現代ファイナンス理論

10 月 20 日

1　資産収益の直交分解と平均・分散フロンティア

1.1　収益率の直交分解と平均・分散フロンティアの導出:不完備市場の場合

- 完備市場の場合 $\rightarrow$ 全ての状態において 1 のペイオフをもたらす資産 $\mathbf{1}$（安全資産）が必ず存在.
- **不完備市場の場合** $\rightarrow$ 安全資産 $\mathbf{1}$ は, 資産のペイオフ空間 H に属する場合とそうでない場合がある.

安全資産 $\mathbf{1}$ が H に属さない場合の収益率の直交分解

$\boldsymbol{\phi}$: 確率的割引ファクター $\boldsymbol{\xi}$ をペイオフ空間の部分空間 H に射影したもの．つまり,

$$\boldsymbol{\phi} \equiv \mathrm{proj}(\boldsymbol{\xi}|H).$$

部分空間 H に属する資産については,$\boldsymbol{\phi}$ は正しい価格付けを行う.
$\forall \boldsymbol{v} \in H$, $\boldsymbol{\xi}$ は確率的割引ファクターなので, $\boldsymbol{v}$ の資産価格 q_v は以下で表される.

$$q_v = \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{v}].$$

数学解説編 6.2 の示す事実を用いることで, $\forall \boldsymbol{v} \in H$

$$q_v = \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{v}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{v}].$$

が成り立つ．つまり, $\boldsymbol{\phi}$ が $\boldsymbol{v} \in H$ に対して正しい価格付けをすることになる.
前回の議論における $\boldsymbol{\xi}$ を $\boldsymbol{\phi}$ に置き換えることで, 収益率の直交分解に関する議論がすべて成立する．置き換えは, 以下の通り.

置き換え方

(1) $\boldsymbol{\xi}$ を $\boldsymbol{\phi}$ に置き換える.

(2) $\boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\xi}} \to \boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}}$
収益率のベクトル

$$\boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\boldsymbol{\phi}}{\mathbb{E}[\boldsymbol{\phi}^2]}$$

は, $\boldsymbol{\phi}$ と同方向の収益率を表す.

(3) $\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\xi}} \to \boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}}$
任意の収益率 $\boldsymbol{z}$ に対して,

$$\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}} \equiv \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}}$$

とすると, $\boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}}$ と $\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}}$ は $\mathbb{E}$ 内積で直交している.

(4) $R^e_{\xi} \to R^e_{\phi}$
$\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}}$ をペイオフとする資産の価格 $q^e_{\boldsymbol{\phi}}$ はゼロ. このとき, ゼロ価格超平面[a] $R^e_{\boldsymbol{\phi}}$ は,

$$R^e_{\boldsymbol{\phi}} \equiv \{\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}} \in H \,|\, \mathbb{E}[\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}}] = 0\}.$$

(5) 安全資産 $\mathbf{1}$ を H へ射影する. (前回手順にはない.)

$$\mathbf{1}_{\boldsymbol{\phi}} \equiv \mathrm{proj}(\mathbf{1}|H).$$

(6) $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}$
$\mathbf{1}_{\boldsymbol{\phi}}$ をゼロ価格超平面へ射影したものを $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}$ とする.

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}} \equiv \mathrm{proj}(\mathbf{1}_{[}\boldsymbol{\phi} \,|\, R^e_{\boldsymbol{\phi}}]) = \mathbf{1}_{\boldsymbol{\phi}} - \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}}]}{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}})^2]}\boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}}.$$

(7) $\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\xi}} = \omega_{\xi}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\xi}}$ に関して, $\omega_{\xi} \to \omega_{\boldsymbol{\phi}}$
$\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}}$ を直交分解したときの係数 $\omega_{\boldsymbol{\phi}}$ は,

$$\omega_{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}}]}{\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]}.$$

[a] 確率的割引ファクター $\boldsymbol{\phi}$ と直交しているベクトルの集合

このとき, (6.9) 式を除いた (6.2) 式から (6.14) 式までに対応する式がすべて成立する. $\forall \boldsymbol{v} \in H$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{v}] = \sum_{i=1}^{K} \pi_i v_i = \mathbb{E}[\boldsymbol{v}].$$

また, $\forall \boldsymbol{v} \in R^e_{\boldsymbol{\phi}}$,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{v}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{v}] - \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}}]}{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}^e_{\boldsymbol{\phi}})^2]}\underbrace{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{v}]}_{=0} = \mathbb{E}[\boldsymbol{v}].$$

が成り立ち, したがって,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{f}^2_{\boldsymbol{\phi}}].$$

