数理統計学特論

199X223X 綿岡晃輝

神戸大学大学院 システム情報学研究科 計算科学専攻

1 $\sum_i \sum_j (Y_{ij} - Y_i\,.)(Y_i\,. - \bar{Y.}\,.) = 0$ を示せ.

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j (Y_{ij} - Y_i\,.)(Y_i\,. - \bar{Y}.\,.) &= \sum_i (Y_i\,. - \bar{Y}.\,.) \sum_j (Y_{ij} - Y_i\,.) \\
&= \sum_i (Y_i\,. - \bar{Y}.\,.)(\sum_j Y_{ij} - \sum_j Y_i\,.) \\
&= \sum_i (Y_i\,. - \bar{Y}.\,.)(nY_i\,. - nY_i\,.) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2 ダイヤ問題

2.1 w_1 カラットの大きいダイヤと w_2 カラットの小さいダイヤがある．天秤を用いて真値 w_1, w_2 を求めたい．ダイヤを天秤に 1 つずつ乗せて計測する実験を A とする．同じ皿に 2 つ乗せて和を測定し, 別の皿に 2 つ乗せて差を計測する実験を B とする．1 回の測定誤差が $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ に従うとき, B の実験誤差が A の実験誤差の $1/\sqrt{2}$ 倍になることを説明せよ．

実験 A:
大きいダイヤの観測値の確率変数を Y_1 とし, 小さいダイヤの観測値の確率変数を Y_2 とすると,

$$Y_1 = w_1 + \epsilon_1, \epsilon_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$
$$Y_2 = w_2 + \epsilon_2, \epsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

となるので,
Y_1, Y_2 はそれぞれ

$$Y_1 \sim \mathcal{N}(w_1, \sigma^2)$$
$$Y_2 \sim \mathcal{N}(w_2, \sigma^2)$$

に従う.

実験 B:
二つのダイヤの和の観測値の確率変数と二つのダイヤの差の観測値の確率変数を以下のようにおく.

$$\alpha = Y_1 + Y_2$$
$$\beta = Y_1 - Y_2$$

すると, それぞれは次のような分布に従う.

$$\alpha \sim \mathcal{N}(w_1 + w_2, 2\sigma^2)$$
$$\beta \sim \mathcal{N}(w_1 - w_2, 0)$$

よって,

$$Y_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \sim \mathcal{N}(w_1, \frac{2\sigma^2}{4}) = \mathcal{N}(w_1, (\frac{\sigma}{\sqrt{2}})^2)$$
$$Y_2 = \frac{\alpha - \beta}{2} \sim \mathcal{N}(w_2, \frac{2\sigma^2}{4}) = \mathcal{N}(w_2, (\frac{\sigma}{\sqrt{2}})^2)$$

となる.
つまり, B の実験誤差は A の実験誤差の $1/\sqrt{2}$ 倍になる.

2.2 ダイヤが 4 種類あるとき, 天秤に 1 つずつ乗せる実験と比べて, 実験誤差を 1/2 に抑えられる実験を計画しなさい.

4 種類のダイヤの観測値の確率変数を Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 とすると,

$$\begin{aligned} Y_1 &\sim \mathcal{N}(w_1, \sigma^2) \\ Y_2 &\sim \mathcal{N}(w_2, \sigma^2) \\ Y_3 &\sim \mathcal{N}(w_3, \sigma^2) \\ Y_4 &\sim \mathcal{N}(w_4, \sigma^2) \end{aligned}$$

に従う.

次に, 4 つの確率変数 $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ を次のようにおく.

$$\begin{aligned} \alpha &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ \beta_1 &= Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4 \\ \beta_2 &= Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \\ \beta_3 &= Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4 \end{aligned}$$

すると, それぞれは次のような分布に従う.

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \mathcal{N}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4, 4\sigma^2) \\ \beta_1 &\sim \mathcal{N}(w_1 + w_2 - w_3 - w_4, 0) \\ \beta_2 &\sim \mathcal{N}(w_1 - w_2 + w_3 - w_4, 0) \\ \beta_3 &\sim \mathcal{N}(w_1 - w_2 - w_3 + w_4, 0) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\alpha + \beta 1 + \beta 2 + \beta 3}{4} \sim \mathcal{N}(w_1, \frac{4\sigma^2}{16}) = \mathcal{N}(w_1, (\frac{\sigma}{2})^2) \\ Y_2 &= \frac{\alpha + \beta 1 - \beta 2 - \beta 3}{4} \sim \mathcal{N}(w_2, \frac{4\sigma^2}{16}) = \mathcal{N}(w_2, (\frac{\sigma}{2})^2) \\ Y_3 &= \frac{\alpha - \beta 1 + \beta 2 - \beta 3}{4} \sim \mathcal{N}(w_3, \frac{4\sigma^2}{16}) = \mathcal{N}(w_3, (\frac{\sigma}{2})^2) \\ Y_4 &= \frac{\alpha - \beta 1 - \beta 2 + \beta 3}{4} \sim \mathcal{N}(w_4, \frac{4\sigma^2}{16}) = \mathcal{N}(w_4, (\frac{\sigma}{2})^2) \end{aligned}$$

となる.
つまり, 以下のような手順で実験すると, 1 つ 1 つ計測する実験に比べて実験誤差が 1/2 になる.
4 つのダイヤを y_1, y_2, y_3, y_4 とした時,

- y_1, y_2, y_3, y_4 を同じ皿に乗せて和を計測する.
- y_1, y_2 を一つの皿に乗せて, y_3, y_4 をもう一つの皿に乗せて差を計測する.
- y_1, y_3 を一つの皿に乗せて, y_2, y_4 をもう一つの皿に乗せて差を計測する.
- y_1, y_4 を一つの皿に乗せて, y_2, y_3 をもう一つの皿に乗せて差を計測する.