

# 工業数学 A3

更新日時：2021 年 5 月 26 日

## 目次

1	フーリエ級数展開	2
1.1	導入	2
1.2	三角関数の直交関係とフーリエ係数	2
1.3	複素フーリエ変換	3
1.4	いくつかの実例	4
1.5	フーリエ級数の一様収束	5
1.6	有限フーリエ級数	5
1.7	有限フーリエ変換の連続極限	6
1.8	関数空間の内積と直交関数系	8
1.9	正規直交基底とフーリエ級数の平均収束	9
1.10	定理 1.3 の証明	13
1.11	ギブス現象と総和法	15

# 1 フーリエ級数展開

## 1.1 導入

$f(t)$  を  $\mathbb{R}$  上の関数とする ( $t \in \mathbb{R}$ ).

**定義: 周期関数**

$f$  が周期  $T$  の周期関数であるとは,  $\forall t \in \mathbb{R}$  に対して

$$f(t+T) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つこと.

このとき,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$f(t+nT) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

**定義: フーリエ級数展開**

$$f(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a[n] \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b[n] \sin(n\omega t) \quad (1.1)$$

ここで  $\omega = 2\pi/T$ ,  $c, a[n], b[n]$  は定数.

これが収束すれば周期  $T$  の周期関数である. 広いクラスの, 周期  $T$  の周期関数は (1.1) の形に表現できる.

## 1.2 三角関数の直交関係とフーリエ係数

(1.1) における  $c, a[n], b[n]$  をフーリエ係数とよぶ.

**定理 1.1: 三角関数の直交関係**

$n, m$  を正の整数とする.

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \delta_{nm} \quad (1.2)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \delta_{nm} \quad (1.3)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) dt = 0 \quad (1.5)$$

ここで,  $\delta_{nm}$  はクロネッカーのデルタである.

**証明** 省略. ■

**公式 1.2** 周期  $T$  の周期関数  $f(t)$  が

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a[n] \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a[n] \sin(n\omega t) \quad (1.6)$$

と表されるならば、フーリエ係数は

$$a[n] = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.7)$$

$$b[n] = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

と与えられる。

周期性により

$$a[n] = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

$$b[n] = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

とかける。  $f$  が偶関数ならば  $b[n] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$  となり、 **余弦フーリエ級数展開**:

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a[n] \cos(n\omega t)$$

$f$  が奇関数ならば  $a[n] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$  となり、 **正弦フーリエ級数展開**:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b[n] \cos(n\omega t)$$

をもつといわれる。

### 1.3 複素フーリエ変換

オイラーの公式を用いれば、フーリエ級数展開 (1.6) は

$$f(t) = \frac{a[0]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a[n]}{2} + \frac{b[n]}{2i} \right) e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a[n]}{2} - \frac{b[n]}{2i} \right) e^{-in\omega t}$$

となる。そこで

$$c[n] = \begin{cases} a[0]/2 & (n = 0) \\ (a[n] - ib[n])/2 & (n > 0) \\ (a[-n] + ib[-n])/2 & (n < 0) \end{cases}$$

とすると **複素フーリエ変換**:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] e^{in\omega t} \quad (1.11)$$

が得られる。公式 1.2 もしくは直接計算により

$$c[n] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が確かめられる。

## 1.4 いくつかの実例

### 例 1.1: 三角多項式

三角多項式 ( $\sin \omega t, \cos \omega t$  の多項式).

例えば

$$f_1(t) = (\cos \omega t)^3 = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t$$

一般的な三角多項式に対しては,  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c[n] e^{in\omega t}$$

の形にかけらる.

