第一章　Fixed-income instruments

- **複利スポットレート**$(L(t,T),R(t,T))$と時刻tにおける満期Tの**債券価格**$B(t,T)$

$$L(t,T)=\frac{1-B(t,T)}{(T-t)B(t,T)} \quad \underset{連続}{\Longrightarrow} \quad R(t,T)=-\frac{\ln B(t,T)}{T-t} \tag{1.1)(1.3}$$

- FRA は将来の金利を現時点で決めておき、決済時にＬＩＢＯＲレートとの差金決済を行う。現在価値を 0 にする固定金利を**フォワード LIBOR レート**または**フォワードレート**と呼ぶ。$t<S<T$、$\tau=T-S$とする。

$$F(t;S,T)=\frac{B(t,S)-B(t,T)}{\tau B(t,T)} \tag{1.6}$$

- フォワード債券価格と連続・瞬間フォワードレート

連続複利のフォワードレート$\boldsymbol{R(t;S,T)}$： $R(t;S,T)=-\frac{1}{T-S}\ln\frac{B(t,T)}{B(t,S)}$

瞬間フォワードレート：$f(t,T)=\lim_{\delta T\to 0}R(t,T,T+\delta T)=-\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}$

瞬間ショートレート$\left(リスクフリーレート\right)$：$r(t)=f(t,t)$

- 変動利付債：クーポンが LIBOR レートの利付債の価格$B_{\text{floating}}(t)$

$$B_{\text{floating}}(t)=\sum_{i=1}^{n}\tau NL(T_{i-1},T_i)B(t,T_i)+NB(t,T_n)=NB(t,T_0)$$

- **スワップレート**$S_{0,n}(t)$はスワップの価値が 0 になるような固定金利である。

$$S_{0,n}(t)=\frac{B(t,T_0)-B(t,T_n)}{\sum_{i=1}^{n}\tau_i B(t,T_i)}$$

- イールドカーブの構築
  - フォワードレートを推計する方法
    フォワードレートを以下のように仮定する。

$$f(t,T)=\begin{cases} f_1 & (t\le T\le T_{n_1}) \\ f_{i+1} & (T_{n_i}\le T\le T_{n_{i+1}}) \end{cases}$$

各iごとにスワップ価値を 0 とした式を算出し、f_iを逐次的に算出する。ここで$r_i=S_{0,n_i}(t)$、利払間隔$\tau_j=T_j-T_{j-1}$とする。

$$B(t,T_0)-B\left(t,T_{n_i}\right)=r_i\sum_{j=1}^{n_i}\tau_i B\left(t,T_j\right) \tag{1.17}$$

$$B\left(t,T_j\right)=\exp\left(-\int_t^{T_j}f(t,u)du\right)$$

  - ブートストラップ法
    （1.17）式より、

$$B\left(t,T_{n_i}\right)=\frac{B(t,T_0)-\sum_{j=1}^{n_i-1}r_i\tau_j B\left(t,T_j\right)}{1+\tau_{n_i}r_i} \tag{1.17}$$