解析学特論II 講義ノート

定義 0.1（Random Matrix）
ランダム行列 $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ とは，各成分 x_{ij} が確率変数であるような行列のことである．

1 Gaussian Unitary Ensemble

V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間であり，各要素は $r \in \mathbb{R}$ として $\mathcal{N}(0,r)$ に従う実数確率変数であるとする．ただし，$r = 0$ の場合も確率変数 0 とみなして許容する．

例 $g_1, \ldots, g_d \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ としたとき，$V = \{\sum_{i=1}^d \lambda_i g_i \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d\}$ は gaussian space．実際，すべての gaussian space はこのように表現できる．

1.1 Wick's Theorem

$g_1, \ldots, g_n \in V$ を考え，$E[g_1 \cdots g_n]$ の値がどうなるかを考えたい．$E[g_1 \cdots g_n]$ が有限であることは Hölder の不等式から導ける．また，n が奇数の場合にこの値が 0 となることは容易にわかる．

定義 1.1（pair partition $\mathcal{P}_2(n)$）

(1) $n \in \mathcal{N}$ に対して $[n] = \{1, \ldots, n\}$ と表記する．
(2) $[n]$ の pairing π とは，$[n]$ を被りのないように 2 つずつ選んだ数のペアに分割することである．すなわち，$\pi = \{V_1, \ldots, V_k\}$ は $i, j = 1, \ldots, k$（ただし $i \neq j$）に対して
- $V_i \subset [n]$
- $|V_i| = 2$
- $V_i \cap V_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^k V_i = [n]$

をみたす．なお，必然的に $k = n/2$ となる．
(3) $[n]$ の pair partition $\mathcal{P}_2(n)$ は
$$\mathcal{P}_2(n) = \{\pi \mid \pi \text{ is pairing of } [n]\}$$
で定義される．

命題 1.2
$$\#\mathcal{P}_2(n) = \begin{cases} 0 & (n\text{は奇数}) \\ (n-1)!! & (n\text{は偶数}) \end{cases}$$

証明 $\mathcal{P}_2(n)$ のうちで，まず 1 とのペアを考えると，その選び方は $n-1$ 通りある．このペアを取り除くと，

pairing を作る数は $n-2$ 個残っている．したがって $\#\mathcal{P}_2(n) = (n-1)\cdot\#\mathcal{P}_2(n-2)$ が成り立つ．また，$\#\mathcal{P}_2(1) = 0$, $\#\mathcal{P}_2(2) = 1$ であることと合わせれば，証明は終了する． ■

例 $\mathcal{P}_2(2) = \{\{\{1,2\}\}\}$，$\mathcal{P}_2(4) = \{\{\{1,2\},\{3,4\}\},\{\{1,3\},\{2,4\}\},\{\{1,4\},\{2,3\}\}\}$.

定義 1.3 $E_\pi[X_1,\ldots,X_n] = \prod_{(i,j)\in\pi} E[X_iX_j]$

例

$$\begin{aligned}E[X_1X_2X_3X_4] &= E_{\{\{1,2\},\{3,4\}\}}[X_1,X_2,X_3,X_4] + E_{\{\{1,3\},\{2,4\}\}}[X_1,X_2,X_3,X_4] + E_{\{\{1,4\},\{2,3\}\}}[X_1,X_2,X_3,X_4]\\ &= E[X_1X_2]E[X_3X_4] + E[X_1X_3]E[X_2X_4] + E[X_1X_4]E[X_2X_3]\end{aligned}$$

補題 1.4 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として，n 重線形対称関数 $\varphi : V^n \to \mathbb{R}$ を考える．このとき，$\varphi(x,\cdots,x) = \phi(x)$ とおくと

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}(-1)^{n-k}\phi(x_{j_1}+\cdots+x_{j_k})$$

が成り立つ．

注意 上の補題において対称とは，$\sigma\in S_n$ に対して $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ が成り立つことである．

注意 この等式は，偏極恒等式の一般化である．$n=2$ の場合は偏極恒等式

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)) = \frac{1}{4}(\phi(x+y)-\phi(x-y))$$

となる．

証明

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}(-1)^{k}\phi(x_{j_1}+\cdots+x_{j_k}) &= \sum_{A\subset[n]}(-1)^{|A|}\phi\left(\sum_{a\in A}x_a\right)\\ &= \sum_{A\subset[n]}(-1)^{|A|}\sum_{f:[n]\to A}\varphi(x_{f(1)},\ldots,x_{f(n)})\\ &= \sum_{f:[n]\to[n]}\varphi(x_{f(1)},\ldots,x_{f(n)})\sum_{\mathrm{Im}f\subset A\subset[n]}(-1)^{|A|}\\ &= \sum_{f\in S_n}\varphi(x_{f(1)},\ldots,x_{f(n)})(-1)^n\\ &= (-1)^n n!\varphi(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

となることから従う．ただし，$\mathrm{Im}f \neq [n]$ のときは

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{Im}f\subset A\subset[n]}(-1)^{|A|} &= \sum_{j=0}^{n-|\mathrm{Im}f|}(-1)^j{}_{n-|\mathrm{Im}f|}C_j\\ &= (1+(-1))^{n-|\mathrm{Im}f|}\\ &= 0\end{aligned}$$

となることを利用した． ■

補題 1.5 n 重線形対称関数 $\phi : V^n \to \mathbb{R}$ に対して，任意の $x_1,\ldots,x_n\in V$ に対して $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = 0$ が成り立つことと，任意の $x\in V$ に対して $\varphi(x,\ldots,x) = \phi(x) = 0$ が成り立つことは同値.

証明 十分性は容易．必要性は先の補題において右辺に現れる各 $\phi(x_{j_1}+\cdots+x_{j_k})=0$ となるときを考えることになるため，$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ が成り立つ． ■

定理 1.6（Wick's Theorem）

$g_1,\ldots,g_n\in V$ に対して，以下が成り立つ：

$$E[g_1\cdots g_n]=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(n)}E_\pi[g_1,\ldots,g_n]$$

証明 まずは $g_1=\cdots=g_n=g\in V$ のときに成り立つことを示す．いま，V の仮定から $E[g]=0$ である．さらに，$E[g^2]=1$ と置いても一般性は失われない（以下の議論で g を $g/E[g^2]$ に置き換えればよい）．左辺は

$$\begin{aligned}E[g_1\cdots g_n]&=E[g^n]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\&=(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}x^{n-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\&=\cdots\\&=(n-1)!!\end{aligned}$$

であり，右辺は

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(n)}E_\pi[g,\cdots,g]&=(n-1)!!E[g^2]^{\frac{n}{2}}\\&=(n-1)!!\end{aligned}$$

となることから成り立つ．いま，補題において $\varphi(g_1,\ldots,g_n)=E[g_1\cdots g_n]-\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(n)}E_\pi[g_1,\ldots,g_n]$ と置けば，$\varphi(g,\ldots,g)=0$ は確認したので $\varphi(g_1,\ldots,g_n)=0$ も成り立つ．よって示された． ■

1.2 Gaussian Unitary Ensemble and Wiegner's Theorem

定義 1.7（Gaussian Unitary Ensemble）

Gaussian Unitary Ensemble とは，行列 $H=(h_{ij})_{i,j=1}^n$ であって，すべての $i,j=1,\ldots,n$ に対して $h_{ij}=\overline{h}_{ji}$ を満たし，$\{h_{ij}\mid i\geq j\}$ は独立同分布で $\mathcal{N}(0,1/n)$ に従うようなもののことである．H のガウス測度（すなわち，H のすべての要素の同時分布）は

$$d\mu(H)=\frac{1}{Z}e^{-\frac{n}{2}\mathrm{tr}H^2}dH$$

となる．ただし $Z=2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{1}{2}n^2}$，$dH=\prod_{i\geq j}dh_{ij}$．

例 ランダム行列 X は GUE(n) であるとする．このとき，$E[X_{ij}X_{kl}]=\delta_{il}\delta_{jk}/n$ が成り立つ．また，Wick の定理より $E[X_{i_1j_1}\cdots X_{i_kj_k}]=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(k)}n^{-k/2}\delta_{\pi_{ij}}$．