### 例 1.2: 三角波

$$f_2(t) = |T| \quad (|t| \leq T/2)$$

$f_2(t)$  は偶関数であるから, 余弦フーリエ級数展開をもち

$$a[n] = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |t| \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega t) dt$$

$n = 0$  のとき

$$a[0] = \frac{4}{T} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{T/2} = \frac{T}{2}$$

$n \neq 0$  のとき

$$a[n] = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ -\frac{4}{\pi n^2 \omega} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

つまり,  $f_2(t)$  のフーリエ級数展開は

$$f_2(t) = \frac{T}{4} - \frac{4}{\pi \omega} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos\{(2m+1)\omega t\}$$

となる.

### 例 1.3

$$f_3(t) = \frac{1}{\frac{5}{4} + \cos \omega t}$$

留数定理を用いてフーリエ係数を計算すると,  $n \geq 0$  として

$$c[-n] = \frac{4}{3} (-2)^n$$

$n > 0$  として  $c[n] = c[-n]$  より

$$c[n] = \frac{4}{3} (-2)^{-n}$$

となるから、 $f_3(t)$  のフーリエ級数展開は

$$f_3(t) = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \cos(n\omega t)$$

となる。

## 1.5 フーリエ級数の一様収束

**定義: リプシッツ連続 (Lipshitz continuous)**

$\mathbb{R}$  上の関数  $f(t)$  がリプシッツ連続であるとは、

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } \forall t, s \in \mathbb{R}, |f(t) - f(s)| \leq C|t - s|$$

が成り立つことである。

**定理 1.3**  $f(t)$  がリプシッツ連続ならば、フーリエ級数展開は  $f(t)$  に一様収束する。

**証明** は後回し。 ■

## 1.6 有限フーリエ級数

$X = \mathbb{C}^N$  を  $N$  次元複素線形空間とする。  $X$  の元を  $u = (u[0], u[1], \dots, u[N-1]) \in X$  と書く。

**定義: エルミート内積**

$u, v \in X$  のエルミート内積:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \overline{v[n]}$$

**定義: 長さ**

$u \in X$  の長さ:

$$|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

**定義: 正規直交系/正規直交基底**

$u_0, \dots, u_{M-1} \in X$  が正規直交系であるとは

$$\langle u_m, u_n \rangle = \delta_{mn} \quad (n, m = 0, 1, \dots, M-1)$$

が成り立つこと。

$M = N = \dim X$  のとき正規直交基底とよばれ、 $\forall u \in X$  は

$$u = \sum_{n=0}^{N-1} \langle u, u_n \rangle u_n$$

と直交分解できる。 $\mathbb{C}^N$  の標準的な基底  $e_n[k] = \delta_{kn}$  ( $n, k = 0, \dots, N-1$ ) は正規直交基底である。

有限フーリエ変換の定義に用いられる正規直交基底は、 $\alpha = 2\pi/N$  として

$$\varphi_n[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(i\alpha nk) \quad (n, k = 0, 1, \dots, N-1)$$

で定義される.

**命題 1.4**  $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1}\}$  は  $X(=\mathbb{C}^N)$  の正規直交基底である.

**証明**  $n = m$  のとき

$$|\varphi_n|^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |e^{i\alpha nk}|^2 = 1$$

$n \neq m$  のとき

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\alpha nk} e^{-i\alpha mk} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{i\alpha(n-m)N}}{1 - e^{i\alpha(n-m)}} = 0$$

$\uparrow$   
 $\alpha N = 2\pi$

$u \in X$  に対して**有限フーリエ変換**:

$$\hat{u}[n] = \langle u, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u[k] e^{-i\alpha nk} \quad (n = 0, \dots, N-1) \quad (1.12)$$

とくと、**有限フーリエ級数展開** ( $\hat{u}[n]$  の**逆有限フーリエ変換**):

$$u[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}[n] \varphi_n[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}[n] e^{i\alpha nk} \quad (n = 0, \dots, N-1) \quad (1.13)$$

と直交展開される.

有限フーリエ変換、逆有限フーリエ変換はユニタリーな線形変換である. すなわち:

$$|u| = |\hat{u}| \quad (1.14)$$

が成り立つ. これは

$$\langle u, v \rangle = \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \quad (1.15)$$

であることから従う.

