工業数学 A3

更新日時：2021 年 7 月 17 日

目次

1　フーリエ級数展開

1.1　導入

$f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の関数とする ($t \in \mathbb{R}$).

定義: 周期関数

f が周期 T の周期関数であるとは，$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(t+T) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つこと.

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f(t+nT) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

定義: フーリエ級数展開

$$f(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a[n] \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b[n] \sin(n\omega t) \tag{1.1}$$

ここで $\omega = 2\pi/T$，$c, a[n], b[n]$ は定数.

これが収束すれば周期 T の周期関数である．広いクラスの，周期 T の周期関数は (1.1) の形に表現できる.

1.2　三角関数の直交関係とフーリエ係数

(1.1) における $c, a[n], b[n]$ をフーリエ係数とよぶ.

定理 1.1: 三角関数の直交関係

n, m を正の整数とする.

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \delta_{nm} \tag{1.2}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \delta_{nm} \tag{1.3}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T} \sin(n\omega t)dt = 0 \tag{1.5}$$

ここで，δ_{nm} はクロネッカーのデルタである.

証明　省略. ■

公式 1.2 周期 T の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a[n]\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a[n]\sin(n\omega t) \tag{1.6}$$

と表されるならば，フーリエ係数は

$$a[n] = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

$$b[n] = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

と与えられる．

周期性により

$$a[n] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

$$b[n] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.10}$$

とかける．f が偶関数ならば $b[n] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ となり，**余弦フーリエ級数展開**:

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a[n]\cos(n\omega t)$$

f が奇関数ならば $a[n] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ となり，**正弦フーリエ級数展開**:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b[n]\cos(n\omega t)$$

をもつといわれる．

1.3 複素フーリエ変換

オイラーの公式を用いれば，フーリエ級数展開 (1.6) は

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a[n]}{2} + \frac{b[n]}{2i}\right)e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a[n]}{2} - \frac{b[n]}{2i}\right)e^{-in\omega t}$$

となる．そこで

$$c[n] = \begin{cases} a[0]/2 & (n = 0) \\ (a[n] - ib[n])/2 & (n > 0) \\ (a[-n] + ib[-n])/2 & (n < 0) \end{cases}$$

とすると**複素フーリエ変換**:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]e^{in\omega t} \tag{1.11}$$

が得られる．公式 1.2 もしくは直接計算により

$$c[n] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が確かめられる．

1.4 いくつかの実例

例 1.1: 三角多項式

三角多項式（$\sin\omega t, \cos\omega t$ の多項式）.

例えば

$$f_1(t) = (\cos\omega t)^3 = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

一般的な三角多項式に対しては，$N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c[n] e^{in\omega t}$$

の形にかける.

例 1.2: 三角波

$$f_2(t) = |T| \quad (|t| \leq T/2)$$

$f_2(t)$ は偶関数であるから，余弦フーリエ級数展開をもち

$$a[n] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |t|\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} t\cos(n\omega t)dt$$

$n = 0$ のとき

$$a[0] = \frac{4}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T/2} = \frac{T}{2}$$

$n \neq 0$ のとき

$$a[n] = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数 }) \\ -\frac{4}{\pi n^2 \omega} & (n \text{ は奇数 }) \end{cases}$$

つまり，$f_2(t)$ のフーリエ級数展開は

$$f_2(t) = \frac{T}{4} - \frac{4}{\pi\omega}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\{(2m+1)\omega t\}$$

となる.

例 1.3

$$f_3(t) = \frac{1}{\frac{5}{4} + \cos\omega t}$$

留数定理を用いてフーリエ係数を計算すると，$n \geq 0$ として

$$c[-n] = \frac{4}{3}(-2)^n$$

$n > 0$ として $c[n] = c[-n]$ より

$$c[n] = \frac{4}{3}(-2)^{-n}$$

となるから，$f_3(t)$ のフーリエ級数展開は

$$f_3(t) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n \cos(n\omega t)$$

となる．

1.5　フーリエ級数の一様収束

定義: リプシッツ連続（Lipshitz continuous）

$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ が**リプシッツ連続**であるとは，

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } \forall t, s \in \mathbb{R}, \ |f(t) - f(s)| \leq C|t - s|$$

が成り立つことである．

定理 1.3　$f(t)$ がリプシッツ連続ならば，フーリエ級数展開は $f(t)$ に一様収束する．

証明　は 1.10 節に後回し．■

1.6　有限フーリエ級数

$X = \mathbb{C}^N$ を N 次元複素線形空間とする．X の元を $u = (u[0], u[1], \cdots, u[N-1]) \in X$ と書く．

定義: エルミート内積

$u, v \in X$ のエルミート内積:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} u[n]\overline{v[n]}$$

定義: 長さ

$u \in X$ の長さ:

$$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

定義: 正規直交系/正規直交基底

$u_0, \ldots, u_{M-1} \in X$ が正規直交系であるとは

$$\langle u_m, u_n\rangle = \delta_{mn} \quad (n, m = 0, 1, \ldots, M-1)$$

が成り立つこと．

$M = N = \dim X$ のとき正規直交基底とよばれ，$\forall u \in X$ は

$$u = \sum_{n=0}^{N-1}\langle u, u_n\rangle u_n$$

と直交分解できる．$\mathbb{C}^N$ の標準的な基底 $\boldsymbol{e}_n[k] = \delta_{kn} \quad (n, k = 0, \ldots, N-1)$ は正規直交基底である．

有限フーリエ変換の定義に用いられる正規直交基底は，$\alpha = 2\pi/N$ として

$$\varphi_n[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(i\alpha nk) \quad (n, k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

で定義される．

命題 1.4 $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{N-1}\}$ は $X (= \mathbb{C}^N)$ の正規直交基底である．

証明 $n = m$ のとき

$$|\varphi_n|^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |e^{i\alpha nk}|^2 = 1$$

$n \neq m$ のとき

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\alpha nk} e^{-i\alpha mk} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{i\alpha(n-m)N}}{1 - e^{i\alpha n - m}} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha N = 2\pi}}{=} 0$$

■

$u \in X$ に対して**有限フーリエ変換**:

$$\hat{u}[n] = \langle u, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u[k] e^{-i\alpha nk} \quad (n = 0, \ldots, N-1) \tag{1.12}$$

とおくと，**有限フーリエ級数展開**（$\hat{u}[n]$ の**逆有限フーリエ変換**）：

$$u[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}[n] \varphi_n[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}[n] e^{i\alpha nk} \quad (n = 0, \ldots, N-1) \tag{1.13}$$

と直交展開される．

有限フーリエ変換，逆有限フーリエ変換はユニタリーな線形変換である．すなわち:

$$|u| = |\hat{u}| \tag{1.14}$$

が成り立つ．これは

$$\langle u, v \rangle = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \tag{1.15}$$

であることから従う．

1.7 有限フーリエ変換の連続極限

定理 1.5 $f(t)$ を周期 T のリプシッツ連続な周期関数とし，$\omega = 2\pi/T, \alpha = 2\pi/N$ とする．

$$f_N(t) = \sum_{-N/2 \le n < N/2} c_N[n] e^{in\omega t}$$

$$c_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f\left(\frac{m}{N} T\right) e^{-i\alpha nm} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と定める．このとき，$f_N(t)$ は $f(t)$ に一様収束する．

注意 1.1

$$f_N\left(\frac{k}{N}T\right) = \sum_{-N/2\le n<N/2} c_N[n]e^{i\alpha nk} = \sum_{n=0}^{N-1} e_N[n]e^{i\alpha nk} = f\left(\frac{k}{N}T\right)$$

$f_N(t)$ は $f(t_k)$ の値を与えたときの補間.

証明 まず

$$d_N[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left\{f\left(\frac{m}{N}T\right) - f\left(\frac{m-1}{N}T\right)\right\}e^{-i2\pi(m/N)n}$$

とおく．$\{d_N[n]\}$ は $f(t_n) - f(t_n - (T/N))$ の有限フーリエ変換の $1/\sqrt{N}$ 倍である．リプシッツ連続性の仮定より，$\exists C > 0$,

$$\left|f\left(\frac{m}{N}T\right) - f\left(\frac{m-1}{N}T\right)\right| \le \frac{C}{N} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ．したがって有限フーリエ変換の等長性 (1.14) より

$$N\sum_{k=0}^{N-1}|d_N[k]|^2 \le \sum_{m=0}^{N-1}\left|\frac{C}{N}\right|^2 = \frac{C^2}{N}$$

すなわち

$$\sum_{k=0}^{N-1}|d_N[k]|^2 \le \frac{C^2}{N^2}$$

が従う．一方，$d_N[k]$ の定義により

$$d_N[k] = (1 - e^{-i2\pi(k/N)})c_N[k] = 2ie^{-i\pi(k/N)}\sin(\pi k/N)c_N[k]$$

これとジョルダンの不等式:

$$|\sin\theta| \ge \frac{2}{\pi}|\theta| \quad (|\theta| \le \pi/2) \tag{1.16}$$

を用いれば

$$|d_N[k]| \ge \frac{4|k|}{N}|c_N[k]| \quad \left(-\frac{N}{2} \le k < \frac{N}{2}\right)$$

が従う．$d_N[k]$ が周期 N を持つことに注意して，これらを組み合わせると

$$\sum_{-N/2\le k<N/2}|k|^2|c_N[k]|^2 \le \frac{C^2}{16}$$

が導かれる．

　また，

$$f_N'(t) = \sum_n i\omega n c_N[n]e^{i\omega nt}$$

の絶対値を考えると

$$\begin{aligned}
|f_N'(t)| &\le \omega\sqrt{N}\sum_n \frac{n}{\sqrt{N}}|c_N[n]| \\
&\le \omega\sqrt{N}\left(\sum_n\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_n |n|^2|c_N[n]|^2\right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{N}C' \quad (C' \text{はある定数})
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Schwarz の不等式

となる．さて，$\forall t \in [0,T]$ に対して $|t-t_k| \le T/(2N)$ であるような $t_k = (k/N)T$ が存在する．$f(t_k) = f_N(t_k)$ に注意して（注意 1.1）

$$f(t) - f_N(t) = (f(t) - f(t_k)) + (f_N(t_k) - f_N(t))$$

と分解して考える．$f(t)$ のリプシッツ連続性と f'_N の微分の評価 (1.17) から

$$\begin{aligned}|f(t) - f_N(t)| &\le |f(t) - f(t_k)| + |f_N(t_k) - f_N(t)| \\ &\le \underbrace{C|t-t_k|}_{\text{リプシッツ連続性}} + \underbrace{C'\sqrt{N}|t-t_k|}_{\text{平均値の定理}} \\ &= O(1/\sqrt{N})\end{aligned}$$

が得られる．つまり，$N \to \infty$ のとき $f_N(t)$ が $f(t)$ に一様収束することが示された． ■

1.8 関数空間の内積と直交関数系

X を周期 T で周期的で有界かつ $[0,T]$ 上で積分可能な関数全体とする．

定義: 内積

$f, g \in X$ に対して内積を

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$$

で定義する．

$f, g, h \in X$，$a, b \in \mathbb{C}$ のとき

$$\langle af + bg, h \rangle = a\langle f, h \rangle + b\langle g, h \rangle$$

$$\langle f, ag + bh \rangle = \overline{a}\langle f, g \rangle + \overline{b}\langle f, h \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

定義: L^2 ノルム

$f \in X$ に対して

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \ge 0$$

$\|f\| = 0 \iff f = 0$ μ-$a.e.$ である．

シュワルツの不等式

$$|\langle f, g \rangle| \le \|f\|\|g\| \tag{1.18}$$

三角不等式

$$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\| \tag{1.19}$$

定義: 直交

f, g が直交するとは，

$$\langle f, g \rangle = 0$$

となること．

定義: 直交関数系

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が正規直交系であるとは,

$$\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \ldots)$$

となること.

フーリエ関数系を

$$\varphi_n(t) = e^{in\omega t} \quad (n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R})$$

で定義すると, $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は正規直交系となる. このとき, フーリエ級数展開

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c[n]\varphi_n(t)$$

$$c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

は正規直交系 $\{\varphi_n\}$ に関する展開であり, フーリエ係数は座標成分である. 実フーリエ級数 (1.6) も同様である.

1.9 正規直交基底とフーリエ級数の平均収束

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の正規直交系とする.

定義: 正規直交基底(完全正規直交系)

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正規直交基底もしくは完全正規直交系であるとは, $\forall f \in X$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\| = 0$$

であること. [*1]

定理 1.6: パーセバルの等式

フーリエ関数系 $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は X の正規直交基底で, $\forall f \in X$, $c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle$ として

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]|^2 \tag{1.20}$$

が成り立つ.

証明 はあとで. ■

[*1] ちなみに, 完全のつかない正規直交系として $\{\cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots\}$ が考えられる. これは例えば f に定数をとればわかるように, 完全正規直交系(正規直交基底)にはならない. $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots\}$ なら完全正規直交系(正規直交基底)になる.

