7.3 ファクターモデル

ファクターモデル
分析の対象となる資産に共通の変動要因があるものと仮定し、それをファクターとして価格付けを行なおうとするもの。

- 単一ファクターモデル
  - 仮定①：収益率の式

$\boldsymbol{z}_k = a_k + d_k F + \boldsymbol{e}_k,\ \ k = 1, \dots, K$		(7-14)
$\boldsymbol{z}_k$	第k資産の収益率	
F	各資産に共通のファクター	
a_k, d_k	係数	
$\boldsymbol{e}_k$	第k資産の誤差項	

  - 仮定②：誤差項に関する仮定（回帰分析を可能とする仮定と同じ）

$E(\boldsymbol{e}_k) = 0,\ \ k = 1, \dots, K$	(7-15)
$E(F\boldsymbol{e}_k) = 0,\ \ k = 1, \dots, K$	(7-16)
$E(\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_j) = 0,\ \ k = 1, \dots, K$	(7-17)

  - 平均分散フロンティアを決定するのに必要な情報の数が上記の仮定で大幅に削減
    - ✓ 仮定を置かない場合：$2K + \frac{1}{2}K(1+K)$

      K個の資産の収益率（K個）と分散共分散行列（$K(1+K)/2$）

    - ✓ 仮定を置く場合：$3K + 2$

      期待値と分散・共分散は以下のように表される。

$E(\boldsymbol{z}_k) = a_k + d_k E(F)$	(7-18)
$d_k = \dfrac{cov(z_k, F)}{\sigma_F^2}$	(7-19)
$\sigma_k^2 = d_k^2 \sigma_F^2 + \sigma_{e_k}^2$	(7-21)
$\sigma_{kj} = d_k d_j \sigma_F^2\ \ (k \neq j)$	(7-22)

これらを決定するため、以下の情報が必要

a_k	K個
$\sigma_{e_k}^2$	K個
$cov(z_k, F)$	K個
$E(F), \sigma_F^2$	2個

  - ポートフォリオの収益率

$\boldsymbol{z}_p = \sum_{k=1}^{K} \omega_k \boldsymbol{z}_k = a_p + d_p F + \boldsymbol{e}_p$	

$E(\boldsymbol{z}_p) = a_p + d_p E(F)$	
$\sigma_p^2 = d_p^2 \sigma_F^2 + \sum_{k=1}^{K} \omega_k^2 \sigma_{e_k}^2$	

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= E\left(z_p - E(z_p)\right)^2 \\
&= E\left(d_p[F - E(F)] + \boldsymbol{e}_p\right)^2 \\
&= d_p E\left(F - E(F)\right)^2 + 2d_p E\left(\boldsymbol{e}_p\left(F - E(F)\right)\right) + E(\boldsymbol{e}_p^2) \\
&= d_p E\left(F - E(F)\right)^2 + E(\boldsymbol{e}_p^2) \\
&= d_p \sigma_F^2 + \sum_{k=1}^{K} \omega_k^2 \sigma_{e_k}^2
\end{aligned}$$

$E(z_p) = a_p + d_p E(F)$を代入

$$E\left(\boldsymbol{e}_p\left(F - E(F)\right)\right) = E(\boldsymbol{e}_p F) - E\left(\boldsymbol{e}_p E(F)\right) = 0$$

- 分散可能リスクの性質

  ${\sigma_{e_k}}^2 = s^2,\ \omega_k = \frac{1}{K}$ $({}^{\forall}k)$とすると、

$$\sigma_p^2 = d_p^2 \sigma_F^2 + \frac{s^2}{K}$$

  - 第一項：$d_p^2 \sigma_F^2$

    市場リスクに対応

  - 第二項：$\frac{s^2}{K}$

    個別資産に起因するリスク$\boldsymbol{e}_k$は (7-17) 式の仮定によりお互いに無相関なので分散投資によりゼロに近づけることができる。

- 複数ファクターのモデル
  - 米国の場合に株式市場を表すには 3～15 個程度のファクターが必要になる
  - ファクターとなる変数として以下のようなものがある
    - ・ マクロ経済の変数（GDP や消費者物価指数等）
    - ・ 個別資産の収益率に影響を及ぼすことが知られている市場関連の変数
    - ・ 企業に固有の変数（株価収益率）

7.4 裁定価格モデル

- 単一ファクターの裁定価格モデル
  - 一定の仮定の下でファクターを基準資産とするベータ価格式を導く
  - 次の仮定をする。

$\boldsymbol{z}_k = a_k + d_k F$	(7-26)
$b_k = \frac{d_j}{d_j - d_k}$ $b_j = 1 - b_k = \frac{d_k}{d_k - d_j}$	