定義 1.8（互換の数）

k 次の対称群の元 $\sigma\in S_k$ に対して $|\sigma|$ を互換の数として定める．

定義 1.9（サイクルの数）

k 次の対称群の元 $\sigma\in S_k$ に対して $\#(\sigma)$ を，巡回置換の積に分解したときのサイクルの数として定める（$|\sigma|$ とは異なることに注意）．

命題 1.10

(1) $\sigma, \tau \in S_k$ に対して，対応 $(\sigma, \tau) \mapsto |\sigma\tau^{-1}|$ を考えると，これは S_k の距離となる．すなわち，この対応を d で表すと以下の 3 つが成り立つ：
   - $d(\sigma, \tau) = 0 \leftrightarrow \tau = \sigma$
   - $d(\sigma_1, \sigma_2) + d(\sigma_2, \sigma_3) \geq d(\sigma_1, \sigma_3)$
   - $d(\sigma_1, \sigma_2) = d(\sigma_2, \sigma_1)$

(2) $\sigma \in S_k$ について，$|\sigma| + \#(\sigma) = k$ が成り立つ．

例　以下のいずれの場合でも $|\sigma| + \#(\sigma) = k$ が成立していることが確認できる．

- $\sigma = e \in S_k$ を考えると，$|\sigma| = 0$．$\sigma = (1)(2)\cdots(k)$ より $\#(e) = k$．
- $\sigma = (1\,2) \in S_k$ を考えると，$|\sigma| = 1$，$\sigma = (1\,2)(3)\cdots(k)$ より $\#(\sigma) = k-1$．
- $\sigma = (1\,2\,\cdots\,k) \in S_k$ を考えると，$|\sigma| = |(1\,2)\cdots(k-1\,k)| = k-1$．$\#(\sigma) = 1$．

定義 1.11（normalized trace）
n 次元正方行列 X に対して $\mathrm{tr}X = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}X$ と定める．

定理 1.12　X を GUE(n) とする．このとき，$\gamma = (1\,2\,\cdots\,k) \in S_k$ として以下が成り立つ：

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} n^{-1-\frac{k}{2}+\#(\gamma\pi)}$$

証明

$$\mathrm{tr}X^k = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n} X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}$$

より

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n} E[X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}]$$

ここで，Wick の定理より

$$\begin{aligned} E[X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}] &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} E_\pi[X_{i_1 i_2}, X_{i_2 i_3}, \ldots, X_{i_k i_1}] \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} \prod_{(a,b) \in \pi} E[X_{i_a i_{a+1}} X_{i_b i_{b+1}}] \end{aligned}$$

ただし $i_{k+1} = i_1$ とする．ここで

$$E[X_{i_a i_{a+1}} X_{i_b i_{b+1}}] = \frac{1}{n} \delta_{i_a i_{a+1}} \delta_{i_b i_{b+1}}$$

であることと，$(a,b) \in \pi$ は $\pi(a) = b, \pi(b) = a$ であるということなので

$$\prod_{(a,b) \in \pi} \delta_{i_a i_{a+1}} \delta_{i_b i_{b+1}} = \prod_{a=1}^{k} \delta_{i_a i_{\pi(a)+1}}$$

となる．ここで shift permutation $\gamma \in S_k$（すなわち $\gamma = (1\,2\,\cdots\,k), \gamma(a) = a+1 \mod k$）を定めると結局

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \frac{1}{n} \frac{1}{n^{k/2}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n} \prod_{a=1}^{k} \delta_{i_a i_{\gamma\pi(a)}}$$

となる（$\mathcal{P}_2(k) = k/2$ に注意）．ここで $\prod_{a=1}^{k} \delta_{i_a i_{\gamma\pi(a)}} \neq 0$ であるのは $\gamma\pi$ のサイクル上で一定となっていることである．したがって

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} n^{\#(\gamma\pi)}$$

■

注意 証明中の次の部分に対してグラフを利用した解釈を与えよう．

$$\begin{aligned} E[X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}] &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} E_\pi[X_{i_1 i_2}, X_{i_2 i_3}, \ldots, X_{i_k i_1}] \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} \prod_{(a,b) \in \pi} E[X_{i_a i_{a+1}} X_{i_b i_{b+1}}] \end{aligned}$$

まず，$i_1 i_2, \ldots, i_k$ の列について，この列の中に現れる重複なし index の数を w とする．もし，この index の列の中に 1 つしか現れない index i_l があれば，各確率変数は独立であるから，ある index i_m に対して $E[X_{i_l i_m}] = E[X_{i_l i_m}] = 0$ が成り立つため，$E[X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}] = 0$ となることがわかる．したがって，この計算の値に寄与するとき，各 index は $i_1 i_2, \ldots, i_k$ の列の中に少なくとも 2 回ずつ現れる．したがって $w \leq k/2 + 1$ であることがわかる．このとき，この w を与えるような列 $i_1 i_2, \ldots, i_k$ の与え方は $n(n-1) \cdots (n-w+1) \leq n^w \leq n^{k/2+1}$ となる．したがって $E[X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \cdots X_{i_k i_1}] = O(n^{k/2+1})$ であることがわかる．最後の段階には $n^{-k/2-1}$ が掛けられるので，寄与として残る可能性があるのは $n^{k/2+1}$ のオーダーについてのみである．したがって，特に $w = k/2 + 1$ の場合を考える．いま，列 $i_1 i_2, \ldots, i_k$ に対して，有向グラフ $G = (V, E)$ を V は $i_1, \ldots, i_k$ から重複なくとった集合，$E = \{(i_1, i_2), \ldots, (i_k, i_1)\}$ とする．列 $i_1 i_2, \ldots, i_k$ の長さは k なので，辺 の数を重複なく数えると $k/2$ 個となる．すなわち，各辺はちょうど 2 回通過する．言い換えれば任意の辺 (i_j, i_{j+1}) に対して $i_j = i_{l+1}, i_{j+1} = i_l$ をみたすような辺 (i_l, i_{l+1}) が存在する．この性質をみたす任意のパスが non-crossing なものとなっている．

上の定理の別の表記を与える．

定理 1.13 X を GUE(n) とする．このとき，$\gamma = (1\,2 \cdots k) \in S_k$ として

$$E[\mathrm{tr}X^k] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(k)} n^{|\gamma| - |\pi| - |\gamma\pi|}$$

が成り立つ．

証明 $|\gamma| = k - 1$，$|\pi| = k/2$，$|\gamma\pi| = k - \#(\gamma\pi)$ であることから確認できる． ■

例 X が GUE(n) であるとき，$E[\mathrm{tr}X^4] = 2 + \frac{1}{n}$

証明 定義と Wick の定理から計算すれば

$$\begin{aligned} E[\mathrm{tr}X^4] &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_{ij} X_{jk} X_{kl} X_{li}] \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (E_{\pi_1} + E_{\pi_2} + E_{\pi_3})[X_{ij} X_{jk} X_{kl} X_{li}] \end{aligned}$$

各項について

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,l=1}^{n} E_{\pi_2}[X_{ij}, X_{jk}, X_{kl}, X_{li}] &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_{ij}X_{jk}]E[X_{kl}X_{li}] \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jj}\delta_{ki}\delta_{ll} \\
&= n^3 \\
\sum_{i,j,k,l=1}^{n} E_{\pi_1}[X_{ij}, X_{jk}, X_{kl}, X_{li}] &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_{ij}X_{kl}]E[X_{jk}X_{li}] \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{ji}\delta_{kl} \\
&= n \\
\sum_{i,j,k,l=1}^{n} E_{\pi_3}[X_{ij}, X_{jk}, X_{kl}, X_{li}] &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_{ij}X_{li}]E[X_{jk}X_{kl}] \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \delta_{ii}\delta_{jl}\delta_{jl}\delta_{kk} \\
&= n^3
\end{aligned}$$

となることから従う．

また，先の定理を使えば，とられる和の中身が以下の表のようになることからもわかる． ■

π	$\gamma\pi$	$\#(\gamma\pi)-3$	貢献度
$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)(2)(4)$	0	$n^0 = 1$
$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	-2	n^{-2}
$(1\,4)(2\,3)$	$(1)(2\,4)(3)$	0	$n^0 = 1$