## 1.7 有限フーリエ変換の連続極限

**定理 1.5**  $f(t)$  を周期  $T$  のリプシッツ連続な周期関数とし、 $\omega = 2\pi/T, \alpha = 2\pi/N$  とする.

$$f_N(t) = \sum_{-N/2 \leq n < N/2} c_N[n] e^{in\omega t}$$

$$c_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f\left(\frac{m}{N}T\right) e^{-i\alpha nm} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と定める. このとき、 $f_N(t)$  は  $f(t)$  に一様収束する.

**注意 1.1**

$$f_N\left(\frac{k}{N}T\right) = \sum_{-N/2 \leq n < N/2} c_N[n] e^{i\alpha n k} = \sum_{n=0}^{N-1} e_N[n] e^{i\alpha n k} = f\left(\frac{k}{N}T\right)$$

$f_N(t)$  は  $f(t_k)$  の値を与えたときの補間.

**証明** まず

$$d_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left\{ f\left(\frac{m}{N}T\right) - f\left(\frac{m-1}{N}T\right) \right\} e^{-i2\pi(m/N)n}$$

とおく.  $\{d_N[n]\}$  は  $f(t_n) - f(t_n - (T/N))$  の有限フーリエ変換の  $1/\sqrt{N}$  倍である. リプシッツ連続性の仮定より,  $\exists C > 0$ ,

$$\left| f\left(\frac{m}{N}T\right) - f\left(\frac{m-1}{N}T\right) \right| \leq \frac{C}{N} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ. したがって有限フーリエ変換の等長性 (1.14) より

$$N \sum_{k=0}^{N-1} |d_N[k]|^2 \leq \sum_{m=0}^{N-1} \left| \frac{C}{N} \right|^2 = \frac{C^2}{N}$$

すなわち

$$\sum_{k=0}^{N-1} |d_N[k]|^2 \leq \frac{C^2}{N^2}$$

が従う. 一方,  $d_N[k]$  の定義により

$$d_N[k] = (1 - e^{-i2\pi(k/N)}) c_N[k] = 2ie^{-i\pi(k/N)} \sin(\pi k/N) c_N[k]$$

これとジョルダンの不等式:

$$|\sin \theta| \geq \frac{2}{\pi} |\theta| \quad (|\theta| \leq \pi/2) \quad (1.16)$$

を用いれば

$$|d_N[k]| \geq \frac{4|k|}{N} |c_N[k]| \quad \left(-\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2}\right)$$

が従う.  $d_N[k]$  が周期  $N$  を持つことに注意して, これらを組み合わせると

$$\sum_{-N/2 \leq k < N/2} |k|^2 |c_N[k]|^2 \leq \frac{C^2}{16}$$

が導かれる.

また,

$$f'_N(t) = \sum_n i\omega n c_N[n] e^{i\omega n t}$$

の絶対値を考えると

$$\begin{aligned} |f'_N(t)| &\leq \omega \sqrt{N} \sum_n \frac{n}{\sqrt{N}} |c_N[n]| \\ &\leq \omega \sqrt{N} \left( \sum_n \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_n |n|^2 |c_N[n]|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{N} C' \quad (C' \text{ はある定数}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Schwarz の不等式

となる。さて、 $\forall t \in [0, T]$  に対して  $|t - t_k| \leq T/(2N)$  であるような  $t_k = (k/N)T$  が存在する。  $f(t_k) = f_N(t_k)$  に注意して (注意 1.1)

$$f(t) - f_N(t) = (f(t) - f(t_k)) + (f_N(t_k) - f_N(t))$$

と分解して考える。  $f(t)$  のリプシッツ連続性と  $f'_N$  の微分の評価 (1.17) から

$$\begin{aligned} |f(t) - f_N(t)| &\leq |f(t) - f(t_k)| + |f_N(t_k) - f_N(t)| \\ &\leq C|t - t_k| + C'\sqrt{N}|t - t_k| \\ &\quad \text{リプシッツ連続性} \quad \text{平均値の定理} \\ &= O(1/\sqrt{N}) \end{aligned}$$

