

放射線安全工学 第 11 回 演習課題(p41,42)

実効半減期の逆数が 物理学的半減期の逆数と 生物学的半減期の和で表すことが出来る事を 数学的に導いて下さい。(1 / T(eff) = 1 / T(phys) + 1 / T(bio) の関係)

まず、放射線壊変の基本式 $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ を変形すると、 $\frac{1}{N(t)} dN(t) = -\lambda dt$

左辺を $N(t)$ に関する積分、右辺は t に関する積分をすると、 $\int \frac{1}{N(t)} dN(t) = \int -\lambda dt$

$$\therefore \ln|N(t)| = -\lambda t + C (C \text{ は積分定数}) \rightarrow N(t) = e^{-\lambda t + C} = e^C \cdot e^{-\lambda t}$$

ここで、初期の原子数 N_0 とすると、 $t = 0$ で $N(t) = e^C$ となるので、 $N_0 = e^C$

よって、 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ と表せる。次に、実効減衰は、物理学的崩壊と生物学的減衰のそれぞれ独立した過程の和と考えることができるので、 $\lambda_{eff} = \lambda_{phy} + \lambda_{bio}$ と表せる。

また、それぞれの半減期を $T_{eff}, T_{phy}, T_{bio}$ とする。実効半減期について考えると、

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda_{eff} T_{eff}} \quad \text{両辺を } N_0 \text{ で割り、対数を取ると } \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda_{eff} T_{eff} \rightarrow \lambda_{eff} = \frac{\ln 2}{T_{eff}}$$

物理学的半減期と生物学的半減期でも同様に考えると、 $\lambda_{phy} = \frac{\ln 2}{T_{phy}}, \lambda_{bio} = \frac{\ln 2}{T_{bio}}$ となる。

$$\lambda_{eff} = \lambda_{phy} + \lambda_{bio} \text{ より、 } \frac{\ln 2}{T_{eff}} = \frac{\ln 2}{T_{phy}} + \frac{\ln 2}{T_{bio}} \rightarrow \frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{phy}} + \frac{1}{T_{bio}}$$

これで、実効半減期の逆数が物理学的半減期の逆数と生物学的半減期の和で表すことが出来る事を導くことができた。