第5章　生保数理的な枠組み

## 5.1節　導入

この章では，死力について確定的及び確率的なモデルについて説明を行う．また，USのデータを使用してパラメータのカリブレーションを行う．

## 5.2節　生保数理的な量

本節では今後必要となる生保数理的な量をいくつか定義する．

まず初めに，歳になった人間がまでに死亡する確率の確率密度関数を考える．定義より，を寿命の最大値であるとすると，以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1) |

この確率密度関数を用いると，死亡率，生存率，死力が以下の式で定義できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2) |

ここで死力とは，歳に到達した人が次の瞬間に死亡する確率を表す[[1]](#footnote-1)．

債券価格評価の枠組みで考えると，生存率については安全資産に，は割引債の価格に，死力はリスクフリーレートに似た役割をしている．例えば，生存率を時刻で微分すると，以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.3) |

これは時刻における安全資産の価格を，リスクフリーレートをとした場合に成立する以下の式に類似している．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.4) |

また，(5.3)式の両辺をという境界条件の下で解くと以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5) |

ここで，時刻まで生存するという条件の下で，（）まで生存する確率をとすると，ベイズの公式により，(5.6)式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6) |

ここで，定義より左辺はそのものである．一方，右辺のはであるため１となり，，についてはそれぞれ，である．したがって(5.5)式を踏まえると以下の関係式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.7) |

次節では死力を確率過程として扱うが，その場合は(5.7)式の右辺について期待値をとった式が成立する．一方，時刻における，満期の割引債の理論価格は(5.8)式で表され， とが対応していることがわかる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.8) |

## 5.2節　確率的な死力モデルと資産価格

長生きリスクは死力の予期できない変動で定義される．したがって，死力を確定的な過程であると仮定する限り，長生きリスクを考慮した議論をすることはできない．したがって，本節では，死力を確率過程であると仮定する．また，例としてアニュイティと呼ばれる保険契約についてその価格の評価をする．

死力を確率過程であるとした場合，(5.7)式の右辺は期待値となって，以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.9) |

この式を使用した例として，死亡時点までの各時点に連続的にの金額だけ受け取る契約（アニュイティ）を考える．この契約の価値は以下の式で与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.10) |

ここで，右辺の期待値は以下の条件付き期待値を表す．は金融市場のリスクの源泉であるウィーナー過程から生成される集合，はから生成される集合である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.11) |

恒等関数と条件付き期待値のタワープロパティを使うと，(5.10)式より，以下のように式変形できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.12) |

なお，最後の等式については...という理由で成立する．また，最終的な式ではの情報は必要がないことがわかる．（は明白な形でに依存していない．）．上式により，アニュイティの価格はの値を金利としてで割り引かれた債券価格と同じであることがわかる．

## 5.4節　Gompertzの枠組みにおけるアニュイティ

最も一般的な死力のモデルは以下の式で表される（Perks,1932）．

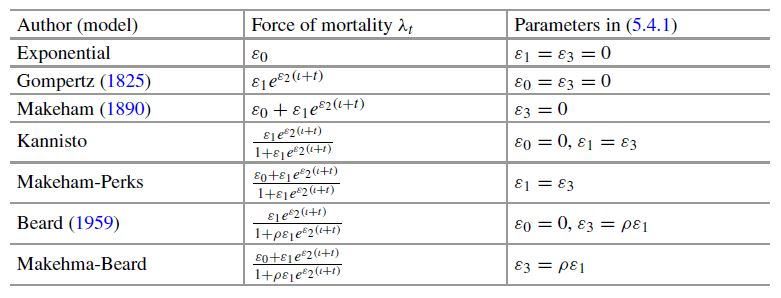
|  |  |
| --- | --- |
| ：パラメータ  ：年齢 | (5.13) |

この時，年齢の人が時刻において期間生存する確率は以下の式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.14) |

パラメータの選び方によって表 1のように複数のモデルが存在する．本節ではこのモデルの中でもGompertz（1825）を使用する．これは，このモデルが死力をある程度正確に記述できる上に，いくつかの生保数理的な量がクローズドフォームの形で記述することができるからである．

表 1　死力のモデル



本節ではGompertz-Makehamによる死力としてパラメータを含む以下の表式を用いる[[2]](#footnote-2)．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.15) |

ここでパラメータは事故死等の年齢に依存しない要因による死亡を表すファクターである．この死力を前提とした生存率は(5.5)式より以下のように計算できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.16) |

(5.16)式の生存率を用いて微小時間の間にの支払いが行われるアニュイティの評価を行う．この際，リスクフリーレートは期間を通して一定であるとする．(5.12)式より，以下の積分を計算すればよい．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.17) |