が得られる。つまり、 $N \rightarrow \infty$  のとき  $f_N(t)$  が  $f(t)$  に一様収束することが示された。 ■

## 1.8 関数空間の内積と直交関数系

$X$  を周期  $T$  で周期的で有界かつ  $[0, T]$  上で積分可能な関数全体とする。

**定義: 内積**

$f, g \in X$  に対して内積を

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$$

で定義する。

$f, g, h \in X$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  のとき

$$\langle af + bg, h \rangle = a\langle f, h \rangle + b\langle g, h \rangle$$

$$\langle f, ag + bh \rangle = \bar{a}\langle f, g \rangle + \bar{b}\langle f, h \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

**定義:  $L^2$  ノルム**

$f \in X$  に対して

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \geq 0$$

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$   $\mu$ -a.e. である。

**シュワルツの不等式**

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (1.18)$$

**三角不等式**

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (1.19)$$

**定義: 直交**

$f, g$  が直交するとは,

$$\langle f, g \rangle = 0$$

となること。



### 定義: 直交関数系

$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  が正規直交系であるとは,

$$\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$

となること.

### フーリエ関数系を

$$\varphi_n(t) = e^{in\omega t} \quad (n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R})$$

で定義すると,  $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^\infty$  は正規直交系となる. このとき, フーリエ級数展開

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] \varphi_n(t)$$

$$c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

は正規直交系  $\{\varphi_n\}$  に関する展開であり, フーリエ係数は座標成分である. 実フーリエ級数 (1.6) も同様である.

## 1.9 正規直交基底とフーリエ級数の平均収束

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$  を  $X$  の正規直交系とする.

### 定義: 正規直交基底 (完全正規直交系)

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が正規直交基底もしくは完全正規直交系であるとは,  $\forall f \in X$  に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n \right\| = 0$$

であること.\*<sup>1</sup>

### 定理 1.6: パーセバルの等式

フーリエ関数系  $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^\infty$  は  $X$  の正規直交基底で,  $\forall f \in X$ ,  $c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle$  として

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]|^2 \quad (1.20)$$

が成り立つ.

証明 はあとで. ■

\*<sup>1</sup> ちなみに, 完全のつかない正規直交系として  $\{\cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$  が考えられる. これは例えば  $f$  に定数をとればわかるように, 完全正規直交系 (正規直交基底) にはならない.  $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$  なら完全正規直交系 (正規直交基底) になる.

定理 1.6 より，フーリエ級数展開の**平均収束** ( $L^2$ -収束)：

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N c[n] \varphi_n \right\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

がわかる．

**命題 1.7: ベッセルの不等式**

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が正規直交系ならば， $\forall f \in X$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad (1.21)$$

が成り立つ．

**証明**

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n, f - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle \langle f_n, f \rangle - \sum_{n=1}^N \overline{\langle f, f_n \rangle} \langle f_n, f \rangle + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle f, f_n \rangle \overline{\langle f, f_m \rangle} \langle f_n, f_m \rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f, f_n \rangle|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より結論を得る． ■

**命題 1.8**  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  を正規直交系とする． $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が正規直交基底であるための必要十分条件は， $\forall f \in X$  について

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2$$

が成り立つことである．

**証明** 命題 1.7 をみると， $\{f_n\}$  が正規直交基底ならば

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f, f_n \rangle|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

が成り立つ．逆に，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f, f_n \rangle|^2 \right) = 0$$

ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 = 0$$

であることがわかり， $\{f_n\}$  は正規直交基底である． ■

**補題 1.9**  $\{f_n\}$  を正規直交系,  $a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ ,  $f \in X$  とする. このとき

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n \right\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n f_n \right\| \quad (1.22)$$

が成り立つ.

