基準準位のエネルギーE_0,分布密度N_0,レーザー下準位のエネルギーE_1,分布密度N_1,上準位のエネルギー準位E_2,分布密度N_2とする。反転分布密度$\triangle N \equiv N_2 - N_1$とする。

準位 i から準位 j への遷移寿命をt_{ij}とする。利得媒質の利得スペクトルは均一広がり（結晶性の高い媒質の利得スペクトル）とし、誘導放出断面積をσ、レーザー光子エネルギーを$h\nu$,利得媒質への集光強度をIとする。また、準位 i への励起率をR_iとする。

ここで単位時間あたりの 変化率を示す微分方程式であるレート方程式を考える。レーザー上準位と下準位の分布密度の時間変化率$\frac{dN_2}{dt}$, $\frac{dN_1}{dt}$は以下のレート方程式で表せる。

$$\frac{dN_2}{dt} = R_2 - \left(\frac{1}{t_{20}} + \frac{1}{t_{21}}\right) N_2 - \frac{\sigma I}{h\nu}(N_2 - N_1)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = R_1 - \frac{1}{t_{10}} N_1 + \frac{1}{t_{21}} N_2 + \frac{\sigma I}{h\nu}(N_2 - N_1)$$

また、反転分布密度$\triangle N \equiv N_2 - N_1$と利得係数$\gamma$には、$\gamma = \sigma \triangle N$という関係が成り立つ。

ここで上準位の自然放出寿命をt_fとすれば、$\frac{1}{t_f} = \frac{1}{t_{20}} + \frac{1}{t_{21}}$という関係が成り立つ。

また、定常状態ならば、分布密度の時間変化はゼロであるので、$\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = 0$

上記の$\frac{1}{t_f} = \frac{1}{t_{20}} + \frac{1}{t_{21}}$、$\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = 0$を用いてレート方程式を変形すると、

$$\frac{dN_2}{dt} = R_2 - \frac{1}{t_f} N_2 - \frac{\sigma I}{h\nu}(N_2 - N_1) = 0$$

$$\frac{dN_1}{dt} = R_1 - \frac{1}{t_{10}} N_1 + \frac{1}{t_{21}} N_2 + \frac{\sigma I}{h\nu}(N_2 - N_1) = 0$$

となり、$R_2 = \left(\frac{1}{t_f} + \frac{\sigma I}{h\nu}\right) N_2 - \frac{\sigma I}{h\nu} N_1$, $R_1 = -\left(\frac{1}{t_{21}} + \frac{\sigma I}{h\nu}\right) N_2 + (\frac{1}{t_{10}} + \frac{\sigma I}{h\nu}) N_1$と変形できる。

ここで、$A\binom{N_2}{N_1} = \binom{R_2}{R_1}$と表せる行列 A を考えると、$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{t_f} + \frac{\sigma I}{h\nu} & -\frac{\sigma I}{h\nu} \\ -\left(\frac{1}{t_{21}} + \frac{\sigma I}{h\nu}\right) & \frac{1}{t_{10}} + \frac{\sigma I}{h\nu} \end{pmatrix}$となる。

Aの行列式$|A|$を計算すると、$|A|=\frac{1}{t_f}\frac{1}{t_{10}}\left(1+\frac{I}{\frac{hv}{\sigma t_f}\left(\frac{t_{20}}{t_{10}+t_{20}}\right)}\right)$となる。

また、利得媒質の飽和光強度$I_s\equiv\frac{hv}{\sigma t_f}\left(\frac{t_{20}}{t_{10}+t_{20}}\right)$を用いると、$|A|=\frac{1}{t_f}\frac{1}{t_{10}}\left(1+\frac{I}{I_s}\right)$と表すことができそして$A$の逆行列$A^{-1}$を考えると、$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\frac{1}{t_{10}}+\frac{\sigma I}{hv} & \frac{\sigma I}{hv}\\ \frac{1}{t_{21}}+\frac{\sigma I}{hv} & \frac{1}{t_f}+\frac{\sigma I}{hv}\end{pmatrix}$であり、これを使って、

$\begin{pmatrix}N_2\\N_1\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}R_2\\R_1\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{t_{10}}+\frac{\sigma I}{hv}\right)R_2+\frac{\sigma I}{hv}R_1\\ \left(\frac{1}{t_{21}}+\frac{\sigma I}{hv}\right)R_2+\left(\frac{1}{t_f}+\frac{\sigma I}{hv}\right)R_1\end{pmatrix}$となる。よって$\triangle N\equiv N_2-N_1$は

$$\triangle N=\left(\left(\frac{1}{t_{10}}+\frac{\sigma I}{hv}\right)R_2+\frac{\sigma I}{hv}R_1-\left(\left(\frac{1}{t_{21}}+\frac{\sigma I}{hv}\right)R_2+\left(\frac{1}{t_{21}}+\frac{\sigma I}{hv}\right)R_2+\left(\frac{1}{t_f}+\frac{\sigma I}{hv}\right)R_1\right)\right)$$

$$=\frac{1}{1+\frac{I}{I_s}}\left(\left(1-\frac{t_{10}}{t_{21}}\right)R_2t_f-R_1t_{10}\right)$$

ここで、$\triangle N$を作るための実効的な励起率Rを$R\equiv\left(1-\frac{t_{10}}{t_{21}}\right)R_2t_f-R_1t_{10}$と定義すると、利得は、$\triangle N\equiv N_2-N_1$を使って、$\gamma=\sigma\triangle N=\frac{\sigma}{1+\frac{I}{I_s}}R$, $I_s\equiv\frac{hv}{\sigma t_f}\left(\frac{t_{20}}{t_{10}+t_{20}}\right)$と表せる。