第 1 問

表された図について、今回は 1 次元であるので、$\vec{j} = j, \vec{n} = n$とし、以下の式

$$\int_V \frac{\partial j}{\partial x} dV = \int_S j \cdot dS$$

が成り立つ。そして、与えられたガウスの定理の式より、$\frac{\partial j}{\partial x}$は、体積を囲む表面$dS$を通過する電流密度$j$に等しいと考えられていることがわかる。

また、電荷保存の法則より、$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$であるので、ガウスの定理を考慮して電荷の保存則を変形することで、$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial n}{\partial t}$を得ることができる。

第 2 問

まず、電流密度jは、$j = n_0 \delta n v$と表され、次に電流密度の空間変化を考えると、

$\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(n_0 v + \delta n v)$となり、右辺について積の微分法則を用いると、$\frac{\partial(\delta n v)}{\partial x} = v\frac{\partial \delta n}{\partial x} + \delta n \frac{\partial v}{\partial x}$であるので、右辺$=\left(n_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial \delta n}{\partial x} + \delta n \frac{\partial v}{\partial x}\right)$となる。また、$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial n}{\partial t}$の右辺について定常状態の$n_0$の部分を除くと、$-\frac{\partial \delta n}{\partial t}$となる。よって

$$\frac{\partial j}{\partial x} = \left(n_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial \delta n}{\partial x} + \delta n \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \delta n}{\partial t}$$

となり、δnは空間依存性が無視できるとしているので、$\frac{\partial j}{\partial x} = n_0 \frac{\partial v}{\partial x}$

よって、$n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \delta n}{\partial t}$

そして、空間変化と時間変化の整合性をとることで、

$n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \delta n}{\partial x}$が得られる。

第 3 問

与えられた運動方程式をxについて偏微分すると、

$$m\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = e\frac{\partial E}{\partial x}$$となる。

ポアソン方程式$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e\delta n$を上式に代入すると、$m\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = e \cdot 4\pi e\delta n$

連続の式$n_0\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \delta n}{\partial t}$より、 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{n_0}\frac{\partial \delta n}{\partial t}$

これを$m\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = e \cdot 4\pi e\delta n$に代入し、 $m(-\frac{1}{n_0}\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2}) = e \cdot 4\pi e\delta n$

これを変形し、 $\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = -\frac{4\pi n_0 e^2 \delta n}{m}$

この方程式の解は、積分定数 A、B を用いて、$\delta n(t) = Ae^{i\omega_q t} + Be^{-i\omega_q t}$と表され、

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m}}$$

これでプラズマ周波数を求めることができた。