工業数学 A3

更新日時：2021 年 5 月 26 日

目次

1　フーリエ級数展開

1.1　導入

$f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の関数とする ($t \in \mathbb{R}$).

定義: 周期関数

f が周期 T の周期関数であるとは，$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(t+T) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つこと.

このとき，$\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f(t+nT) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

定義: フーリエ級数展開

$$f(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a[n]\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b[n]\sin(n\omega t) \tag{1.1}$$

ここで $\omega = 2\pi/t$，$c, a[n], b[n]$ は定数.

これが収束すれば周期 T の周期関数である．広いクラスの，周期 T の周期関数は (1.1) の形に表現できる.

1.2　三角関数の直交関係とフーリエ係数

(1.1) における $c, a[n], b[n]$ をフーリエ係数とよぶ.

定理 1.1: 三角関数の直交関係

n, m を正の整数とする.

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \delta_{nm} \tag{1.2}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \delta_{nm} \tag{1.3}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\sin(n\omega t)dt = 0 \tag{1.5}$$

ここで，δ_{nm} はクロネッカーのデルタである.

証明　省略. ■

公式 1.2 周期 T の周期関数 $f(t)$ が

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a[n]\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a[n]\sin(n\omega t) \tag{1.6}$$

と表されるならば，フーリエ係数は

$$a[n] = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

$$b[n] = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

と与えられる．

周期性により

$$a[n] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

$$b[n] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.10}$$

とかける．f が偶関数ならば $b[n] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ となり，**余弦フーリエ級数展開**:

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a[n]\cos(n\omega t)$$

f が奇関数ならば $a[n] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ となり，**正弦フーリエ級数展開**:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b[n]\cos(n\omega t)$$

をもつといわれる．

1.3 複素フーリエ変換

オイラーの公式を用いれば，フーリエ級数展開 (1.6) は

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a[n]}{2} + \frac{b[n]}{2i}\right)e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a[n]}{2} - \frac{b[n]}{2i}\right)e^{-in\omega t}$$

となる．そこで

$$c[n] = \begin{cases} a[0]/2 & (n = 0) \\ (a[n] - ib[n])/2 & (n > 0) \\ (a[-n] + ib[-n])/2 & (n < 0) \end{cases}$$

とすると**複素フーリエ変換**:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]e^{in\omega t} \tag{1.11}$$

が得られる．公式 1.2 もしくは直接計算により

$$c[n] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が確かめられる．

1.4　いくつかの実例

例 1.1: 三角多項式

三角多項式（$\sin\omega t, \cos\omega t$ の多項式）.

例えば

$$f_1(t) = (\cos\omega t)^3 = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t$$

一般的な三角多項式に対しては，$N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c[n] e^{in\omega t}$$

の形にかける．

例 1.2: 三角波

$$f_2(t) = |T| \quad (|t| \leq T/2)$$

$f_2(t)$ は偶関数であるから，余弦フーリエ級数展開をもち

$$a[n] = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |t|\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} t\cos(n\omega t)dt$$

$n = 0$ のとき

$$a[0] = \frac{4}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T/2} = \frac{T}{2}$$

$n \neq 0$ のとき

$$a[n] = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数 }) \\ -\frac{4}{\pi n^2\omega} & (n \text{ は奇数 }) \end{cases}$$

つまり，$f_2(t)$ のフーリエ級数展開は

$$f_2(t) = \frac{T}{4} - \frac{4}{\pi\omega}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\{(2m+1)\omega t\}$$

となる．

例 1.3

$$f_3(t) = \frac{1}{\frac{5}{4} + \cos\omega t}$$

留数定理を用いてフーリエ係数を計算すると，$n \geq 0$ として

$$c[-n] = \frac{4}{3}(-2)^n$$

$n > 0$ として $c[n] = c[-n]$ より

$$c[n] = \frac{4}{3}(-2)^{-n}$$

となるから，$f_3(t)$ のフーリエ級数展開は

$$f_3(t) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n \cos(n\omega t)$$

となる．

1.5　フーリエ級数の一様収束

定義: リプシッツ連続（Lipshitz continuous）

$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ が**リプシッツ連続**であるとは，

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } \forall t, s \in \mathbb{R},\ |f(t) - f(s)| \le C|t - s|$$