定理 1.6 より，フーリエ級数展開の**平均収束（L^2-収束）**：

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} c[n]\varphi_n \right\| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

がわかる．

命題 1.7: ベッセルの不等式

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正規直交系ならば，$\forall f \in X$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle| \leq \|f\|^2 \tag{1.21}$$

がが成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n, f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle \langle f_n, f \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\langle f, f_n \rangle} \langle f_n, f \rangle + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \langle f, f_n \rangle \overline{\langle f, f_m \rangle} \langle f_n, f_m \rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n \rangle|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

より結論を得る．■

命題 1.8　$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正規直交系とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正規直交基底であるための必要十分条件は，$\forall f \in X$ について

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2$$

が成り立つことである．

証明　命題 1.7 をみると，$\{f_n\}$ が正規直交基底ならば

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n \rangle|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

が成り立つ．逆に，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n \rangle|^2 \right) = 0$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 = 0$$

であることがわかり，$\{f_n\}$ は正規直交基底である．■

補題 1.9 $\{f_n\}$ を正規直交系，$a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$，$f \in X$ とする．このとき

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \right\| \tag{1.22}$$

が成り立つ．

証明 $g = f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n$ とする．$\langle g, f_m \rangle = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_n a_n f_n \right\|^2 &= \left\| g + \sum_n (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\
&= \|g\|^2 + \left\langle g, \sum_n (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\rangle + \left\langle \sum_n (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n, g \right\rangle + \left\| \sum_n (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\
&= \|g\|^2 + \left\| \sum_n (f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\
&\geq \|g\|^2
\end{aligned}$$

となる． ■

命題 f を周期 T で周期的かつ有界で $[0, T]$ 上で積分可能な関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|f - g\| < \varepsilon$ となるリプシッツ連続な周期関数 g が存在する．[*2]

証明 区間 $[0, T]$ の分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ をとり，周期 T で周期的な階段関数 $f_\Delta(t)$ を次式により定める:

$$f_\Delta(t) = \inf_{t_j \leq t < t_{j+1}} f(t) \quad (t_j \leq t < t_{j+1} \text{のとき})$$

Δ を十分細かく取れば，積分の定義により

$$\|f - f_\Delta\| = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - f_\Delta(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

とできる．上式が成立するように Δ をとって固定する．また，

$$\lim_{s \to 0} \int_0^T |f_\Delta(t - s) - f_\Delta(t)| dt = 0$$

であるから，$n_0 > 0$ を十分大きくとれば，$n \geq n_0$ のとき

$$\sup_{|s| \leq 1/n} \frac{1}{T} \int_0^T |f_\Delta(t - s) - f_\Delta(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

が成立する．

任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\phi(t) \geq 0$ で，$|t| \geq 1$ のとき $\phi(t) = 0$ かつ

$$\int_{-1}^{1} \phi(t) dt = 1$$

---

*2 ルベーグ積分論を用いた証明としては L^2 空間における連続関数の稠密性が関係していそう．ルベーグ積分（伊藤）の定理 24.2 など．

を満たすリプシッツ連続な関数 $\phi(t)$ をとり，$\phi_n(t) = n\phi(nt)$ とする．このとき

$$|t| \geq 1/n \text{ のとき} \phi_n(t) = 0 \text{ かつ} \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(t)dt = 1 \tag{3}$$

となる．関数 $f_n(t)$ を次式により定める．

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t-s) f_\Delta(s)ds = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_\Delta(t-s)ds$$

$f_\Delta(t)$ の周期性より

$$f_n(T) = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_\Delta(T-s)ds = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_\Delta(-s)ds = f_n(0)$$

かつ，十分大きな $n > 0$ に対して，L_ϕ を関数 ϕ のリプシッツ定数として

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t_1 - s) - \phi_n(t_2 - s)||f_\Delta(s)|ds \leq 4nL_\phi |t_1 - t_2| \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$$

となるから，$f_n(t)$ は周期 T のリプシッツ連続な周期関数である．ここで，$t_1 \neq t_2$ ならば，$n > 0$ が十分大きいとき，

$$\max\left(t_1 - \frac{1}{n}, t_2 - \frac{1}{n}\right) > \min\left(t_1 + \frac{1}{n}, t_2 + \frac{1}{n}\right)$$

であること，および式 (3) より，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t_1 - s) - \phi_n(t_2 - s)|ds &\leq \int_{t_1-1/n}^{t_1+1/n} |\phi_n(t_1 - s)|ds + \int_{t_2-1/n}^{t_2+1/n} |\phi_n(t_2 - s)|ds \\
&= \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} |\phi(nt_1 - u)|du + \int_{nt_2-1}^{nt_2+1} |\phi(nt_2 - u)|du \\
&\leq \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} |\phi(nt_1 - u) - \phi(nt_2 - u)|du + \int_{nt_2-1}^{nt_2+1} |\phi(nt_1 - u) - \phi(nt_2 - u)|du \\
&\leq \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} nL_\phi |t_1 - t_2|du + \int_{nt_2}^{nt_2+1} nL_\phi |t_1 - t_2|du \\
&\leq 4nL_\phi |t_1 - t_2|
\end{aligned}$$

となることを用いた．

式 (3) より

$$f_n(t) - f_\Delta(t) = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s)(f_\Delta(t-s) - f_\Delta(t))ds$$

であるから，

$$|f_n(t) - f_\Delta(t)| \leq \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s)|f_\Delta(t-s) - f_\Delta(t)|ds$$

となる．さらに，上式を t で積分し，積分を交換すると，$n \geq n_0$ のとき

$$\|f_n - f_\Delta\| \leq \frac{1}{T} \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) \int_0^T |f_\Delta(t-s) - f_\Delta(s)|dtds < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．ここで，式 (2) と (3) を用いた．三角不等式により，上式と式 (1) とから，$n \geq n_0$ のとき，

$$\|f - f_n\| \leq \|f - f_\Delta\| + \|f_\Delta - f_n\| < \varepsilon$$

となり，$g = f_n$ とおけば結論を得る． ■

注意　上の証明で関数 $\phi(t)$ を C^∞ に取れば，近似関数 g は C^∞ 級となる．

定理 1.6:パーセバルの等式（再掲）

フーリエ関数系 $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は X の正規直交基底で，$\forall f \in X$, $c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle$ として

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]|^2 \tag{1.20}$$

が成り立つ．

証明　$f \in X$，$\forall \varepsilon > 0$ をとる．すると，上の命題より，リプシッツ連続な周期関数 g で，$\|f-g\| < \varepsilon/2$ をみたすものをとれる．すると，定理 1.5 より，N を十分大きくとれば，

$$\left| g(t) - \sum_{|n| \le N} c_N[n]\varphi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (t \in [0,T])$$

が成り立つ[*3]．ここで $\{c_N[n]\}$ は

$$c_N[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} g\left(\frac{m}{N}T\right)e^{-i2\pi(m/N)n} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

である．これより

$$\left\| g - \sum_{|n| \le N} c_N[n]\varphi_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

がしたがう．ゆえに

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{|n| \le N} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \right\| &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{補題 1.9}}}{\le} \left\| f - \sum_{|n| \le N} c_N[n]\varphi_n \right\| \\
&\le \|f-g\| + \left\| g - \sum_{|n| \le N} c_N[n]\varphi_n \right\| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．　■

1.10　定理 1.3 の証明

補題 1.10　f を周期 T のリプシッツ連続な周期関数，$\{c[n]\}$ を f のフーリエ係数とする．このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c[n]|^2 < \infty$$

が成り立つ．

[*3] 1.6 節で $\varphi_n = e^{in\omega t}$ で定めている．

証明 リプシッツ連続性より，$C > 0$ が存在して

$$|f(t+h) - f(t)| \leq C|h| \quad (t, h \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．$N \geq 1$ に対して $h = T/2N$ とおき，f の h だけ差分関数を

$$g(t) = \frac{1}{h}\{f(t+h) - f(t)\} = \frac{2N}{T}\left\{f\left(t + \frac{T}{2N}\right) - f(t)\right\}$$

と定義すれば，$|g(t)| \leq C$ である．g のフーリエ係数を $\{d[n]\}$ と書くことにしよう．すると，

$$\begin{aligned} d[n] &= \frac{1}{hT}\int_0^T \{f(t+h) - f(t)\}e^{-i\omega nt}dt \\ &= \frac{1}{h}(e^{i\omega nh} - 1)c[n] \\ &= \frac{2N}{T}e^{i\omega nh/2} \cdot 2i\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)c[n] \end{aligned}$$

が成り立つ．g についてパーセバルの等式を用いれば

$$\|g\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d[n]|^2 = \left(\frac{4N}{T}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right|^2 |c[n]|^2$$

がわかる．一方，(1.16) を用いると，

$$|n| \leq N \quad \text{ならば} \quad \left|\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right| \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi n}{2N} = \frac{n}{N}$$

だから，

$$\|g\|^2 \geq \frac{16}{T^2} \sum_{n=-N}^{N} |n|^2 |c[n]|^2$$

を得る．$|g(t)|^2 \leq C^2$ だったので

$$\sum_{n=-N}^{N} |n|^2 |c[n]|^2 \leq \frac{T^2 C^2}{16}$$

がわかる．右辺は N に依らないので，$N \to \infty$ として求める不等式が導かれる． ■

補題 1.11 f を周期 T のリプシッツ連続な周期関数，$\{c[n]\}$ を f のフーリエ係数とする．このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]| < \infty$$

が成り立つ．

証明 $\mathbb{C}^N$ でのシュワルツの不等式から

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |n| \leq N} |c[n]| &\leq \left(2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} |n|^2 |c[n]|^2\right) \\ &\leq \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c[n]|^2\right) \end{aligned}$$

がわかる．右辺は補題 1.10 より，有限の定数で N に依らない．したがって，$N \to \infty$ として補題の主張が成り立つ． ■

補題 1.12 f を周期 T の連続な周期関数，$\{c[n]\}$ を f のフーリエ係数とする．
このとき，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]| < \infty$ ならば，フーリエ部分和:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c[n] e^{i\omega nt}$$

は $N \to \infty$ のとき f に一様収束する．

証明 $N < M$ とすると，

$$|S_N(t) - S_M(t)| \leq \sum_{N<|n|\leq M} |c[n]| \leq \sum_{|n|>N} |c[n]| \tag{1.23}$$

である．仮定により，$N \to \infty$ のとき $\sum_{|n|>N} |c[n]| \to 0$ だから，(1.23) の右辺は 0 に収束する．つまり，各 t ごとに，$\{S_N(t)\}$ はコーシー列であり，極限が存在する．そこで $g(t) \equiv \lim_{N\to\infty} S_N(t)$ とおく．(1.23) で $M \to \infty$ とすると

$$|S_N(t) - g(t)| \leq \sum_{|n|>N} |c[n]|$$

となる．右辺は t によらず，$N \to \infty$ のとき 0 に収束するのだから，$S_N(t)$ は g に一様収束することになる．これより $\|S_N - g\| \to 0$ が従う．一方，定理 1.6 より，$\|S_N - f\| \to 0$ だから，$f = g$ でなければならない．以上により，S_N が f に一様収束することが示された． ■

注意 補題 1.12 は定理 1.3 よりも強い主張であり，重要である．

注意 1.2 $\{g_N(t)\}$ を連続関数列で $N \to \infty$ のとき $g_N(t)$ は $g(t)$ に一様収束するならば，$g(t)$ は連続である．

定理 1.3（再掲）
$f(t)$ がリプシッツ連続ならば，フーリエ級数展開は $f(t)$ に一様収束する．

証明 補題 1.11 と補題 1.12 から直ちに導かれる． ■

1.11 ギッブス現象と総和法

定理 1.13 $f(t)$ を周期 T の周期関数で，$[0, T]$ 上では区分的に滑らか[*4]な関数であるとする．このとき，フーリエ部分和 $S_N(t)$ は

$$\lim_{N\to\infty} S_N(t) = \begin{cases} f(t) & (t : \text{連続}) \\ \dfrac{1}{2}\{f(t+0) + f(t-0)\} & (t : \text{不連続}) \end{cases}$$

が成り立つ．[*5]

[*4] $a_j (j = 1, \ldots, n-1)$ であって，$f(t)$ は $[a_j, a_{j+1}]$ で C^1 級で，$f(a_j + 0)(j < n)$，$f(a_j - 0)(j > 0)$ となるものが存在する ($a_0 = 0, a_n = T$)

[*5] $f(t \pm 0) = \lim_{\varepsilon\to\pm 0} f(t \pm \varepsilon)$

証明

$$\begin{aligned}S_N(t) &= \sum_{n=-N}^{N} c[n]e^{i\omega nt} \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(s)e^{-in\omega s}ds\right)e^{i\omega nt} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N}\int_0^T f(s)e^{in\omega(t-s)}ds\end{aligned}$$

と変形できる．$f(s)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数なので，$f(s)e^{in\omega(t-s)}$ の虚部 $f(s)\sin\{n\omega(t-s)\}$ を積分したものは 0 になる．したがって

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N}\int_0^T f(s)\cos\{n\omega(t-s)\}ds = \begin{cases} f(t) & (t: \text{連続}) \\ \frac{1}{2}\{f(t+0)+f(t-0)\} & (t: \text{不連続}) \end{cases}$$

を示せばよい．ここで，

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta$$

より

$$\sum_{k=0}^{N}\cos k\theta = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)+\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

両辺 1/2 を引いて

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos k\theta = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