以上より, $\forall \boldsymbol{z} \in H$,

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^*_{\boldsymbol{\phi}} + \omega_{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\phi}}. \tag{6-14'}$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_\phi \boldsymbol{f}_\phi] = 0, \mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{f}^*_\phi} \boldsymbol{\epsilon}_\phi] = 0, \mathbb{E}[\boldsymbol{f}_\phi \boldsymbol{\epsilon}_\phi] = 0.$$

安全資産 1 が H に属さない場合の平均・分散フロンティアの具体化

任意の収益率 $\boldsymbol{z} \in H$ の直交分解

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^*_\phi + \omega_\phi \boldsymbol{f}_\phi + \boldsymbol{\epsilon}_\phi.$$

分散については,(6.15) 式をそれぞれの記号に置き換えた式

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{ver}(\boldsymbol{z}^*_\phi + \omega_\phi \boldsymbol{f}_\phi) + \mathrm{var}(\boldsymbol{\epsilon}_\phi) \tag{6-15'}$$

分散を最小にする収益率は,$\boldsymbol{\epsilon}_\phi = \mathbf{0}$ となる収益率, つまり

$$\boldsymbol{z}^m_\phi = \boldsymbol{z}^*_\phi + \omega_m \boldsymbol{f}_\phi. \tag{6-16'}$$

この集合が部分空間 H における, 平均・分散フロンティアとなる.
ここで,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_\phi] < 1 - \frac{(\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_\phi])^2}{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}^*_\phi)^2]}$$

であるから,$A_\phi C_\phi - B^2_\phi \neq 0$. したがって,(6-23)' 式に対応する σ の軌跡は双曲線となる.

1.2 確率的割引ファクターと平均・分散フロンティアの性質

以下の議論は, 完備市場・不完備市場によらず成り立つ. 収益率の $\boldsymbol{z}$ の分散は,

$$\mathrm{ver}(\boldsymbol{z}) \equiv \sigma^2 = \mathbb{E}[\boldsymbol{z}^2] - \eta^2.$$

平均・分散フロンティアと共通点を持つ円の内, $\mathbb{E}[\boldsymbol{z}]$ が最小になるのは, フロンティアに接する円.

2 次モメント最小点

2 次モメント最小点の求め方.

- 原点を中心とする円の方程式 $\eta^2 + \sigma^2 = c^2$ を全微分 $\rightarrow \dfrac{d\eta}{d\sigma} = -\dfrac{\eta}{\sigma}$.
- (6.23)' の全微分
$$\frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{\sigma}{A_\phi \eta - B_\phi} \tag{6-28}$$
と比較して,2 次モメント最小の期待収益率 η^{ms} を得る.
$$\eta^{ms} = \frac{B_\phi}{A_\phi + 1} = \mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_\phi]. \tag{6-29}$$
- 接線の傾き $\dfrac{\sigma^{ms}}{\eta^{ms}}$ を導出し,E 点を通る接線が y 軸と交わる点 D の縦座標を求める.
$$\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_\phi] + \frac{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}^*_\phi)^2] - \mathbb{E}[(\boldsymbol{z}^*_\phi)]^2}{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_\phi]} = \frac{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}^*_\phi)]^2}{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^*_\phi]} \tag{6-30}$$

$\boldsymbol{z}^*_\phi$ のゼロベータ収益率の表現

△ODE と △OEF の相似性より,

$$OD = \frac{(OE)^2}{OF} = \frac{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*)^2]}{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]} := \gamma$$

図 6-7 の点Dからの水平線と平均・分散フロンティアの交点をGとする.
G で表される収益率 $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*$→「$\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*$ に対するゼロベータ収益率」

$$\gamma = \mathbb{E}[\boldsymbol{z}^\gamma] = \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*\boldsymbol{z}^\gamma]}{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]} = \frac{1}{\mathbb{E}[\boldsymbol{\phi}]} \qquad (\because)\ \mathrm{cov}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*\boldsymbol{z}^\gamma) = 0 \tag{6-31}$$

$$\downarrow$$

$\boldsymbol{z}^\gamma$ はリスク性資産だから, 収益率そのものが γ になるのではなく, 期待収益率が γ になる.
ゼロベータ収益率 $\boldsymbol{z}^\gamma$ を (6-14)' 式で書く.

$$\boldsymbol{z}^\gamma = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^* + \omega^\gamma \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}$$

と書き, 両辺に期待値を取り, ω^γ について解くと,

$$\omega^\gamma = \frac{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*)^2] - \mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*)]^2}{\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]} = \frac{\mathrm{ver}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*)}{\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]}$$

以上より, ゼロベータ収益率 $\boldsymbol{z}^\gamma$ を (6-14)' 式で書くと,

$$\boldsymbol{z}^\gamma = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^* + \frac{\mathrm{ver}(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*)}{\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}} \tag{6-32}$$