が成り立つことである．

> **定理 1.3**　$f(t)$ がリプシッツ連続ならば，フーリエ級数展開は $f(t)$ に一様収束する．

証明　は後回し． ■

1.6　有限フーリエ級数

$X = \mathbb{C}^N$ を N 次元複素線形空間とする．X の元を $u = (u[0], u[1], \cdots, u[N-1]) \in X$ と書く．

定義: エルミート内積

$u, v \in X$ のエルミート内積:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} u[n]\overline{v[n]}$$

定義: 長さ

$u \in X$ の長さ:

$$|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

定義: 正規直交系/正規直交基底

$u_0, \ldots, u_{M-1} \in X$ が正規直交系であるとは

$$\langle u_m, u_n\rangle = \delta_{mn} \quad (n, m = 0, 1, \ldots, M-1)$$

が成り立つこと．

$M = N = \dim X$ のとき正規直交基底とよばれ，$\forall u \in X$ は

$$u = \sum_{n=0}^{N-1}\langle u, u_n\rangle u_n$$

と直交分解できる．$\mathbb{C}^N$ の標準的な基底 $\boldsymbol{e}_n[k] = \delta_{kn} \quad (n, k = 0, \ldots, N-1)$ は正規直交基底である．

有限フーリエ変換の定義に用いられる正規直交基底は，$\alpha = 2\pi/N$ として

$$\varphi_n[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(i\alpha nk) \quad (n, k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

で定義される．

命題 1.4 $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{N-1}\}$ は $X(=\mathbb{C}^N)$ の正規直交基底である．

証明 $n = m$ のとき

$$|\varphi_n|^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |e^{i\alpha nk}|^2 = 1$$

$n \neq m$ のとき

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\alpha nk} e^{-i\alpha mk} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{i\alpha(n-m)N}}{1 - e^{i\alpha n-m}} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha N = 2\pi}}{=} 0$$

■

$u \in X$ に対して**有限フーリエ変換**:

$$\hat{u}[n] = \langle u, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u[k] e^{-i\alpha nk} \quad (n = 0, \ldots, N-1) \tag{1.12}$$

とおくと，**有限フーリエ級数展開**（$\hat{u}[n]$ の**逆有限フーリエ変換**）：

$$u[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}[n] \varphi_n[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}[n] e^{i\alpha nk} \quad (n = 0, \ldots, N-1) \tag{1.13}$$

と直交展開される．

有限フーリエ変換，逆有限フーリエ変換はユニタリーな線形変換である．すなわち:

$$|u| = |\hat{u}| \tag{1.14}$$

が成り立つ．これは

$$\langle u, v \rangle = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \tag{1.15}$$

であることから従う．

1.7 有限フーリエ変換の連続極限

定理 1.5 $f(t)$ を周期 T のリプシッツ連続な周期関数とし，$\omega = 2\pi/T, \alpha = 2\pi/N$ とする．

$$f_N(t) = \sum_{-N/2 \leq n < N/2} c_N[n] e^{in\omega t}$$

$$c_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f\left(\frac{m}{N} T\right) e^{-i\alpha nm} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と定める．このとき，$f_N(t)$ は $f(t)$ に一様収束する．

注意 1.1

$$f_N\left(\frac{k}{N}T\right) = \sum_{-N/2\le n<N/2} c_N[n]e^{i\alpha nk} = \sum_{n=0}^{N-1} e_N[n]e^{i\alpha nk} = f\left(\frac{k}{N}T\right)$$

$f_N(t)$ は $f(t_k)$ の値を与えたときの補間.

証明 まず

$$d_N[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left\{f\left(\frac{m}{N}T\right) - f\left(\frac{m-1}{N}T\right)\right\}e^{-i2\pi(m/N)n}$$

とおく．$\{d_N[n]\}$ は $f(t_n) - f(t_n - (T/N))$ の有限フーリエ変換の $1/\sqrt{N}$ 倍である．リプシッツ連続性の仮定より，$\exists C > 0$,

$$\left|f\left(\frac{m}{N}T\right) - f\left(\frac{m-1}{N}T\right)\right| \le \frac{C}{N} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ．したがって有限フーリエ変換の等長性 (1.14) より

$$N\sum_{k=0}^{N-1}|d_N[k]|^2 \le \sum_{m=0}^{N-1}\left|\frac{C}{N}\right|^2 = \frac{C^2}{N}$$