であること[*6]を利用すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N}\int_0^T f(s)\cos\{n\omega(t-s)\}ds \\ &\quad= \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\sum_{n=-N}^{N}\cos\{n\omega(t-s)\} \\ &\quad= \frac{2}{T}\int_0^T f(s)\frac{\sin\frac{(2N+1)\omega(t-s)}{2}}{2\sin\frac{\omega(t-s)}{2}}ds \\ &\quad= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(s)\frac{\sin\frac{(2N+1)\omega(t-s)}{2}}{2\sin\frac{\omega(t-s)}{2}}ds \\ &\quad= \frac{2}{T}\left(\int_t^{t+T/2}+\int_{t+T/2}^{t+T}\right)f(s)\frac{\sin\frac{(2N+1)\omega(t-s)}{2}}{2\sin\frac{\omega(t-s)}{2}}ds \\ &\quad= \frac{2}{T}\int_0^{\omega T/4} f(t+2u/\omega)\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}\frac{2}{\omega}du + \frac{2}{T}\int_0^{\omega T/4} f(t-2u/\omega)\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}\frac{2}{\omega}du \\ &\quad= \frac{4}{\omega T}\int_0^{\omega T/4} f(t+2u/\omega)\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}du + \frac{4}{\omega T}\int_0^{\omega T/4} f(t-2u/\omega)\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}du\end{aligned}$$

周期性の利用

$-u=\omega(t-s)/2, u=\omega(t-s)/2$ と置換

[*6] ちなみに，$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}=1+2\sum_{k=1}^{N}\cos(kx)=\sin\{(n+1/2)x\}/\sin(x/2)$ はディリクレ核とよばれ，これを用いると畳み込みを用いて $S_N(t)$ が表現できる．例 2.7 参照．

ここまでの議論は $f(s) = 1$ としても成立していることに注意すると，不連続点 t では（連続点では $f(t+0) = f(t-0) = f(t)$ として考える）

$$
\begin{aligned}
&S_N(t) - \left[\frac{1}{2}\{f(t+0) + f(t-0)\}\right] \\
&= \frac{4}{\omega T}\int_0^{\omega T/4} f(t + 2u/\omega)\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}du + \frac{4}{\omega T}\int_0^{\omega T/4} f(t - 2u/\omega)\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}du \\
&\quad - \frac{1}{2}\{f(t+0) + f(t-0)\}\left[\frac{4}{\omega T}\int_0^{\omega T/4}\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}du + \frac{4}{\omega T}\int_0^{\omega T/4}\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}du\right] \\
&= \frac{4}{\omega T}\int_0^{\omega T/4}\{f(t+2u/\omega) - f(t+0)\}\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}du \\
&\quad + \frac{4}{\omega T}\int_0^{\omega T/4}\{f(t-2u/\omega) - f(t-0)\}\frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}du
\end{aligned}
$$

ここで，f は区分的に滑らかであり，$u/\sin u \to 1$（$u \to +0$）に注意すれば，t を固定して区間 $(0, \omega T/4)$ で定義された u の関数

$$
g_\pm(u) = \frac{f(t \pm 2u/\omega) - f(t \pm 0)}{\sin u} = \frac{f(t \pm 2u/\omega) - f(t \pm 0)}{\pm u}\frac{\pm u}{\sin u}
$$

は有界で有限個の点を除いて連続である（可積分）．したがって，リーマン-ルベーグの定理を利用して

$$
\lim_{N\to\infty}\int_0^{\omega T/4} g_\pm(u)\sin(2N+1)u\,du = 0
$$

がわかる．したがって

$$
\lim_{N\to\infty}\left|S_N(t) - \left[\frac{1}{2}\{f(t+0) + f(t-0)\}\right]\right| = 0
$$

■

例 1.4: 方形波

$$
f_4(t) = \begin{cases} -1 & (-T/2 < t < 0) \\ 1 & (0 < t < T/2) \end{cases}
$$

$f_4(t)$ は奇関数で，フーリエ展開は

$$
\begin{aligned}
f_4(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1} \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

となる．この展開の部分和 $S_N(t)$ をグラフにプロットすると図 1.1 のようになる．

不連続な点 $0, \pm\pi$ 以外では N が大きくなるとき $S_N(t)$ は $f_4(t)$ に収束することが観察できるが，$T = 0, \pm\pi$ の近くでは $S_N(t)$ は強く振動し，$f(t)$ よりも大きく飛び出した点が存在する．しかも N を大きくしてもこれは消えない．この現象をギッブス現象という．また，連続な点でも小さな振動は消えない．電子工学では，この飛び出しをオーバーシュート，振動をリップル，リンキングなどと呼ぶ．この飛び出しの高さは，

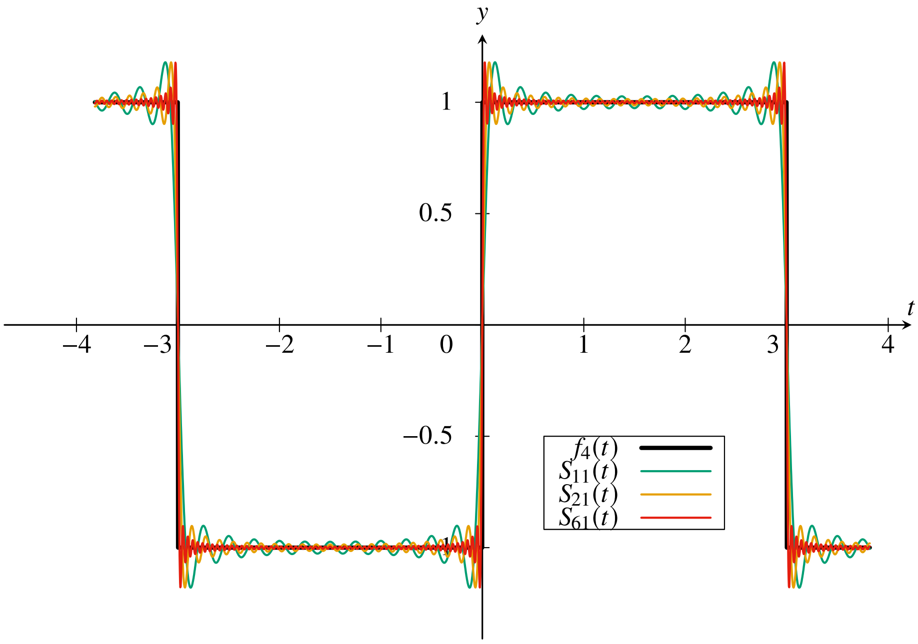

図 1.1　方形波とそのフーリエ部分和．ただし $T = 2\pi$，つまり $\omega = 1$．

$\Delta t = \omega t$, $(2N+1)\Delta t = \pi$ とおくと

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)\Delta t}{(2n+1)\Delta t}\Delta t \\ &\xrightarrow{N\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt = 1.178978\ldots \end{aligned}$$

に収束することが示せる．このギッブス現象は，どのような不連続点の周りでも発生する一般的な現象である．これを回避する方法として総和法がある． ■

■総和法　$G(s)$ を $[-1,1]$ に台をもつ有界関数で $G(0) = 1$ かつ $s = 0$ で連続であるとする．このとき，重み関数 $G(s)$ に対応する部分和を

$$S_N^G(t) = \sum_{n=-N}^{N} G\left(\frac{n}{N}\right)c[n]e^{in\omega t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく．$G(s)$ が上の条件を満たせば，形式的には

$$\lim_{N\to\infty} S_N^G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]e^{in\omega t} = f(t)$$

となり，同じフーリエ展開を与えるはずである．しかし，収束の性質は $G(s)$ の選び方によって異なってくる．このような手法を総和法という．

フェイエル和（チェザロ和）

$$G(s) = \begin{cases} 1 - |s| & (s \in [-1, 1]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおいたときの部分和

$$\sigma_N(t) = S_N^G(t) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{N - |n|}{N} \right) c[n] e^{in\omega t}$$

をフェイエル和という．

定理 1.14 f を連続な周期関数とすると，$\sigma_N(t)$ は $N \to \infty$ のとき f に一様収束する．

証明 は 2.5 節に回す ■

ハン窓 フーリエ級数の総和法はディジタル信号処理で実用的に大切な役割を果たす．この文脈では，重み関数 $G(s)$ は窓関数とよばれる．

$$H(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \pi s) & (s \in [-1, 1]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

をハン窓という．定理 1.14 同様に，連続関数のフーリエ級数のハン窓による部分和は，もとの関数に一様収束する．

2　フーリエ級数の性質と応用

2.1　フーリエ級数と微分

周期 T の周期関数 f が

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]e^{in\omega t}$$

とフーリエ級数展開されるとき，項別微分できるならば

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega c[n]e^{in\omega t}$$

となる．つまり，$f'(t)$ のフーリエ係数は $\{in\omega c[n]\}$ となるはずだが，次のような場合にはこれが正当化できる．

> **定理 2.1**　f を周期 T の連続な周期関数で，$[0,T]$ 上で有限個の点を除いて微分可能，さらに f' は有界で積分可能であるとする．このとき $\{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$，$\{d[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ をそれぞれ f, f' のフーリエ係数とすれば
>
> $$d[n] = in\omega c[n] \quad (n \in \mathbb{Z})$$
>
> が成り立つ．

証明　フーリエ係数の定義と部分積分により

$$\begin{aligned} d[n] &= \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)e^{-in\omega t}\,dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{T}\left[f(t)e^{-in\omega t}\right]_0^T}_{\text{周期性より }0} - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(-in\omega)e^{-in\omega t}\,dt \\ &= in\omega c[n] \end{aligned}$$

■

> **定理 2.2**　f を C^m 級周期関数（$m \in \mathbb{N}$），$\{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ をフーリエ係数とする．このとき，f の k 階微分 $f^{(k)}$ のフーリエ係数は $\{(i\omega n)^k c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$（$k = 0, 1, \ldots, m$）で与えられる．また，
>
> $$\exists C > 0 \text{ s.t. } |c[n]| \leq C(1+|n|)^{-m} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{2.1}$$

証明　定理 2.1 を繰り返し用いることで前半は示せる．後半は定理 1.6 を利用して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(in\omega)^m c[n]| = \|f^{(m)}\| \leq \left(\sup_t |f^{(m)}(t)|\right)^2 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ゆえに

$$|(in\omega)^m c[n]| \leq \sup_t |f^{(m)}(t)| \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ．したがって適当な C をとれば

$$|c[n]| \leq \left(\omega^m \sup_t |f^{(m)}(t)|\right)|n|^{-m} \leq C(1+|n|)^{-m} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

となる． ■

定理 2.3 f を連続な周期関数，$\{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ をフーリエ係数とする．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^m||c[n]| < \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

ならば，f は C^m 級である．特に，$a > m+1$ に対して

$$|c[n]| < C(1+|n|)^{-a} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つならば，f は C^m 級である．

証明 $m \geq 1$ について (2.2) を仮定すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |in\omega c[n]| = |\omega| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n||c[n]| < \infty$$

であるから，$f(t) = \sum_n c[n]e^{in\omega t}$ は項別微分ができる．すると

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega c[n]e^{in\omega t}$$

となり，右辺は仮定により n についての和が t に関して一様収束する．したがって f' は連続であり，f は C^1 級である．これを繰り返し用いて前半の主張を得る．後半の主張は前半より直ちに導かれる． ■

系 2.4 f を連続な周期関数とする．f が C^∞ 級関数であるための（必要）十分条件は

$$\forall M > 0, \exists C > 0 \text{ s.t. } |c[n]| \leq C(1+|n|)^{-M} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

である．

解析的な関数については，次のようなさらに強い結果が成り立つ[*7]．

定理 2.5: ペイリー・ウィナーの定理

f が解析的な周期関数であるための必要十分条件は

$$\exists C > 0, \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } |c[n]| \leq Ce^{-\varepsilon|n|} \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{2.3}$$

である．

[*7] C^ω 級は C^∞ 級よりも強い条件である．

証明 $f(t)$ に対し，複素平面の帯状領域 $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a, \exists a > 0\}$ 上の正則関数 $f(z)$ であって，$\mathbb{R}$ 上で $f(t)$ に一致するものを考える．このとき，$f(z+2\pi)$ と $f(z)$ は $\mathbb{R}$ 上で一致するから，一致の定理によって $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a, \exists a > 0\}$ 上で $f(z+2\pi) = f(z)$ が成り立つ．ゆえに，$\forall \varepsilon$ s.t. $0 < \varepsilon < a$ に対して

$$\int_0^{\pm i\varepsilon/\omega} f(z)e^{-in\omega z}dz = \int_T^{T\pm i\varepsilon/\omega} f(z)e^{-in\omega z}dz \quad (n \in \mathbb{Z})$$

となる．このことに注意すると，コーシーの積分定理より

$$c[n] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t \mp i\varepsilon/\omega)e^{-in\omega(t\mp i\varepsilon/\omega)} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が得られる[*8]（複号同順）．したがって，$C = \max\{|f(t \pm i\varepsilon/\omega)| : t \in [0,T]\}$ とすれば，

$$|c[n]| \leq \frac{e^{-\varepsilon|n|}}{T}\int_0^T |f(t \mp i\varepsilon)|dt \leq Ce^{-\varepsilon|n|}$$

となり (2.3) が成り立つ．

逆に，(2.3) が成り立つとき，定理 3.16（何？）によって

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]e^{-in\omega t}$$

である．$z \in \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a, \exists a > 0\}$ に対して

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]e^{-in\omega z}$$

と定めると，右辺は $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a, \exists a > 0\}$ 上広義一様収束する．また，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C^{-\varepsilon|n|} < +\infty$ であるので，weierstrass の解析関数に対する一様収束定理[*9]によって $f(z)$ も $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a, \exists a > 0\}$ 上の正則関数となる．$f(t)$ は $f(z)$ の実軸への制限であり，正則関数ならば解析関数である． ■