- このポートフォリオの収益は以下のように定数となる

$$\frac{a_k d_j - a_j d_k}{d_j - d_k}$$

- 無裁定であるためには

$$\frac{a_k d_j - a_j d_k}{d_j - d_k} = R_f \qquad \therefore \frac{a_j - R_f}{d_j} = \frac{a_k - R_f}{d_k} = C\left(\text{一定}\right)$$

$$\therefore a_k = R_f + d_k C$$

- (7-26)と組み合わせると、以下のベータ価格式が導ける

$E(\boldsymbol{z}_k) = R_f + d_k\gamma \quad \left(\gamma \equiv C + E(F)\right)$	(7-29)

- 代替的な証明
  - (7-29)の証明を別の方法で行う
  - 例として 3 つの資産が存在し、収益率が以下のように書けるとする。

$$z_1 = a_1 + d_1 F$$
$$z_2 = a_2 + d_2 F$$
$$z_3 = a_3 + d_3 F$$

  - 各資産への投資額をx_1, x_2, x_3として、以下の式を仮定

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_3 d_3 = 0$$

  - $e_k = E(z_k) - \gamma_0 - \gamma d_k$とする。この時、無裁定条件を使うと$\sum_{k=1}^{3} x_k e_k = 0$となる
  - 特に$x_k = e_k$とすれば、$\sum_{k=1}^{3} e_k^2 = 0$なので、任意のkについて$e_k = 0$となる。
  - したがって、$E(z_k) = \gamma_0 + \gamma d_k$が成立する。
- 本章前半を用いる照明
  - ベータ価格式を成立させる基準収益率は確率的割引ファクターと$\mathbf{1}_{\boldsymbol{\phi}}$一次結合で表される資産であったはず
  - 全ての資産が単一ファクターモデルで書けるのであればすべての資産は他の資産の一次結合で書ける。➡したがってファクターFも確率的割引ファクターの一次結合になる

  - 誤差項無しの単一ファクターモデルが成立するなら、すべての資産は平均分散フロンティア上にある。
  - したがって、どの資産の収益率を基準にしてもベータ価格式が成立する。

  - もし誤差無しの単一ファクターモデルが厳密に成立するなら確率的割引ファクターですべての資産の価格付けができるので複数のファクターは必要にならない。

- しかし、現実の分析で用いられる F は確率的割引ファクターの一次結合ではないので、上記のベータ価格式も正確には成り立たない。
- よって複数ファクターを考えることで近似の精度を上げることが考えられる。

● 複数ファクターの裁定価格モデル

- K 個の資産が存在し、次のように書けると仮定

$$z_k = a_k + \sum_{j=1}^{N} d_{kj} F_j$$

- 投資額$\boldsymbol{x}$についての仮定

$$\boldsymbol{x}'\mathbf{1} = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{d_n} = \mathbf{0}$$

- $\boldsymbol{\epsilon}$について

$$\boldsymbol{\epsilon} = E(\bar{z}) - (\gamma_0 \mathbf{1} + \gamma_1 \boldsymbol{d_1} + \cdots + \gamma_N \boldsymbol{d_N}) \neq 0$$

- $\boldsymbol{\gamma}$を調整する事で$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{z}}) \neq \mathbf{0}$とできるが、無裁定条件より禁止されるので、

$$E(\bar{z}) = (\gamma_0 \mathbf{1} + \gamma_1 \boldsymbol{d_1} + \cdots + \gamma_N \boldsymbol{d_N})$$

- 各資産の誤差項を 0 としたが、各資産へのウェイトが 1/N で近似でき、それぞれの資産の分散がある定数s^2より小さければ、ポートフォリオの分散がs^2/N以下になる。Nが十分大きければ誤差項は無視できる。

7.4 裁定価格モデルの実際

ステップ 1：ファクターの特定

次に示すようなものを中心として 4〜5 個程度を使うことが多い

- $F_1 =$ 経済成長率
- $F_2 =$ インフレ率
- $F_3 =$ 長短金利のスプレッド
- $F_4 =$ 為替レート

ステップ 2：係数d_{kj}の推定

次の回帰式を立てて、重回帰分析をする。

$$\boldsymbol{z}_k = a_k + d_{k1}F_1 + d_{k2}F_2 + d_{k3}F_3 + d_{k4}F_4 + \boldsymbol{\epsilon}$$

ステップ 3：ファクターのリスクプレミアムを求める

以下の式にデータから計算された$E(\mathbf{z}_k)$を代入して計算する。

$$E(\mathbf{z}_k) = R_f + \gamma_1 d_{k1} + \gamma_2 d_{k2} + \gamma_3 d_{k3} + \gamma_4 d_{k4}$$

ステップ 4：目的資産の期待収益率を求める

- 目的の資産の収益率とファクターの時系列データを用いて回帰分析を行い、この資産についてのd_{kj}を求める。
- γの値が計算されているので、(7-35) から期待収益率を求められる。