すなわち

$$\sum_{k=0}^{N-1}|d_N[k]|^2 \le \frac{C^2}{N^2}$$

が従う．一方，$d_N[k]$ の定義により

$$d_N[k] = (1 - e^{-i2\pi(k/N)})c_N[k] = 2ie^{-i\pi(k/N)}\sin(\pi k/N)c_N[k]$$

これとジョルダンの不等式:

$$|\sin\theta| \ge \frac{2}{\pi}|\theta| \quad (|\theta| \le \pi/2) \tag{1.16}$$

を用いれば

$$|d_N[k]| \ge \frac{4|k|}{N}|c_N[k]| \quad \left(-\frac{N}{2} \le k < \frac{N}{2}\right)$$

が従う．$d_N[k]$ が周期 N を持つことに注意して，これらを組み合わせると

$$\sum_{-N/2\le k<N/2}|k|^2|c_N[k]|^2 \le \frac{C^2}{16}$$

が導かれる．

　また，

$$f_N'(t) = \sum_n i\omega n c_N[n]e^{i\omega nt}$$

の絶対値を考えると

$$\begin{aligned}
|f_N'(t)| &\le \omega\sqrt{N}\sum_n \frac{n}{\sqrt{N}}|c_N[n]| \\
&\underset{\text{Schwarz の不等式}}{\le} \omega\sqrt{N}\left(\sum_n\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_n |n|^2|c_N[n]|^2\right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{N}C' \quad (C'\text{はある定数})
\end{aligned} \tag{1.17}$$

となる．さて，$\forall t \in [0,T]$ に対して $|t-t_k| \le T/(2N)$ であるような $t_k = (k/N)T$ が存在する．$f(t_k) = f_N(t_k)$ に注意して（注意 1.1）

$$f(t) - f_N(t) = (f(t) - f(t_k)) + (f_N(t_k) - f_N(t))$$

と分解して考える．$f(t)$ のリプシッツ連続性と f_N' の微分の評価 (1.17) から

$$\begin{aligned} |f(t) - f_N(t)| &\le |f(t) - f(t_k)| + |f_N(t_k) - f_N(t)| \\ &\le \underbrace{C|t-t_k|}_{\text{リプシッツ連続性}} + \underbrace{C'\sqrt{N}|t-t_k|}_{\text{平均値の定理}} \\ &= O(1/\sqrt{N}) \end{aligned}$$

が得られる．つまり，$N \to \infty$ のとき $f_N(t)$ が $f(t)$ に一様収束することが示された． ■

1.8 関数空間の内積と直交関数系

X を周期 T で周期的で有界かつ $[0,T]$ 上で積分可能な関数全体とする．

定義: 内積

$f, g \in X$ に対して内積を

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$$

で定義する．

$f, g, h \in X$，$a, b \in \mathbb{C}$ のとき

$$\langle af + bg, h \rangle = a\langle f, h \rangle + b\langle g, h \rangle$$

$$\langle f, ag + bh \rangle = \overline{a}\langle f, g \rangle + \overline{b}\langle f, h \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

定義: L^2 ノルム

$f \in X$ に対して

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \ge 0$$

$\|f\| = 0 \leftrightarrow f = 0$ μ-$a.e.$ である．

シュワルツの不等式

$$|\langle f, g \rangle| \le \|f\|\|g\| \tag{1.18}$$

三角不等式

$$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\| \tag{1.19}$$

定義: 直交

f, g が直交するとは，

$$\langle f, g \rangle = 0$$

となること．

定義: 直交関数系
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が正規直交系であるとは,

$$\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \ldots)$$

となること.

フーリエ関数系を

$$\varphi_n(t) = e^{in\omega t} \quad (n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R})$$

で定義すると,$\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は正規直交系となる.このとき,フーリエ級数展開

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c[n]\varphi_n(t)$$

$$c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

は正規直交系 $\{\varphi_n\}$ に関する展開であり,フーリエ係数は座標成分である.実フーリエ級数 (1.6) も同様である.

1.9 正規直交基底とフーリエ級数の平均収束

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の正規直交系とする.

