規制資本評価に対するグラニュラリティ調整

## 概要

* バーゼルⅡ，Ⅲにおける内部格付手法(IRB，internal ratings-based)に基づくValue at Riskでは分散投資により固有リスクは０であるとしている．そのため，エコノミックキャピタル[[1]](#footnote-1)は市場リスクにのみ晒される．
* この論文では
  + グラニュラリティ調整によって固有リスクの効果を近似的に計算する．
  + ポートフォリオに関する不完全な情報の下でGAの上界と下界を導出する．
  + ドイツの信用登録簿から抽出した銀行のポートフォリオを対象にGAの大きさと精度を評価する．

1. **導入**

* 内部格付手法では固有リスクは0であること，市場リスクが単一のリスク源にのみ起因することが仮定されている．したがって，適切な条件を置けば資本コストは解析的に導出される．
* モンテカルロシミュレーションと比較すると透明性や検証可能性等の観点からこのように解析的に導出できるような資本規制が良いとされる．
* 固有リスクが0であるという仮定は一部の大規模な金融機関ならば有用だが，中小規模であれば有用ではない．
* 必要となる資本に対する固有リスクの影響はGAを通して評価できる．
* この論文では銀行やその監督者が適用しやすいようなGAの手法を提案する．
* 銀行が同一の債務者に対して複数のエクスポージャーを持っている場合，GAの計算に必要な数値を計算するためには，これらの複数のエクスポージャーを単一のエクスポージャーに集約することが求められる．
* 多くの金融機関ではこのような集約をすることがGAを計算するうえで最も大きな課題となる．
* エクスポージャーの集約に伴う負担を軽減するために，改訂版GAでは，ポートフォリオ内の最大のエクスポージャーに基づいてGAを算出している．
* このようなオプションを認めるためには，規制当局は，銀行から提供された不完全なデータと整合性のある最大のGAを算出できなければならない．
* したがって，本論文のアプローチは，n個のローンのポートフォリオのうち，m個のエクスポージャーに関する完全なデータと，ポートフォリオの残りの部分に関するサマリーデータの関数として，GAの上限式を算出する．mがnに向かって大きくなるにつれて（つまり，銀行がポートフォリオのより大きなシェアに関するデータを提供するにつれて），上限式は「ポートフォリオ全体」のGAに収束する．
* この方法の利点は，銀行が，高い資本コスト（mが小さい場合）と高いデータ収集労力（mが大きい場合）の間のトレードオフに従ってmを選択することを認められ，それによって導入コストを削減できることです．
* 広く使われているCreditRisk+というポートフォリオの信用リスクのモデルに適用すると，結果として得られるGA式は特に扱いやすいものとなります．
* セクション4では，ドイツのローンのデータセットから抽出した現実的なポートフォリオに対するGAの大きさと精度を評価します．

1. **手法**

* IRBアプローチは，中程度の規模の銀行や異常なポートフォリオの集中にも適用される可能性があるため，固有リスクに対する資本が省略されると，場合によっては重大な資本不足につながる可能性がある．
* この論文で提案するGAは，CP2のオリジナルの提案を修正・拡張したもの．CP2のGAでは，第一段階の計算として，ポートフォリオを類似した特性を持つ同種のポートフォリオにマッピングする．一方で，この論文では異種のポートフォリオを直接計算に用います．
* その結果，アルゴリズムはよりシンプルになり，よりロバストになった．また，本論文の手法は，CP2とBasel II文書の最終版との間の規制資本の定義の変更に適応している．

**2.1 グラニュラリティ調整の一般的な導出**

まずはじめにいくつかの記号を定義する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | 市場リスク．１次元であると仮定する． |
|  | ポートフォリオのポジションの数．エクスポージャーの集約を行っていると仮定するため，各ポジションには単一の借り手しかいないと仮定する． |
|  | ポジションのデフォルト時貸出残高．確定的な量であると仮定する． |
|  | ポジションの損失率（デフォルトによる損失/）．確率的な量であるとする． |
|  | ポートフォリオの損失率 |
|  | 確率変数のパーセンタイル． |

は定義より以下の算式で算出できる．

ただし，とする．また，期待損失はの増加関数であるとする．

適切な条件の下ではポジション数が増加するにつれ，以下のようになる．

この差分は固有リスクに起因する．以降では左辺の絶対値の中身についてテーラー展開を行うことで評価する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | 確率密度関数がで表される確率変数 |
|  | 確率密度関数がで表される確率変数 |

