実験レポート

2024 年度

電気電子情報工学実験Ⅱ,Ⅲ(a)

学籍番号　　22221280

氏名　　渡辺悠斗

実験番号　　6

実験題目　システムの解析・制御の基礎

実験班　　J

共同実験者

実験日　10 月 22 日、10 月 29 日

提出締切日　11 月 19 日

提出日　　11 月 19 日

チェック欄			点数
合　・　否 月　　日	合　・　否 月　　日	合　・　否 月　　日	

１．一次系

検討事項 1

入出力のラプラス変換を U(s)、Y(s)とすると、$\mathrm{Y(s)}=\frac{K}{Ts+1}\mathrm{U(s)}$と表すことができ、この式を変形すると、$Ts\mathrm{Y(s)}+\mathrm{Y(s)}=K\mathrm{U}(s)$となる。そして、ラプラス変換をすることで、$\dot{y}=\frac{K}{T}u-\frac{1}{T}y$という式に変形できる。そして、作成したブロック線図を以下に示す。

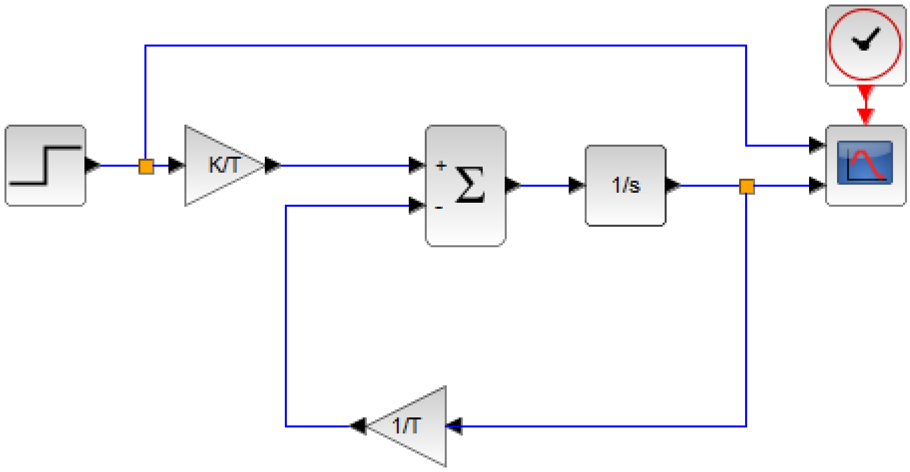


図 1．一次系のブロック線図

実験 1 (1)

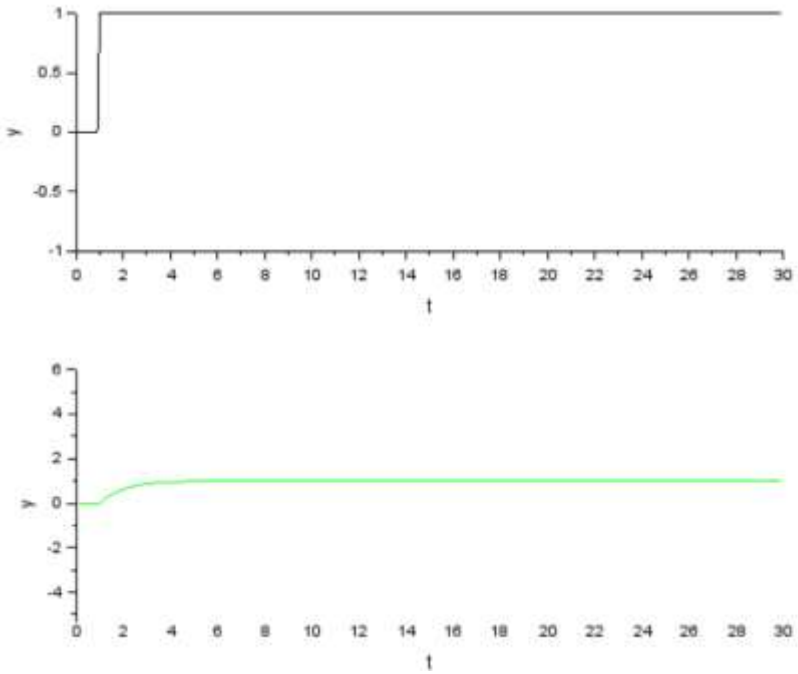


図 2．(T,K)=(1,1)の単位ステップ応答

ことが分かる。

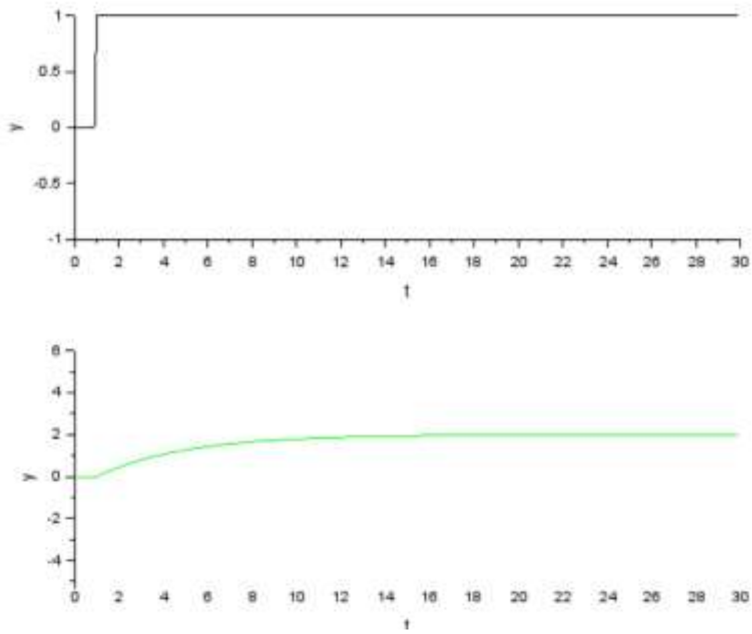


図３．(T,K)=(4,2)の単位ステップ応答

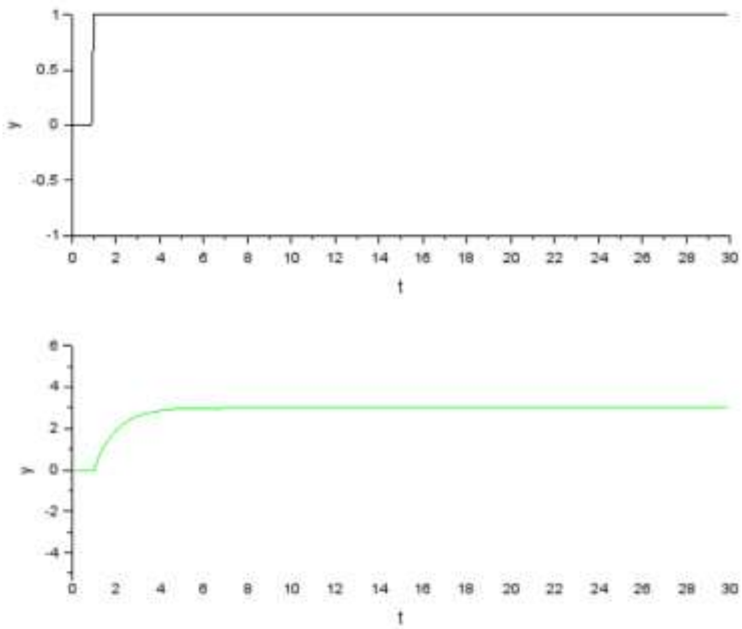


図 4.(T,K)=(1,3)の単位ステップ応答

図２～４より、定常値は K になり、T が大きくなるにつれ、定常値までの収束が遅くなることが分かる。

（ⅱ）　極の実部が負になる時に、その伝達関数は不安定になる。

$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$の極は、$Ts + 1 = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{T}$より、T<0 のときに不安定となる。