■定数係数の線形微分方程式の周期解 P を

$$Pf(t) \coloneqq \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{d^j f}{dt^j}(t)$$

で定義される定数係数の線形常微分作用素とする．ここに $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ は定数である．$g(t)$ を周期 T の周期関数とし

$$Pf(t) = g(t)$$

を考える．

f が m 階微分可能と仮定すると，定理 2.2 より，$\{c[n]\}, \{d[n]\}$ を f, g のフーリエ係数とすると

$$\sum_{j=0}^{m} a_j(i\omega n)^j c[n] = d[n] \quad (d \in \mathbb{Z})$$

[*8] $0 \to \pm i\varepsilon/\omega \to T \pm i\varepsilon/\omega \to T \to 0$ のような積分路で $f(t)e^{-in\omega t}$ を積分すると 0 であることを利用する．

[*9] weierstrass の M-test のことだと思う．

これは各 n ごとに独立な方程式だから，$\{d[n]\}$ から $\{c[n]\}$ が求まるはずである．ここで，

$$Pf(t) = f''(t) + \lambda f(t)$$

の場合を考えると

$$(-\omega^2 n^2 + \lambda)c[n] = d[n] \quad (d \in \mathbb{Z})$$

となる．

Case1. $\lambda \notin \{n^2\omega^2 | n \in \mathbb{Z}\}$ の場合　このとき

$$c[n] = \frac{1}{\lambda - n^2\omega^2} d[n]$$

とかける．g がリプシッツ連続ならば，補題 1.11 から $\sum_n |d[n]| < +\infty$ なので，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{n^2}{\lambda - n^2\omega^2} \right| |d[n]| \le C \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d[n]| < +\infty$$

となる．よって，定理 2.3 より $f = \sum_n c[n] e^{in\omega t}$ は C^2 級関数である．また，唯一の周期回である．特に，$Pf = 0$ の周期解は $f = 0$ のみである．

Case2. $\lambda = n_0^2 \omega^2$ $(\exists n_0 \in \mathbb{Z})$ の場合　このとき $Pf = g$ が解けるためには $d[n_0] = 0$ が必要である．このとき，$n \ne n_0$ については Case1. の場合と同様に $d[n]$ から $c[n]$ が解ける．$c[n_0]$ はどのように選んでも方程式は満たされる．すなわち，A, B を任意定数として

$$f(t) = \sum_{n \ne n_0} \frac{d[n]}{\lambda - n^2\omega^2} e^{in\omega t} + Ae^{in_0\omega t} + Be^{-in_0\omega t}$$

となる．

さて，$g = 0$ とした場合は固有値問題

$$f'' + \lambda f = 0$$

である．上の考察より，固有値は $\{n^2\omega^2 | n \in \mathbb{Z}\}$ であり，固有関数は $e^{in\omega t}$ であることがわかる．$n \ne 0$ では固有値は二重に縮退しており，各 $\lambda = n^2\omega^2$ について固有関数は $\{a\cos(n\omega t) + b\sin(n\omega t) | a, b \in \mathbb{C}\}$ という 2 次元の空間を張る．

2.2　偏微分方程式への応用-1:熱方程式

■熱方程式の初期境界値問題　端点の温度が 0 の，長さ $R > 0$ の棒を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x \in (0, R), t > 0) \quad (2.4a) \\ u(0, t) = u(R, t) = 0 & (t > 0) \quad (2.4b) \\ u(x, 0) = f(x) & (x \in [0, R]) \quad (2.4c) \end{cases}$$

$u(x, t)$ は時刻 t，点 x での温度を表し，$f(x)$ は時刻 $t = 0$ での初期温度である．(2.4a) は熱方程式，(2.4b) は境界条件，(2.4c) は初期条件とよばれる．$t = 0, x = 0, R$ では，境界条件と初期条件はつじつまが会っていなければならないので

$$f(0) = f(R) = 0 \tag{2.5}$$

が成立する必要がある．(2.5) を両立条件という．

まず，u や f は十分に滑らか（少なくともリプシッツ連続）だと仮定して変数分離形の解を考える．

$$u(x,t) = \xi(x)\tau(t)$$

として (2.4a) に代入すると

$$\xi(x)\tau'(t) = \xi''(x)\tau(t)$$

となる．$\xi(x) \neq 0, \tau(t) \neq 0$ ならば，x に独立，t に独立な部分に分解でき，ある定数 a が存在して

$$\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = \frac{\xi''(x)}{\xi(x)} = a$$

が成り立つ．これより

$$\begin{cases} \tau'(t) = a\tau(t) & (t > 0) \\ \xi''(x) = a\xi(x) & (x \in (0,R)) \end{cases}$$

が導かれる．第 1 式はただちに解け

$$\tau(t) = \tau(0)e^{at}$$

となる．第 2 式は，

$$\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{\sqrt{a}x} + \beta e^{-\sqrt{a}x} \quad (\alpha,\beta \in \mathbb{C}) & (a \neq 0) \\ \alpha x + \beta \quad (\alpha,\beta \in \mathbb{R}) & (a = 0) \end{cases}$$

となる．$a = 0$ のとき，境界条件は満たされないので以下 $a \neq 0$ とする．境界条件 (2.4b) より，

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{\sqrt{a}R} + \beta e^{-\sqrt{a}R} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ必要がある．$(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ であるためには

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{a}R} & e^{-\sqrt{a}R} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{a}R} - e^{\sqrt{a}R} = 0$$

つまり

$$e^{2\sqrt{a}R} = 1$$

が満たされていなければならない．よって，$2\sqrt{a}R \in 2\pi i(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$，すなわち

$$a = -\left(\frac{\pi n}{R}\right)^2 \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

また，$\beta = -\alpha$ であるので

$$\xi(x) = \alpha e^{i\pi nx/R} - \alpha e^{-i\pi nx/R} = (2i\alpha)\sin\left(\frac{\pi n}{R}x\right)$$

となる．以上より，$n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ について

$$u_n(x,t) = e^{-(\pi n/R)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n}{R}x\right)$$

が解となることがわかった．このようにして得られた解の線型結合も解であるので，$\{\tilde{b}[n]\}$ を任意定数として

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}[n]\sin\left(\frac{\pi n}{R}x\right)e^{-(\pi n/R)^2 t} \tag{2.6}$$

も（収束すれば，形式的には）(2.4) を満たすことがわかる．(2.6) の $t=0$ での値は

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}[n]\sin\left(\frac{\pi n}{R}x\right)$$

となる．

ここで $f(t)$ を周期 $2R$ の周期関数に拡張する．すなわち

$$f(x)=f(-x)\quad(0\le x\le R)$$
$$f(x+2mR)=f(x)\quad(-R\le x\le R, m\in\mathbb{Z})$$

とする．両立条件 (2.5) より，もとの f が連続であれば拡張された f も連続であり，f は奇関数だから

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b[n]\sin\left(\frac{\pi n}{R}x\right)$$

ただし

$$b[n]=\frac{1}{R}\int_{-R}^{R}f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{R}x\right)dx=\frac{2}{R}\int_{0}^{R}f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{R}x\right)dx$$

と f を正弦フーリエ変換できる．$u(x,0)$ が正弦フーリエ変換された $f(x)$ と等しいためには $\tilde{b}[n]=b[n]$ とならなくてはならない．したがって，$\{b[n]\}$ を上で定められた数列として

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b[n]\sin\left(\frac{\pi n}{R}x\right)e^{-(\pi n/R)^2 t} \tag{2.6'}$$

が (2.4) の形式的な解を与えることがわかる．実際，f がリプシッツ連続なら，この主張は正当化でき，さらに (2.4) の解はこれ以外にないことが証明できる．

定理 2.6　f を $[0,R]$ 上のリプシッツ連続な関数で，両立条件 (2.5) をみたすと仮定する．このとき，$\omega=\pi/R$ として

$$b[n]=\frac{2}{R}\int_{0}^{R}f(x)\sin(n\omega x)dx\quad(n\ge 1)$$
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b[n]\sin(n\omega x)e^{-n^2\omega^2 t}$$

とおけば，$u(x,t)$ は $[0,R]\times[0,\infty)$ で連続，$(0,R)\times(0,\infty)$ で無限回微分可能であり，(2.4) をみたす．さらに，$[0,R]\times[0,\infty)$ で連続，$(0,R)\times(0,\infty)$ で 2 回連続微分可能な唯一の (2.4) の解である．

証明　これの証明には次の補題が必要となるので後で書く．■

補題 2.7: エネルギー不等式

$w(x,t)$ が x について 2 回連続微分可能，t について 1 回連続微分可能で，熱方程式の初期境界値問題 (2.4) を満たすならば

$$\int_{0}^{R}w(x,t)^2dx\le\int_{0}^{R}f(x)^2dx\quad(t>0) \tag{2.7}$$

が成り立つ．

証明

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R w(x,t)^2dx &= 2\int_0^R\left(\frac{\partial}{\partial t}w(x,t)\right)w(x,t)dx \\
&= 2\int_0^R\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t)\right)w(x,t)dx \\
&= -2\int_0^R\left|\frac{\partial}{\partial x}w(x,t)\right|^2dx \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

部分積分と境界条件 (2.4b)

したがって

$$
\int_0^R w(x,t)^2dx \leq \int_0^R w(x,0)^2dx = \int_0^R f(x)^2dx
$$

■

定理 2.5（再掲）

f を $[0,R]$ 上のリプシッツ連続な関数で，両立条件 (2.5) をみたすと仮定する．このとき，$\omega = \pi/R$ として

$$
\begin{aligned}
b[n] &= \frac{2}{R}\int_0^R f(x)\sin(n\omega x)dx \quad (n \geq 1) \\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b[n]\sin(n\omega x)e^{-n^2\omega^2 t}
\end{aligned}
$$

とおけば，$u(x,t)$ は $[0,R]\times[0,\infty)$ で連続，$(0,R)\times(0,\infty)$ で無限回微分可能であり，(2.4) をみたす．さらに，$[0,R]\times[0,\infty)$ で連続，$(0,R)\times(0,\infty)$ で 2 回連続微分可能な唯一の (2.4) の解である．

証明

$$
\forall M > 0, \exists C_M > 0 \text{ s.t. } e^{-s} \leq C_M(1+s)^{-M}
$$

となること[*10]と，補題 1.11 とから

$$
|b[n]e^{-n^2\omega^2 t}| \leq C_M(1+n^2\omega^2 t)^{-M} \tag{2.8}
$$

より，系 2.4 により $u(x,t)$ は x について C^∞ 級．

また $\forall K \in \mathbb{N}, \forall T > 0, \exists C_{K,T} > 0$ (s.t. $\forall t \in [0,T]$)

$$
|(n^2\omega^2)^K b[n]e^{-n^2\omega^2 t}\sin(n\omega x)| \leq C_{K,T}(1+n^2\omega^2 t)^{-2} \quad (n \in \mathbb{Z})
$$

より，$\forall t \in [0,T]$ について

$$
\frac{\partial^K u}{\partial t^K}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2\omega^2)^K b[n]e^{-n^2\omega^2 t}\sin(n\omega x)
$$

は絶対収束することがわかるので（定理 2.3 の証明を参照），$u(x,t)$ は t について C^∞ 級．したがって u は熱方程式 (2.4a) をみたすことがわかる．

[*10] $O(e^s)$ の方が $O(s^M)$ よりも強いことからわかる．以下も同様．

また，上の評価によりフーリエ級数は一様収束するので，境界条件 (2.4b) をみたす．

次に $\forall\varepsilon > 0$ をとる．補題 1.11 より

$$\sum_{n>N} |b[n]| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる．また $t_0 > 0$ を十分小さくとれば

$$\sum_{n=1}^{N} (1 - e^{-n^2\omega^2 t_0})|b[n]| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにできる．すると

$$f(x) - u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b[n] \sin(n\omega t)(1 - e^{-n^2\omega^2 t})$$

なので，$0 < t < t_0$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x) - u(x,t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |b[n]|(1 - e^{-n^2\omega^2 t}) \\ &\leq \sum_{n>N} |b[n]| + \sum_{n=1}^{N} |b[n]|(1 - e^{-n^2\omega^2 t_0}) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

がわかる．ε は任意だったので，$t \to 0$ のとき $u(x,t)$ が $f(x)$ に一様収束することを意味する．つまり，u は $t = 0$ までこめて連続で，初期条件 (2.4c) をみたす．

一意性を示す．$u(x,t)$ と $\tilde{u}(x,t)$ がともに熱方程式 (2.4) をみたすとすると，$w(x, t = u(x,t) - \tilde{u}(x,t))$ は初期条件 $f = 0$ として初期境界値問題 (2.4) をみたす．よって，補題 2.7 より

$$\int_0^R w(x,t)^2 dx \leq \int_0^R w(x,0)^2 dx = 0$$

となり，$w(x,t) \equiv 0$ でなければならない，つまり $w(x,t) \equiv \tilde{u}(x,t)$ である， ■

2.3 偏微分方程式への応用-2：ディリクレ問題

省略

2.4 積のフーリエ級数展開とたたみこみ

f を周期 T の周期関数とするとき，f のフーリエ係数を

$$(\mathcal{F} f)[n] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とかくことにする[*11]．すなわち，$\mathcal{F}$ は周期関数の空間 X から数列の集合への，フーリエ係数を対応させる線形写像[*12]である．逆に，$c = \{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ とするとき

$$(\mathcal{F}^* c)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] e^{in\omega t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

[*11] つまり $c[n] = (\mathcal{F} f)[n]$.