定義 1.14（non-crossing）

$\pi \in \mathcal{P}_2(m)$ が non-crossing とは，すべての π の要素 (i,k) と (j,l) について，$i<j<k<l$ とはならないことである．non-crossing な集合のことを

$$\mathcal{NC}_2(m) = \{\pi \in \mathcal{P}_2(m) \mid \pi \text{ is non-crossing}\}$$

と表記する．

定理 1.15（Biane's lemma）

$\pi \in \mathcal{P}_2(k) \subset S_k$ とし，$\gamma = (1\,2\,\cdots\,k) \in S_k$ とする．

(1) $\#(\gamma\pi) \leq \frac{k}{2}+1$.
(2) $\#(\gamma\pi) = \frac{k}{2}+1$ であることは $\pi \in \mathcal{NC}_2(k)$ であるための必要十分条件である．

証明 $\tau = (i\,i+1) \in \pi$ であったとすれば，$\gamma\pi(i+1) = i+1$，$\gamma\pi(i) = i+2$ となる．したがって，$\gamma\pi$ はサイクル $(i+1)$ と $(\cdots\,i\,i+2\,\cdots)$ を含む．このとき $i, i+1$ を取り除く操作を行う．その場合の π と γ を改めて π_2 と γ_2 として考え，再び同様にして取り除く操作を繰り返すことを考える．

もし $\pi \in \mathcal{NC}_2(k)$ であれば, 上の操作は $\pi_{k/2-1} = (1\,2), \gamma_{k/2-1} = (1\,2), \gamma_{k/2-1}\pi_{k/2-1} = (1)(2), \#(\gamma_{k/2-1}\pi_{k/2-1}) = 2$ となるまで繰り返すことができる．これは最初の状態から上の操作を $k/2-1$ 回繰り返すことで得られる状態である．よって $\#(\gamma\pi) = (k/2-1) + \#(\gamma_{k/2-1}\pi_{k/2-1}) = k/2+1$ となる．

一方で，$\pi \notin \mathcal{NC}_2(k)$ であれば，上の操作を繰り返し適用し，これ以上操作ができない状態に到達したとして，そのときの $\pi_i\gamma_i$ を考えれば，$\pi_i\gamma_i(j) = j$ となるような j が存在しない．すなわち，$\pi_i\gamma_i$ に存在するサイクルは必ず 2 つ以上の要素によって構成されていることになる．したがって，始めの状態に戻して考えることで $\#(\gamma\pi) \le k/2 < k/2+1$ であることがわかる． ■

補題 1.16

$$\#\mathcal{NC}_2(n) = \begin{cases} 0 & (n\text{は奇数}) \\ \mathrm{Cat}\left(\frac{n}{2}\right) & (n\text{は偶数}) \end{cases}$$

ただし Cat はカタラン数であり，$\mathrm{Cat}(m) = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!}$ をみたす．

証明 いま，$k \in [2(n+1)]$ を任意に選んで，k と $2(n+1)$ を結ぶことを考えると，$[k-1]$ と $[2n+1]/[k] \cong [2n-(k-1)]$ の 2 つの集合について non-crossing pair を考えればよいことになるので，n が奇数のときは $\#\mathcal{NC}_2(n) = 0$ であることに注意して，全ての k について和をとり

$$\begin{aligned} \#\mathcal{NC}_2(2(n+1)) &= \sum_{k=1}^{2n+1} \#\mathcal{NC}_2(k-1)\#\mathcal{NC}_2(2n-(k-1)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \#\mathcal{NC}_2(2k)\#\mathcal{NC}_2(2(n-k)) \end{aligned}$$

となる．ここで $c_n = \#\mathcal{NC}_2(2n)$ とおくことで

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

となる．この $c_n = \mathrm{Cat}(n)$ である．実際，この数列の母関数 $f(x)$ を考えると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

となるが,

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{x}(f(x)-1) \end{aligned}$$

であることより

$$f(x)^2 x - f(x) + 1 = 0$$

を解いて（ただし $f(0) = c_0 = 1$ で連続となるように符号をとる）

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n \end{aligned}$$

係数を比較することで $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ を得る．

■

$\lim_{n\to\infty} E[\mathrm{tr}X^k]$ の値を考えたい．このとき，$\#(\gamma\pi) \le \frac{k}{2}+1$ であることから，$\pi \in \mathcal{P}_2(k)$ が $\#(\gamma\pi) = \frac{k}{2}+1$ をみたす場合だけ考えれば十分．なお，幾何的には $\pi \in \mathcal{P}_2(k)$ が先の命題で定めた距離 d に関する測地線上にあることを意味する．

定理 1.17 X は GUE(n) であるとする．このとき，以下が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} E[\mathrm{tr}X^k] = \#\mathcal{NC}_2(k)$$

定義 1.18（semicircular distribution）

$$ds(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\mathbb{1}_{\{|x|\le 2\}}$$

例（Haar measure）

$U \in \mathrm{SU}(2)$ をとると，TrU は s による分布をもつ．

補題 1.19

$$\int x^k ds(x) = \begin{cases} 0 & (k\text{は奇数}) \\ \mathrm{Cat}(\frac{k}{2}) & (k\text{は偶数}) \end{cases}$$

証明 部分積分により示せる． ■

以上より，次が成り立つ．

定理 1.20 $X^{(n)}$ を GUE(n) とする．任意の実数係数多項式 $p \in \mathrm{R}[x]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[\mathrm{tr}p(X^{(n)})] = \int p(x)ds(x)$$

が成り立つ．

証明 補題 1.16 と定理 1.17 と補題 1.19 から，任意の実数係数多項式 $p \in \mathrm{R}[x]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[\mathrm{tr}(X^{(n)})^k] = \int x^k ds(x)$$

が成り立つことと，トレースの線形性から従う． ■

定義 1.21 エルミート行列 $\mathrm{Z}^{(n)}$ の標準化された固有値計数測度を，$Z^{(n)}$ の固有値を $\lambda_1(\mathrm{Z}^{(n)}) \ge \cdots \ge \lambda_n(\mathrm{Z}^{(n)})$ と表記して

$$\mu_{Z^{(n)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i(Z^{(n)})}$$

で定める．また

$$\mu_{Z^{(n)}}([a,b]) = \frac{1}{n}\#\{i \mid \lambda_i(\mathrm{Z}) \in [a,b]\}$$

である．

補題 1.22 エルミート行列 $Z^{(n)}$ に対して，任意の実数係数多項式 $p \in \mathrm{R}[x]$ に対して

$$\mathrm{tr}p(Z^{(n)}) = \int p(t)d\mu_{Z^{(n)}}(t)$$

が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}p(Z^{(n)}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i(Z^{(n)})) \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(x)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\lambda_i(Z^{(n)})}(x)\end{aligned}$$

■

$Z^{(n)}$ が決定論的なら $\mu_{Z^{(n)}}$ は決定論的，$Z^{(n)}$ がランダム行列ならばランダム確率測度という．$\mu_{X^{(n)}}$ がランダム確率測度ならば特に $E\mu_{X^{(n)}}$ が well-defined となる．これは任意の連続関数 f に対して

$$E\int f(x)d\mu_{X^{(n)}}(x) = \int f(x)dE\mu_{X^{(n)}}(x)$$

である．これを用いると次が示せる：

定理 1.23 $X^{(n)}$ を GUE(n) とする．任意の実数係数多項式 $p \in \mathbb{R}[x]$ に対して

$$\int p(t)dE\mu_{X^{(n)}}(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int p(t)ds(t)$$

が成り立つ．

証明 定理 1.20 を $\mu_{X^{(n)}}$ を用いて書き換えたものである． ■

定理 1.24（Wiegner's (semicircular) theorem）
$X^{(n)}$ を GUE(n) とする．任意の有界連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int f(t)dE\mu_{X^{(n)}}(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(t)ds(t)$$

が成り立つ．言い換えると，

$$E\mu_{X^{(n)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s \quad (\text{in weak})$$

が成り立つ．

証明 後の定理 1.27 で正確に証明する． ■

注意 この定理には，複数のバリエーションがある．例えば，次のようなものもある．

定理 1.25（Wiegner's (semicircular) theorem: another variant）
$X^{(n)} = (x_{ij}^{(n)})$ を次の条件をみたす実数ランダム行列とする（以下の条件をみたす行列を Wiegner Matrix という）：

- $x_{ij}^{(n)} = x_{ji}^{(n)}$.