今回は(T,K)=(-1,1)の場合を考える。

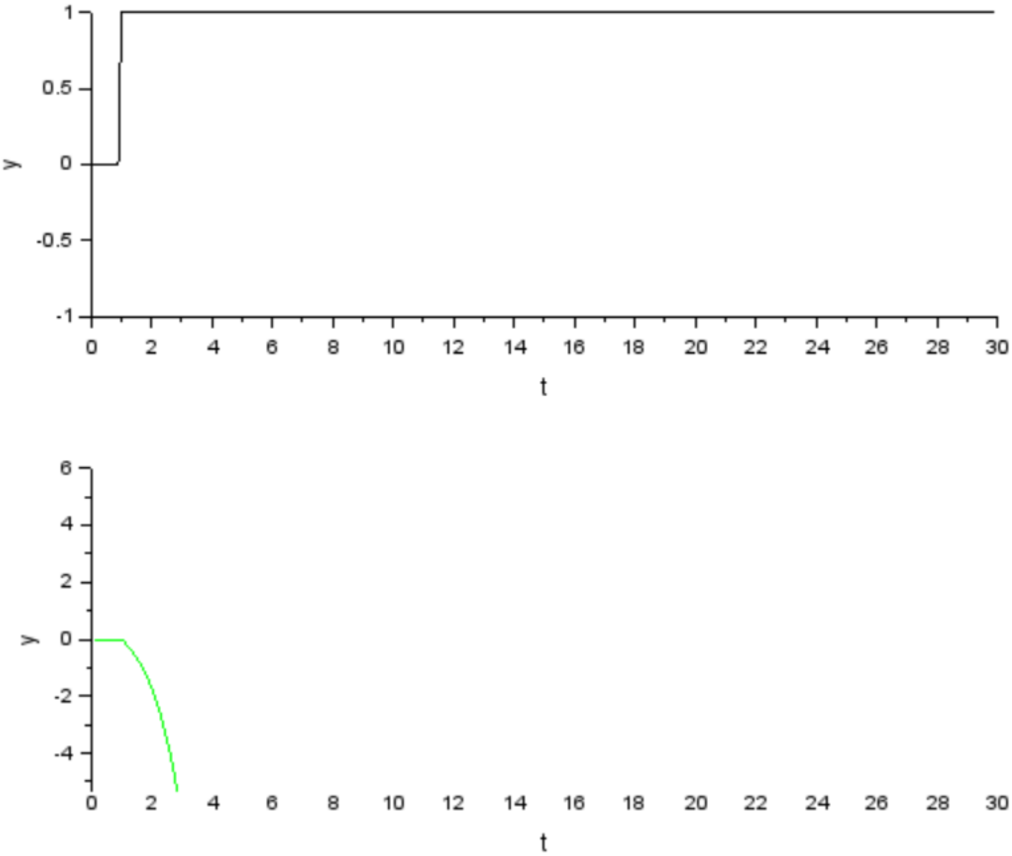


図 5. (T,K)=(-1,1)の単位ステップ応答

ⅲ）

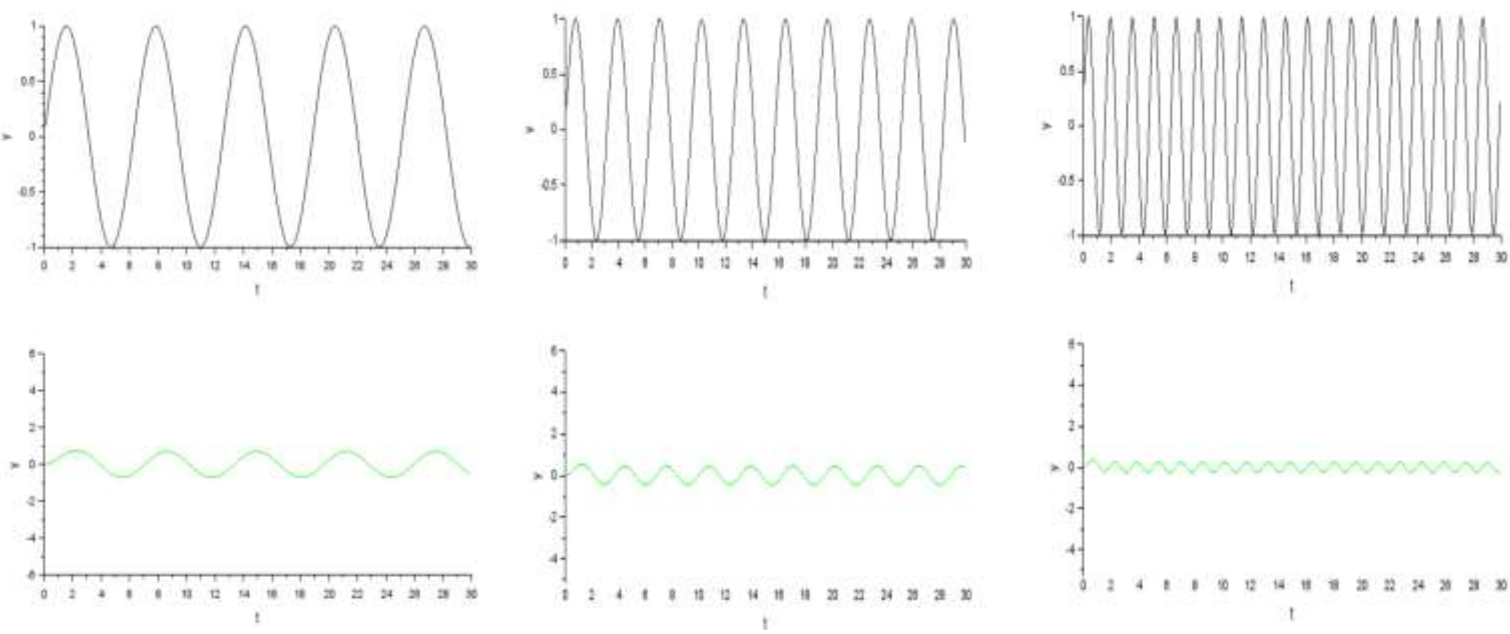


図 6 ～ 8．(T,K)=(1,1)、$\omega = 1,2,4$の時の定常応答

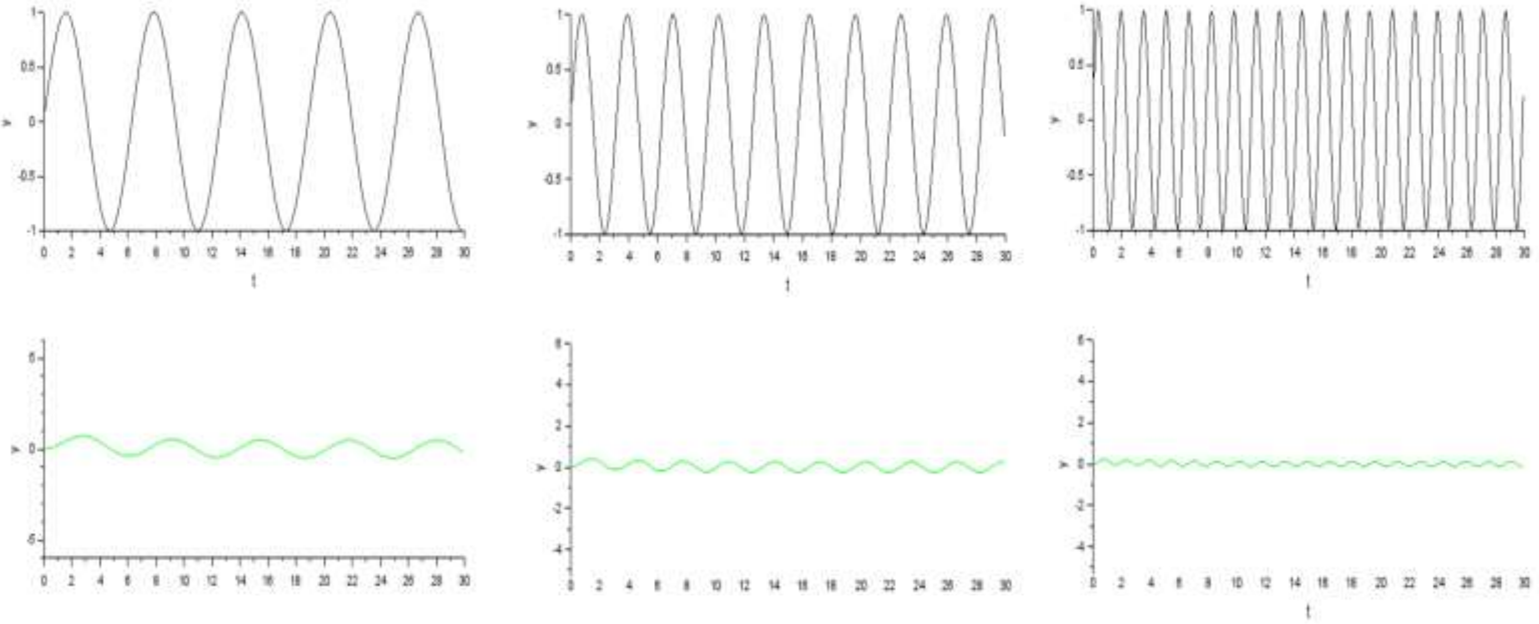


図 9～11．(T,K)=(4,2)、$\omega = 1,2,4$の時の定常応答

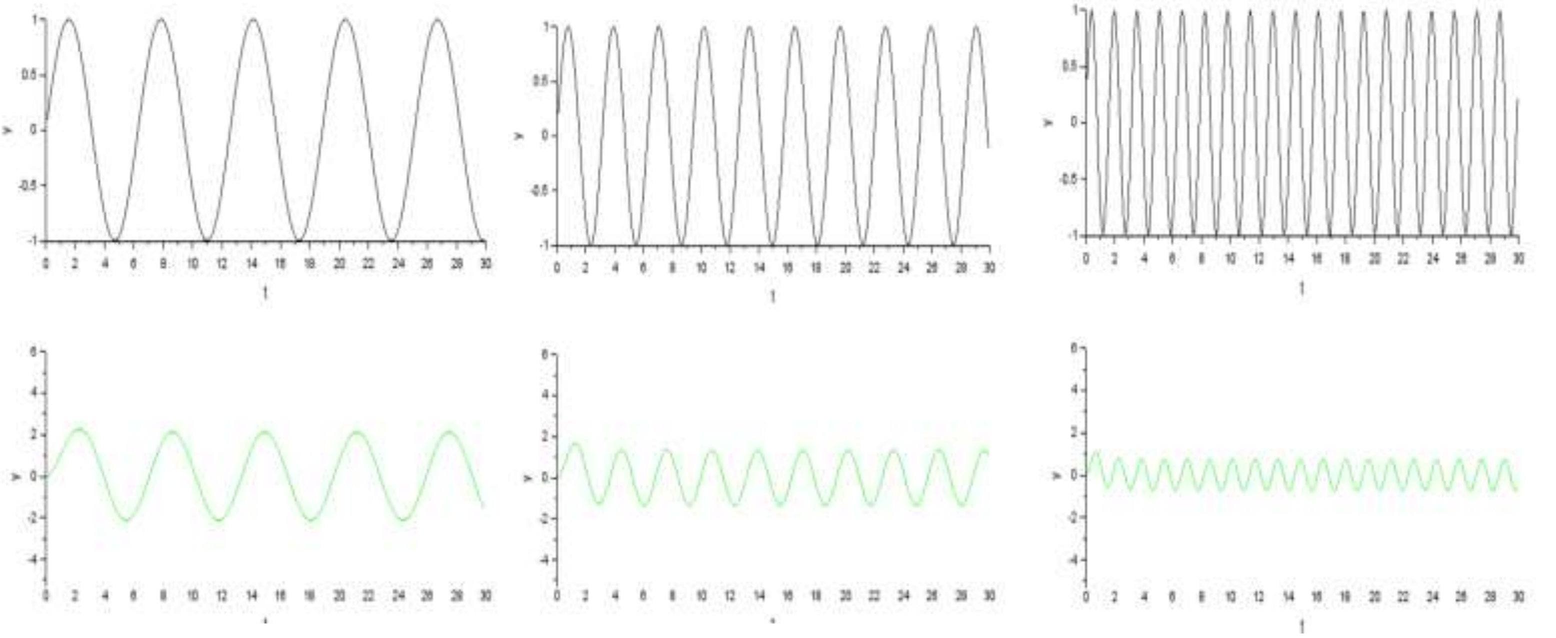


図 12～14．(T,K)=(1,3)、$\omega = 1,2,4$の時の定常応答

図 8～16 から、正弦波入力に対する定常応答は角周波数と振幅が反比例するとわかる。

検討事項 2 (1): 逆ラプラス変換を用いて、以下のように変形できる。

まず、$\mathrm{Y(s)} = \frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}$を逆ラプラス変換するために、Y(s)を変形する。$\mathrm{Y(s)}\frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{K}{s} - \frac{KT}{Ts+1} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+1/T}$となり、これを逆ラプラス変換すると、$y = K\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}\right] = K(u - e^{-t/T})$となる。これが出力を表しているので、定常値が K になり、時間変化に伴い K に近づくのと、T が大きくなるほど収束が遅くなることが分かる。

次に、$y = K(u - e^{-t/T})$に最終値の定理をあてはめると、