[*12] 作用素ということもある．

と書くことにする．$\mathcal{F}^*c$ は一般には収束するとは限らないが，l^1-条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]| < +\infty \tag{2.15}$$

が満たされれば $\mathcal{F}^*c$ は一様収束する．

ここで，$l^1(\mathbb{Z}) = \{c = \{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty} | \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]| < +\infty\}$ とかく[*13]．$c \in l^1(\mathbb{Z})$ ならば $\mathcal{F}^*c$ は一様収束し，$\mathcal{F}\mathcal{F}^*c = c$ となる（補題 1.12）．また，f がリプシッツ連続ならば $\mathcal{F}f \in l^1(\mathbb{Z})$, $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = f$（補題 1.11）．$f \in X$ ならば平均収束の意味で $\mathcal{F}^*\mathcal{F}f = f$（定理 1.6）．以上の意味で

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$$

が成り立つ．[*14]

以下では X を周期 T のリプシッツ連続な関数全体とし，$\mathcal{F} : X \to l^1(\mathbb{Z})$ を考える．

■数列のたたみこみ

定義: 数列のたたみこみ

一般に，数列 c, d に対して

$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c[m]d[n-m] \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{2.16}$$

で与えられる数列 $p = \{p[n]\}$ をたたみこみと言い，$c * d$ とかく．

$c, d \in l^1(\mathbb{Z})$ ならば $c * d \in l^1(\mathbb{Z})$ である[*15]．また，$c * d = d * c$ が成り立ち，たたみこみは可換である[*16]．

定理 2.11 f, g を周期 T の連続な周期関数で，$\mathcal{F}f, \mathcal{F}g \in l^1(\mathbb{Z})$ をみたすとする．このとき，

$$\mathcal{F}(fg) = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)$$

が成り立つ．

証明 $c = \mathcal{F}f, d = \mathcal{F}g \in l^1(\mathbb{Z})$ とする．このとき

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c[m]e^{im\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{in\omega t} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[m]d[n]e^{i(n+m)\omega t} \end{aligned}$$

とかける．仮定より絶対収束し，無限和の取り方は自由に変えられるので

$$f(t)g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c[m]d[k-m] \right) e^{ik\omega t}$$

[*13] つまり $l^1(\mathbb{Z})$ は l^1-条件をみたす数列全体である．同様に $l^2(\mathbb{Z})$ 数列空間なども考えることができる．

[*14] 写像だと思えば逆写像があると捉えられる．ただし必ずしも逆写像があるわけではなく，定義域を制限させるなどする必要がある．例えばリプシッツ連続な関数に $\mathcal{F}$ を作用させた後に $\mathcal{F}^*$ を作用させてもリプシッツ連続な関数になるとは限らない．

[*15] $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(c * d)[n]| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c[m]||d[n-m]| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c[m]| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d[n]| < \infty$.

[*16] $(c * d)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c[m]d[n-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c[n-k]d[k] = (d * c)[n]$.

となる．ゆえに積 $f(t)g(t)$ のフーリエ係数は

$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c[m]d[n-m] \quad (n \in \mathbb{Z})$$

となるが，これは $p = c * d$ を意味しており，$p = \mathcal{F}(fg), c = \mathcal{F}f, d = \mathcal{F}g$ だったので $\mathcal{F}(fg) = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)$ であることが示せた． ■

■関数のたたみこみ

定義: 関数のたたみこみ

f, g を周期 T の周期関数とする．この f, g に対して f と g のたたみこみ $f * g(t)$ を

$$f * g(t) = \int_0^T f(s)g(t-s)ds \quad (t \in \mathbb{R})$$

で定義する．

数列の場合と同様に $f * g = g * f$ が成り立ち，f, g が有界ならば $f * g$ も有界である．また，f, g が有界でなくても $\|f\|, \|g\| < +\infty$ ならば $f * g$ は有界である[*17]．

定理 2.12 f, g を周期 T の有界な周期関数とする．このとき

$$(\mathcal{F}f)[n] \cdot (\mathcal{F}g)[n] = \frac{1}{T}\mathcal{F}(f * g)[n] \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ．また，$c, d \in l^1(\mathbb{Z})$ ならば，

$$\mathcal{F}^*(cd)(t) = \frac{1}{T}(\mathcal{F}^*c) * (\mathcal{F}^*d)(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．

証明 前半は

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f)[n] \cdot (\mathcal{F}g)[n] &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \cdot \frac{1}{T}\int_0^T g(s)e^{-in\omega s}ds \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T \int_0^T f(t)g(s)e^{-im\omega(t+s)}dsdt \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T \int_{t-T}^t f(t)g(u-t)e^{-in\omega u}dudt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(u-t)dt\right)e^{-in\omega u}du \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{T}(f * g)(u)\right)e^{-in\omega u}du \\
&= \mathcal{F}\left(\frac{1}{T}(f * g)\right)[n] \\
&= \frac{1}{T}\mathcal{F}(f * g)[n]
\end{aligned}$$

[*17] $|f * g(t)| \leq \int_0^T |f(s)||g(t-s)|ds \leq \left(\int_0^T |f(s)|^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T |g(t-s)|^2 ds\right)^{1/2} = \|f\|\|g\|$ からわかる．実際には f, g が可測関数で二乗可積分であればよい．

後半は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^*(cd)(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]d[n]e^{in\omega t} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c[m]d[n]e^{i(m-n)\omega s}ds\cdot e^{in\omega t}\,{}^{*18} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{m=-\infty}^{\infty} c[m]e^{im\omega s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{in\omega(t-s)}ds \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T (\mathcal{F}^*c)(s)\,(\mathcal{F}^*d)(t-s)ds \\
&= \frac{1}{T}(\mathcal{F}^*c)*(\mathcal{F}^*d)(t)
\end{aligned}
$$

からわかる. ■

2.5 フーリエ級数の総和法・再論

$G(s)$ を重み関数（$\operatorname{supp} G = [-1,1], G(0)=1, s=0$ で連続）とすると

$$
g_N(t) = \frac{1}{T}\mathcal{F}^*\Big(G\Big(\frac{n}{N}\Big)\Big)(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} G\Big(\frac{n}{N}\Big)e^{in\omega t}
$$

とおけば, f のフーリエ級数の重み関数 G に対応する部分和 $S_N^G(t)$ は

$$
S_N^G(t) = \mathcal{F}^*\Big(G\Big(\frac{n}{N}\Big)(\mathcal{F}f)[n]\Big)(t) = (g_N * f)(t) = \int_0^T g_N(s)f(t-s)ds
$$

となる.

例 2.7: フーリエ部分和

フーリエ部分和の対応する重み関数 G は

$$
G(s) = \begin{cases} 1 & (|s| \le 1) \\ 0 & (|s| > 1) \end{cases}
$$

で与えられた. このとき対応する周期関数はディリクレ核

$$
D_N(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega t} = \begin{cases} \frac{1}{T}\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\sin\frac{1}{2}\omega t} & (t \notin T\mathbb{Z}) \\ \frac{1}{T}(2N+1) & (t \in T\mathbb{Z}) \end{cases}
$$

となり, これを用いると

$$
S_N(t) = D_N * f(t)
$$

と書くことができる.

*18 直交性（定理 1.1）により $m \ne n$ のとき, この積分は 0 になる. $m = n$ のときは積分値が T になることにも注意. また, $c, d \in l^1(\mathbb{Z})$ なので $\|\mathcal{F}^*c\|$ と $\|\mathcal{F}^*d\|$ は有界で $(\mathcal{F}^*c)*(\mathcal{F}^*d)(t)$ も有界.

例 2.8: フェイエル和

フェイエル和の対応する重み関数 G は

$$G(s) = \begin{cases} 1 - |s| & (|s| \leq 1) \\ 0 & (|s| > 1) \end{cases}$$

で与えられた．このとき対応する周期関数はフェイエル核

$$F_N(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N}\frac{N-|n|}{N}e^{in\omega t} = \begin{cases} \frac{1}{TN}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}N\omega t}{\sin\frac{1}{2}\omega t}\right)^2 & (t \notin T\mathbb{Z}) \\ \frac{N}{T} & (t \in T\mathbb{Z}) \end{cases}$$

となり，これを用いると

$$S_N(t) = F_N * f(t)$$

と書くことができる．

■フェイエル核の性質

補題 2.13 (i) $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して $F_N(t) \geq 0$.

(ii) $\forall N \in \mathbb{N}$ について

$$\int_0^T F_N(t)dt = 1$$

となる．

(iii) $\forall \delta > 0$ に対して $N \to \infty$ のとき $[\delta, T-\delta]$ 上で $F_N(t)$ は 0 に一様収束する．

証明 (i) $F_N(t)$ の表現から明らか．

(ii) F_N を実際に積分する．

$$\begin{aligned}\int_0^T F_N(t)dt &= \sum_{n=-N}^{N}\frac{N-|n|}{N}\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T e^{in\omega t}dt}_{n\neq 0 \text{ なら } 0 \text{ になる}} \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T dt \\ &= 1\end{aligned}$$

(iii) $t \in [\delta, T-\delta]$ なら $|\sin(\omega t/2)| \geq \sin(\omega\delta/2) > 0$ であるので

$$|F_N(t)| \leq \frac{1}{TN}\left(\frac{1}{\sin(\omega\delta/2)}\right)^2 \leq \frac{1}{TN}\left(\frac{2}{2\omega\delta/2}\right)^2 = \frac{1}{N}\frac{4}{T\omega^2\delta^2}$$

が成り立つ．$N \to \infty$ とすれば $|F_N(t)| \to 0$ となる．

■

定理 2.14 $g_N(t)$ を周期 T の連続な周期関数で

(i) $\exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \int_0^T g_N(t)dt = 1, \int_0^T |g_N(t)|dt \leq M$

(ii) $\forall \delta > 0, \lim_{N\to\infty}\int_\delta^{T-\delta}|g_N(t)|dt = 0$

とする．このとき，f が連続な周期関数ならば，$N \to \infty$ で $g_N * f$ は f に一様収束する．

証明 $f_N = g_N * f$ とおく．仮定 (i) から

$$
\begin{aligned}
f(t) - f_N(t) &= \int_0^T g_N(s)f(t)ds - \int_0^t g_N(s)f(t-s)ds \\
&= \int_0^T g_N(s)\{f(t) - f(t-s)\}ds
\end{aligned}
$$

f は $[0,T]$ 上の連続関数だから，一様連続．つまり

$$
\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |t-s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2M}
$$

が成り立っている．また，仮定 (ii) から

$$
\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } N \geq N_0 \Rightarrow \int_\delta^{T-\delta} |g_N(t)|dt < \frac{\varepsilon}{4\sup_s |f(s)|}
$$

が成り立つので

$$
\begin{aligned}
|f(t) - f_N(t)| &\leq \int_0^T |g_N(t)||f(t) - f(t-s)|ds \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} |g_N(t)||f(t) - f(t-s)|ds + \int_\delta^{T-\delta} |g_N(t)||f(t) - f(t-s)|ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2M} \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} |g_N(s)|ds}_{\leq M} + 2\sup_s |f(s)| \int_\delta^{T-\delta} |g_N(s)|ds \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

よって $f_N = g_N * f$ が f に一様収束することがわかった． ■

定理 1.14（再掲）
f を連続な周期関数とすると，$\sigma_N(t)$ は $N \to \infty$ のとき f に一様収束する．

$$
\sigma_N(t) = S_N^G(t) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{N - |n|}{N}\right) c[n]e^{in\omega t}
$$

をフェイエル和というのだった．

証明 補題 2.13 と定理 2.14 からわかる． ■

ディリクレ核 $D_N(t)$ は定理 2.14 の条件を満たさない．

2.6 離散フーリエ変換と差分方程式

数列 $c = \{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ が与えられたとき

$$
f(t) = \mathcal{F}^* c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]e^{in\omega t} \quad (t \in \mathbb{R})
$$

ただし

$$c[n] = \mathcal{F} f[n] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とする．$\mathcal{F}^*$ を $l^1(\mathbb{Z})$ から連続な周期関数の集合への写像とする．これを離散フーリエ変換という．

$\{\alpha_j\}_{j=-m}^m \subset \mathbb{C}$ を定数の列とし，$a = \{a[n]\}, b = \{b[n]\}$ に関する方程式

$$(Aa)[n] = \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j a[n-j] = b[n] \tag{2.17}$$

を考える．このような形の方程式を差分方程式という．

定理 2.15 複素数列 $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=-m}^m \subset l^1(\mathbb{Z})$ に対して

$$\tilde{A}(t) = \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j e^{ij\omega t} \neq 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.18}$$

が満たされていると仮定する．このとき，任意の $b \in l^1(\mathbb{Z})$ に対して，(2.17) の解 $a \in l^1(\mathbb{Z})$ がただ 1 つ存在し

$$a = g * b \tag{2.19a}$$

$$g = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\tilde{A}}\right) \in l^1(\mathbb{Z}) \tag{2.19b}$$

で与えられる．

証明 (2.17) を離散フーリエ変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*(Aa)(t) &= \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j \mathcal{F}^*(a[n-j])(t) \\ &= \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j e^{ij\omega t}(\mathcal{F}^* a)(t) \\ &= \tilde{A}(t)(\mathcal{F}^* a)(t) \\ &= (\mathcal{F}^* b)(t)\end{aligned}$$