- $(x_{ij}^{(n)})_{i\geq j}$ は独立.
- $E[x_{ij}^{(n)}] = 0$.
- $E[(x_{ij}^{(n)})^2] = 1/n$.
- すべてのモーメントは有限.

このとき,

$$E\mu_{X^{(n)}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} s \quad \text{(in weak)}$$

が成り立つ.

ここまでの収束は期待値の意味での収束だが，概収束の意味での収束も示すことができる（宿題）．まずは多項式に対して示し，その後に有界連続関数に対して示す.

定理 1.26 $X^{(n)}$ を Wigner ランダム行列とする．任意の実数係数多項式 $p \in \mathbb{R}[x]$ に対して

$$\int p(t)d\mu_{X^{(n)}}(t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int p(t)ds(t)$$

が成り立つ.

証明 期待値の意味での収束はいえてるので，分散についてみる.

$$\begin{aligned} V[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k] &= E[(\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k)^2] - (E[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k])^2 \\ &= \frac{1}{n^{k+2}} \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} \sum_{1\leq j_1,\ldots,j_k\leq n} E[X_{i_1i_2}\cdots X_{i_ki_1}X_{j_1j_2}\cdots X_{j_kj_1}] - E[X_{i_1i_2}\cdots X_{i_ki_1}]E[X_{j_1j_2}\cdots X_{j_kj_1}] \end{aligned}$$

第 1 項の列 $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k$ に対してグラフ的な解釈を考える．以前の注意でも見た通り，この列の中で重複なし index の数を w とすると，$w \leq k+1$ である．もし，$i_1,\ldots,i_k$ の部分と $j_1,\ldots,j_k$ の部分が完全に独立していれば，第 2 項と相殺されるので，グラフにおいて $i_1,\ldots,i_k$ の部分と $j_1,\ldots,j_k$ の部分は，何らかの辺で繋がっている場合について考えることになる．特に $w = k+1$ の場合を考えると，この場合は存在しないことが次のように示せる.

このとき，グラフ $G = (V,E)$ を V として $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k$ から重複なく作る集合，$E = \{(i_1,i_2),\ldots,(i_k,i_1),(j_1,j_2),\ldots,(j_k,j_1)\}$ としたとき $|V| = k+1, |E| = k$ となり，木となっている．同時に，$G_i = (V_i,E_i)$ を V_i として $i_1,\ldots,i_k$ から重複なく作る集合，$E = \{(i_1,i_2),\ldots,(i_k,i_1)\}$ とする．このとき，列 $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k$ が 1 つのパスになっており，無向グラフとみた場合には同一辺がちょうど 2 つずつある．言い換えれば，列 $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k$ を 列 $s_1,\ldots,s_{2k}$ に対応させたときに，任意の辺 (s_l,s_{l+1}) に対して $s_l = s_{m+1}, s_{l+1} = s_m$ をみたすような辺 (s_m,s_{m+1}) が存在する．このとき，何らかの辺で i と j が繋がっているはずなので，(i_l,i_{l+1}) に対して $i_l = j_{m+1}, i_{l+1} = j_m$ をみたすような辺 (j_m,j_{m+1}) が存在するはずである．しかし，G_i,G_j 内のみでも 2 つの組となる辺が存在していなければならないので矛盾である．したがって $w \leq k$ であることがわかる.

このことを認めれば，いま，各モーメントは有界であり，和をとったものは $O(n^k)$ となる．したがって $V[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k] = O(1/n^2)$ であることがわかる.

さて，マルコフの不等式を利用すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} P\left(\left|\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k - E[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k]\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k - E[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k]\right|^2 > \varepsilon^2\right) \\ &\leq \frac{V[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k]}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{C}{n^2} \quad (\exists C > 0) \end{aligned}$$

であることがわかる．よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k - E[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k]\right| > \varepsilon\right) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

である．したがって，Borel-Cantelli の補題より

$$P\left(\left|\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k - E[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k]\right| > \varepsilon \text{ i.o.}\right) = 0$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k - E[\mathrm{tr}\left(X^{(n)}\right)^k]\right| = 0 \quad \text{(a.s.)}$$

■

定理 1.27（Wiegner's (semicircular) theorem: a.s. version）
$X^{(n)}$ を Wigner ランダム行列とする．任意の有界連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int f(t) d\mu_X(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f(t) ds(t)$$

が成り立つ．

証明 定理 1.26 を認めることにする．また，$X^{(n)}$ は対角化されていると考えても一般性を失わない．$\mu_{X^{(n)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i^{(n)}}$ とすると

$$\int f d\mu_{X^{(n)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i^{(n)}) = \mathrm{tr} f(X^{(n)})$$

ワイエルシュトラスの近似定理より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある多項式 p_ε が存在して $\sup_{|t|\leq 3}|f(t) - p_\varepsilon(t)| < \varepsilon/2$ とできる．いま，

$$\begin{aligned} \left|\int f d\mu_{X^{(n)}} - \int f ds\right| &\leq \left|\int f d\mu_{X^{(n)}} - \int p_\varepsilon d\mu_{X^{(n)}}\right| + \left|\int p_\varepsilon d\mu_{X^{(n)}} - \int p_\varepsilon ds\right| + \left|\int p_\varepsilon ds - \int f ds\right| \\ &\leq \int_{|t|\leq 3} |f(t) - p_\varepsilon(t)| d\mu_{X^{(n)}} + \int_{|t|>3} |f(t) - p_\varepsilon(t)| d\mu_{X^{(n)}} \\ &\quad + \left|\int p_\varepsilon d\mu_{X^{(n)}} - \int p_\varepsilon ds\right| + \left|\int p_\varepsilon ds - \int f ds\right| \end{aligned}$$

- $[-3, 3]$ 上で $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon/2$ であり，$\mu_{X^{(n)}}$ は確率測度であるから

$$\int_{|t|\leq 3} |f(t) - p_\varepsilon(t)| d\mu_{X^{(n)}}(t) < \frac{\varepsilon}{2}$$

- f は有界なので $|f(t)-p_\varepsilon(t)| \le \|f\|_\infty + |p_\varepsilon(t)|$ であり，$|t|>3$ では p_ε の次数を k とおくと，ある定数 $c>0$ が存在して $\|f\|_\infty + |p_\varepsilon(t)| \le c|t|^k$ とできる．したがって

$$\begin{aligned}\int_{|t|>3} |f(t)-p_\varepsilon(t)| d\mu_{X^{(n)}}(t) &\le \int_{|t|>3} c|t|^k d\mu_{X^{(n)}}(t) \\ &\le \frac{c}{3^{k+2l}} \int_{|t|>3} |t|^{2(k+l)} d\mu_{X^{(n)}}(t) \quad (k = 2(k+l)-(k+2l), \forall l \in \mathbb{Z}_+)\end{aligned}$$

  また，定理 1.26 を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int |t|^{2(k+l)} d\mu_{X^{(n)}}(t) &= \int |t|^{2(k+l)} ds(t) \quad \text{(a.s.)} \\ &= \int_{-2}^{2} t^{2(k+l)} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}dt \\ &\le 2^{2(k+l)} \int_{-2}^{2} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}dt \\ &= 2^{2(k+l)}\end{aligned}$$

  したがって

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f(t)-p_\varepsilon(t)| d\mu_{X^{(n)}} \le \frac{c}{3^{k+2l}} \cdot 2^{2(k+l)} = c\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2l} \to 0 \quad (l\to\infty)$$

  よって

$$\int |f(t)-p_\varepsilon(t)| d\mu_{X^{(n)}} \to 0 \quad (l\to\infty)$$

- 定理 1.26 を用いると

$$\left|\int p_\varepsilon d\mu_{X^{(n)}} - \int p_\varepsilon ds\right| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