$\lim_{t\to\infty} \mathrm{y(t)} = \lim_{t\to\infty} \mathrm{K}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/T}\right) = \mathrm{K}$となり、定常値の K と一致することが分かる。つまり、時

間応答波形から、定常値が K と推測され、収束にかかる時間から T が推測できると考えられる。また、検討事項 1 の実験 1　 ii）でも触れたが、今回の$\mathrm{G}(s)$は極が$\mathrm{s} = -\frac{1}{T}$であり、T が大きくなるにつれ極は小さくなる。一方、出力$y = K(u - e^{-t/T})$に当てはめて考えると収束時間が長くなることが分かる。逆に、T が小さくなるにつれ極は小さくなり、出力yは収束時間が短くなることが分かる。

検討事項 2（2）

正弦波入力 u(t)= $e^{j\omega t}$をラプラス変換し、$\mathrm{U(s)} = \frac{1}{s-j\omega}$

$$\mathrm{Y(s)} = \mathrm{G(s)U(s)} = \frac{K}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s-j\omega}$$

この式を部分分数分解し、$\mathrm{Y(s)} = \frac{A}{Ts+1} + \frac{B}{s-j\omega}$

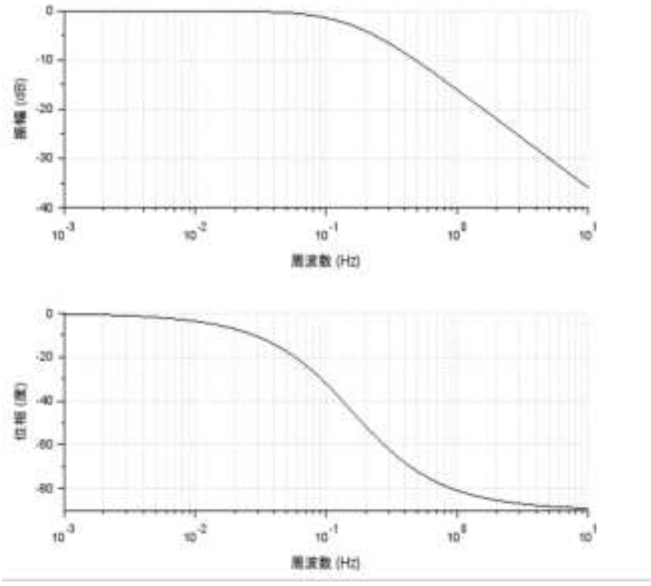
これを求めると、$\mathrm{A} = \frac{KT}{1+j\omega T}$，$B = \frac{K}{1+j\omega T}$　A,B を代入し逆ラプラス変換をすると、

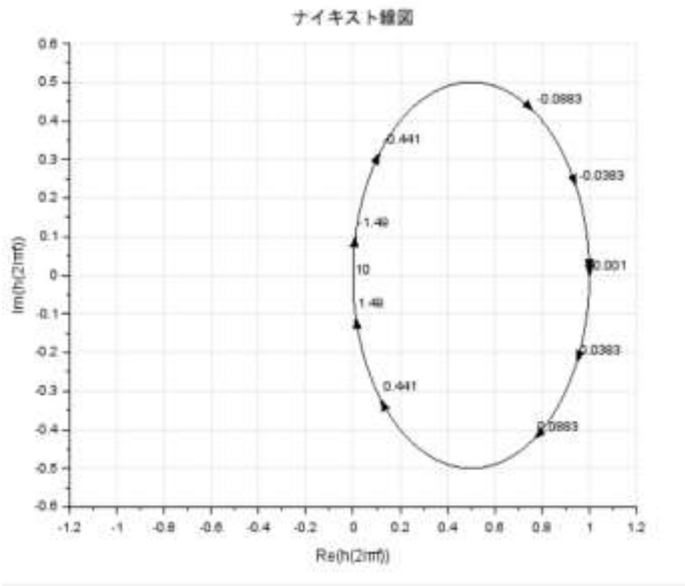
$y(t) = \frac{A}{T}e^{-\frac{t}{T}} + Be^{j\omega t}$　定常応答は、最終値の定理より、