**証明**  $g = f - \sum_{n=1}^N \langle f, f_n \rangle f_n$  とする.  $\langle g, f_m \rangle = 0$  に注意すると

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n f_n \right\|^2 &= \left\| g + \sum_{n=1}^N (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\ &= \|g\|^2 + \left\langle g, \sum_{n=1}^N (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\rangle + \left\langle \sum_{n=1}^N (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n, g \right\rangle + \left\| \sum_{n=1}^N (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\ &= \|g\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^N (\langle f, f_n \rangle - a_n) f_n \right\|^2 \\ &\geq \|g\|^2 \end{aligned}$$

となる. ■

**命題**  $f$  を周期  $T$  で周期的かつ有界で  $[0, T]$  上で積分可能な関数とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\|f - g\| < \varepsilon$  となるリプシッツ連続な周期関数  $g$  が存在する.

(メモ: ルベグ積分論を使った証明があれば追記したい)

**証明** 区間  $[0, T]$  の分割  $\Delta: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  をとり, 周期  $T$  で周期的な階段関数  $f_\Delta(t)$  を次式により定める:

$$f_\Delta(t) = \inf_{t_j \leq t < t_{j+1}} f(t) \quad (t_j \leq t < t_{j+1} \text{ のとき})$$

$\Delta$  を十分細かく取れば, 積分の定義により

$$\|f - f_\Delta\| = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - f_\Delta(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

とできる. 上式が成立するように  $\Delta$  をとって固定する. また,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^T |f_\Delta(t-s) - f_\Delta(t)| dt = 0$$

であるから,  $n_0 > 0$  を十分大きくとれば,  $n \geq n_0$  のとき

$$\sup_{|s| \leq 1/n} \frac{1}{T} \int_0^T |f_\Delta(t-s) - f_\Delta(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

が成立する.

任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $\phi(t) \geq 0$  で,  $|t| \geq 1$  のとき  $\phi(t) = 0$  かつ

$$\int_{-1}^1 \phi(t) dt = 1$$

を満たすリプシッツ連続な関数  $\phi(t)$  をとり、 $\phi_n(t) = n\phi(nt)$  とする。このとき

$$|t| \geq 1/n \text{ のとき } \phi_n(t) = 0 \text{ かつ } \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(t) dt = 1 \quad (3)$$

となる。関数  $f_n(t)$  を次式により定める。

$$f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t-s) f_{\Delta}(s) ds = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_{\Delta}(t-s) ds$$

$f_{\Delta}(t)$  の周期性より

$$f_n(T) = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_{\Delta}(T-s) ds = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) f_{\Delta}(-s) ds = f_n(0)$$

かつ、十分大きな  $n > 0$  に対して、 $L_{\phi}$  を関数  $\phi$  のリプシッツ定数として

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t_1-s) - \phi_n(t_2-s)| |f_{\Delta}(s)| ds \leq 4nL_{\phi}|t_1 - t_2| \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$$

となるから、 $f_n(t)$  は周期  $T$  のリプシッツ連続な周期関数である。ここで、 $t_1 \neq t_2$  ならば、 $n > 0$  が十分大きいとき、

$$\max\left(t_1 - \frac{1}{n}, t_2 - \frac{1}{n}\right) > \min\left(t_1 + \frac{1}{n}, t_2 + \frac{1}{n}\right)$$

であること、および式 (3) より、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n(t_1-s) - \phi_n(t_2-s)| ds &\leq \int_{t_1-1/n}^{t_1+1/n} |\phi_n(t_1-s)| ds + \int_{t_2-1/n}^{t_2+1/n} |\phi_n(t_2-s)| ds \\ &= \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} |\phi(nt_1-u)| du + \int_{nt_2-1}^{nt_2+1} |\phi(nt_2-u)| du \\ &\leq \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} |\phi(nt_1-u) - \phi(nt_2-u)| du + \int_{nt_2-1}^{nt_2+1} |\phi(nt_1-u) - \phi(nt_2-u)| du \\ &\leq \int_{nt_1-1}^{nt_1+1} nL_{\phi}|t_1 - t_2| du + \int_{nt_2-1}^{nt_2+1} nL_{\phi}|t_1 - t_2| du \\ &\leq 4nL_{\phi}|t_1 - t_2| \end{aligned}$$