- $[-3,3]$ 上で $|p_\varepsilon(t)-f(t)| < \varepsilon/2$ であり，これは s の台である $[-2,2]$ を含むので

$$\left|\int p_\varepsilon ds - \int f ds\right| \le \int |p_\varepsilon - f| ds < \frac{\varepsilon}{2}$$

以上を合わせると

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int f d\mu_{X^{(n)}} - \int f ds\right| \le \varepsilon$$

したがって

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left|\int f d\mu_{X^{(n)}} - \int f ds\right| > \varepsilon\right) = 0$$

このことは

$$\int f d\mu_{X^{(n)}} = \mathrm{tr}(f(X^{(n)})) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f ds \quad \text{(a.s.)}$$

を意味する． ■

発展的な内容として，GUE の行列の積がどのようになるか考えてみる．すなわち，$X_1^{(n)},\dots,X_d^{(n)}$ を GUE(n) としたとき，$E[\mathrm{tr}X_{i_1}^{(n)}\cdots X_{i_n}^{(n)}]$ $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,d\}^k$ がどのようになるか？ という問題である．これに対しては，次の結果が知られている：

定理 1.28

$$E[\mathrm{tr}X^{(n)}_{i_1}\cdots X^{(n)}_{i_k}] = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_2(k);\pi \text{ is compatible with } \{i_1,\dots,i_n\}} n^{|\gamma|-|\pi|-|\gamma\pi|}$$

これを用いると，非常に一般的な結果を示すことができる．

定理 1.29 p を非可換な d 個の変数 $x_1,\dots,x_d$ をもつ NC 多項式とし，$p^{(n)}$ を変数を確率変数で置き換えて得られるランダム行列とする．このとき，p に依存する確率測度 μ_p が存在して

$$E\mu_{p^{(n)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_p$$

注意 例えば $p = x_1x_2 + x_2x_1$ なら $p^{(n)} = X^{(n)}_1 X^{(n)}_2 + X^{(n)}_2 X^{(n)}_1$.

注意 Wiegner's Theorem は $p = x_1$ の場合で，このとき $\mu_p = s$ となる．しかし，一般の p に対して μ_p の分布を調べることは困難である．これは現在の自由確率論の目標である．ただし，存在性を示すだけであればそこまで難しくない．

証明 ここでは存在性のみを示す．鍵となるのは p^k も NC 多項式となることである．つまり $(p^k)^{(n)} = (p^{(n)})^k$ が成り立つ．したがって，p^k を展開すると $E[\mathrm{tr}(p^k)^{(n)}]$ は $n\to\infty$ で収束することがいえる．実際 $E[\mathrm{tr}(p^k)^{(n)}]$ は $E[\mathrm{tr}X^{(n)}_{i_1}\cdots X^{(n)}_{i_k}]$ の線形結合であり，各 $E[\mathrm{tr}X^{(n)}_{i_1}\cdots X^{(n)}_{i_k}]$ は $n\to\infty$ で収束する．ゆえに

$$E[\mathrm{tr}(p^{(n)})^k] = \int x^k dE\mu_{p^{(n)}}$$

は任意の k で収束することがいえる．ゆえに，任意の多項式について有限の極限値が存在する． ■

2 Preliminaries

定義 2.1（a.s. bounded）
実数値確率変数 X が a.s. bounded とは，ある定数 $M > 0$ が存在して，$P(|X| \le M) = 1$ であることをいう．

定義 2.2（sub-gaussian）
実数値確率変数 X が sub-gaussian であるとは，ある定数 $C > 0, c > 0$ が存在して，任意の $\lambda > 0$ に対して以下が成り立つことをいう：

$$P(|X| \ge \lambda) \le C\exp\left(-c\lambda^2\right)$$

例 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ のとき，ある定数 $C > 0, c > 0$ が存在して以下のようにできる：

$$P(|X| \ge \lambda) = 2\int_\lambda^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx \le Ce^{-c\lambda^2}$$

定義 2.3（有限な k 次モーメント）
確率変数 X が有限の k 次モーメントを持つとは，$E[|X|^k] < +\infty$ であることをいう．

注意 a.s. bounded → sub-gaussian → k 次のモーメントが有限

命題 2.4 実数値確率変数 X が sub-gaussian ならば，$\lambda\in\mathbb{R}$ に対して $E[e^{\lambda X}] < +\infty$ である．
（言い換えれば，X のラプラス変換は $\mathbb{R}$ 上で定義される．）

命題 2.5　実数値確率変数 X に対して，以下は同値である：

(1) X は sub-gaussian である．

(2) ある $C > 0, c > 0$ が存在して，任意の $t \geq 0$ に対して $E[e^{tX}] \leq C\exp(ct^2)$．

(3) ある $C > 0$ が存在して，任意の $k \geq 1$ に対して $E[|X|^k] \leq (Ck)^{k/2}$．

命題 2.6（Markov の不等式）
実数値確率変数 X に対して

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E[|X|]}{\lambda}$$

命題 2.7（Jensen の不等式）
実数値確率変数 X と convex な関数 g に対して

$$g(E[X]) \leq E[g(X)]$$

証明　g が convex であるとき，$g(x) = \sup\{d(x) : d(x) = ax + b \,\text{s.t.}\, \forall x \in \mathbb{R}, d(x) \leq g(x)\}$ と表現できる．このとき $E[d(X)] = d(E[X])$ が成り立つ．いま，$y = E[X]$ とし，$d(x) = ax + b$ を $g(y) = ay + b$ となるように定めると

$$\begin{aligned} g(E[X]) &= g(y) \\ &= ay + b \\ &= d(y) \\ &= E[d(X)] \\ &\leq E[g(X)] \quad (\because d(X) \leq g(X)) \end{aligned}$$

となる．■

3　Concentration of Measure

定理 3.1　$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ とし，$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を 1-Lipschitz 関数とする．このとき，ある $C > 0, c > 0$ が存在して，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$P(|F(X) - E[F(X)]| \geq \lambda) \leq C\exp\left(-c\lambda^2\right)$$

注意　この現象は測度の集中とよばれ，高次元多様体ではじめてみられた．

例　以下では $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は標準内積とする．球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上で x, y をランダム一様独立にとる．このとき，$\langle x, y\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$ であり，実際 $E[|\langle x, y\rangle|^2] = \frac{1}{n}$ である．

ここで，Markov の不等式より

$$\begin{aligned} P\left(|\langle x, y\rangle| \geq \frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= P\left(|\langle x, y\rangle|^2 \geq \frac{t^2}{n}\right) \\ &\leq \frac{E[|\langle x, y\rangle|^2]}{t^2/n} \\ &\leq \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

これより，高次元で 2 つのベクトルをランダムにとれば，それらは a.s. でほぼ直交することがわかる．実際，これは sub-gaussian である．

注意

- 例えば $F(x) = x^2$ のような Lipschitz でない関数では成立しない．
- $E[F(X)]$ は有界である．これは，1-Lipschitz ならば $\exists C > 0, |F(X)| \leq C + |X|$ に対して期待値をとり，多次元の Rolle の定理を適用することでわかる．

証明 一般性を失わずに $E[F(X)] = 0$ としてよい．そうでなければ $F(X) - E[F(X)]$ でおきかえる（1-Lipschitz を思い出す）．F と $-F$ の対称性から $P(F(X) \geq \lambda) \leq C\exp\left(-c\lambda^2\right)$ を示せば十分．さらに，F が C^1 級であり $|\nabla F| \leq 1$ を仮定しても一般性を失わない[*1]．したがって Markov の不等式より $P(F(X) \geq \lambda) \leq \exp(-t\lambda)E[\exp(tF(X))]$ となるので，$\forall\varepsilon \geq 0$ に対して $E[\exp(tF(X))] \leq \exp\left(ct^2\right)$ を示せば十分．これを示すために，$E[\exp(t(F(X) - F(Y)))] \leq \exp\left(ct^2\right)$ を示す（ただし X, Y は独立）．