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{A}{T}e^{-\frac{t}{T}} + Be^{j\omega t}\right) = Be^{j\omega t} &= \frac{K}{1+j\omega T}(\cos\omega t + j\sin\omega t) \\
&= \frac{K(1-j\omega T)}{1+\omega^2T^2}(\cos\omega t + j\sin\omega t) \\
&= \frac{K}{1+\omega^2T^2}(\cos\omega t + \omega T\sin\omega t) + \frac{K}{1+\omega^2T^2}j(\sin\omega t - \omega T\cos\omega t) \\
&= \frac{K\sqrt{1+\omega^2T^2}}{1+\omega^2T^2}\sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}$$

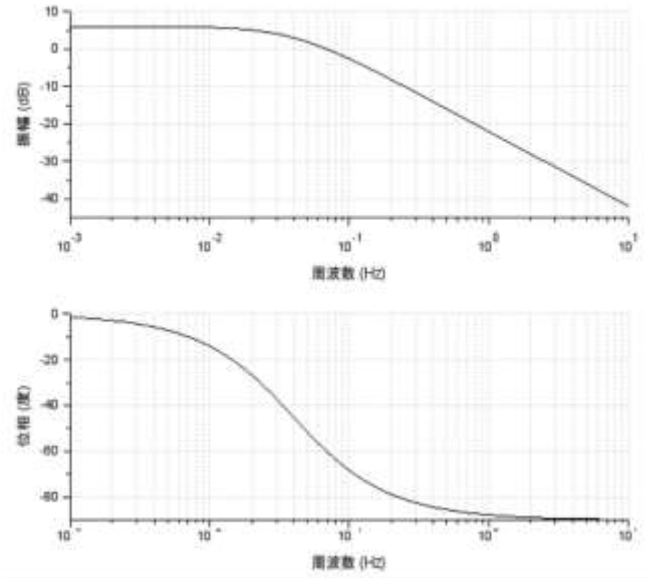
よって、$|G(j\omega)|$と$\angle G(j\omega)$は、$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$　$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega T)$となる。

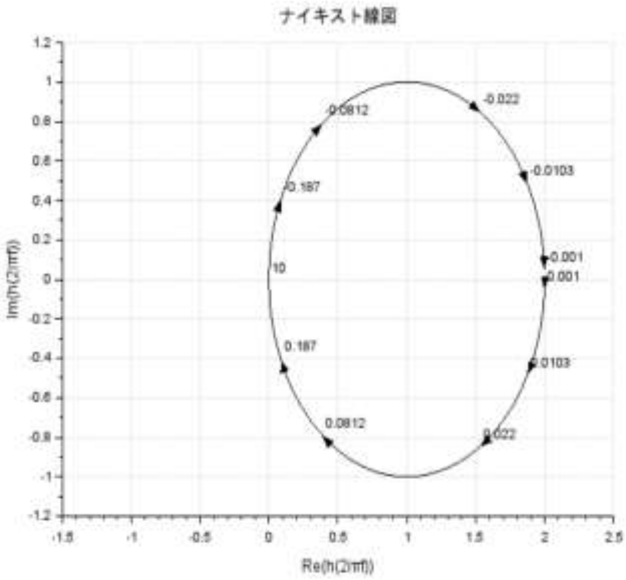
Scilab のコマンドを用いる。



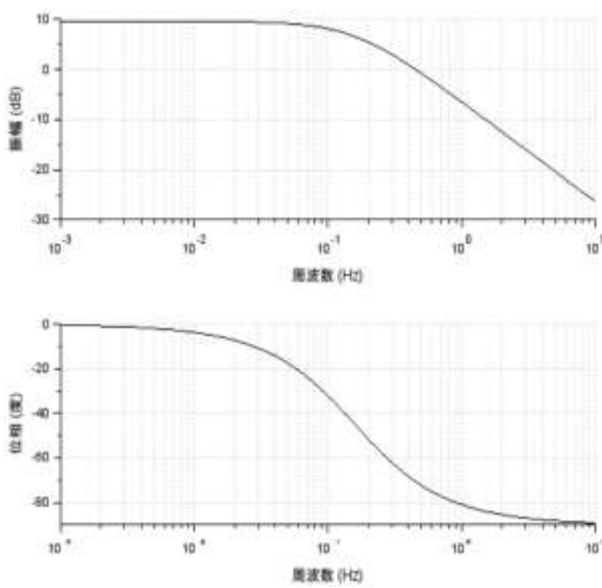


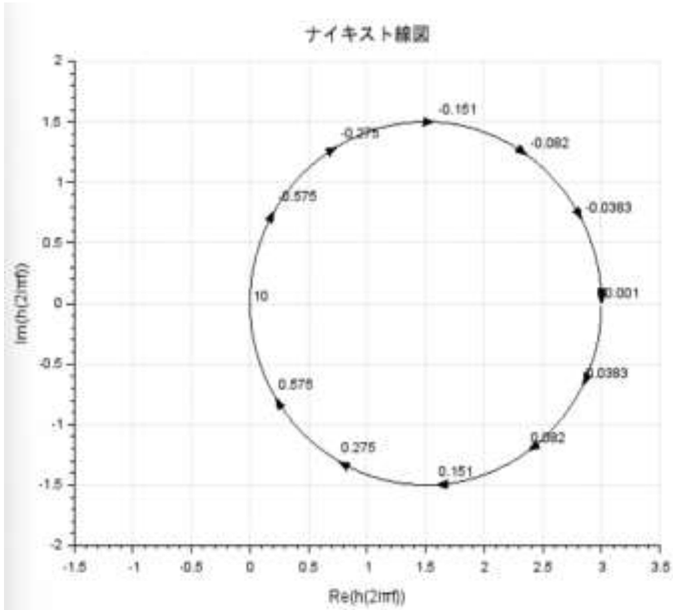
(T,K)=(1,1)の Bode 線図、Nyquist 線図





(T,K)=(４,２)の Bode 線図、Nyquist 線図





(T,K)=(1,3)の Bode 線図、Nyquist 線図

２．二次系

検討事項３

まず、$V(t)$から$q(t)$までの伝達関数を求める。$V(t) = R\dot{q}(t) + L\ddot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t)$であり、ラプラス変換を用いて、$V(s) = RsQ(s) + Ls^2Q(s) + \frac{1}{C}Q(s)$となり、これを変形して、

$V(s) = \left(Rs + Ls^2 + \frac{1}{C}\right)Q(s) \rightarrow Q(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{Rs}{L}+\frac{1}{LC}}$となるので、

伝達関数$G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{Rs}{L}+\frac{1}{LC}}$である。これを、$G(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}$と比較すると、

$\frac{R}{L} = 2\zeta\omega_n$ ， $\frac{1}{LC} = {\omega_n}^2$ ，$\frac{1}{LC} = K{\omega_n}^2$となるので、$K = 1$, $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

次に、二次系の極をζ,ωｎ,Kを用いて表すと、$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega^2{}_n = 0$ より、$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$　となる。安定性の条件より、s の実部が負である必要があるので、$\zeta > 0$のとき、安定であると言える。

実験２

ブロック線図作成のために二次系の状態方程式を求める。

$Y(s) = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}\ U(s)$より、$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2)Y(s) = K{\omega_n}^2U(s)$

初期値は０であるとすると、$s^2Y(s) + 2\zeta\omega_n sY(s) + {\omega_n}^2Y(s) = K{\omega_n}^2U(s)$を逆ラプラス変換して、$\ddot{y}(t) = -2\zeta\omega_n\dot{y}(t) - {\omega_n}^2y(t) + K{\omega_n}^2u(t)$ となる。この状態方程式を満たすブロック線図を以下に示す。($\mathrm{a} = \xi, \mathrm{b} = \omega_n$)

