2　多期間モデル：べき型効用のケース

* 基本的に、多期間モデルでは最適消費と最適投資が相互に依存
* Samuelson(1969)により、1期間効用関数及び遺産関数がCES型であれば消費と投資が独立に分析できることが示される。
* 本節では1期間効用関数としてべき型効用（CES型の一種）を仮定した場合に、最適消費と最適ポートフォリオの意思決定がどのようになされるかを説明する。

1. 時点における最適消費と最適投資の決定

以下の式を仮定する。

|  |  |
| --- | --- |
| ※は主観的割引因子。  ※労働所得は分析の簡略化のため0とする。 | (3.22) |

* + 最適消費
* 導出の概要と結果

価値関数を消費で偏微分して得られる(3.11)式に

を代入し、以下の式を得る。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.24) |

* について
* 限界消費傾向を表す。
* 算式には時点での条件付き期待値が含まれているので、その時点で利用可能な投資機会集合に対応した状態変数、金融資産の投資収益率にも依存する。
* 特に対数型効用（）で最適消費は投資機会集合から独立になる。
  + 最適投資

価値関数を投資比率で偏微分して得られる（3.9a）式にの具体形を代入することで、最終的に以下の式が導ける。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.25) |

この式には消費水準が含まれておらず、最適消費と独立に最適投資が決定される。

* + 価値関数

最適消費・最適投資の下での価値関数を導出する。

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.26) |

1. 任意の時点における最適消費と最適投資の決定

時点と一般の時点の最適消費・最適投資を明らかにする。

* + （）時点の最適消費
* 導出と結果

**導出**

価値関数を求め、包絡線条件に代入する。

・最適性原理により

* + - * （3.26）式を上式に代入
      * 包絡線条件に代入



**結果**





* 投資機会集合について
* (3.28b)の条件付き期待値を計算するにはを所与としたの分布が必要になる。また、(3.28c)に含まれる条件付き期待値を計算すするためにを所与としたの分布が必要になる。
* べき型効用をもつ消費者は現在のみならず将来のすべての投資機会集合を反映した最適ポートフォリオの投資収益率、および状態変数の確率分布を用いて最適消費を決定。
  + （）時点の最適投資
* 導出と結果

**導出**

(3.9a)式（最適投資の1階微分条件）において、をに置き換え、(3.26)式を代入。



**結果**



* 投資機会集合について
* の計算でを定める 、の同時分布が必要
* の計算ではを定める、の同時分布が必要
* 最適消費と同様将来の投資機会変動の影響をすべて反映させて最適ポートフォリオを組む必要がある。
  + 一般のについての最適消費
* 導出と結果

**導出**

価値関数を以下のようなべき型の関数形であると推測する。



その後の導出は時点の方法と同じ

**結果**



* 考察
* 時点（）の場合と同様に、将来のすべての投資機会集合に依存して決定される。
* 投資機会集合の変化について何らかの強い仮定を置かないと計算が困難
  + 一般のについての最適投資
* 導出と結果

**導出**

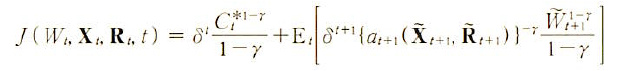
価値関数を以下のようなべき型の関数形であるとして、その後の導出は時点の方法と同じ。

**結果**



* 考察
* 時点（）の場合と同様に、将来のすべての投資機会集合に依存して決定される。
  + 価値関数の推測（3.31）について
* 最適消費と最適ポートフォリオから価値関数（3.31）が正しいことを検証する。
* 具体的には時点における価値関数を(3.31)式と仮定し、最適消費、最適ポートフォリオを用いつつ、時点での価値関数を算出し、(3.31)式と同じ形になるか確認する。
* 時点で価値関数を仮定してその仮定のもとで導いた最適消費・投資を用いて時点の価値関数を求めた際、(3.31)式と同じ形にならないと矛盾する。

時点での価値関数が(3.31)式と同じ形であるとする。この時、以下の式が成立する。



この式を整理し、



この式を代入すると、



が成立し、時点における価値関数も同じ形になることがわかる。

1. べき型効用、かつ、投資機会集合が一定の場合

* 一般的には最適消費・最適投資を解析的に表現することは困難だが、効用関数がべき型で今後の投資機会集合の変動が既知である場合は1期間モデルに帰着する事を確認。
* 投資家が第期期初の時点にいるとする。
* 時点を期初とする第期の投資機会集合が既知であると仮定することは個投資収益率（安全資産とリスク性資産銘柄）の同時確率分布が時点で分かっていると仮定することに他ならない。
* は時点において計算可能であり、確定値となる。したがって、(3.30)式より

となるため、最適投資の決定が最適消費を定める比例定数から独立に行われる。

* 最適投資を決定するために必要な情報を整理すると
  + 時点で既知と仮定したリスク性資産収益率の確率部分布
  + 時点の無リスク金利
  + 効用関数のパラメータ

個の最適化問題は時点において1期間将来を考えた問題になっており、1期間モデルと同じ構造

* 任意の時点の場合
* 考え方は時点の場合とほとんど同じ
* ただし、時点の場合とは異なり、の計算にはのすべての確率分布が必要になるが、全て時点で既知であると仮定しているので、が確定値となり、時点の時と同じ議論になる。