より

$$\tilde{A}(t)(\mathcal{F}^* a)(t) = (\mathcal{F}^* b)(t)$$

と書き換えることができる．いま $\tilde{A}(t)$ は連続な関数で $\inf|\tilde{A}(t)| > 0$ であり，$1/\tilde{A}(t)$ は有界連続関数である．さらに $\tilde{A}(t)$ は三角多項式で解析的であるので $1/\tilde{A}(t)$ も解析的，特になめらかである．$b \in l^1(\mathbb{Z})$ が与えられたとして (2.17) を $a \in l^1(\mathbb{Z})$ について解くことで，解は

$$(\mathcal{F}^* a)(t) = \frac{1}{\tilde{A}(t)}(\mathcal{F}^* b)(t)$$

となる．両辺に $\mathcal{F}$ を作用させて定理 2.11 を用いると

$$a = \mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{\tilde{A}}\right)(\mathcal{F}^* b)\right) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\tilde{A}}\right) * b$$

であることがわかる．さらに $\mathcal{F}(1/\tilde{A}) \in l^1(\mathbb{Z})$ であることが補題 1.11 もしくは定理 2.2 からわかる． ■

注意 2.1 $\alpha_{-m}, \alpha_m \neq 0$ ならば，(2.17) の解全体は $2m$ 次元線型空間をなす．定理 2.15 が成り立てば $l^1(\mathbb{Z})$ に入るものは 1 つだけである．

例 2.9 数列 $a = \{a[n]\}$ に対して，差分ラプラシアン

$$\Delta a[n] = a[n+1] + a[n-1]$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ を任意の定数として，差分方程式

$$\Delta a + \lambda a = b$$

を考える．$\tilde{\Delta}(t) = e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} = 2\cos\omega t$ より

$$(2\cos\omega t + \lambda)\mathcal{F}^* a(t) = \mathcal{F}^* b(t)$$

$b \in l^1(\mathbb{Z}), \lambda \notin [-2, 2]$ ならば，定理 2.15 より

$$a[n] = \mathcal{F}((2\cos\omega t + \lambda)^{-1}) * b[n]$$

2.7 離散時間信号処理とフィルター

■ディジタル信号処理（離散時間信号処理）

定義: 離散時間信号

$c = \{c[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は離散的な時間毎にサンプリングされた量

定義: フィルター

$A : c \mapsto A(c)$ と対応する写像．$A(c)$ も離散信号．次の 2 つの性質をみたす：

(i) A は線形：c, d を離散時間信号，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ のとき

$$A(\alpha c + \beta d) = \alpha A(c) + \beta A(d)$$

(ii) A は時不変：つまり V を平行移動

$$(Vc)[n] = c[n-1]$$

とするとき，

$$A(Vc) = V(A(c))$$

定義: インパルス・レスポンス

フィルター A のインパルス・レスポンス $\{h[n]\}$ は

$$h[n] = (A\delta)[n] \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ただし $\delta[n] = \delta_{n0}$

以下では $\{h[n]\}$ が有界数列である場合だけ考える．すると，$\forall c \in l^1(\mathbb{Z})$ に対して（形式的には）

$$(Ac)[n] = (h * c)[n], \quad Ac = h * c$$

が成り立つ．

定義: 因果的

A が因果的であるとは，$\forall n < 0, h[n] = 0$ であることである．

定義: FIR フィルター

有限個の n を除いて $h[n] = 0$ であるようなフィルター A のこと．

定義: IIR フィルター

有限個の n 以外 $h[n] \neq 0$ であるようなフィルター A のこと．

c が離散時間のとき，

- $\mathcal{F}^*c$ を c のスペクトル（周波数域 $[-T/2, T/2]$）
- $(\mathcal{F}^*c)(t)$ をスペクトル振幅
- $\mathcal{F}^*(Ac)(t) = \mathcal{F}^*(h * c)(t) = (\mathcal{F}^*h)(t) \cdot (\mathcal{F}^*c)(t)$（定理 2.11 からわかる）
- $(\mathcal{F}^*h)(t)$ もしくは $|(\mathcal{F}^*h)(t)|$ を A の周波数特性

例 2.10: ローパスフィルター

$T = 2\pi$，$0 < \alpha < \pi$ として，理想ローパスフィルタ A_α

$$(\mathcal{F}^*h_\alpha)(t) = \begin{cases} 1 & (-\alpha < t < \alpha) \\ 0 & (-\pi < t < -\alpha \text{または} \alpha < t < \pi) \end{cases}$$

インパルスレスポンス

$$h_\alpha[n] = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*h_\alpha)[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{int}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{\sin n\alpha}{n} & (n \neq 0) \\ \frac{\alpha}{\pi} & (n = 0) \end{cases}$$

よって

$$A_\alpha c[n] = \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\alpha}{m} c[n-m]$$

（ただし $\sin \alpha 0/0 = \alpha$ とする）

3　1 変数のフーリエ変換

3.1　導入

f を $\mathbb{R}$ 上リプシッツ連続で $\operatorname{supp} f \subset [-N\pi, N\pi]$ であるようなものとする．すると，フーリエ級数展開により

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] e^{in\omega t}$$

$$c[n] = \frac{1}{2\pi N} \int_{-N\pi}^{N\pi} f(t) e^{in\omega t} dt$$

とかける．ただし $t \in [-N\pi, N\pi], \omega = 2\pi/(2N\pi) = 1/N$ とした．そこで，$\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

と書けば，

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{N}\right) e^{i(n/N)t} \quad (t \in [-N\pi, N\pi])$$

と書き換えられる．形式的に $N \to \infty$ とすれば和は積分になり

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} dt$$

が導かれる．これが f のフーリエ変換 $\hat{f}$ による展開である．

ここまでの議論は $\operatorname{supp} f$ が有界で，収束についてしっかり考慮していないので，次の節からきちんと議論する．

3.2　フーリエ変換の定義

定義 3.1: 可積分

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が可積分（L^1-条件を満たす，$f \in L^1(\mathbb{R})$）であるとは，任意の有限区間で広義積分できるということである．すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

が成り立つ．

定義 3.2: フーリエ変換，逆フーリエ変換

f が可積分な $\mathbb{R}$ 上の関数とする．

フーリエ変換：

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi} dt$$

逆フーリエ変換：

$$\check{f}(t) = (\mathcal{F}^* f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{it\xi} d\xi$$

フーリエ変換の反転公式：

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F}f(t) = f(t), \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^*f(\xi) = f(\xi)$$

が成り立つ．これはあとで示す．

命題 3.1 (i) $\mathcal{F},\mathcal{F}^*$ は線型写像である．

(ii) $\tilde{f}(t) = f(-t)$ とすれば

$$(\mathcal{F}\tilde{f})(\xi) = \hat{f}(-\xi) = \overline{(\mathcal{F}\overline{f})(\xi)}$$

が成り立つ．

証明 省略． ■

命題 3.2 $f \in L^1(\mathbb{R})$ ならば $\hat{f},\check{f}$ は有界かつ一様連続な関数である．

証明

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < +\infty$$

だから $\hat{f}$ は有界な関数である．

$\varepsilon > 0$ を任意の小さな数とする．$R > 0$ を十分大きくとって

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|t|\geq R}|f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

となるようにする．一方，すべての $\xi,\eta \in \mathbb{R}$ について

$$|e^{-it\xi} - e^{-it\eta}| = \left|\int_{\eta}^{\xi}(-it)e^{-its}ds\right| \leq |t||\xi-\eta|$$

が成り立つ．これを用いて

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}f(t)e^{-it\xi}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}f(t)e^{-it\eta}dt\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}|e^{-it\xi} - e^{-it\eta}||f(t)|dt \\ &\leq \frac{R}{\sqrt{2\pi}}|\xi-\eta|\int_{-R}^{R}|f(t)|dt\end{aligned}$$

が得られる．ここで

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{R}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}|f(t)|dt\right)^{-1}$$

として $|\xi-\eta| \leq \delta$ を仮定すれば

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| &\leq \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|t|\geq R}f(t)e^{-it\xi}dt\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|t|\geq R}f(t)e^{-it\eta}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}f(t)e^{-it\xi}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}f(t)e^{-it\eta}\right| \\ &\leq 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意だったので，これは $\hat{f}$ が一様に連続であることを意味する．$\check{f}$ についても全く同様である． ■

3.3 基本的な例

例 3.1

$$f_1(t) = e^{-\alpha|t|} \quad (\alpha > 0)$$

$$\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$$

$$\check{f}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2}$$

例 3.2

$$f_2(t) = \frac{1}{\alpha^2 + t^2} \quad (\alpha > 0)$$

$$\hat{f}_2(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} e^{-\alpha|\xi|}$$

$$\check{f}_2(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

例 3.3: ガウス関数

$$f_3(t) = e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{2}}$$

$$\hat{f}_3(\xi) = \frac{1}{\lambda} e^{-\xi^2/2\lambda^2}$$

$$\check{f}_3(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-t^2/2\lambda^2}$$

例 3.4: 定義関数

$$f_4(t) = \begin{cases} 1 & (t \in [-a, a]) \\ 0 & (t \notin [-a, a]) \end{cases}$$

$$\hat{f}_4(\xi) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}$$

例 3.1,3.2,3.3 は反転公式が成立するが，例 3.4 は反転公式が成立しない．

3.4　反転公式

反転公式がどういう場合に成り立つのか？

定理 3.3 f が有界連続で可積分であるとする．このとき

$$f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{it\xi} \hat{f}(\xi)d\xi \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．[*19]

注意 3.1 極限と積分が交換できれば，右辺は $\mathcal{F}^*\hat{f}(t)$ に等しい．

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとって固定する．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{it\xi} \hat{f}(\xi)d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2\xi^2/2} e^{it\xi} f(s) e^{-is\xi} ds d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon^2\xi^2/2} e^{i(t-s)\xi} d\xi \right) f(s) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varepsilon, t-s) f(s) ds
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2\xi^2/2} |f(s)| ds d\xi < +\infty$$

が成り立っているので重積分の順序が交換でき，さらに

$$\rho(\varepsilon, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2\xi^2/2} e^{it\xi} d\xi = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\varepsilon^2}$$

とおいた．$\rho(\varepsilon, t)$ は次のような性質をもつ[*20]：

(i) $\rho(\varepsilon, t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\varepsilon, t) dt = 1$
(iii) $\forall \delta > 0, \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|\geq\delta} \rho(\varepsilon, t) dt = 0$

よって $\rho(\varepsilon, t)$ に対して定理 3.4 を利用することで結論を得る． ■

定理 3.4 $g_\varepsilon(t)$ を ε をパラメータとする $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数で，次の条件を満たすものとする．

(i) $\exists M > 0, \forall \varepsilon > 0, \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t) dt = 1, \int_{-\infty}^{\infty} |g_\varepsilon(t)| dt \leq M$
(ii) $\forall \delta > 0, \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|\geq\delta} |g_\varepsilon(t)| dt = 0$

このとき，任意の有界な連続関数 f について

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t-s) f(s) ds = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．

[*19] 定理 3.3 と定理 3.4 は定理というよりは補題というべき内容らしい．

[*20] $\rho(\varepsilon, t) = \mathcal{N}(t|0, \varepsilon)$，つまり平均 0，分散 ε^2 の正規分布を示す確率密度関数であることからもわかる．なお，この表示はデルタ関数の近似表現としてもよく用いられる．物理でよく見るような気がする．

証明 定理 2.14 とほぼ同様.

$t \in \mathbb{R}$ を固定し，$\varepsilon > 0$ をとる．仮定 (i) を利用して

$$\begin{aligned} f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t-s)f(s)ds &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(s)f(t)ds - \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(s)f(t-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(s)\{f(t)-f(t-s)\}ds \end{aligned}$$

とかける．$a > 0$ を小さな数として固定する．f は t で連続なので，$\delta > 0$ を十分小さく取れば，$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，$|s| < \delta$ で

$$|f(t) - f(t-s)| < \frac{a}{2M}$$

が成り立つようにできる．

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t-s)f(s)ds \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(s)\{f(t)-f(t-s)\}ds \right| \\ &\le \int_{-\delta}^{\delta} |g_\varepsilon(s)||f(t)-f(t-s)|ds + \int_{|s|\ge\delta} |g_\varepsilon(s)||f(t)-f(t-s)|ds \\ &\le \frac{a}{2M}\int_{-\infty}^{\infty} |g_\varepsilon(s)|ds + 2\sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s)| \int_{|s|\ge\delta} |g_\varepsilon(s)|ds \\ &\le \frac{a}{2} + 2\sup_{s\in\mathbb{R}}|f(s)| \int_{|s|\ge\delta} |g_\varepsilon(s)|ds \end{aligned}$$

$a > 0$ は任意の小さな数であり，仮定 (ii) を用いると $\varepsilon \to 0$ で $f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t-s)f(s)ds \to 0$ がわかる． ■

定理 3.5: 反転公式

$f, \hat{f}$ が有界連続な可積分関数とする．このとき $f = \mathcal{F}^*\hat{f}$，つまり

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．同様に $f = \mathcal{F}\check{f}$，つまり

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi}\check{f}(t)dt \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．

証明 定理 3.3 から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}\hat{f}(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}} e^{it\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \tag{3.2}$$

を示せばよい．$\hat{f}$ は可積分だから，

$$\forall\delta > 0, \exists R > 0 \text{ s.t. } \int_{|\xi|\ge R} |\hat{f}(\xi)|d\xi < \delta$$