定義: 正規直交基底(完全正規直交系)
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正規直交基底もしくは完全正規直交系であるとは,$\forall f \in X$ に対して

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f - \sum_{n=1}^{N}\langle f, f_n \rangle f_n \right\| = 0$$

であること.[*1]

定理 1.6: パーセバルの等式
フーリエ関数系 $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は X の正規直交基底で,$\forall f \in X$, $c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle$ として

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]|^2 \tag{1.20}$$

が成り立つ.

証明 はあとで. ■

[*1] ちなみに,完全のつかない正規直交系として $\{\cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots\}$ が考えられる.これは例えば f に定数をとればわかるように,完全正規直交系(正規直交基底)にはならない.$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots\}$ なら完全正規直交系(正規直交基底)になる.

定理 1.6 より，フーリエ級数展開の**平均収束（L^2-収束）**：

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} c[n]\varphi_n \right\| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

がわかる．

命題 1.7: ベッセルの不等式
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正規直交系ならば，$\forall f \in X$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle| \leq \|f\|^2 \tag{1.21}$$

がが成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n, f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle \langle f_n, f \rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{\langle f, f_n \rangle} \langle f_n, f \rangle + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \langle f, f_n \rangle \overline{\langle f, f_m \rangle} \langle f_n, f_m \rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n \rangle|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

より結論を得る． ■

命題 1.8 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正規直交系とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正規直交基底であるための必要十分条件は，$\forall f \in X$ について

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2$$

が成り立つことである．

証明 命題 1.7 をみると，$\{f_n\}$ が正規直交基底ならば

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n \rangle|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

が成り立つ．逆に，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f, f_n \rangle|^2 \right) = 0$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 = 0$$

であることがわかり，$\{f_n\}$ は正規直交基底である． ■

補題 1.9 $\{f_n\}$ を正規直交系，$a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$，$f \in X$ とする．このとき

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n \right\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \right\| \tag{1.22}$$

が成り立つ．

証明 $g = f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n$ とする．$\langle g, f_m \rangle = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n} a_n f_n \right\|^2 &= \left\| g + \sum_{n} (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\
&= \|g\|^2 + \left\langle g, \sum_{n} (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\rangle + \left\langle \sum_{n} (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n, g \right\rangle + \left\| \sum_{n} (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\
&= \|g\|^2 + \left\| \sum_{n} (f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\
&\geq \|g\|^2
\end{aligned}$$

となる． ■

命題 f を周期 T で周期的かつ有界で $[0, T]$ 上で積分可能な関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|f - g\| < \varepsilon$ となるリプシッツ連続な周期関数 g が存在する．

（メモ：ルベーグ積分論を使った証明があれば追記したい）

証明 区間 $[0, T]$ の分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ をとり，周期 T で周期的な階段関数 $f_\Delta(t)$ を次式により定める:

$$f_\Delta(t) = \inf_{t_j \leq t < t_{j+1}} f(t) \quad (t_j \leq t < t_{j+1} \text{のとき})$$

Δ を十分細かく取れば，積分の定義により

$$\|f - f_\Delta\| = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - f_\Delta(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

とできる．上式が成立するように Δ をとって固定する．また，

$$\lim_{s \to 0} \int_0^T |f_\Delta(t - s) - f_\Delta(t)| dt = 0$$

であるから，$n_0 > 0$ を十分大きくとれば，$n \geq n_0$ のとき

$$\sup_{|s| \leq 1/n} \frac{1}{T} \int_0^T |f_\Delta(t - s) - f_\Delta(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

が成立する．

任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\phi(t) \geq 0$ で，$|t| \geq 1$ のとき $\phi(t) = 0$ かつ

$$\int_{-1}^{1} \phi(t) dt = 1$$

を満たすリプシッツ連続な関数 $\phi(t)$ をとり，$\phi_n(t) = n\phi(nt)$ とする．このとき

$$|t| \geq 1/n \text{ のとき} \phi_n(t) = 0 \text{ かつ} \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(t)dt = 1 \tag{3}$$

となる．関数 $f_n(t)$ を次式により定める．

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t-s) f_\Delta(s) ds = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_\Delta(t-s) ds$$

$f_\Delta(t)$ の周期性より

$$f_n(T) = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_\Delta(T-s) ds = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_\Delta(-s) ds = f_n(0)$$

かつ，十分大きな $n > 0$ に対して，L_ϕ を関数 ϕ のリプシッツ定数として

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t_1 - s) - \phi_n(t_2 - s)||f_\Delta(s)| ds \leq 4nL_\phi |t_1 - t_2| \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$$

