$$

各項について

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E_{\pi_2}[X_{ij}, X_{jk}, X_{kl}, X_{li}] &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_{ij}X_{jk}]E[X_{kl}X_{li}] \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jj}\delta_{ki}\delta_{ll} \\ &= n^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E_{\pi_1}[X_{ij}, X_{jk}, X_{kl}, X_{li}] &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_{ij}X_{kl}]E[X_{jk}X_{li}] \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{ji}\delta_{kl} \\ &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E_{\pi_3}[X_{ij}, X_{jk}, X_{kl}, X_{li}] &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_{ij}X_{li}]E[X_{jk}X_{kl}] \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \delta_{ii}\delta_{jl}\delta_{jl}\delta_{kk} \\ &= n^3 \end{aligned}$$

となることから従う．

また，先の定理を使えば，とられる和の中身が以下の表のようになることからもわかる． ■

定義 1.14（non-crossing）

$\pi \in \mathcal{P}_2(m)$ が non-crossing とは，すべての π の要素 (i,k) と (j,l) について，$i < j < k < l$ とはならないこと

π	$\gamma\pi$	$\#(\gamma\pi)-3$	貢献度
$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)(2)(4)$	0	$n^0=1$
$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	-2	n^{-2}
$(1\,4)(2\,3)$	$(1)(2\,4)(3)$	0	$n^0=1$

である．non-crossing な集合のことを

$$\mathcal{NC}_2(m)=\{\pi\in\mathcal{P}_2(m)\mid\pi\ \text{ is }\ \text{non-crossing}\}$$

と表記する．

定理 1.15（Biane's lemma）
$\pi\in\mathcal{P}_2(k)\subset S_k$ とし，$\gamma=(1\,2\,\cdots\,k)\in S_k$ とする．

(1) $\#(\gamma\pi)\le\frac{k}{2}+1$.
(2) $\#(\gamma\pi)=\frac{k}{2}+1$ であることは $\pi\in\mathcal{NC}_2(k)$ であるための必要十分条件である．

証明 $\tau=(i\,i+1)\in\pi$ であったとすれば，$\gamma\pi(i+1)=i+1$，$\gamma\pi(i)=i+2$ となる．したがって，$\gamma\pi$ はサイクル $(i+1)$ と $(\cdots\,i\,i+2\,\cdots)$ を含む．このとき $i,i+1$ を取り除く操作を行う．その場合の π と γ を改めて π_2 と γ_2 として考え，再び同様にして取り除く操作を繰り返すことを考える．

もし $\pi\in\mathcal{NC}_2(k)$ であれば, 上の操作は $\pi_{k/2-1}=(1\,2),\gamma_{k/2-1}=(1\,2),\gamma_{k/2-1}\pi_{k/2-1}=(1)(2),\#(\gamma_{k/2-1}\pi_{k/2-1})=2$ となるまで繰り返すことができる．これは最初の状態から上の操作を $k/2-1$ 回繰り返すことで得られる状態である．よって $\#(\gamma\pi)=(k/2-1)+\#(\gamma_{k/2-1}\pi_{k/2-1})=k/2+1$ となる．

一方で，$\pi\notin\mathcal{NC}_2(k)$ であれば，上の操作を繰り返し適用し，これ以上操作ができない状態に到達したとして，そのときの $\pi_i\gamma_i$ を考えれば，$\pi_i\gamma_i(j)=j$ となるような j が存在しない．すなわち，$\pi_i\gamma_i$ に存在するサイクルは必ず 2 つ以上の要素によって構成されていることになる．したがって，始めの状態に戻して考えることで $\#(\gamma\pi)\le k/2<k/2+1$ であることがわかる． ■

補題 1.16

$$\#\mathcal{NC}_2(n)=\begin{cases}0 & (n\text{は奇数})\\ \mathrm{Cat}\left(\frac{n}{2}\right) & (n\text{は偶数})\end{cases}$$

