No.

Date

解析力学レポート　22221280　渡辺悠斗

第一回

1　rを定数とし、$\boldsymbol{r}=(r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)$のとき、$\boldsymbol{L}$をもとめよ。

$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$より

$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}(t)$であるから、

$\boldsymbol{p}=m\dot{\boldsymbol{r}}(t)=m(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0)$

より$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=(r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)\times m\times(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0)$

$=(0, 0, mr^2\omega\cos^2\omega t+mr^2\omega\sin^2\omega t)$

$=(0, 0, mr^2)$

第2回

1　$V(\boldsymbol{r})=-\dfrac{GM}{|\boldsymbol{r}|}$のとき、保存力$\boldsymbol{F}=-\nabla V(\boldsymbol{r})$が中心力になっていることを示せ

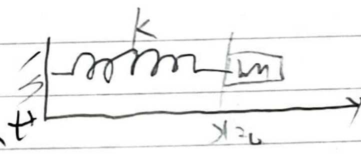
$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$となればよいので

$\nabla\times(-\nabla V(\boldsymbol{r}))=0$を示せばよい。

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times -\begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial V}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\end{pmatrix}=0$$

よって、保存力$\boldsymbol{F}=-\nabla V(\boldsymbol{r})$は中心力である。

2　調和振動において、$E=T(x)+V(x)$が一定であることを示せ



$m\ddot{x}=-kx$

$V(x)=\frac{1}{2}kx^2$

$T(x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$　　$T(x)+V(x)=\frac{1}{2}(m\dot{x}^2+kx^2)$

$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F=-kx$より　$x=A\sin(2\pi\nu t+\delta)$と表される。$\left(\nu=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$

よって$E=\frac{1}{2}(m\dot{x}^2+kx^2)=\frac{1}{2}(kA^2\cos^2(2\pi\nu t+\delta)+kA^2\sin^2(2\pi\nu t+\delta))$

$=\frac{1}{2}kA^2$　　より一定

No.

Date

第3回

1. $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{r}_i^2}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}_r}\right)$

$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{r}_i^2}{\partial \dot{q}_r}\right) = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_r}\right)$ よって、$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{r}_i^2}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}_r}\right)$

$\dot{r}_i = \frac{d}{dt} r_i$

2. q_s で $\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_s}$ を偏微分すると $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_s \partial r} \dot{q}_r + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_s \partial t}$ 　　$\frac{\partial}{\partial q_s} = \frac{\partial t}{\partial q_s}\frac{\partial}{\partial t}$ より、

$\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_s}\right)$

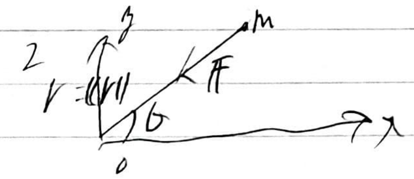
第4回

$Q_i = -\frac{\partial u}{\partial q_i}$ を示せ

$Q_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ より $\frac{\partial u}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}$

よって、$Q_i = -\frac{\partial u}{\partial q_i}$

2



中心力 ⇒ 保存力 $U(x, y)$

$F = -\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix} U(x,y)$

$F = \varphi\|r\| r$ より、$-\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix} U(x,y) = \varphi\|r\|$

$U(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix} x \varphi\|r\|$

$U(r) = F(\cos\theta, -\sin\theta)$

第5回

$E = T + U$ が保存されることを示せ（運動方程式を用いて）

$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial u}{\partial r} = 0$

$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

$= \frac{1}{2}mv^2 + r^2\dot{\theta}^2 + U(r)$

$m\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\partial u}{\partial r}$

となるが、中心力 $E = T + U$ は、θ, t に非依存であるので

T, U はそれぞれ一定になる。

第6回

$\tilde{L}(\tilde{q},\dot{\tilde{q}},t) \simeq L-\tilde{U}$

$\tilde{q}$で$\tilde{L}$のE-L方程式を書き下す

$n>1$だと、$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i = \sum_{\ell=1}^{k}\lambda_\ell\frac{\partial f_\ell}{\partial q_i}$

外力

2021試験

1

$\mathbb{L}=\mathbb{r}\times\mathbb{P}\ (\mathbb{P}=m\dot{\mathbb{r}}),\ \mathbb{N}=\mathbb{r}\times\mathbb{F} \Rightarrow \dot{\mathbb{L}}=\mathbb{N}$ より

(a) $\mathbb{r}\parallel\mathbb{F} \Rightarrow \dot{L}=N=\mathbb{r}\times\mathbb{F}=0$

$\mathbb{N}=0$より、角運動量は保存される

$\mathbb{r}(t_0)$と$\dot{\mathbb{r}}(t_0)$が張る平面…

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}mv$

$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2$

(b) 運動エネ $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)$

ポテ $V(r)$

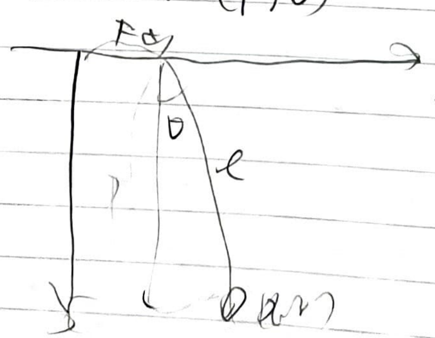
$L(r,\dot{r},\dot{\theta})=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r)$

(c) Lagrange

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+V'(r)=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=m(2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta})=mr(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0\end{cases}$$

$x^2+(z-F(t))^2=\ell^2$ $f(x,z,t)=0$

一般化座標(F,θ)



$(z-F(t))^2=\ell^2-x^2$

$z-F(t)=\sqrt{\ell^2-x^2}$