確率変数をとすると，Ｗの確率密度関数は畳み込みになる．

図形

中程度の精度で自動的に生成された説明

被積分関数をテーラー展開すると以下のようになる．

図形

中程度の精度で自動的に生成された説明

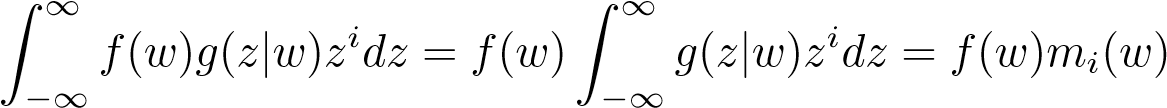
さらにフビニの定理を使うことで以下の式が導出できる．

図形

中程度の精度で自動的に生成された説明

をの番目のモーメントであるとする．

これを用いるとは以下のように書ける．



図形

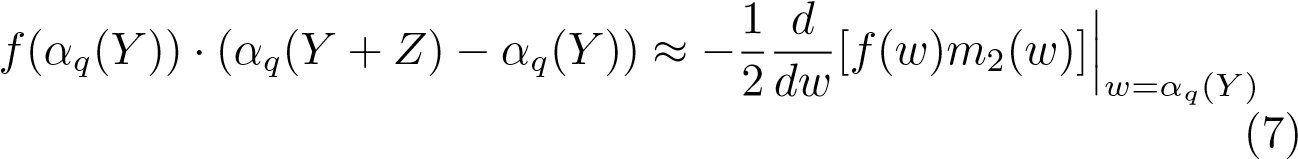
中程度の精度で自動的に生成された説明

次に以下の量を考える．

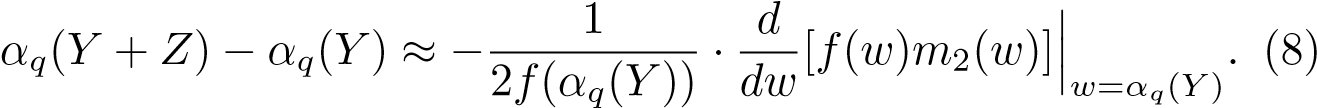
図形

中程度の精度で自動的に生成された説明

をの周りで展開すると以下の近似式が成立する．ただし，とした．



最終的には以下の式が成立．



ここで，具体的に，とする．この時，は狭義の増加関数であるため，で条件を付けることはで条件を付けることと等価である．よって，任意のに対して，

となる．したがって，以下のグラニュラリティ調整の公式が導ける．

図形

中程度の精度で自動的に生成された説明

* 今まで「損失」に関する会計上の定義を課していないため，を時価ベースで測定するか，保険数理ベースで測定するか，また，期待損失を含むか含まないかを選択することができます．
* 後者の点は，CP2とバーゼルIIの最終文書の間で資本の定義が変更されたことを考えると重要となる．CP2では，資本要件はポートフォリオの損失分布の分位点，すなわちVaRに関連付けられていた．バーゼルⅡの最終版およびバーゼルⅢでは，VaR要件は期待損失（EL）と期待外損失（UL）のコンポーネントに分解されている．
* 予期せぬ損失は，単純にVaRとELの差として定義され，最低資本要件の基礎となる．ポジションの数が大きくなるにつれ，以下の極限が成立する．

したがって，μ(αq(X))-E[Ln]がUL体制下での漸近的な資本賦課金となる．

* ULの粒度調整はVaRの粒度調整と同じであるため，規制資本の定義の変更によってGAは変更されないが，後述するように，GAの計算式へのインプットは，ELとULの区別に依存する．
* Value-at-risk は業界の実務では広く使われているが，VaR には理論的および実務的な欠点があることがよく理解されています（例えば，McNeil, Frey, and Embrechts 2005, §6.1 を参照）．
* VaRに代わるものとしては，expected shortfallがよく知られている．付録では，この代替案の粒度調整と，第3節のものに対応する上界および下界を示している
* ．

3章　不完全なデータに基づくGA境界

導入部分で記載した通り，複数のエクスポージャーを債務者ごとに単一のエクスポージャー集約することが，グラニュラリティ調整を実施するうえでの課題になる．エクスポージャーの情報が散逸してしまう理由としては，例えば銀行が合併するにあたって異なったデータ管理システムの統合する事が挙げられる．また，債務者が異なるデータベースに別の名前で登録されていることもある．