となることを用いた。

式 (3) より

$$f_n(t) - f_{\Delta}(t) = \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) (f_{\Delta}(t-s) - f_{\Delta}(t)) ds$$

であるから、

$$|f_n(t) - f_{\Delta}(t)| \leq \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) |f_{\Delta}(t-s) - f_{\Delta}(t)| ds$$

となる。さらに、上式を  $t$  で積分し、積分を交換すると、 $n \geq n_0$  のとき

$$\|f_n - f_{\Delta}\| \leq \frac{1}{T} \int_{-1/n}^{1/n} \phi_n(s) \int_0^T |f_{\Delta}(t-s) - f_{\Delta}(s)| dt ds < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。ここで、式 (2) と (3) を用いた。三角不等式により、上式と式 (1) とから、 $n \geq n_0$  のとき、

$$\|f - f_n\| \leq \|f - f_{\Delta}\| + \|f_{\Delta} - f_n\| < \varepsilon$$

となり、 $g = f_n$  とおけば結論を得る。 ■

**注意** 上の証明で関数  $\phi(t)$  を  $C^\infty$  に取れば, 近似関数  $g$  は  $C^\infty$  級となる.

### 定理 1.6: パーセバルの等式 (再掲)

フーリエ関数系  $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^\infty$  は  $X$  の正規直交基底で,  $\forall f \in X, c[n] = \langle f, \varphi_n \rangle$  として

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]|^2 \quad (1.20)$$

が成り立つ.

**証明**  $f \in X, \forall \varepsilon > 0$  をとる. すると, 上の命題より, リプシッツ連続な周期関数  $g$  で,  $\|f - g\| < \varepsilon/2$  をみ出すものをとれる. すると, 定理 1.5 より,  $N$  を十分大きくとれば,

$$\left| g(t) - \sum_{|n| \leq N} c_N[n] \varphi_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (t \in [0, T])$$

が成り立つ<sup>\*2</sup>. ここで  $\{c_N[n]\}$  は

$$c_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g\left(\frac{m}{N}T\right) e^{-i2\pi(m/N)n} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

である. これより

$$\left\| g - \sum_{|n| \leq N} c_N[n] \varphi_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

がしたがう. ゆえに

$$\left\| f - \sum_{|n| \leq N} c_N[n] \varphi_n \right\| \leq \|f - g\| + \left\| g - \sum_{|n| \leq N} c_N[n] \varphi_n \right\| < \varepsilon$$

がわかる. ここで, 補題 1.9 を用いると

$$\left\| f - \sum_{|n| \leq N} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \right\| \leq \left\| f - \sum_{|n| \leq N} c_N[n] \varphi_n \right\| < \varepsilon$$

が導かれる. ■

## 1.10 定理 1.3 の証明

**補題 1.10**  $f$  を周期  $T$  のリプシッツ連続な周期関数,  $\{c[n]\}$  を  $f$  のフーリエ係数とする. このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c[n]|^2 < \infty$$

が成り立つ.

<sup>\*2</sup> 1.6 節で  $\varphi_n = e^{in\omega t}$  で定めている.