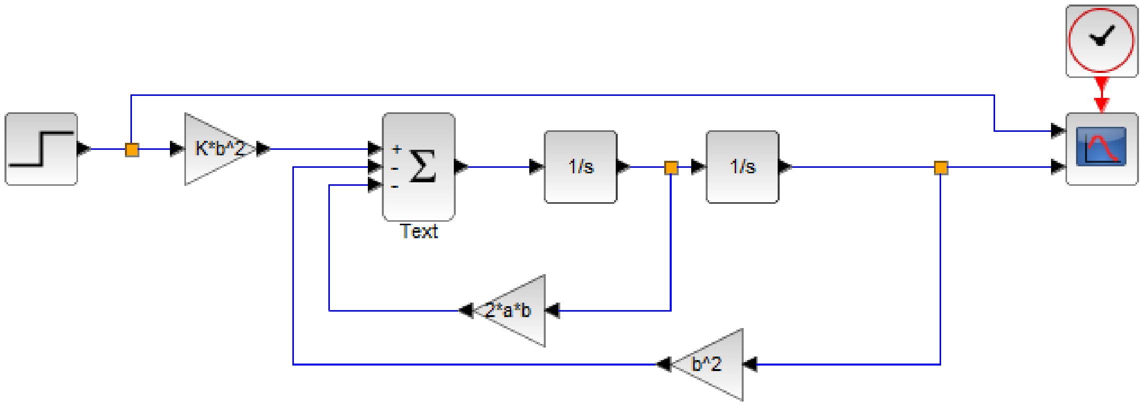
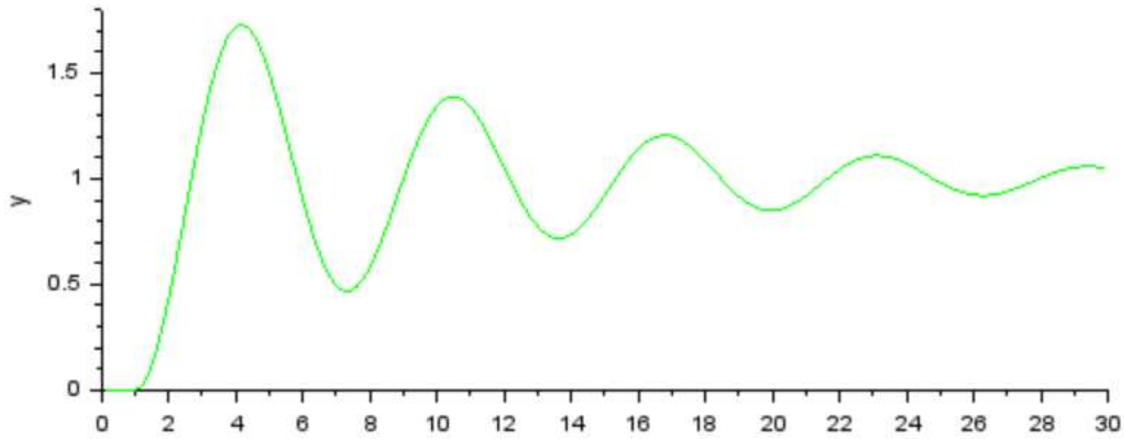
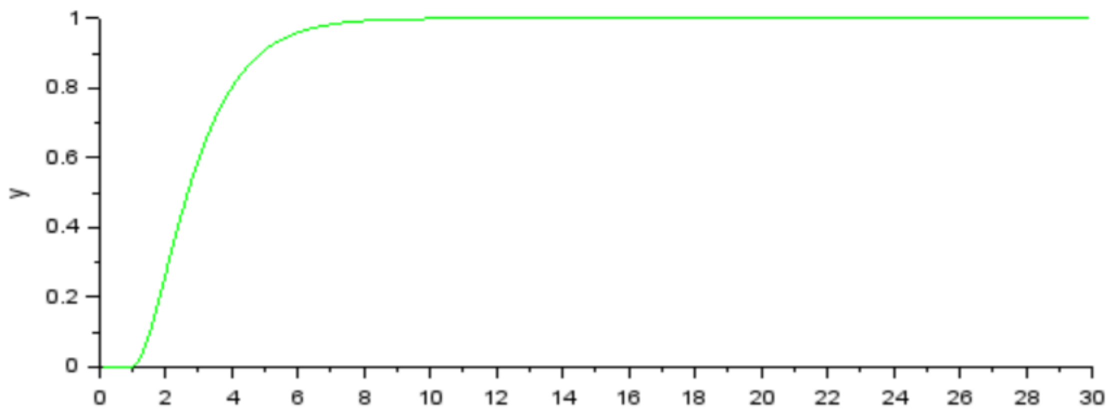


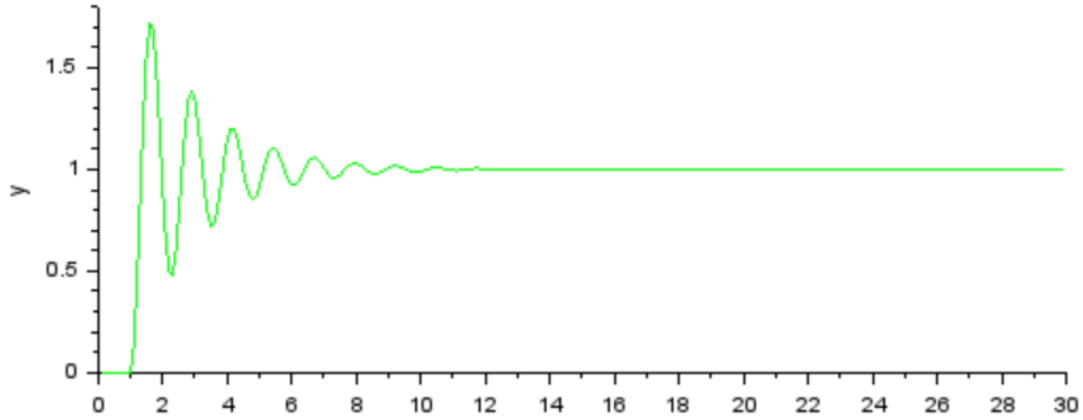
図　.二次系のブロック線図(単位ステップ入力)

ｉ）



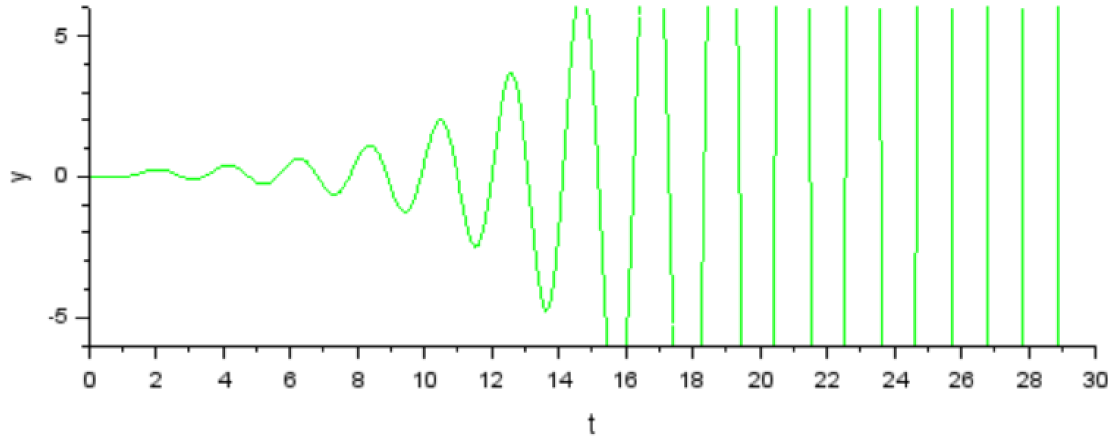


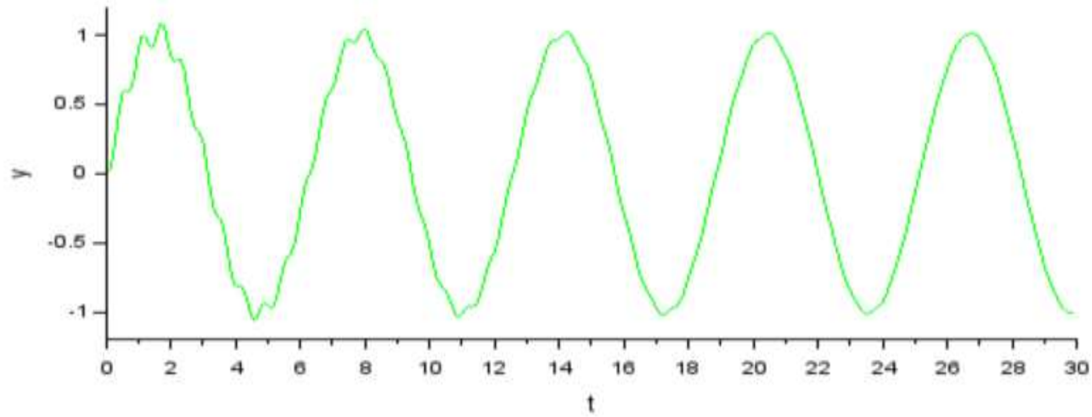
$\zeta = 1,\ \omega_n = 1,\ K = 1$ のときの単位ステップ応答