ここで，と置くと，以下のように変形できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.18) |

なお，で定義されるガンマ関数である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.19) |

数値例としてにアニュイティ価格を計算したグラフを記載する．年齢が高くなるほど，受け取れる価格が少なくなるので，アニュイティ価格自体も小さくなる．また，女性の方が長生きである事が反映され，女性を前提としたアニュイティの方が価値が高くなっている．

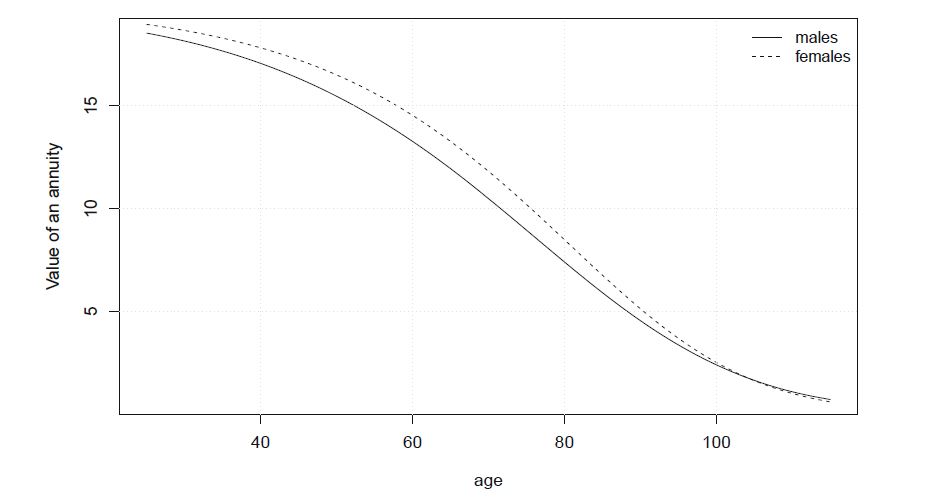


図 1　アニュイティ価格

## 5.6節　Gompertzの死力モデルの推計（Rcodeあり．それほど重要ではないので記載しない．）

本節では，HMD（Humal Mortality Database）のデータを用い，Gompertzの死力モデルに含まれるパラメータを推計する．

## 5.7節・5.8節　死力・生存率の確率的モデル

本節では，死力の時系列に対して確率的なモデルを仮定し，HMDのデータを使用してパラメータ推計を実施する．

死力の確率的なモデルではある値に均衡するのが望ましい．ただし，均衡値については時間に依存する量を仮定する．これは，一定値であるとすると生存率が現在の年齢に依存しない算式となるためである．実際，死力が時刻からの間一定値となった場合，生存率は以下のように計算され，年齢に依存しないことがわかる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.20) |

時間に依存する均衡値を持つ死力の確率的モデルとして以下のモデルを使用する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.21) |

と置くと，伊藤の公式により，の微小変化は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.22) |

で表される．両辺を積分し，期待値をとることで以下の式を得る．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.23) |

ここで以下の２点を仮定する．

1. の初期値との初期値が等しい：
2. 死力の期待値はGompertz-Makehamモデルと一致する：

①と(5.23)式により，死力の期待値について以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.24) |

さらに，②の仮定を踏まえれば，は以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.25) |

CIR過程の性質を利用するためにを以下の式で仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.26) |

最終的に死力の確率過程として以下の式を仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.27) |

生存率については，金利モデルから割引債の価格を算出する時と同様の方法で算出できる．(5.9)式を用いると，以下のように算出できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.28) |

また，伊藤の公式を用いれば生存率が従う確率微分方程式は以下の通りである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.29) |

## 5.9節　生保数理的なリスクを受ける富の発展

第6章　生保数理的な金融商品

本章では，生保数理的な量を基にしたデリバティブである以下の３つの商品について価格を評価する．

1. 長寿債券
2. トンチン
3. デス・ボンド

これらの金融商品は他の生保数理的な金融商品を評価するうえでも重要な例である．また，純粋な金融マーケット上では死力と十分な相関を持つ資産は少なく，理論的には完備性を持たせるうえで重要である．

## 6.2節　生保数理的な金融商品の確率微分方程式

生保数理的な量を原資産として持つデリバティブはクーポンや満期でのペイオフが人口動態的な量を用いて書かれる債券であると考えることができる．したがって，このようなデリバティブの価格は以下の算式で与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6.30) |

ここで，死力及び金利が従う確率微分方程式として以下の式を仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.31) |

