数理統計学特論

199X223X 綿岡晃輝

神戸大学大学院 システム情報学研究科 計算科学専攻

1　BIBD(11, 11, 5, 5, 2) と BIBD(13, 13, 4, 4, 1) を作れ.

2　$z^2 = 6x^2 - y^2$ は自明な解しか持たないことを示せ.

$z^2 = 6x^2 - y^2$ は自明な解以外を持つと仮定し, 矛盾を導く.
任意の整数 k に対して,

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \ (mod.3) \tag{1}$$
$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \ (mod.3) \tag{2}$$

が言える.

$$\begin{aligned} x &= 3^{\alpha}x' \ (\alpha \in 0 \cup \mathbb{N}, x' : 3 \text{ の倍数でない整数}) \\ y &= 3^{\beta}y' \ (\beta \in 0 \cup \mathbb{N}, y' : 3 \text{ の倍数でない整数}) \\ z &= 3^{\gamma}z' \ (\gamma \in 0 \cup \mathbb{N}, z' : 3 \text{ の倍数でない整数}) \end{aligned}$$

とおき, 一般性を失わないので, $\beta \geq \gamma$ とすると,

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 6(3^{\alpha}x')^2 \\ &= 3^{2\alpha+1}\{2(x')^2\} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= (3^{\beta}y')^2 + (3^{\gamma}z')^2 \\ &= 3^{2\gamma}\{(3^{\beta-\gamma}y')^2 + (z')^2\} \end{aligned}$$

となる.
ここで, x' は 3 の倍数ではないため, (1),(2) より $2(x'^2) \equiv 2 \ (mod.3)$ となる.
また, $(3^{\beta-\gamma}y')^2 \equiv 0, (z')^2 \equiv 1 \ (mod.3)$ なので, $(3^{\beta-\gamma}y')^2 + (z')^2 \equiv 1 \ (mod.3)$ となる.
つまり, $2(x')^2$ も $(3^{\beta-\gamma}y')^2 + (z')^2$ も 3 の倍数にはならない.
故に, $6x^2$ と $y^2 + z^2$ を素因数分解した時, 3 の累乗が同じにならないため,

$$6x^2 \neq y^2 + z^2$$

となり, 矛盾.
従って,$z^2 = 6x^2 - y^2$ は自明な解しか持たない.