とできる．すると

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}\hat{f}(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}e^{it\xi}\hat{f}(\xi)d\xi\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-\varepsilon^2\xi^2/2})e^{it\xi}\hat{f}(\xi)d\xi\right|$$
$$\le (1-e^{-\varepsilon^2R^2/2})\int_{-R}^{R}|\hat{f}(\xi)|d\xi + \int_{|\xi|\ge R}|\hat{f}(\xi)|d\xi$$
$$\to \delta \quad (\varepsilon \to 0)$$

となる．$\delta > 0$ はいくらでも小さく取れるので，左辺の収束がいえて (3.2) が示された． ■

f について反転公式が成り立つかどうか，フーリエ変換が可積分があることの十分条件を与える定理．

定理 3.6 f が C^1 級関数で，f, f' がともに可積分で，f' が有界であるならば，$\hat{f}$ は可積分である．特に，フーリエの反転公式 $f = \mathcal{F}^*\hat{f}$ が成立する．

教科書と異なり f' が有界であるという条件を付加している．

例: f が C^1 級関数で，f, f' がともに可積分だが，f' が非有界な例

$t \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}, \delta \in (0,1), g(-t) = g(t)$ とし，

$$g(t) = \begin{cases} 4n^{4-\delta}(t-n) & (t \in [-\frac{1}{2}n^{-3}+n, n]) \\ -4n^{4-\delta}(t-n-n^{-3}) & (t \in [-n^{-3}+n, -\frac{1}{2}n^{-3}+n]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となる関数 g を考え，f を

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(s)ds$$

で定めれば，$f'(t) = g(t)$ であり，

$$f(t) \le \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{l} n^{-\delta-2} & (t \in (-l, -l+1)) \\ \sum_{n=l}^{\infty} n^{-\delta-2} & (t \in (l-1, l)) \end{cases}$$

となる．このとき f は C^1 級かつ $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ であるが，f' は非有界であることがわかる．

証明 3.7 節で証明する． ■

3.5 内積とプランシェレルの定理

定義 3.3 f を $\mathbb{R}$ 上の関数とする．任意の有界区間上で f と $|f(t)|^2$ の積分が存在して，しかも $|f(t)|^2$ が可積分であるとき L^2-条件を満たすと言う．記号としては $f \in L^2(\mathbb{R})$ とかく．$f \in M^2(\mathbb{R})$ のとき

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}$$

により f のノルムを定義する．また，$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ のとき，f と g の内積を

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$$

で定義する．特に $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$ である．

補題　任意の有界可積分関数 φ と，$T_s\varphi(t) = \varphi(t-s)$ をみたす作用素 T_s に対して

$$\lim_{s\to 0} \|\varphi - T_s\varphi\| = 0$$

が成り立つ．

証明 関数 φ を，階段関数：

$$\varphi_N(t) = \sum_{j=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{I_j}(t), \quad I_j = [a_j, b_j], \quad c_j \in \mathbb{C}$$

により，$\forall\varepsilon > 0$ に対して $\|\varphi - \varphi_N\| < \varepsilon/3$ を満たすように近似する．ここで $\mathbb{1}_I$ は I 上で 1 をとり，それ以外で 0 をとるような定義関数である．明らかに $|s| < \delta$ ならば $\|\varphi_N - T_s\varphi_N\| < \varepsilon/3$ となる $\delta > 0$ が存在する．よって $\|T_s\varphi - T_s\varphi_N\| = \|\varphi - \varphi_N\|$ であることに注意すれば，$|s| < \delta$ のとき

$$\|\varphi - T_s\varphi\| \leq \|\varphi - \varphi_N\| + \|\varphi_N - T_s\varphi_N\| + \|T_s\varphi_N - T_s\varphi\| < \varepsilon$$

となり，補題が示される． ■

定理　$g_\varepsilon(t)$ を定理 3.4 の条件 (i) と (ii) を満たす有界連続関数とする．このとき，任意の有界可積分関数 φ に対して次式が成立する：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\varphi - g_\varepsilon * \varphi\| = 0$$

証明 定理 3.4 の条件 (i) より

$$\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t) - \varphi(t-s)) g_\varepsilon(s) ds$$

と書ける．$C = \int_{-\infty}^{\infty} |g_\varepsilon(t)| dt < M$ とおくと，

$$|\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t)| \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)| \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds \tag{1}$$

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a^2 + 2a(b-a) \leq b^2$ であり，これに

$$\begin{aligned} a &= C \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)| \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds \\ b &= C|\varphi(t) - \varphi(t-s)| \end{aligned}$$

を代入して，$|g_\varepsilon(s)|/C$ をかけて s で積分すると，$\int_{-\infty}^{\infty} |g_\varepsilon(s)|/C ds = 1$ であるので

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} a \frac{g_\varepsilon(s)}{C} ds &= C \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)| \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_\varepsilon(s)}{C} ds = a \\ \int_{-\infty}^{\infty} b \frac{g_\varepsilon(s)}{C} ds &= C \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)| \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds = a \end{aligned}$$

となることから

$$\left(C \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)| \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds \right)^2 \leq C^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)|^2 \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds \tag{2}$$

がわかる．よって (1)(2) をあわせて

$$|\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t)|^2 \le C^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)|^2 \frac{|g_\varepsilon(s)|}{C} ds$$

となる．これを t で積分し，$T_s\varphi(t) = \varphi(t-s)$ と表記すれば

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t)|^2 dt &\le C \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi(t-s)|^2 |g_\varepsilon(s)| ds dt \\ &\le C \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi - T_s\varphi\|^2 |g_\varepsilon(s)| ds\end{aligned} \tag{3}$$

となる．

任意の $\nu > 0$ に対して，$|s| < \delta$ のとき $\|\varphi - T_s\varphi\| < \sqrt{\nu/2C^2}$ を満たすように $\delta > 0$ を，また

$$\int_{|t|\ge\delta} |g_\varepsilon(t)| dt < \frac{\nu}{4C\|\varphi\|^2}$$

を満たすように $\varepsilon > 0$ を選ぶ（上の補題と定理 3.4 の条件 (ii) による）．$\|\varphi - T_s\varphi\| \le 2\|\varphi\|^2$ であることに注意すれば，(3) より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - g_\varepsilon * \varphi(t)|^2 dt &\le C\left(\int_{|s|<\delta} + \int_{|s|\ge\delta}\right)\|\varphi - T_s\varphi\|^2 |g_\varepsilon(s)| ds \\ &< C \cdot \frac{\nu}{2C^2} \cdot C + C \cdot 2\|\varphi\|^2 \cdot \frac{\nu}{4C\|\varphi\|^2} \\ &= \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{2} = \nu\end{aligned}$$

となり，定理の結論が得られる． ■

定理 3.7: プランシェレルの定理

$f, g, \hat{g}$ がすべて有界可積分ならば

$$\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

また，f が有界連続で可積分ならば

$$\|f\| = \|\hat{f}\|$$

つまり，フーリエ変換は関数のノルムを変えない写像である．

証明（前半）$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)||g(t)| ds dt < +\infty$ なので積分の順序交換ができることを用いると

$$\begin{aligned}\langle \hat{f}, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} f(s) ds\right)\overline{g(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{its} g(t) dt\right)} ds \\ &= \langle f, \check{g}\rangle\end{aligned}$$

となる．g と $\hat{g}$ を入れ替えれば

$$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle f, \mathcal{F}^*\hat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$$

が成り立つことがわかる．

（後半）

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2\varepsilon^2}, \quad \hat{\rho}_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2\varepsilon^2/2}$$

とする．この $\rho_\varepsilon(t)$ は定理 3.3 において $\rho(t)$ と書いていたものである．f は有界連続かつ可積分なので，命題 3.13 より

$$\rho_\varepsilon * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(s)f(t-s)ds$$

も有界連続かつ可積分となる．また，命題 3.2 により $\hat{f}$ も有界連続であるから

$$\widehat{\rho_\varepsilon * f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)$$

も有界連続かつ可積分となる．よって，定理 3.5 により

$$\rho_\varepsilon * f(t) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^*(\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

が成立する．したがって次式を得る．

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\rho_\varepsilon * f(t)}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}\overline{\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)}d\xi\right)dt \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi}dt\right)\overline{\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)}d\xi \qquad (4) \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

シュワルツの不等式により

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\{\overline{f(t) - \rho_\varepsilon * f(t)}\}dt \leq \|f\|\|f - \rho_\varepsilon * f\|$$

となるので，上の定理により $\varepsilon \to 0$ のとき，上式の右辺は 0 に収束する．よって $\varepsilon \to 0$ のとき式 (4) の左辺は $\|f\|^2$ に収束する．一方，$R_\varepsilon = \sqrt{2\log 2}/\varepsilon$ とおくと，$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon = \infty$ であり，$|t| < R_\varepsilon$ のとき $\sqrt{2\pi}\hat{\rho}_\varepsilon(t) > 1/2$ により

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\rho_\varepsilon * f(t)}dt > \frac{1}{2}\int_{-R_\varepsilon}^{R_\varepsilon} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

が成り立つ．上式において $\varepsilon \to 0$ とすれば，$|\hat{f}(\xi)|^2$ は可積分であることがわかる．（以下定理 3.5 と同様にする．）よって，

$$\forall \nu > 0, \exists R > 0 \text{ s.t. } \int_{|t|\geq R} |\hat{f}(t)|^2 dt < \nu$$

とできる．すると

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt - \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2\hat{\rho}_\varepsilon(t)dt\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}(1 - \sqrt{2\pi}\hat{\rho}_\varepsilon(t))|\hat{f}(t)|^2 dt\right| \\
&= \left|\left(\int_{|t|<R} + \int_{|t|\geq R}\right)(1 - \sqrt{2\pi}\hat{\rho}_\varepsilon(t))|\hat{f}(t)|^2 dt\right| \\
&\leq (1 - e^{-\varepsilon^2R^2/2})\int_{-R}^{R} |\hat{f}(t)|^2 dt + \int_{|t|\geq R} |\hat{f}(t)|^2 dt \\
&\to \nu \quad (\varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

$\nu > 0$ はいくらでも小さくできるので，$\varepsilon \to 0$ のとき式 (4) の右辺が $\|\hat{f}\|^2$ に収束することが示される． ■

3.6　平行移動，微分とフーリエ変換

$\mathbb{R}$ 上の関数の平行移動を

$$T_s f(t) = f(t-s) \quad (s, t\mathbb{R})$$

と書く．

命題 3.8　f が可積分関数ならば

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[T_s f](\xi) &= e^{-is\xi}\hat{f}(\xi) \\
\mathcal{F}^*[T_s f](t) &= e^{ist}\check{f}(t) \\
\mathcal{F}[e^{ist}f(t)](\xi) &= T_s\hat{f}(\xi) \\
\mathcal{F}^*[e^{-is\xi}f(\xi)](t) &= T_s\check{f}(t)
\end{aligned}$$

証明

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[T_s f](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi} f(t-s)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u+s)\xi} f(u)du \quad (u = t-s) \\
&= e^{-is\xi}\hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^*[T_s f](t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} f(t-s)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u+s)\xi} f(u)du \quad (u = t-s) \\
&= e^{is\xi}\check{f}(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{ist}f(t)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi} e^{ist} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-s)t} f(t)dt \\
&= \hat{f}(\xi-s) \\
&= T_s\hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^*[e^{-is\xi}f(\xi)](t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} e^{-is\xi} f(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\xi} f(\xi)d\xi \\
&= \check{f}(t-s) \\
&= T_s\check{f}(t)
\end{aligned}$$

■

定理 3.9 f が C^1 級関数であり，f, f' が可積分ならば

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \hat{f}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$
$$\mathcal{F}^*[f'](t) = -it \check{f}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

証明 定理 2.1 と同様に部分積分を用いて示す．f, f' が可積分なので

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} f'(s)ds + \lim_{s\to-\infty} f(s)$$

とかける．したがって，$t \to -\infty$ のとき $f(t) \to 0$ である．同様に $t \to \infty$ のときも $f(t) \to 0$ であることが示される．$R > 0$ とするとき，部分積分の公式より

$$\int_{-R}^{R} e^{-it\xi} f'(t)dt = \underbrace{\left[e^{-it\xi} f(t)\right]_{-R}^{R}}_{R\to\infty \text{ で } \to 0} - \int_{-R}^{R} (-i\xi)e^{-it\xi} f(t)dt$$

$R \to \infty$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi} f'(t)dt = i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi} f(t)dt$$

となる． ■

$f, f', \ldots, f^{(n)}$ がすべて可積分ならば，この定理を繰り返し用いることで

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$$
$$\mathcal{F}^*[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \check{f}(\xi)$$

であることがわかる．このとき，$\mathcal{F}[f^{(n)}]$ は可積分関数のフーリエ変換であるので有界である．

系 3.10 $n \geq 1$ とする．$f, f' \ldots, f^{(n)}$ が可積分関数ならばある定数 $C > 0$ が存在して

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-n}$$

が成り立つ．

証明 ある $n = N$ までこの命題か成立しているとする．このとき，$1 \leq n \leq N$ について $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-n}$ が成立する．$n = 0$ のときも，f が可積分であることから成立がいえる．ゆえに，$0 \leq n$ で $C_n > 0$ があって $|\xi|^n |\hat{f}(\xi)| \leq C_n$ が成立する．いま，$f^{(N+1)}$ も可積分であったとする．このとき，

$$\mathcal{F}[f^{(N+1)}](\xi) = (i\xi)^{N+1} \hat{f}(\xi) < C_{N+1}$$

が成り立つ．特に

$$|\xi|^{N+1} |\hat{f}(\xi)| < C_{N+1}$$

である．ここで

$$\sum_{n=0}^{N+1} \binom{N+1}{n} |\xi|^n |\hat{f}(\xi)| = (1 + |\xi|)^{N+1} |\hat{f}(\xi)| < \sum_{n=1}^{N+1} C_n < C$$