となるから，$f_n(t)$ は周期 T のリプシッツ連続な周期関数である．ここで，$t_1 \neq t_2$ ならば，$n > 0$ が十分大きいとき，

$$\max\left(t_1 - \frac{1}{n}, t_2 - \frac{1}{n}\right) > \min\left(t_1 + \frac{1}{n}, t_2 + \frac{1}{n}\right)$$

であること，および式 (3) より，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t_1 - s) - \phi_n(t_2 - s)| ds &\leq \int_{t_1 - 1/n}^{t_1 + 1/n} |\phi_n(t_1 - s)| ds + \int_{t_2 - 1/n}^{t_2 + 1/n} |\phi_n(t_2 - s)| ds \\
&= \int_{nt_1 - 1}^{nt_1 + 1} |\phi(nt_1 - u)| du + \int_{nt_2 - 1}^{nt_2 + 1} |\phi(nt_2 - u)| du \\
&\leq \int_{nt_1 - 1}^{nt_1 + 1} |\phi(nt_1 - u) - \phi(nt_2 - u)| du + \int_{nt_2 - 1}^{nt_2 + 1} |\phi(nt_1 - u) - \phi(nt_2 - u)| du \\
&\leq \int_{nt_1 - 1}^{nt_1 + 1} nL_\phi |t_1 - t_2| du + \int_{nt_2}^{nt_2 + 1} nL_\phi |t_1 - t_2| du \\
&\leq 4nL_\phi |t_1 - t_2|
\end{aligned}$$

となることを用いた．

式 (3) より

$$f_n(t) - f_\Delta(t) = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s)(f_\Delta(t-s) - f_\Delta(t)) ds$$

であるから，

$$|f_n(t) - f_\Delta(t)| \leq \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) |f_\Delta(t-s) - f_\Delta(t)| ds$$

となる．さらに，上式を t で積分し，積分を交換すると，$n \geq n_0$ のとき

$$\|f_n - f_\Delta\| \leq \frac{1}{T} \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) \int_0^T |f_\Delta(t-s) - f_\Delta(s)| dt ds < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．ここで，式 (2) と (3) を用いた．三角不等式により，上式と式 (1) とから，$n \geq n_0$ のとき，

$$\|f - f_n\| \leq \|f - f_\Delta\| + \|f_\Delta - f_n\| < \varepsilon$$

となり，$g = f_n$ とおけば結論を得る． ■

注意　上の証明で関数 $\phi(t)$ を C^∞ に取れば，近似関数 g は C^∞ 級となる．

定理 1.6: パーセバルの等式（再掲）
フーリエ関数系 $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は X の正規直交基底で，$\forall f \in X$, $c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle$ として

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]|^2 \tag{1.20}$$

が成り立つ．

証明　$f \in X$，$\forall\varepsilon > 0$ をとる．すると，上の命題より，リプシッツ連続な周期関数 g で，$\|f - g\| < \varepsilon/2$ をみたすものをとれる．すると，定理 1.5 より，N を十分大きくとれば，

$$\left| g(t) - \sum_{|n| \le N} c_N[n] \varphi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (t \in [0, T])$$

が成り立つ[*2]．ここで $\{c_N[n]\}$ は

$$c_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g\left(\frac{m}{N} T\right) e^{-i2\pi(m/N)n} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

である．これより

$$\left\| g - \sum_{|n| \le N} c_N[n] \varphi_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

がしたがう．ゆえに

$$\left\| f - \sum_{|n| \le N} c_N[n] \varphi_n \right\| \le \|f - g\| + \left\| g - \sum_{|n| \le N} c_N[n] \varphi_n \right\| < \varepsilon$$

がわかる．ここで，補題 1.9 を用いると

$$\left\| f - \sum_{|n| \le N} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \right\| \le \left\| f - \sum_{|n| \le N} c_N[n] \varphi_n \right\| < \varepsilon$$

が導かれる．　■

1.10　定理 1.3 の証明

補題 1.10　f を周期 T のリプシッツ連続な周期関数，$\{c[n]\}$ を f のフーリエ係数とする．このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c[n]|^2 < \infty$$