"replica" trick を用いる。すなわち，$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ を $X = (X_1, \ldots, X_n)$ の独立なコピーとする．このとき，Jensen の不等式から，$E[F(Y)] = 0$ に注意して

$$\exp(-tE[F(Y)]) = 1 \leq E[\exp(-tF(Y))]$$

となる．X と Y は独立なので，$F(X)$ と $F(Y)$ も独立で，

$$\begin{aligned} E[\exp(tF(X))] &= E[\exp(tF(X))] \cdot 1 \\ &\leq E[\exp(tF(X))]E[\exp(-tF(Y))] \\ &= E[\exp(t(F(X)))\exp((-F(Y)))] \\ &= E[\exp(t(F(X) - F(Y)))] \end{aligned}$$

が成り立つ．$E[\exp(tF(X))]$ を評価する代わりに $E[\exp(t(F(X) - F(Y)))]$ を評価することを考える．$X_\theta = Y\cos\theta + X\sin\theta$ とおく．このとき

$$F(X) - F(Y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\theta} F(X_\theta) d\theta$$

[*1] density argument によって，すべての 1-Lipschitz な関数は C^1 級で 1-Lipschitz な関数によって，sup norm において近似できることが示せる．具体的には以下のようになる：

1-Lipschitz な関数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して畳み込みを考える．すなわち，$\chi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.t. (i)$\chi_\varepsilon \geq 0$，(ii)$\chi_\varepsilon(x) = 0$ if $|x| \geq \varepsilon$（smooth approximate of unit），(iii)$\int_{x\in\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x)dx = 1$ となるものを考える．これを使って $F_\varepsilon := F * \chi_\varepsilon : x \mapsto \int_{x\in\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(y)F(x-y)dy$ とする．このとき $\forall\varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.t. F_ε は 1-Lipschitz かつ C^1 級であり，$\forall x \in \mathbb{R}, |F_\varepsilon(x) - F(x)| \leq \varepsilon$ となる．

実際，F が 1-Lipschitz であることから，$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |F(x-y) - F(x)| \leq |y|$ である．したがって，$|F_\varepsilon(x) - F(x)| = \left|\int_{x\in\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(y)(F(x-y) - F(x))dy\right| \leq \int_{x\in\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(y)|F(x-y) - F(x)|dy \leq \int_{x\in\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(y)|y|dy \leq \varepsilon$ となる．

である[*2]．$\dot{X}_\theta = \frac{d}{d\theta}X_\theta = -Y\sin\theta + X\cos\theta$[*3]なので $\frac{d}{d\theta}F(X_\theta) = \langle \nabla F(X_\theta), \dot{X}_\theta\rangle$ であり

$$\begin{aligned}\exp(t(F(X)-F(Y))) &= \exp\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \nabla F(X_\theta), \dot{X}_\theta\rangle d\theta\right)\\ &= \exp\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \nabla F(X_\theta), \dot{X}_\theta\rangle \frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi} d\theta\right)\\ &\le \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{2}t\langle \nabla F(X_\theta), \dot{X}_\theta\rangle\right) d\theta\end{aligned}$$

となる．ただし，最後の不等号は Jensen の不等式を用いた（θ が $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布のパラメータとみる）．

$$\begin{aligned}E\left[\exp\left(\frac{\pi}{2}t\langle \nabla F(X_\theta), \dot{X}_\theta\rangle\right)\right] &= E\left[\exp\left(\frac{\pi}{2}t\langle \nabla F(Y), X\rangle\right)\right] \quad \left((X_\theta, \dot{X}_\theta) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X, Y)\right)\\ &= \int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{x\in\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{\pi}{2}t\langle \nabla F(y), x\rangle\right) d\mu_X(x) d\mu_Y(y) \quad \left(d\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)\\ &= \int_{y\in\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{\pi^2}{8}t^2\|\nabla F(y)\|^2\right) d\mu_Y(y)\\ &\le \exp\left(ct^2\right) \quad (\exists c > 0)\end{aligned}$$

したがって

$$E[\exp(tF(X))] \le E[\exp(t(F(X)-F(Y)))] \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} E\left[\exp\left(\frac{\pi}{2}t\langle \nabla F(X_\theta), \dot{X}_\theta\rangle\right)\right] d\theta \le \exp\left(ct^2\right)$$

■

4 Eigenvalue Inequalities

A をエルミート行列とし，$\lambda_1(A) \ge \cdots \ge \lambda_n(A)$ を A の固有値とする（このとき，この固有値はすべて実数である）．

問題（Horn's problem）

A, B をエルミート行列とし，$\lambda_1(A) \ge \cdots \ge \lambda_n(A)$，$\lambda_1(B) \ge \cdots \ge \lambda_n(B)$ をそれぞれの固有値とする．このとき，$A+B$ のすべての可能な固有値は何か？

以下では $\lambda_i(A) = \lambda_i, \lambda_i(B) = \mu_i$ とおく．

例 例えば $\lambda_1, \lambda_2 = -\lambda_1$ と $\mu_1, \mu_2 = -\mu_1$ であり $\lambda_1 \ge \mu_1 \ge 0$ の場合，一般性を失うことなく $\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B = 0, 0 \le \lambda_2 = -\lambda_1, 0 \le \mu_2 = -\mu_1$ とおける．このとき，Horn's problem の答えは $\forall \lambda_1, \lambda$ s.t. $\lambda \in [\lambda_1 - \mu_1, \lambda_1 + \mu_1]$

[*2] ここで，微分積分学の基本定理を利用する：

$$F(X) - F(Y) = \int_0^1 \frac{d}{dt}F(tX + (1-t)Y)dt$$

ただし，ここでは直線の代わりに曲線を利用している：

$$F(X) - F(Y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\theta}F(Y\cos\theta + X\sin\theta)d\theta$$

[*3] $X, Y \sim_{\mathrm{i.i.d}} \mathcal{N}(0, I)$ とすれば $X_\theta \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{I\cos^2\theta + I\sin^2\theta}) = \mathcal{N}(0, I)$

注意（表現論との関連性）

Clebsch-Gordan's rule: $V_\lambda \otimes V_\mu = V_{\lambda+\mu} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda-\mu}$

$n = 2$ では SU(2) のスピン規約表現 これは $\mathbb{R}^2$ の断片．一般の n では，Horn は $\mathbb{R}^n$ の polytope であると予想した．Kirwan Guillemin Sternberg は polytope であることを示した（シンプレクティック幾何）Klyachko は表現論の saturation conjecture(theorem) と等しいことを示し，Knutson と Tao が saturation conjecture を証明した．

Horn's problem の（部分的な）説明：

A の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$，$B$ の固有値を $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$，$A+B$ の固有値を $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_n$ とする．このとき $\nu_1 + \cdots + \nu_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \mu_1 + \cdots + \mu_n$ ($\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B$) である．このとき $\nu_1 \leq \lambda_1 + \mu_1$ を示す：

定数だけシフトすることで $\lambda_n, \mu_n \geq 0$ として考えてよい．もし $A, B \geq O$（正定値）ならば $A + B \geq O$．これを仮定すると $\lambda_1 = \|A\|, \mu_1 = \|B\|, \nu_1 = \|A+B\|$ であり，$\nu_1 \leq \lambda_1 + \mu_1$ は作用素ノルムの三角不等式となる．

5 Stein's Method

ガウス分布 $\mathcal{N}(0,1)$ と，ガウス分布に分布として近づいていくものの特徴づけを与える（ガウス分布に近い分布はどうなるか）．

標準ガウス分布の確率密度関数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ は微分方程式 $\rho'(x) + x\rho(x) = 0$ をみたす．いま $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^1 級，$\exists C > 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C, |f'(x)| \leq C$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)(xf(x) - f'(x))dx = 0$$

が成り立つ．これを確率論の言葉で書き直すと，$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ に対して

$$E[Xf(X)] = E[f'(X)]$$

が成り立つ．逆も成り立つことが知られている：

補題 5.1 X を実数値確率変数であって $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であり $E[Xf(X)] = E[f'(X)]$ をみたす (*) ならば，$f(X) \sim \mathcal{N}(0,1)$

したがって，この恒等式 $E[Xf(X)] = E[f'(X)]$ を（正確に等号でなくても）ほとんどみたせば，X はほとんどガウス分布に従うことがわかる．

分布 X が何かわからない状態で，G に近いことを示すには？

- X を $X\cos\theta + G\sin\theta$ に置き換える（X は未知の分布，$G \sim \mathcal{N}(0,1)$，G は X と独立）．後で $\theta \to 0$ をとる．
- モーメントを調べる（有界でない場合は適当に truncate する）．