ただし Cat はカタラン数であり，$\mathrm{Cat}(m)=\frac{(2m)!}{m!(m+1)!}$ をみたす．

証明 いま，$k\in[2(n+1)]$ を任意に選んで，k と $2(n+1)$ を結ぶことを考えると，$[k-1]$ と $[2n+1]/[k]\cong[2n-(k-1)]$ の 2 つの集合について non-crossing pair を考えればよいことになるので，n が奇数のときは $\#\mathcal{NC}_2(n)=0$ であることに注意して，全ての k について和をとり

$$\begin{aligned}\#\mathcal{NC}_2(2(n+1))&=\sum_{k=1}^{2n+1}\#\mathcal{NC}_2(k-1)\#\mathcal{NC}_2(2n-(k-1))\\&=\sum_{k=0}^{n}\#\mathcal{NC}_2(2k)\#\mathcal{NC}_2(2(n-k))\end{aligned}$$

となる．ここで $c_n = \#\mathcal{NC}_2(2n)$ とおくことで

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

となる．この $c_n = \mathrm{Cat}(n)$ である．実際，この数列の母関数 $f(x)$ を考えると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

となるが,

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{x}(f(x) - 1) \end{aligned}$$

であることより

$$f(x)^2 x - f(x) + 1 = 0$$

を解いて（ただし $f(0) = c_0 = 1$ で連続となるように符号をとる）

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n \end{aligned}$$

係数を比較することで $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ を得る．

■

$\lim_{n\to\infty} E[\mathrm{tr}X^k]$ の値を考えたい．このとき，$\#(\gamma\pi) \leq \frac{k}{2} + 1$ であることから，$\pi \in \mathcal{P}_2(k)$ が $\#(\gamma\pi) = \frac{k}{2} + 1$ をみたす場合だけ考えれば十分．なお，幾何的には $\pi \in \mathcal{P}_2(k)$ が先の命題で定めた距離 d に関する測地線上にあることを意味する．

定理 1.17 X は $\mathrm{GUE}(n)$ であるとする．このとき，以下が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} E[\mathrm{tr}X^k] = \#\mathcal{NC}_2(k)$$

定義 1.18（semicircular distribution）

$$ds(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbb{1}_{\{|x|\leq 2\}}$$

証明 部分積分により示せる． ■

例（Haar 測度）

$U \in \mathrm{SU}(2)$ をとると，$\mathrm{Tr}U$ は s による分布をもつ．

補題 1.19

$$\int x^k ds(x) = \begin{cases} 0 & (k\text{は奇数}) \\ \mathrm{Cat}(\frac{k}{2}) & (k\text{は偶数}) \end{cases}$$

以上より，次が成り立つ．

定理 1.20 $X^{(n)}$ を GUE(n) とする．任意の実数係数多項式 $p \in \mathrm{R}[x]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[\mathrm{tr} p(X^{(n)})] = \int p(x) ds(x)$$

が成り立つ．

定理 1.21 任意の実数係数多項式 $p \in \mathrm{R}[x]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[\mathrm{tr} p(X^{(n)})] = \int p(x) ds(x)$$

が成り立つ．

定義 1.22 エルミート行列 Z の標準化された固有値計数測度を，Z の固有値を $\lambda_1(Z) \geq \cdots \geq \lambda_n(Z)$ と表記して

$$\mu_Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i(\mathrm{Z})}$$

で定める．また

$$\mu_Z([a,b]) = \frac{1}{n} \#\{i \mid \lambda_i(\mathrm{Z}) \in [a,b]\}$$

である．

補題 1.23

$$\mathrm{tr} p(Z) = \int p(t) d\mu_Z(t)$$

証明

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} p(Z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i(\mathrm{Z})) \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(x) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i(\mathrm{Z})}(x) \end{aligned}$$

■

Z が決定論的なら μ_Z は決定論的，ランダムならばランダム確率測度

μ_X がランダム確率測度ならば特に $E\mu_X$ が well-defined．これは任意の連続関数 f に対して

$$E \int f(x) d\mu_X(x) = \int f(x) dE\mu_X(x)$$

である．これを用いると任意の実数係数多項式 p に対して

$$\int p(t) dE\mu_X(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int p(t) ds(t)$$