このような銀行の負担を軽減するため，本論文では銀行が最大のエクスポージャーに基づいてGAを計算することを認めることを提案する．計算から除外されたエクスポージャーの影響は，上限を計算することで評価できる．上限値は少なくとも真のGAと同程度の大きさであるため，このアプローチは規制の観点からは保守的である．銀行は，データ収集するコストと上限値に関連する追加資本のコストとの間で最適なトレードオフを見出すことができる．

まず初めに3.1節では，特定のポートフォリオを例として取り扱い，その上限値を示す．3.2節では，より現実的なポートフォリオについてGAの上限を示す．3.3節では，GAの下限を導出する．

1. 簡単な場合の上限について

簡単な例として，次の設定の元での上限を計算する．

* とがに依存しないとする．
* 人の債務者の内，大きなエクスポージャーを持つ人を選ぶ．
* 各債務者の貸出残高はとする．そのため全ての貸出残高に占める割合はとなる．

この時，となる．

|  |  |
| --- | --- |
| 【参考】 |  |
|  | (13) |
|  | P45 |
|  | P45 |
|  | (11) |
|  | (16) |

この時， （式(17)）は以下のようになる．

ここで，であり，Herfindahl-Hirschman指数と呼ばれる．任意のに対してであることを用い，以下の不等式が導ける．

したがって，について以下の不等式が成立する．

ここで，とした．

最終的に の上限が以下のようになる．

1. より一般化した上限

前節のように同質の債務者を仮定しない場合，最大のEADを基準に決めるのか，出資額を基準に決めるのか曖昧になる．そこで，以下の仮定をする．

1. 銀行はとを基準に最大のエクスポージャーを持つ人の債務者を決定する．この債務者の集合をとし，各に対しての値は既知であるとする．
2. 各に対して，となるような上限値 が既知であるとする．
3. ポートフォリオ全体のとが既知であるとする．

通常，銀行内部のではエクスポージャーの大きい顧客に関するデータは集約されており（GAを計算するためにわざわざ集約する必要がない），が計算可能で既知であるとする(1)の仮定は妥当である．

(2)の仮定では例えば（）の最小値を とすることができる．

(3)の仮定について，やはIRBの所要自己資本を決定する過程で計算されるので，妥当性を議論する必要はない．

以降では，上述の仮定に基づき， の上限を計算する．なお，便宜上以降ではとする．

ここで，についてはであることを用いて以下の不等式が成立する．

したがって，第２項に対して，以下の不等式が成立する．

さらに，(2)の仮定により，任意のに対して となるが既知であるため，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

となる．

次にとしてとを以下のように定義する．なお，これらの量は仮定により既知である．

これにより，に対しても以下の式が成立する．上式と同様，左辺の値は既知である．

この式を使うことで，(20)式は以下のようになる．

したがって， の上限は以下のようになる．

1. GAの下限

GAの下限はより一般的な設定の下で導くことができる．債務者の部分集合をとする．この時，に対するGAを以下のように定義する．

この記号を用いて， は以下のように分解できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

したがって，の下限は以下のようになる．

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| <<注意>>  (22)式の第2項を落とすことで の下限を導いているが,この項が正であることを確認する必要がある．まずは，の符号を確認．結論は以下の通り   |  |  | | --- | --- | |  | 正 | |  | パラメータに依存 | |  | 正 |  * + ,について   の定義は以下の通りである．   |  |  | | --- | --- | |  | (13) | |  | P45 |   損失率はとなるので，である．また，の部分は条件付きのデフォルト確率を表す（p43）なので，は正であり，も正である．  次に，について考える．上限を算出した際に使用した以下の式，  より，は正となることがわかる．ただし，である．   * + について   及びの定義は以下の通りである．   |  |  | | --- | --- | |  | P45 | |  | P52 | |  | (15) |   はデフォルト確率であるため，は正である．一方，については  となるような，の値を選択しないと正にならず，上述の下限算出ロジックは妥当ではなくなる． |

1. GAの大きさと感度分析

本章ではドイツの信用登録簿のローンデータを用いて，GAの大きさや挙動等を確認する．

|  |  |
| --- | --- |
| 4.1節 | 使用するデータの説明 |
| 4.2節 | 算出結果 |
| 4.3節 | のカリブレーション |

* 1. **データ**

1. 特に金融機関について、市場リスクや信用リスク、オペレーショナルリスク等、企業経営を行っていく上で生じるリスクをカバーするために必要となるリスク資本の総額．（[参考URL](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A8%E3%82%B3%E3%83%8E%E3%83%9F%E3%83%83%E3%82%AF%E3%82%AD%E3%83%A3%E3%83%94%E3%82%BF%E3%83%AB)） [↑](#footnote-ref-1)