今回のケースではモーメントが一意に分布を決定する（Hamburger moment problem）．

定理 5.2（Stein continuity theorem）

$\{X_n\}$ を $E[|X_n|^2] < \infty$ な確率変数列とする．このとき，以下は同値である：

(1) 任意の f s.t. C_1 級，f, f' は有界に対して $E[f'(X_n) - X_n f(X_n)] \to 0$

(2) $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} G$（$G \sim \mathcal{N}(0,1)$）

証明 概略を示す．

[(ii)→(i)] $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は有界連続とする．$E\varphi(X_n) \to E\varphi(G)$ を示したい．φ が (*) をみたせばこれが成り立つ．$E[\varphi'(X_n) - X_n\varphi(X_n)] \to E[\varphi'(G) - G\varphi(G)] = 0$ を示したい．φ が (*) をみたすかは不明なので，近似を行う．

(1) φ を φ_ε によって近似（$|\varphi - \varphi_\varepsilon| < \varepsilon, |\varphi'_\varepsilon| < 10/\varepsilon$）．
(2) $x \mapsto x\varphi(x)$ を任意の区間でコンパクトな有界な関数によって近似する．

こういった理由により $\limsup_{n\to\infty} |E[f'(X_n) - X_n f(X_n)]| < 100\varepsilon$.

[(i)→(ii)] φ を有界とする．$E\varphi(X_n) \to E\varphi(G)$ を示せば十分．一般性を失わずに $E\varphi(G) = 0, |\varphi(x)| \leq 1(\forall x)$ としてよい．ここで，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.t. $\forall x, \varphi(x) = f'(x) - xf(x)$ を見つけたい．

(1) $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \varphi(y)dy$ をとる．
(2) $\varphi(X_n) = f'(X_n) - X_n f(X_n)$ となっていることを確認する．

このとき $E[\varphi(X_n)] = E[f'(X_n) - X_n f(X_n)] \to E[G] = 0$ となるのでよい．

■

6 The operator norm of random matrices

Wiegner's theorem は暗に次のことを意味している：$2 < a < b$ とし，確率変数 $\#\{i; \lambda_i^{(n)} \in [a,b]\} = n\mu_{X^{(n)}}([a,b]) = \rho_n([a,b]) \in \{0,\ldots,n\}$ を考える．$E[\rho_n([a,b])] = n\int_a^b ds = o(n)$

問題 固有値 $\lambda_i^{(n)}$ s.t. $|\lambda_i^{(n)}| > 2 + \varepsilon$ となるものは存在するのか？ 言い換えれば，確率変数 $\lambda_1^{(n)}, \lambda_n^{(n)}$ は極限をもつのか？ もしそうなら $+2, -2$ となるのか？

類似の問題

問題 $\max\{|\lambda_1^{(n)}|, |\lambda_n^{(n)}|\} = \|X^{(n)}\| = \sup_{|\lambda|\neq 0} \|X\lambda\|_{L^2}/\|\lambda\|_{L^2}$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \|X^{(n)}\|$ はどうなるか？

次のことは容易に示せる

補題 6.1 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $P(\liminf_{n\to\infty} \|X^{(n)}\| \geq 2) \geq 1 - \varepsilon$

証明（概略）もし $\liminf_{n\to\infty} \|X^{(n)}\| < 2 - \varepsilon$ ならば，全固有値は $[-2+\varepsilon, 2-\varepsilon]$ に入っている．$\mathrm{tr}((X^{(n)})^{2k}) \to \mathrm{Cat}(k) \leq (2-\varepsilon)^{2k}$ だが，$\mathrm{Cat}(k) \sim c \cdot 4^k \cdot k^{-\frac{3}{2}}$ なので，十分大きな k で矛盾する． ■

これより，$P(\limsup_{n\to\infty} \|X^{(n)}\| \leq 2) = 1$ がいえれば，$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)}, \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{(n)}$ の存在と，それらが $+2, -2$ であることを暗に示す．これを示すには，2 つのアプローチがある：

(1) "soft" net argument：$P(\|X^{(n)}\| \geq 10) \to 0 (n \to \infty)$（bound が 2 だとダメだが，5 倍すると示せる）．なお $\mathrm{supp}L(\|X^{(n)}\|) = [0, \infty]$
(2) strong moment argument：$\forall\varepsilon > 0, P(\limsup_{n\to\infty} \|X^{(n)}\| > 2 + \varepsilon) = 0$

6.1 "soft" net argument

簡単のため $\sqrt{n}X^{(n)}$ について調べる．$X_{ij}^{(n)}$ は n に依存した分散をもつ．$S = \{x \in \mathbb{C}^n : |\lambda| = 1\}$ とする．このとき，十分に大きな定数 A と n によらない定数 c, C があって

$$\forall x \in S, P(|Mx| \geq \sqrt{n}A) \leq C\exp(-ncA) \tag{*}$$

となる（Wick's theorem などを利用して愚直に分散を計算すると示せる）．

注意 実際，この結果は $\sqrt{n}X_{ij}^{(n)}$ が iid のサブガウシアンである場合と同じである．

補題 6.2 Σ を S の maximal 1/2-net とする．このとき $\mathbb{C}$ 値 $n \times n$ ランダ m ム行列 $X^{(n)}$ について

$$\forall \lambda > 0, P(\|X_1^{(n)}\| > \lambda) \leq P\left(\bigvee_{y\in\Sigma} |X^{(n)}y| > \frac{\lambda}{2}\right)$$

が成り立つ．

注意 左辺の条件は，$\|X^{(n)}\| = \sup_{x\in S}\|X^{(n)}x\| > \lambda \Leftrightarrow \forall x \in S, |X^{(n)}x| > \lambda$．このままでは無限個の x を考えなければならないが，右辺を評価することで有限個について考えれば済むことになる．こうして分解した右辺を，上で述べた (*) 式を利用して抑える．

証明 $x \in S$ を $\|M\| = |Mx|$ ととる．また $y \in \Sigma$ を $|x - y| < 1/2$ ととる．このとき $|Mx - My| \leq \|M\|/2$．三角不等式から $|My| > \|M\|/2$ が従う．よって，$\|M\| > \lambda$ ならば $|My| > \lambda/2$． ■

$P\left(\bigvee_{y\in\Sigma} |X^{(n)}y| > \lambda/2\right) \leq \#\Sigma \cdot \max_{y\in\Sigma} P(|X^{(n)}y| > \lambda/2)$ が成り立つことは直ちにわかる．ここで $\#\Sigma$ を評価する．

補題 6.3 Σ を S の ε-net とする．このとき，$\exists c > 0$ s.t. $\#\Sigma < (c/\varepsilon)^n$

証明 $\#\Sigma \cdot \mathrm{Vol}B(0, \varepsilon/2) \leq \mathrm{Vol}(B(0, 3/\varepsilon))$．ただし $\mathrm{Vol}(B(0, x)) = Cx^n, \exists C > 0$． ■

以上より，(*) も合わせて

$$P(\|X^{(n)}\| > \lambda) \leq \tilde{C}^n C\exp\left(-nc \cdot \frac{\lambda}{2}\right)$$

λ を十分大きくとれば，右辺は指数的に 0 に近づく．

注意 上記の soft " ε -net" argument では $\exists C > 0$ があって，$P(\|X^{(n)}\| > C) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となる．この方法では，C は有限だが $C = 10$ となってしまい最適化できない．

6.2 strong moment argument

定理 6.4 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $P(\|X^{(n)}\| > 2 + \varepsilon) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ならば，$P(\limsup_{n\to\infty}\|X^{(n)}\| \leq 2 + \varepsilon) = 1$ となる．

注意 この結果は，$P(\liminf_{n\to\infty}\|X^{(n)}\| \leq 2 - \varepsilon) = 1$ とあわせると $P(\lim_{n\to\infty}\|X^{(n)}\| = 2) = 1$ であることがわかる．

$k \in \mathbb{N}$ をとる．$\|(X^{(n)})^{2k}\| = \|X^{(n)}\|^{2k} \le \mathrm{Tr}((X^{(n)})^{2k})$．期待値をとると $E[\|X^{(n)}\|^{2k}] \le E[\mathrm{Tr}((X^{(n)})^{2k})]$ となる．また，Markov の不等式より $P(\|X^{(n)}\|^{2k} > 2+\varepsilon) \le E[\|X^{(n)}\|^{2k}]/(2+\varepsilon)^{2k}$.