とできるので，

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-(N+1)}$$

がわかる．これにより $n = N + 1$ の場合の成立もいえたので，題意の成立がいえる． ■

定理 3.11 $f(t), tf(t)$ が可積分ならば，$\hat{f}(\xi), \check{f}(t)$ は C^1 級関数であり

$$\hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}[-itf(t)](\xi)$$
$$\check{f}'(t) = \mathcal{F}^*[i\xi f(\xi)](t)$$

が成り立つ．

証明 $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ という仮定より，フーリエ変換の定義の積分と，微分の順序交換ができるので

$$\hat{f}'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it)e^{-it\xi} f(t)dt = \mathcal{F}[-itf(t)](\xi)$$
$$\check{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi)e^{it\xi} f(\xi)d\xi = \mathcal{F}^*[i\xi f(\xi)](t)$$

となる． ■

$f(t), t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ ならば，$\hat{f}(\xi), \check{f}$ は C^n 級関数であり，上の定理 3.11 を繰り返し用いることで

$$\hat{f}^{(n)} = \mathcal{F}[(-it)^n f(t)]$$
$$\check{f}^{(n)} = \mathcal{F}^*[(i\xi)^n f(\xi)]$$

が成り立つ．

定理 3.9 と定理 3.11 は互いに逆変換の形をしているが，ぴったり逆ではないことに注意．

3.7 定理 3.6 の証明とリーマン・ルベーグの定理

定理 3.6（再掲）

f が C^1 級関数で，f, f' がともに可積分で，f' が有界であるならば，$\hat{f}$ は可積分である．特に，フーリエの反転公式 $f = \mathcal{F}^*\hat{f}$ が成立する．

証明

$$\hat{f}(\xi) = (1+i\xi)^{-1}(1+i\xi)\hat{f}(\xi) = (1+i\xi)^{-1}(\hat{f}(\xi) + \mathcal{F}[f'](\xi))$$

と表現できる．$g(\xi) = (1+i\xi)^{-1}$ とおけば

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |(1+i\xi)^{-1}|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1+\xi^2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

なので $g \in L^2(\mathbb{R})$ である．また，プランシェレルの定理（定理 3.7）から $\hat{f}, \mathcal{F}[f']$ も L^2-条件を満たし

$$\|\hat{f}\| = \|f\|, \quad \|\mathcal{F}[f']\| = \|f'\|$$

が成り立つ．したがって，シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty}|g(\xi)||\hat{f}(\xi)+\mathcal{F}[f'](\xi)|d\xi \\ &\le \|g\|(\|f\|+\|f'\|) \\ &= \sqrt{\pi}(\|f\|+\|f'\|) \\ &< +\infty\end{aligned}$$

となり，$\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ が示された[*21]． ■

定理 3.12: リーマン・ルベーグの定理

f が可積分関数ならば，$|\xi|\to\infty$ のとき $\hat{f}(\xi)\to 0$.

証明 積分の定義を思い出すと，f の積分は，f を階段関数の極限で表して，階段関数の積分の極限として定義されている．つまり，階段関数の列 g_n を用いて

$$\int f(t)dt := \lim_{n\to\infty}\int g_n(t)dt$$

と定義している．従って，f が可積分ならば，$\varepsilon>0$ をどのように小さくとっても，階段関数 g で

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-g(t)|dt<\varepsilon \tag{3.3}$$

を満たすものが存在する．g は階段関数なので

$$g(t)=\sum_{j=1}^{N}c_j\mathbb{1}_{I_j}(t),\quad I_j=[a_j,b_j],\quad c_j\in\mathbb{C}$$

と表現できる．g のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi)&=\sum_{j=1}^{N}c_j\mathcal{F}[\mathbb{1}_{I_j}](\xi)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\xi}\sum_{j=1}^{N}c_j\left(e^{-ia_j\xi}-e^{-ib_j\xi}\right)\end{aligned}$$

と計算出来るから，

$$\exists C>0 \text{ s.t. } |\hat{g}(\xi)|\le C|\xi|^{-1}\quad(\xi\in\mathbb{R})$$

が成り立つ．よって，十分大きな $|\xi|$ に対して $|\hat{g}(\xi)|\le\varepsilon/\sqrt{2\pi}$ となる．一方 (3.3) より

$$\left|\hat{f}(\xi)-\hat{g}(\xi)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-g(t)|dt<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\quad(\xi\in\mathbb{R})$$

なので，上の不等式と組み合わせて

$$\left|\hat{f}(\xi)\right|\le\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

が成り立つことが分かる．$\varepsilon>0$ は任意であったから，定理の主張が示されたことになる． ■

[*21] プランシェレルの定理を用いなくても f,f',f'' が可積分と仮定すれば $\hat{f}$ が可積分なことは同じ方法で証明できる．すなわち，$f-f''$ のフーリエ変換が $(1+\xi^2)\hat{f}(\xi)$ なので，この関数が有界なことから $|\hat{f}(\xi)|\le C(1+\xi^2)^{-1}$ がわかる．したがって $\hat{f}$ は可積分である．

3.8 たたみこみとフーリエ変換

定義 3.4 f, g を $\mathbb{R}$ 上の関数とする．$t \in \mathbb{R}$ に対して，積分

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

が意味をもつとき，h を f と g のたたみこみと呼ぶ．

畳み込みは可換な演算（$f * g = g * f$）である．変数変換 $u = t - s$ を行えば

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du = g * f(t)$$

が成り立つことからわかる．

命題 3.13 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ とし，f または g の少なくとも一方は有界であるとする．このとき，$f*g \in L^1(\mathbb{R})$ となり，$f * g$ は有界連続となる．

証明 $f * g$ が定義されて，なおかつ有界であることは

$$|f * g(t)| \leq \int |f(s)g(t-s)|ds \leq \sup|g| \cdot \int |f(s)|ds < \infty$$

であることから分かる．また

$$\begin{aligned}
\int |f * g(t)|dt &\leq \iint |f(s)g(t-s)|dsdt \\
&= \int \left(\int |g(t-s)|dt \right) |f(s)|ds \\
&= \int |g(t)|dt \int |f(s)|ds \\
&< \infty
\end{aligned}$$

なので，$f * g$ は可積分である．あとは，$f * g$ が連続であることを示せばよい．定理 3.12 の証明で注意したように，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，階段関数 $F_n(t), G_n(t)$ で

$$\int |f(t) - F_n(t)|dt < \frac{1}{n}, \quad \int |g(t) - G_n(t)|dt < \frac{1}{n}$$

を満たすものが存在する．しかも

$$\sup|F_n| \leq \sup|f|, \quad \sup|G_n| \leq \sup|g|$$

と仮定してよい．さて，

$$F_n(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbb{1}_{I_j}(t), \quad G_n(t) = \sum_{k=1}^{M} d_k \mathbb{1}_{J_k}(t)$$

と書こう．ただし，$c_j, d_k \in \mathbb{C}$ であり，I_j, I_k は区間である．すると

$$F_n * G_n(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} c_j d_k (\mathbb{1}_{I_j} * \mathbb{1}_{J_k})(t)$$

と書ける．一般に，階段関数同士の畳み込みは連続関数であるから，$F_n * G_n$ も連続である．一方，F_n, G_n の定義から

$$
\begin{aligned}
|f * g(t) - F_n * G_n(t)| &= |(f - F_n) * g(t) + F_n * (g - G_n)(t)| \\
&\leq \sup|g| \int |f(s) - F_n(s)| ds + \sup|F_n| \int |g(s) - G_n(s)| ds \\
&\leq (\sup|f| + \sup|g|) \cdot \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．つまり，$f * g$ は連続関数 $F_n * G_n$ の一様収束極限である．従って，$f * g$ も連続である． ■

定義: 局所可積分

関数 f が局所可積分であるとは，任意の有界区間 I 上で広義積分が定義でき，$\int_I |f(t)| < \infty$ を満たすことである．

命題 3.14 f が有界かつ局所可積分関数で，$g \in L^1(\mathbb{R})$ ならば，$f * g$ は有界な連続関数である．

証明 演習問題にされた ■

命題 3.15 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ が有界な台を持つ有界関数とする．このとき，$f * g$ は有界な台を持つ連続関数である．

証明 演習問題にされた ■

畳み込みと微分との関係

命題 3.16 f を有界な C^1 級関数とし，$f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ であると仮定する．また，g は局所可積分関数とする．このとき，$f * g$ は有界な C^1 級関数であり，

$$(f * g)' = f' * g$$

が成り立つ．

証明 微分と積分の順序交換ができる条件を確かめる．詳細は省略． ■

定理 3.17: たたみこみとフーリエ変換の関係 (1) $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ が有界ならば

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \\
\mathcal{F}^*[f * g](t) &= \sqrt{2\pi} \check{f}(t) \check{g}(t)
\end{aligned}
$$

(2) $f, g, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ が有界ならば

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[fg](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\xi) \\
\mathcal{F}^*[fg](t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\check{f} * \check{g}\right)(t)
\end{aligned}
$$

証明 まず，(1) を示す．f, g が可積分ならば，$f * g$ も可積分となることに注意して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(s) g(t-s) e^{-it\xi} ds dt \\
&= \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(t-s) e^{-i(t-s)\xi} d\xi \right) f(s) e^{-is\xi} ds \\
&= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)
\end{aligned}
$$

が得られる．$\mathcal{F}^*[f * g](t) = \sqrt{2\pi} \check{f}(t) \check{g}(t)$ も同様にして示される．

次に，(2) を示す．$f, g, \hat{f}, \hat{g}$ が有界可積分ならば，(1) の結果と反転公式を組み合わせて (2) は直ちに従う．しかし，ここでは $\hat{f}$ は可積分と仮定していないので，直接計算して証明しよう．g に関する反転公式: $g = \mathcal{F}^* \hat{g}$ を代入して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[fg](\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int f(t) \left(\int \hat{g}(\eta) e^{it\eta} d\eta \right) e^{-it\xi} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \left(\int f(t) e^{-it(\xi - \eta)} dt \right) \hat{g}(\eta) d\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(\xi - \eta) \hat{g}(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}(\xi)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここでも，f と $\hat{g}$ が可積分なので積分の順序交換ができることを用いた．もう 1 つの公式も同様に証明される． ■

3.9 簡単な偏微分方程式への応用

3.9.1 1 次元熱方程式

無限の長さの棒の温度分布を考える（$f \in L^1(\mathbb{R})$，有界連続）．

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\
u(x, 0) = f(x) & (x \in \mathbb{R}) \\
u(x, t) \to 0 & (|x| \to \infty)
\end{cases}
$$

u は x について 2 回微分可能，$u, u', u'' \in L^1(\mathbb{R})$ と仮定．フーリエ変換を行う

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\xi^2 u(\xi, t) & (\xi \in \mathbb{R}, t > 0) \\
\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) & (\xi \in \mathbb{R})
\end{cases}
$$

上の初期値問題の解は

$$
\hat{u}(\xi, t) = e^{-\xi t^2} \hat{f}(\xi)
$$

これを逆フーリエ変換すると

$$
\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}^*[e^{-\xi t^2}] * f)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (e^{-x^2/4t} * f)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int f(y) e^{-(x-y)^2/4t} dy
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$\mathcal{F}^*[e^{-\xi t^2}] = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-x^2/4t}$，例 3.3

定理 3.4 において $\varepsilon = \sqrt{2t}$ としたものを考えると，この右辺が $f(x)$（$t \to 0$）に収束することがわかる．$f \notin L^1(\mathbb{R})$ でも (3.4) は解となる．

解の一意性は補題 2.7 と同様のエネルギー不等式からわかる．

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

とおくと，$G(x-y,t)$ はグリーン関数で，上の解は

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t) f(y) dy$$

と表現できる．

3.9.2 半平面のディリクレ問題

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ として，D 上の（ラプラス方程式の）ディリクレ問題（$f \in L^1(\mathbb{R})$，有界連続）を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & ((x,y) \in D) \\ u(x,0) = f(x) & (x \in \mathbb{R}) \\ u(x,y) \to 0 & (y \to \infty) \end{cases}$$

x に関してフーリエ変換を行うと

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi,y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0$$

これの一般解は

$$\hat{u}(\xi,y) = \alpha(\xi) e^{-|\xi| y} + \beta(\xi) e^{|\xi| y}$$

$y \to \infty$ で $u(x,y) \to 0$ なので，$\beta(\xi) \equiv 0$．境界条件から

$$\hat{u}(\xi,0) = \alpha(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

よって

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi| y}$$

となる．逆フーリエ変換をすると

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathcal{F}^*\left[\hat{f}(\xi) e^{-|\xi| y}\right](x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f * \mathcal{F}^*\left[e^{-|\xi| y}\right]\right)(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} f(s) ds \end{aligned}$$

を得る．このとき，再び定理 3.4 を用いて，$y \to 0$ のとき $u(x,y) \to f(x)$ が成り立つことが分かる．また，この $u(x,y)$ がラプラス方程式の解であることは，直接計算して示すことができる．このとき，実は f は有界連続性のみ満たしていれば十分であり，可積分でなくとも，この u はディリクレ問題の 1 つの解を与える．