が成り立つ．

[*2] 1.6 節で $\varphi_n = e^{in\omega t}$ で定めている．

証明 リプシッツ連続性より，$C > 0$ が存在して

$$|f(t+h) - f(t)| \le C|h| \quad (t, h \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．$N \ge 1$ に対して $h = T/2N$ とおき，f の h だけ差分関数を

$$g(t) = \frac{1}{h}\{f(t+h) - f(t)\} = \frac{2N}{T}\left\{f\left(t + \frac{T}{2N}\right) - f(t)\right\}$$

と定義すれば，$|g(t)| \le C$ である．g のフーリエ係数を $\{d[n]\}$ と書くことにしよう．すると，

$$\begin{aligned} d[n] &= \frac{1}{hT}\int_0^T \{f(t+h) - f(t)\}e^{-i\omega nt}dt \\ &= \frac{1}{h}(e^{i\omega nh} - 1)c[n] \\ &= \frac{2N}{T}e^{i\omega nh/2} \cdot 2i\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)c[n] \end{aligned}$$

が成り立つ．g についてパーセバルの等式を用いれば

$$\|g\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d[n]|^2 = \left(\frac{4N}{T}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right|^2 |c[n]|^2$$

がわかる．一方，(1.16) を用いると，

$$|n| \le N \quad \text{ならば} \quad \left|\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right| \ge \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi n}{2N} = \frac{n}{N}$$

だから，

$$\|g\|^2 \ge \frac{16}{T^2} \sum_{n=-N}^{N} |n|^2 |c[n]|^2$$

を得る．$|g(t)|^2 \le C^2$ だったので

$$\sum_{n=-N}^{N} |n|^2 |c[n]|^2 \le \frac{T^2C^2}{16}$$

がわかる．右辺は N に依らないので，$N \to \infty$ として求める不等式が導かれる． ■

補題 1.11 f を周期 T のリプシッツ連続な周期関数，$\{c[n]\}$ を f のフーリエ係数とする．このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]| < \infty$$

が成り立つ．

証明 $\mathbb{C}^N$ でのシュワルツの不等式から

$$\begin{aligned} \sum_{1 \le |n| \le N} |c[n]| &\le \left(2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{1 \le |n| \le N} |n|^2 |c[n]|^2\right) \\ &\le \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c[n]|^2\right) \end{aligned}$$

がわかる．右辺は補題 1.10 より，有限の定数で N に依らない．したがって，$N \to \infty$ として補題の主張が成り立つ． ■

補題 1.12 f を周期 T の連続な周期関数，$\{c[n]\}$ を f のフーリエ係数とする．
このとき，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]| < \infty$ ならば，フーリエ部分和:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c[n] e^{i\omega n t}$$

は $N \to \infty$ のとき f に一様収束する．

証明 $N < M$ とすると，

$$|S_N(t) - S_M(t)| \leq \sum_{N<|n|\leq M} |c[n]| \leq \sum_{|n|>N} |c[n]| \tag{1.23}$$

である．仮定により，$N \to \infty$ のとき $\sum_{|n|>N} |c[n]| \to 0$ だから，(1.23) の右辺は 0 に収束する．つまり，各 t ごとに，$\{S_N(t)\}$ はコーシー列であり，極限が存在する．そこで $g(t) \equiv \lim_{N\to\infty} S_N(t)$ とおく．(1.23) で $M \to \infty$ とすると

$$|S_N(t) - g(t)| \leq \sum_{|n|>N} |c[n]|$$

となる．右辺は t によらず，$N \to \infty$ のとき 0 に収束するのだから，$S_N(t)$ は g に一様収束することになる．これより $\|S_N - g\| \to 0$ が従う．一方，定理 1.6 より，$\|S_N - f\| \to 0$ だから，$f = g$ でなければならない．以上により，S_N が f に一様収束することが示された． ■

注意 補題 1.12 は定理 1.3 よりも強い主張であり，重要である．

注意 1.2 $\{g_N(t)\}$ を連続関数列で $N \to \infty$ のとき $g_N(t)$ は $g(t)$ に一様収束するならば，$g(t)$ は連続である．

定理 1.3:（再掲）
$f(t)$ がリプシッツ連続ならば，フーリエ級数展開は $f(t)$ に一様収束する．

証明 補題 1.11 と補題 1.12 から直ちに導かれる． ■

1.11 ギッブス現象と総和法