最小分散収益率の表現

平均・分散フロンティア上の収益率：$\boldsymbol{z}^m = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^* + \omega_m \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}$
分散を計算すると,

$$\mathrm{ver}(\boldsymbol{z}^m) = \mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*)^2] + \omega_m^2\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}^2] - \mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]^2 - 2\omega_m\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}] - \omega_m^2\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]^2 \tag{6-33}$$

ここで, $\boldsymbol{z} \in R_{\boldsymbol{\phi}}^e$ として, (6-33) 式を ω_m について微分して, ゼロとおくと

$$\omega_m = \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]}{1 - \mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]}$$

これが最小分散を与える．最小分散収益率 $\boldsymbol{z}^{mv}$ を (6-14)' 式の形で書くと

$$\boldsymbol{z}^{mv} = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^* + \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]}{1 - \mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}. \tag{6-34}$$

6-34 式の期待値をとると,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{z}^{mv}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*] + \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^*]}{1 - \mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]}\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}] = \omega_m \tag{6-35}$$

安全資産の収益率の表現

$\boldsymbol{r}_f$：安全資産が存在する場合の収益率.
$\boldsymbol{r}_f$ を (6-14) ’ 式の形で書くと,

$$\boldsymbol{r}_f = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\phi}}^* + \omega^f \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}. \qquad (\because)\quad \boldsymbol{\epsilon}\text{成分は存在しない.}$$

先ほど同様に, ω^f の値を求める．数学解説編の射影定理を用いれば,

$$\mathrm{proj}(\boldsymbol{r}_f \,|\, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}) = \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{r}_f\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}]}{\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}^2]}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}} = R_f\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}} \qquad (\because)\quad \mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\phi}}^2]$$

したがって,

$$\boldsymbol{r}_f = \boldsymbol{z}_\phi^* + R_f \boldsymbol{f}_\phi \tag{6-36}$$

まとめ

(1) ゼロベータ収益率 $\boldsymbol{z}^\gamma$:

$$\boldsymbol{z}^\gamma = \boldsymbol{z}_\phi^* + \frac{\mathrm{ver}(\boldsymbol{z}_\phi^*)}{\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_\phi]\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*]}\boldsymbol{f}_\phi \tag{6-37}$$

(2) 最小分散収益率 $\boldsymbol{z}^{mv}$:

$$\boldsymbol{z}^{mv} = \boldsymbol{z}_\phi^* + \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*]}{1-\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_\phi]}\boldsymbol{f}_\phi. \tag{6-38}$$

(3) 安全資産収益率 $\boldsymbol{r}_f$:

$$\boldsymbol{r}_f = \boldsymbol{z}_\phi^* + R_f \boldsymbol{f}_\phi \tag{6-39}$$

安全資産が存在する場合は, これらがすべて等しくなる．これは, 次のように証明できる．(6-39) 式の期待値をとると,

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{r}_f] = R_f = \mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*] + R_f\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_\phi] \tag{6-40}$$

これを R_f について解くことで (6-38) と (6-39) が同じことが分かる．
安全資産が存在する場合には, その収益率は γ に等しいので,(6-31) 式の γ の定義より,

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_\phi^*)^2]}{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*]}.$$

これを,(6-39) に代入し,R_f について解くと,

$$R_f = \frac{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_\phi^*)^2] - \mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_\phi^*)]^2}{\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_\phi]\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*]} = \frac{\mathrm{ver}(\boldsymbol{z}_\phi^*)}{\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_\phi]\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*]}$$

となるので,(6-37) 式と (6-39) が等しいことが分かる．

確率的割引ファクターに関する制約

$\boldsymbol{V}$: (S × K) のペイオフ行列
$\boldsymbol{V} - \mathbb{E}[\boldsymbol{V}]$: $v_k - \mathbb{E}[v_k]$ を第 k 列とする (S × K) の行列.
$\hat{\boldsymbol{\phi}}$: H におけるペイオフを正しく価格付けるベクトル．すなわち, 価格ベクトルを $\boldsymbol{q}$ とすると,

$$\boldsymbol{q} = \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}\boldsymbol{V}] = \mathbb{E}[(\boldsymbol{V}-\mathbb{E}[\boldsymbol{V}])'(\hat{\boldsymbol{\phi}}-\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}])] + \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}]\mathbb{E}[\boldsymbol{V}] \tag{6-41}$$

ここで,$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ を次の形に書く．

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\boldsymbol{V}-\mathbb{E}[\boldsymbol{V}])\boldsymbol{\beta} + \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}] + \boldsymbol{\epsilon}. \tag{6-42}$$

(6-42) 式を (6-41) 式に代入して, $\boldsymbol{\beta}$ について解くと,

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\boldsymbol{q} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}]\,\mathbb{E}[\boldsymbol{V}]] \tag{6-43}$$