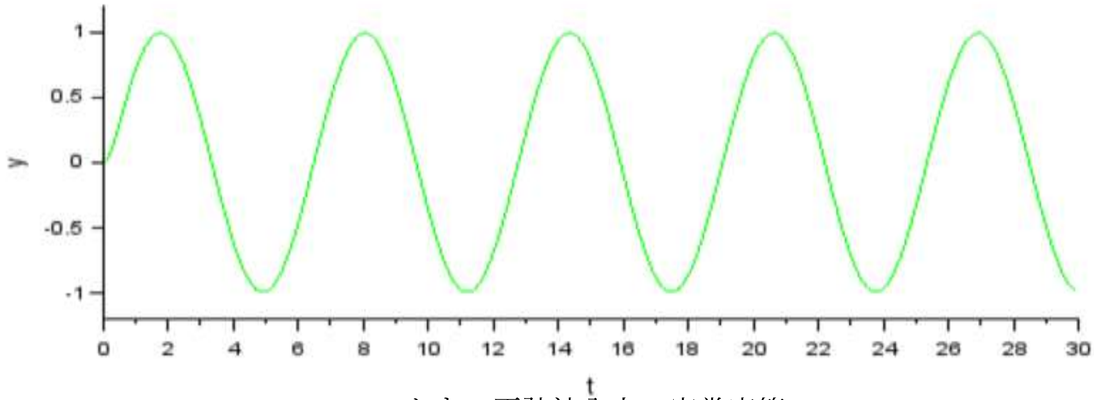
$\zeta = 0.1,\ \omega_n = 5,\ K = 1$ のときの単位ステップ応答

ii）

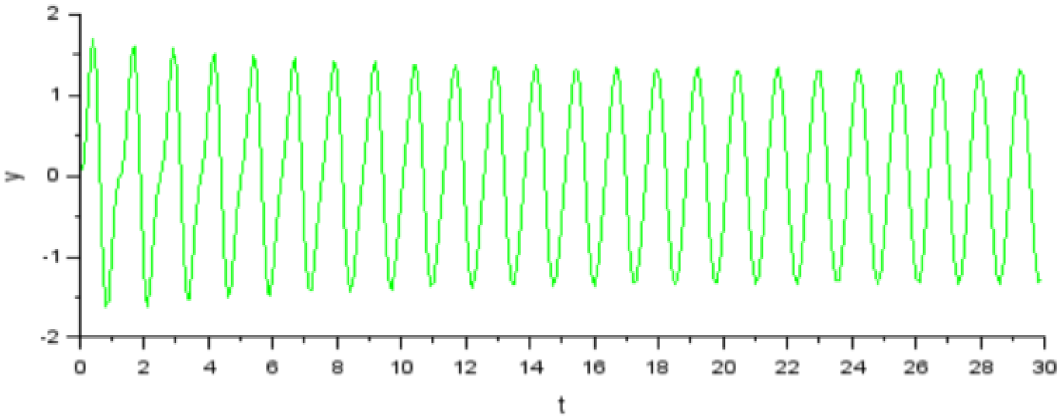




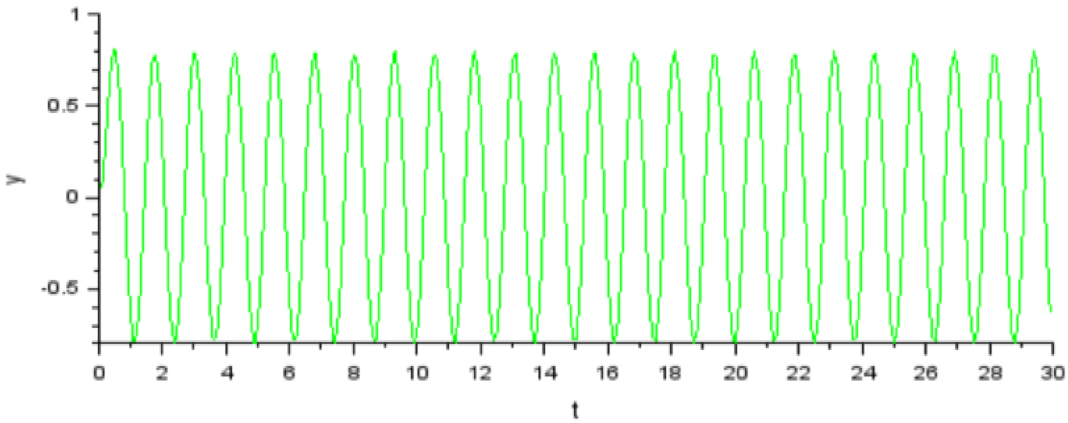
$\zeta = 0.01,\ \omega_n = 10,\ K = 1,\ \omega = 1$ のときの正弦波入力の定常応答



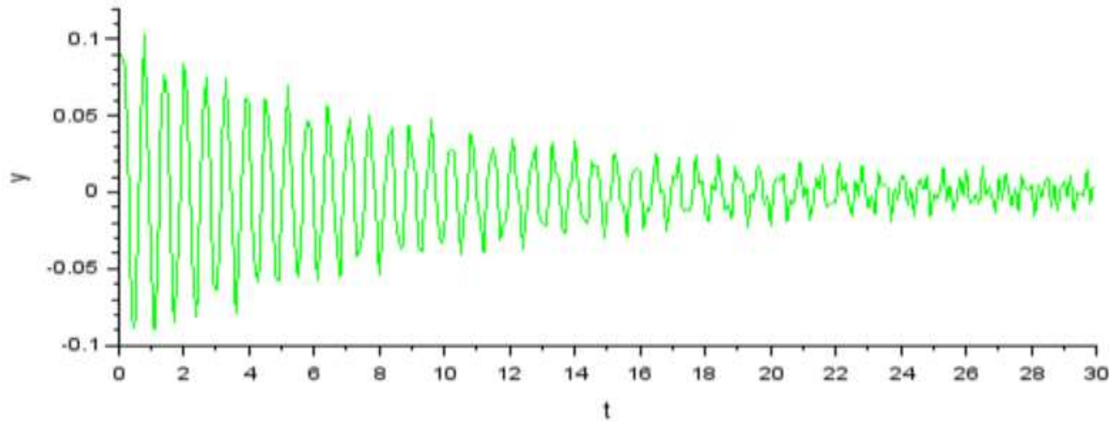
$\zeta = 1,\ \omega_n = 10,\ K = 1,\ \omega = 1$ のときの正弦波入力の定常応答



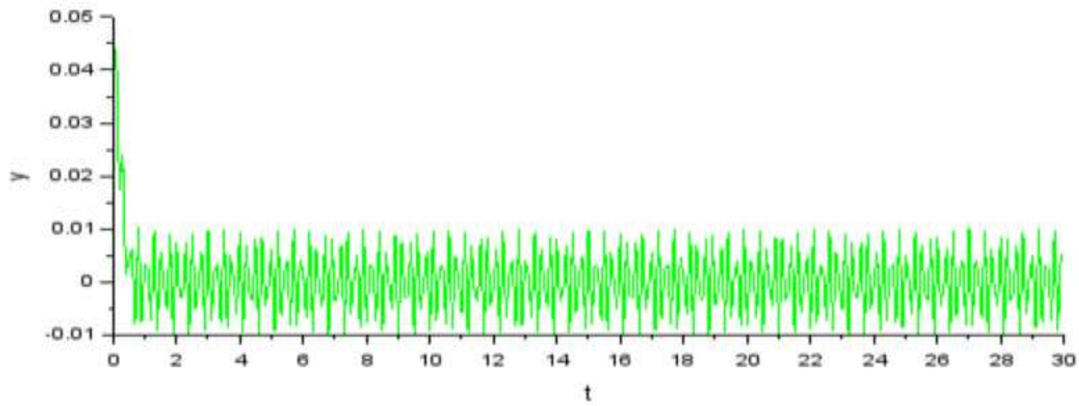
$\zeta = 0.01,\ \omega_n = 10,\ K = 1,\ \omega = 5$ のときの正弦波入力の定常応答