であることが証明できる．さらに，

定理 1.24　任意の有界連続関数 f に対して

$$\int f(t)dE\mu_X(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(t)ds(t)$$

が成り立つ．

このことは

$$E\mu_X \overset{\text{weak}}{\longrightarrow} s$$

であることを主張している．

定理 1.25（Wiegner's theorem）

$X^{(n)}$ を GUE(n) とする．このとき

$$E\mu_{X^{(n)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s \quad (\text{in weak})$$

2　Preliminaries

定義 2.1（a.s. bounded）

実数値確率変数 X が a.s. bounded とは，ある定数 $M > 0$ が存在して，$P(|X| \le M) = 1$ であることをいう．

定義 2.2（sub-gaussian）

実数値確率変数 X が sub-gaussian であるとは，ある定数 $C > 0, c > 0$ が存在して，任意の $\lambda > 0$ に対して以下が成り立つことをいう：

$$P(|X| \ge \lambda) \le C\exp\left(-c\lambda^2\right)$$

例　$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ のとき，ある定数 $C > 0, c > 0$ が存在して以下のようにできる：

$$P(|X| \ge \lambda) = 2\int_\lambda^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx \le Ce^{-c\lambda^2}$$

定義 2.3（有限な k 次モーメント）

確率変数 X が有限の k 次モーメントを持つとは，$E[|X|^k] < +\infty$ であることをいう．

注意　a.s. bounded $\Rightarrow$ sub-gaussian $\Rightarrow$ k 次のモーメントが有限

命題 2.4　実数値確率変数 X が sub-gaussian ならば，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $E[e^{\lambda X}] < +\infty$ である．
（言い換えれば，X のラプラス変換は $\mathbb{R}$ 上で定義される．）

命題 2.5　実数値確率変数 X に対して，以下は同値である：

(1) X は sub-gaussian である．
(2) ある $C > 0, c > 0$ が存在して，任意の $t \ge 0$ に対して $E[e^{tX}] \le C\exp\left(ct^2\right)$．
(3) ある $C > 0$ が存在して，任意の $k \ge 1$ に対して $E[|X|^k] \le (Ck)^{k/2}$．

命題 2.6（Markov の不等式）

実数値確率変数 X に対して

$$P(|X| \ge \lambda) \le \frac{E[|X|]}{\lambda}$$

命題 2.7（Jensen の不等式）

実数値確率変数 X と convex な関数 g に対して

$$g(E[X]) \le E[g(X)]$$

証明 g が convex であるとき，$g(x) = \sup\{d(x) : d(x) = ax + b \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}, d(x) \le g(x)\}$ と表現できる．このとき $E[d(X)] = d(E[X])$ が成り立つ．いま，$y = E[X]$ とし，$d(x) = ax + b$ を $g(y) = ay + b$ となるように定めると

$$\begin{aligned} g(E[X]) &= g(y) \\ &= ay + b \\ &= d(y) \\ &= E[d(X)] \\ &\le E[g(X)] \quad (\because d(X) \le g(X)) \end{aligned}$$

となる． ■

3 Concentration of Measure

定理 3.1 $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ とし，$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を 1-Lipschitz 関数とする．このとき，ある $C > 0, c > 0$ が存在して，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$P(|F(X) - E[F(X)]| \ge \lambda) \le C \exp\left(-c\lambda^2\right)$$

注意 この現象は測度の集中とよばれ，高次元多様体ではじめてみられた．

例 以下では $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は標準内積とする．球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上で x, y をランダム一様独立にとる．このとき，$\langle x, y \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$ であり，実際 $E[|\langle x, y \rangle|^2] = \frac{1}{n}$ である．

ここで，Markov の不等式より

$$\begin{aligned} P\left(|\langle x, y \rangle| \ge \frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= P\left(|\langle x, y \rangle|^2 \ge \frac{t^2}{n}\right) \\ &\le \frac{E[|\langle x, y \rangle|^2]}{t^2/n} \\ &\le \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

これより，高次元で 2 つのベクトルをランダムにとれば，それらは a.s. でほぼ直交することがわかる．実際，これは sub-gaussian である．