ただし,

$$\Sigma \equiv \mathbb{E}[\boldsymbol{V}-\mathbb{E}[\boldsymbol{V}]]'[\boldsymbol{V}-\mathbb{E}[\boldsymbol{V}]].$$

これは, ペイオフ $\boldsymbol{V}$ の分散共分散行列である．(6-43) 式を (6-42) 式に代入すると,

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = [\boldsymbol{V}-\mathbb{E}[\boldsymbol{V}]]\boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\boldsymbol{q} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}]\,\mathbb{E}[\boldsymbol{V}]] + \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}] + \boldsymbol{\epsilon}$$

これを用いて,$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ の分散を求めると,

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\hat{\boldsymbol{\phi}}) &= \mathbb{E}[(\hat{\boldsymbol{\phi}} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}])^2] \\
&= \mathbb{E}[((\boldsymbol{V} - \mathbb{E}[\boldsymbol{V}])\Sigma^{-1}(\boldsymbol{q} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}]\,\mathbb{E}[\boldsymbol{V}]) + \boldsymbol{\epsilon})^2] \\
&\geq \mathbb{E}[(\boldsymbol{q} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}]\,\mathbb{E}[\boldsymbol{V}])'\Sigma^{-1}\underbrace{(\boldsymbol{V} - \mathbb{E}[\boldsymbol{V}])'(\boldsymbol{V} - \mathbb{E}[\boldsymbol{V}])}_{=\Sigma}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{q} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}]\,\mathbb{E}[\boldsymbol{V}])] \qquad (6\text{-}44) \\
&= (\boldsymbol{q} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}]\,\mathbb{E}[\boldsymbol{V}])'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{q} - \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\phi}}]\,\mathbb{E}[\boldsymbol{V}])
\end{aligned}$$

となる．(6-44) 式で表される条件は, Hansen-Jagannathan bound と呼ばれる．

1.3 収益率の直行分解に関する数値例

確率的割引ファクターを用いた分解

初めに完備市場を想定して計算．また，データは 5.4 で使用したものを利用する．完備市場において，任意の収益率 $\forall z_k \in \mathbb{R}^s$ を E 内積を用いて直行分解すると，以下となった．

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{z}^*_\xi + \epsilon_k \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\epsilon}_k.$$

今までの導出式を利用することで，資産 2 の収益率は以下で分解される．

$$\begin{pmatrix} 4.731 \\ 1.182 \\ 0.473 \\ 0.473 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.325 \\ 0.433 \\ 0.661 \\ 0.808 \\ 2.814 \end{pmatrix} + 2.431 \times \begin{pmatrix} 0.696 \\ 0.595 \\ 0.382 \\ 0.245 \\ -1.629 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.714 \\ -0.697 \\ -1.117 \\ -0.931 \\ 1.146 \end{pmatrix}$$

計算結果の確認はエクセルに記載の通り．
不完備市場を考える．資産 2 に加えて資産 1 と資産 3 が取引されていると仮定．この時，確率的割引ファクター $\boldsymbol{\xi}$ の部分空間 H へ射影した $\boldsymbol{\phi}$ は,

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} 0.484 \\ 0.705 \\ 0.705 \\ 1.283 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. 実際，資産のペイオフ行列 V を

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とし，P216 の (A-12) 式

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{V}[\mathbb{E}(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V})]^{-1}\mathbb{E}(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{\xi}) \qquad (\text{A-12})$$

を利用すると結果が得られる．
$\boldsymbol{\phi}$ は，ベクトルの第 5 成分が 0 である資産に対しては正しい価格付けを行う．また，資産 2 に対して $\boldsymbol{\phi}$

は正しい価格付けを行い，収益率 $\boldsymbol{z}_\phi$ は，以下で分解される．

$$\begin{pmatrix} 4.731 \\ 1.182 \\ 0.473 \\ 0.473 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.818 \\ 1.190 \\ 1.191 \\ 2.167 \\ 0 \end{pmatrix} + 5.076 \times \begin{pmatrix} 0.408 \\ 0.176 \\ -0.031 \\ -0.517 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.838 \\ -0.903 \\ -0.562 \\ 0.933 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appendix

(6.9) 式が成り立たない理由について

$\boldsymbol{f}_\phi$ の両辺に期待値をとると,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\boldsymbol{f}_\phi] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_\phi - \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*]}{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_\phi^*)^2]}\boldsymbol{z}_\phi^*] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_\phi] - \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*]^2}{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_\phi^*)^2]} \\ &< 1 - \frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{z}_\phi^*]^2}{\mathbb{E}[(\boldsymbol{z}_\phi^*)^2]}\end{aligned}$$

これより,(6.9) 式が成り立たないことが分かる.