問３

第１問

与えられた部分積分の公式を利用するために、$f(x) = J(\epsilon), g'(x) = \frac{df^+}{d\epsilon}$とすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(\epsilon) \frac{df^+}{d\epsilon} d\epsilon = [J(\epsilon) f^+(\epsilon)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon} f^+(\epsilon)\, d\epsilon$$

境界条件として$f^+(\epsilon)$および $J(\epsilon)$の性質から、無限大での項は０になるので

$$[J(\epsilon) f^+(\epsilon)]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

よって、 $\int_{-\infty}^{\infty} J(\epsilon) \frac{df^+}{d\epsilon} d\epsilon = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon} f^+(\epsilon)\, d\epsilon = I$

これで$I = \int_{-\infty}^{\infty} J(\epsilon) \frac{df^+}{d\epsilon} d\epsilon$が示された。

第２問

フェルミ分布$f^+(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$について考えると、$\epsilon \to \infty$で０に、$\epsilon \to -\infty$で１に収束する。そして、$K(\epsilon) = f^+(\epsilon) J(\epsilon) = \frac{\epsilon^{\gamma+1}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$では、$\epsilon \to \infty$で$K(\epsilon) \approx \epsilon^{\gamma+1} e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$ となり、

$e^{\beta(\epsilon-\mu)}$が急激に０に近づくので$\lim_{\epsilon\to\infty} K(\epsilon) = 0,$

また、$K(0)$についても、$K(0) = \frac{0}{e^{-\beta\mu}+1} = 0$

よって示された。

第３問

$z = \beta(\epsilon - \mu)$とすると、$\epsilon = \mu + \frac{z}{\beta}, d\epsilon = \frac{dz}{\beta}$

次に、$-\frac{df^+}{d\epsilon} = \frac{\beta}{(e^{\beta(\epsilon-\mu)/2} + e^{-\beta(\epsilon-\mu)/2})^2}$に変数変換を行い、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} J(\epsilon) \frac{df^+}{d\epsilon} d\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} J\left(\mu + \frac{z}{\beta}\right) \frac{\beta}{(e^{z/2} + e^{-z/2})^2} \frac{dz}{\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} J\left(\mu + \frac{z}{\beta}\right) \frac{1}{(e^{z/2} + e^{-z/2})^2} dz$$

$J(\epsilon)$をμのまわりで 2 次までテーラー展開したものは以下であるとしているから、

$$J(\epsilon) \simeq J(\mu) + \frac{J''}{2!}(\epsilon - \mu)^2$$

これを変形して、

$$J\left(\mu + \frac{z}{\beta}\right) \simeq J(\mu) + \frac{J''}{2!}(\mu)\left(\frac{z}{\beta}\right)^2$$

これをIの式に代入して、

$$I \simeq \int_{-\infty}^{\infty} J(\mu) \frac{1}{(e^{z/2} + e^{-z/2})^2} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J''}{2!}(\mu)\left(\frac{z}{\beta}\right)^2 \frac{1}{(e^{z/2} + e^{-z/2})^2} dz$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(e^{z/2}+e^{-z/2})^2} dz$=1 であり、また、$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)^2} dx$=$\pi^2/3$より、

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(e^{z/2}+e^{-z/2})^2} dz = \pi^2/3$であるので、

$$I \simeq J(\mu) + \frac{\pi^2}{6} J''(\mu) \beta^{-2}$$