**証明** リプシッツ連続性より,  $C > 0$  が存在して

$$|f(t+h) - f(t)| \leq C|h| \quad (t, h \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.  $N \geq 1$  に対して  $h = T/2N$  とおき,  $f$  の  $h$  だけ差分関数を

$$g(t) = \frac{1}{h} \{f(t+h) - f(t)\} = \frac{2N}{T} \left\{ f\left(t + \frac{T}{2N}\right) - f(t) \right\}$$

と定義すれば,  $|g(t)| \leq C$  である.  $g$  のフーリエ係数を  $\{d[n]\}$  と書くことにしよう. すると,

$$\begin{aligned} d[n] &= \frac{1}{hT} \int_0^T \{f(t+h) - f(t)\} e^{-i\omega n t} dt \\ &= \frac{1}{h} (e^{i\omega n h} - 1) c[n] \\ &= \frac{2N}{T} e^{i\omega n h/2} \cdot 2i \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) c[n] \end{aligned}$$

が成り立つ.  $g$  についてパーセバルの等式を用いれば

$$\|g\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d[n]|^2 = \left(\frac{4N}{T}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right|^2 |c[n]|^2$$

がわかる. 一方, (1.16) を用いると,

$$|n| \leq N \quad \text{ならば} \quad \left| \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right| \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi n}{2N} = \frac{n}{N}$$

だから,

$$\|g\|^2 \geq \frac{16}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c[n]|^2$$

を得る.  $|g(t)|^2 \leq C^2$  だったので

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c[n]|^2 \leq \frac{T^2 C^2}{16}$$

がわかる. 右辺は  $N$  に依らないので,  $N \rightarrow \infty$  として求める不等式が導かれる. ■

**補題 1.11**  $f$  を周期  $T$  のリプシッツ連続な周期関数,  $\{c[n]\}$  を  $f$  のフーリエ係数とする. このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]| < \infty$$

が成り立つ.

**証明**  $\mathbb{C}^N$  でのシュワルツの不等式から

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |n| \leq N} |c[n]| &\leq \left( 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{1 \leq |n| \leq N} |n|^2 |c[n]|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 |c[n]|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

がわかる. 右辺は補題 1.10 より, 有限の定数で  $N$  に依らない. したがって,  $N \rightarrow \infty$  として補題の主張が成り立つ. ■

**補題 1.12**  $f$  を周期  $T$  の連続な周期関数,  $\{c[n]\}$  を  $f$  のフーリエ係数とする.

このとき,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]| < \infty$  ならば, フーリエ部分和:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c[n] e^{i\omega n t}$$

は  $N \rightarrow \infty$  のとき  $f$  に一様収束する.

**証明**  $N < M$  とすると,

$$|S_N(t) - S_M(t)| \leq \sum_{N < |n| \leq M} |c[n]| \leq \sum_{|n| > N} |c[n]| \quad (1.23)$$

である. 仮定により,  $N \rightarrow \infty$  のとき  $\sum_{|n| > N} |c[n]| \rightarrow 0$  だから, (1.23) の右辺は 0 に収束する. つまり, 各  $t$  ごとに,  $\{S_N(t)\}$  はコーシー列であり, 極限が存在する. そこで  $g(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t)$  とおく. (1.23) で  $M \rightarrow \infty$  とすると

$$|S_N(t) - g(t)| \leq \sum_{|n| > N} |c[n]|$$

となる. 右辺は  $t$  によらず,  $N \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束するのだから,  $S_N(t)$  は  $g$  に一様収束することになる. これより  $\|S_N - g\| \rightarrow 0$  が従う. 一方, 定理 1.6 より,  $\|S_N - f\| \rightarrow 0$  だから,  $f = g$  でなければならない. 以上により,  $S_N$  が  $f$  に一様収束することが示された. ■

**注意** 補題 1.12 は定理 1.3 よりも強い主張であり, 重要である.

**注意 1.2**  $\{g_N(t)\}$  を連続関数列で  $N \rightarrow \infty$  のとき  $g_N(t)$  は  $g(t)$  に一様収束するならば,  $g(t)$  は連続である.

### 定理 1.3: (再掲)

$f(t)$  がリプシッツ連続ならば, フーリエ級数展開は  $f(t)$  に一様収束する.

**証明** 補題 1.11 と補題 1.12 から直ちに導かれる. ■

## 1.11 ギブス現象と総和法