$\zeta = 1,\ \omega_n = 10,\ K = 1,\ \omega = 5$ のときの正弦波入力の定常応答

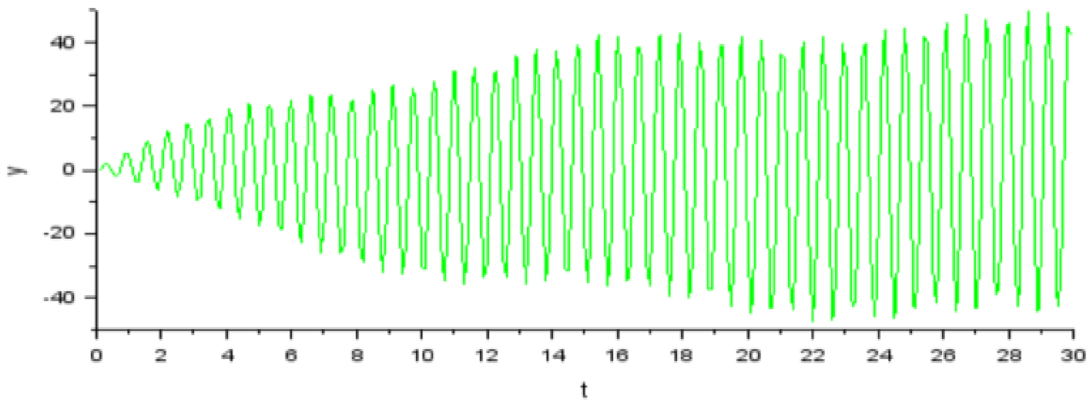


$\zeta = 0.01,\ \omega_n = 10,\ K = 1,\ \omega = 100$ のときの正弦波入力の定常応答

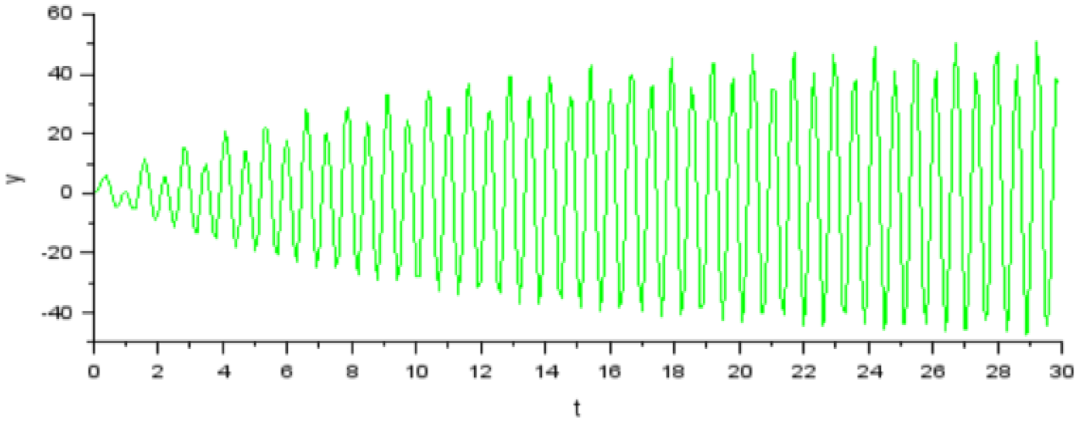


$\zeta = 1,\ \omega_n = 10,\ K = 1,\ \omega = 100$ のときの正弦波入力の定常応答

次に、$\sin\omega_r t + 3\sin\omega_0 t$ という合成波に対する定常応答を以下に示す。



$\zeta = 0.01,\ \omega_n = 10,\ K = 1,\ \omega_0 = 0.5,\ \omega_r = 10$ のときの正弦波入力の定



$\zeta = 0.01,\ \omega_n = 10,\ K = 1, \omega_0\ = 5,\ \omega_r = 10$ のときの正弦波入力の定常応答

検討事項４

(１)検討事項３より、$\mathrm{s} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$であるから、$\omega_n$が大きくなると収束時間は短くなり、極の位置は原点から遠くなる。一方、ω_nが小さくなると収束時間は長くなり、極の位置は原点に近くなる。

次に、単位ステップ応答を計算する。

$\zeta < 1$のとき

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s}-\frac{K(s+2\zeta\omega_n)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s}-\frac{K(s+2\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2-\zeta^2\omega_n^2}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s}-\frac{K(s+\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}-\frac{K\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}\right]$$

$$= K\left\{1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right\}$$

$$= K\left\{1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\right\}$$

（$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$　，　$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$としている）

$\zeta = 1$のとき、$\mathrm{Y(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K(s+2\omega_n)}{(s+\omega_n)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K(s+\omega_n)}{(s+\omega_n)^2} - \frac{K\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K}{s+\omega_n} - \frac{K\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right]$$

したがって、$y = K\{1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\}$

$\zeta > 1$ のときは、

$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$から、$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^2}{s\{s-\omega_n(-\zeta+\beta)\}\{s-\omega_n(-\zeta-\beta)\}}\right]$より、

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{K(\zeta+\beta)}{2\beta}\frac{1}{s-\omega_n(-\zeta+\beta)} + \frac{K(\zeta+\beta)}{2\beta}\frac{1}{s-\omega_n(-\zeta-\beta)}\right]$$
$$= K\left\{1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta}\left((\zeta+\beta)e^{\beta\omega_n t} - (\zeta-\beta)e^{-\beta\omega_n t}\right)\right\}$$

（2）

（3）

（4）式(23)で簡単化のために $\omega^2 = x$ とおいて分母を整理すると

$$(\omega_n^2 - x)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2 x = x^2 - 2\omega_n^2(1-2\zeta^2)x + \omega_n^4$$
$$= \{x - \omega_n^2(1-2\zeta)\}^2 - \omega_n^4(1-2\zeta)^2 + \omega_n^4$$

となり、分母が $x > 0$ で極小点を持つ条件は $\omega_n^2(1-2\zeta^2) > 0$であるから

この式を整理すると共振が現れる条件は $\zeta < \sqrt{\frac{1}{2}}$

また、$x = \omega_n^2(1-2\zeta)$ のとき極大値なので、$\omega_r = \sqrt{\omega_n^2(1-2\zeta^2)}$である

3　直流モータの PID 制御

検討事項 5

$L\frac{di_a(t)}{dt}+Ri_a(t)+e_b(t)=e_a(t)$（A）　$e_b(t)=K_b\frac{d\theta(t)}{dt}$　（B）

$\tau(t)=K_\tau i_a(t)$（C）　$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+B\frac{d\theta(t)}{dt}=\tau(t)$　（D）

$K(s)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s=K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$　（E）