ここで $\mathrm{Inv}(2k) = \{\sigma \in S_{2k}; \sigma^2 = \mathrm{id}, [\forall x \in \{1,\dots,2k\}, \sigma(x) \neq x]\}$（後ろの条件は大体 pair partition）として，$f(k,i) = \#\{\sigma \in \mathrm{Inv}(2k)\ \mathrm{s.t.}\ |\gamma| + 2i = |\gamma\sigma| + |\sigma|, \gamma = (1\,2\,\dots\,2k) \in S_{2k}\}$ とする．

補題 6.5 $f(k,i+1) \le k^2 f(k,i)$

証明 $\sigma \in S_{2k}$ をとる．この genks $g(\sigma)$ によって $|\gamma| + g(\sigma) = |\gamma\sigma| + |\sigma|$．すべてのケーリーグラフ $\{\sigma' : |\sigma\sigma'| = 1\}$ 内の σ の neighbor に注目する．もし $g(\sigma) \neq 0$ なら，少なくとも 1 つの neighbor は $g(\sigma') = g(\sigma)$ をみたす． ■

これを使うと，

$$
\begin{aligned}
P(\|X^{(n)}\|^{2k} > 2+\varepsilon) &\le (2+\varepsilon)^{-2k}\left\{n\mathrm{Cat}(k) + n^{-1}k^2\mathrm{Cat}(k) + n^{-3}k^4\mathrm{Cat}(k) + \cdots\right\} \\
&\le (2+\varepsilon)^{-2k}\mathrm{Cat}(k)\cdot n\left\{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(\frac{k}{n}\right)^4 + \cdots\right\} \\
&\le (2+\varepsilon)^{-2k}\mathrm{Cat}(k)\cdot n \cdot 2
\end{aligned}
$$

スターリングの公式より $\mathrm{Cat}(k) \sim 4^k k^{-\frac{3}{2}}(1+o(1))$（あるいは $\mathrm{Cat}(k) \le 4^k/(k+1)$ を用いて　$P(\|X^{(n)}\|^{2k} > 2+\varepsilon) \le (2+\varepsilon)^{-2k}\frac{4^k}{k+1}\cdot n \cdot 2 \le (\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon})^{-2k}\frac{2n}{k}$)．もし $k \gg \log n$ なら右辺は 0 に収束する．

注意 $n \times n$ 複素正方行列 X に対してその scatter p-norm は $\|X\|_p = \sqrt[p]{\mathrm{Tr}((XX^*)^{p/2})}$ で定義される．ここで $\|X\| \le \|X\|_p$ を使う．（ここで n^{-p} だけ違うが，$\sqrt[p]{\mathrm{tr}((XX^*)^{p/2})} \le \|X\|$ もまた成り立つ．したがって $n^{-1/p}\|X\|_p \le \|X\| \le \|X\|_p$ が成り立つ．）$n^{-1/p} \to 1$ は $p \gg \log n$ と同値．

7 Stieltjes transform

確率論による一般原理：変換を通した分布の分析．例えば...

- フーリエ変換：$F_X(t) = E[e^{itX}]$
- ラプラス変換：$L_X(t) = E[e^{tX}]$
- メリン変換：$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_X(x)$
- ...

Stieltjes transform は Wiegner's semicircular theorem の新たな証明を与えた．

定義 7.1 実数値確率測度 μ に対して，その Stieltjes transform は $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ に対して

$$S_\mu(z) = \int \frac{1}{x-z}d\mu(x)$$

で定義される．

$|1/(x-z)| \le 1/|\mathrm{Im}z|$ ならば，S_μ は well-defined であり，$|S_\mu(z) \le 1/|\mathrm{Im}z|$ をみたす．

注意 歴史的な注意．Cauchy 変換

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} d\mu(x)$$

とは $G_\mu(z) = -S_\mu(z)$ の関係がある．Stieltjes は確率論を意識してこの関数を定義したが，Cauchy はそのことを考えていたかは不明．

X を分布 μ に従う実数値確率変数とする．また $\mathrm{supp}\mu \subset [-K, K]$ であり z は $|z| > K$ にとることにする．いま $G_\mu(z)$ を

$$G_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E[X^k]}{z^{k+1}}$$

とかく．もし μ が有界なサポートをもてば，すべてのモーメントは有限である．モーメントは μ を一意に決定づける．これによって $\int p(x)d\mu(x)$ が計算可能となる．したがって stone-weierstrass の定理によって有界連続な関数 $\rho(x)$ に対して $\int \rho(x)d\mu(x)$ が計算可能となる．ゆえに Risez の表現定理によって μ は一位に特徴付けられる．

よって，$S_\mu(z)$ は μ を特徴づける．もし μ が有界サポートをもつなら $\mu \mapsto S_\mu$ の単射がつくれる．X のモーメントは $z \to \infty$ での $G_\mu = -S_\mu$ のテイラー展開の係数によって決まる．

注意 もし μ が単純点測度 $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{\lambda_i}$ なら，μ は容易に S_μ から回復できる．

例 $\mu = \delta_0/3 + \delta_1/3 + \delta_2/3$ なら，

$$S_\mu(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}\right)$$

一般の一意な特徴づけまず，次を考える

$$\mathrm{Im} S_\mu(a+ib) = \pi\mu * P_b(a)$$

ここで，$P_b(a)$ は $P_b(a) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(a-x)^2+b^2} = \frac{1}{b}P_1\left(\frac{a}{b}\right)$ である．

例 $d\mu = \rho(x)dx$ とすると $\rho(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \mathrm{Im}\frac{1}{\pi}S_\mu(x+i\varepsilon)$

S_μ を半円を示すのにどうやって使うか？

X_n を GUE(n) とする．z を $\mathrm{Im}z > 0$ にとる．このとき，

$$s_n(z) := E\left[\mathrm{tr}((X_n - zI_n)^{-1})\right] = S_{\mu_n}(z)$$

ここで μ_n は正規化した期待固有値計数測度

これらを利用して $s_n(z) \to s_{\mu_{\mathrm{sc}}}(z)$ を示す．

メインアイデアは，X_n に対する $s_n(z)$ と，その左上 $(n-1)\times(n-1)$ 小行列 $\tilde{X}_n$ に対する $s_n(z)$ を比較することである．

Exercise 2.4.11

これを $X = X_n - zI$ に適用して期待値をとると

$$s_n(z) = -E\left[\frac{1}{z - o(1/\sqrt{n}) - B_n^*(\tilde{X}_n - zI_{n-1})B_n}\right]$$

ここで $E[\mathrm{tr}((X_n - zI_n)^{-1})] = E[((X_n - zI_n)^{-1})_{11}]$ である．

2. 実際に以下を示せる：

$$|B_n^*(\tilde{X}_n - zI_{n-1})B_n - s_n(z)| = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

algebric argument として $\tilde{\lambda}_1^{(n)} \geq \cdots \geq \tilde{\lambda}_{n-1}^{(n)}$ は $\tilde{X}_n$ の固有値とすると，$\lambda_i^{(n)} \geq \tilde{\lambda}_i^{(n)} \geq \lambda_{i+1}^{(n)}$ が成り立つ．
最後に，B_n と $\tilde{X}_n - zI_{n-1}$ が独立であることを使うと B が消える．以上により結局

$$s_n(z) = -\frac{1}{z + s_n(z)} + o(1)$$

がわかる．s_n は $s_{\mu_{\mathrm{sc}}}(z) = -\frac{1}{z+s_{\mu_{\mathrm{sc}}}(z)}$ の解に収束しなければならない．これで求まる $s(z)$ は，半円分布の Stieltjes transform になっている：

$$s_{\mu_{\mathrm{sc}}}(z) = \frac{-z + \sqrt{z^2-4}}{2}$$

,