伝達関数 P(s)を求める。

式(A)をラプラス変換し、$sLI_a(s)+RI_a(s)=E_a(s)-E_b(s)$　（A'）

次に、式(B)をラプラス変換し、$E_b(s)=sK_bY(s)$　（B'）

式(C)をラプラス変換し、$T(s)=KTI_a(s)$　（C'）

(B')、(C')を変形し、それぞれ(A')に代入し、$E_a(s)$についてまとめると、

$$E_a(s)=\frac{T(s)s(sL+R)+K_\tau sK_2}{K_\tau s}$$

そして、式(D)をラプラス変換して変形すると、$Y(s)=\frac{T(s)}{s(sJ+B)}$

よって、伝達関数 P(s)は、$P(s)=\frac{K_\tau}{s\{(Ls+R)(Js+B)+K_\tau K_b\}}$となる。

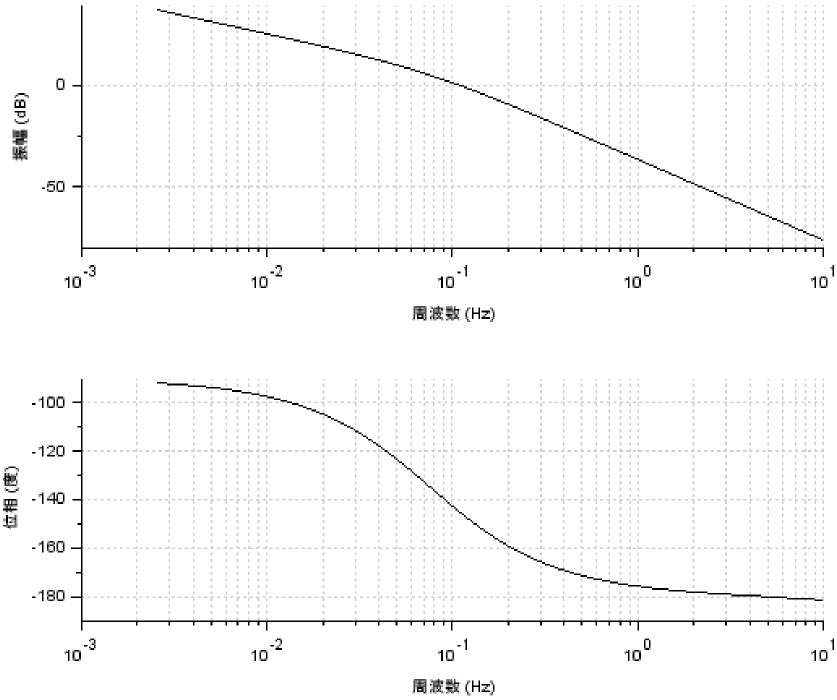
K(s)の極は s=0、零点は、$s=\frac{-K_P\pm\sqrt{K_P^2-4K_DK_I}}{2K_D}$

よって$K_P>0,\ K_I>0,\ K_D>0$のとき仮定(i)を満たし、また、仮定(ii)も満たす。

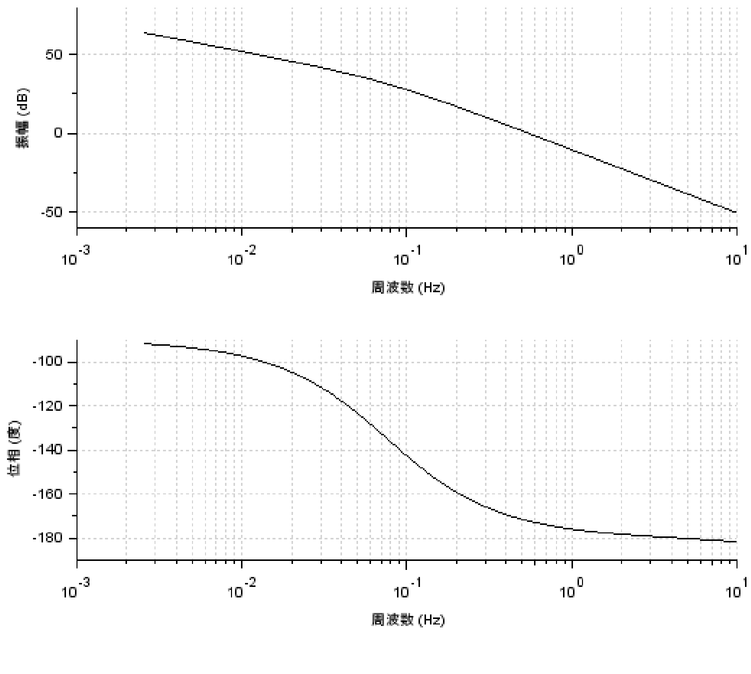
実験３

検討事項６(１) P 制御

$(K_P,K_I,K_D)=(1,0,0),(20,0,0),J=2$ としたときの Bode 線図を以下に示す。



$(K_P, K_I, K_D) = (1,0,0)$の Bode 線図



$(K_P, K_I, K_D) = (20,0,0)$の Bode 線図

図より、ゲイン交差周波数、位相交差周波数はなく、ゲイン余裕と位相余裕は

＋∞に発散する。

位置偏差定数K_P

$$K_P=\lim_{\mathrm{s}\to 0}L(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K_\tau K_p}{(Ls+R)(Js+B)+K_\tau K_b}=\frac{K_\tau K_p}{RB+K_\tau K_b}$$

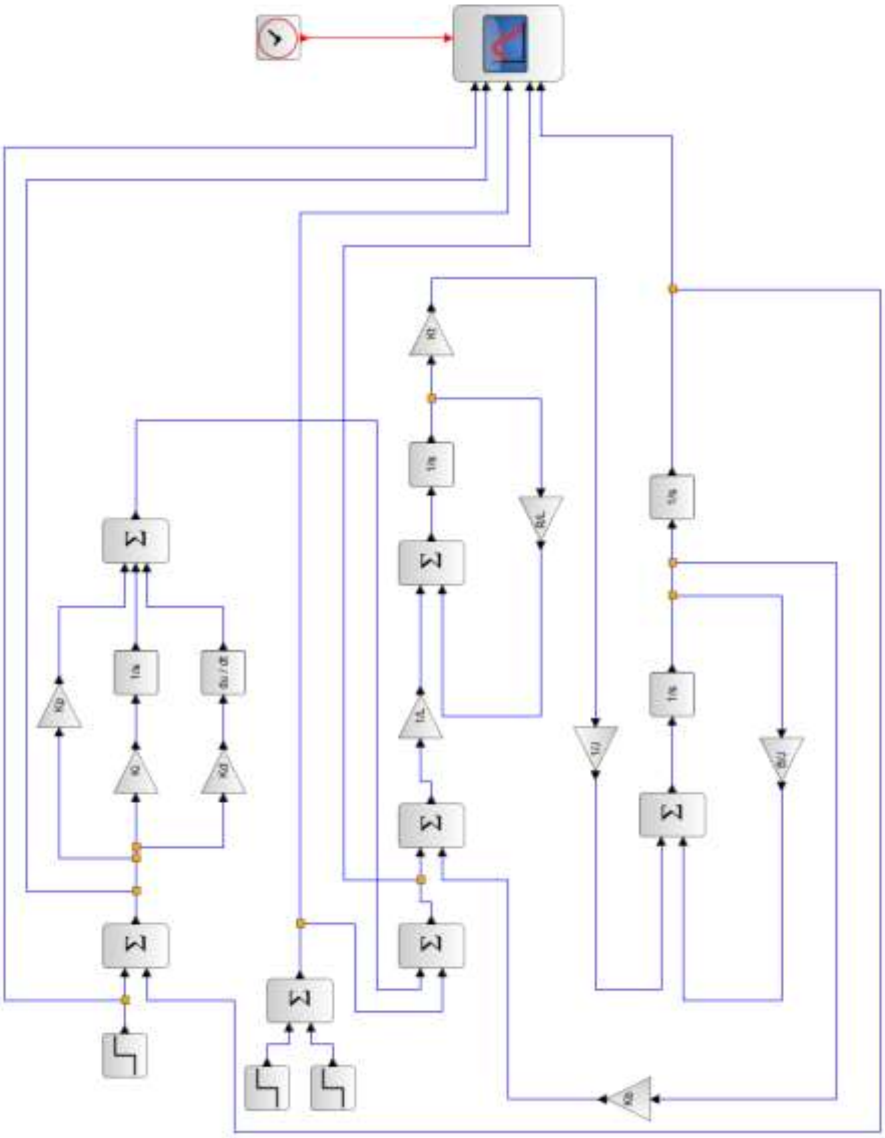
であり、定常位置偏差は、

$$e_s=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+L_{(s)}}\frac{1}{s}=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}L_{(s)}}=\frac{1}{1+\frac{K_\tau K_p}{RB+K_\tau K_b}}=\frac{RB+K_\tau K_b}{RB+K_\tau K_b+K_\tau K_p}$$

であり速度偏差定数K_Vは、

$$K_V=\lim_{s\to 0}sL(s)=\frac{K_\tau K_D}{LB+RJ}+\frac{K_\tau K_P}{RB+K_b K_\tau}$$

$(K_I,K_D)=(0,0)$からK_I,K_Dの項は消える。



実験３のブロック線図