伊藤の公式を用いると，が従う確率微分方程式が導ける．

|  |  |
| --- | --- |
| ただし，変数に対して，  とする． | (5.32) |

さらに，テキストの定理4.2より，リスクの市場価格を用いて以下のように書き換えることができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.33) |

## 6.3節　長寿債券

長寿債券とはクーポンが時刻から時刻までの生存率で表される債券である．したがって価格は以下の式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.34) |

(5.34)式より，長寿債券は満期までの期間で代表的な被保険者が生存している期間まで単位通貨のクーポンが得られる債券であると解釈できる．

さらに，死力と金利の確率過程が独立であると仮定すると，以下のように変形できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.35) |

ここではリスク中立測度の下での生存率である．

この式より，長寿債券は，複数のゼロクーポン長寿債券の集まりと見なすことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.36) |

また，ゼロクーポン長寿債券は以下の確率微分方程式を満たす．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.37) |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## 6.4節　トンチン年金

トンチン年金とは，出資者が死亡すると，その出資者が受け取るはずであった年金が生存する出資者に割り当てられる終身年金制度の事である[[3]](#footnote-3)．

ある出資者の持つトンチン年金の価値は以下の算式で与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.38) |

時点において生存している出資者の人数はで与えられるので，トンチン年金全体の価値は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.39) |

となる．長寿債券と同様，トンチン年金もゼロクーポントンチン年金の和としてあらわされる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.40) |

(5.34)式と(5.40)式を比較すると死力の符号が逆であることがわかる，従って，死力が上昇すれはトンチン年金の価値は上昇するが，長寿債券の価値は低下する．

## 6.4節　デスボンド

デスボンドとは生命保険の証券化商品である．具体的には以下の仕組みで発行される債券である．

1. デスボンドの売り手は生命保険の契約者である．
2. 売り手は生命保険契約の買い手をブローカーを通して探す．買い手は保険契約を受け取る代わりに契約の正味現在価値を渡す．買い手は保険契約を保持してるため，保険会社に保険料を払い，売り手が死亡した際に保険金を受け取れる[[4]](#footnote-4)．
3. 保険契約のプロバイダーを通してヘッジファンドや投資銀行が死亡保険を買い取る，従って，ヘッジファンドや投資銀行は保険契約をバイヤーから受け取れるが，保険金をバイヤーに支払う必要がある．
4. ヘッジファンドや投資銀行はある程度保険契約を集め，そこから得られるキャッシュフローをデスボンドのキャッシュフローにして売り出す．

以下ではデスボンドの仕組みについて記載する．保険契約者が支払う保険料を，死亡時における保険金を簡単のために1であるとする．また，保険契約者が時刻に加入したとする．この時，生保数理的及びファイナンス的な均衡が成立しているとすると，以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.41) |

5.3節と同様の方法により，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.41) |

と変形できる．したがって，この式を満たすは以下のように与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.41) |

つまり，最適なプレミアムの値は死力の値を長寿債券の価格で加重平均をとった値になる．

第7章　年金ファンドマネジメント

## 7.1節　導入

本章では，以下の４つの資産が存在する市場で，年金ファンドの最適なアロケーション戦略を見つけ出す．

1. 無リスク資産
2. 株式指数
3. ゼロクーポン債
4. 長寿債券

また，最適なポートフォリオは投機部分とヘッジ部分に分かれることがわかる．本章では各部分の性質についても説明する．

## 7.2節　保険料と年金

年金ファンドは運営にあたり，以下の２期間に分かれる．

* Accumulation phase（A-Ph）

この期間では，加入者は周期的に保険料をファンドに支払う．具体的にはファンドへ加入した時点から，退職までの期間である．

* Distribution phase（D-Ph）

この期間では，年金ファンドは加入者に対して年金を支払う．具体的には退職時から死亡時までに機関である．ただし，退職前に死亡した場合，支払いはしない）．

## 付録　確率測度論

* 加法族，可測集合，可測空間

ある空でない集合Sに対して，その部分集合族Mが以下の性質を満たすとき，Mは加法族という．

* に対して，ならば，以下の性質が成立する．

また，Sの部分集合で，M属するものをM可測という．また，（S,M）の対を可測空間という．

* 測度，測度空間

可測空間（S,M）に対してＭ上で定義された関数が以下の性質を満たすとき，を測度という．

* 任意のに対し，である．特に
* が非交差的ならば，
* 可測関数

可測空間（S,F）と（E,G）に対して，関数が可測であるとは，任意のに対して，fによるその引き戻しがに属することである．

* 確率変数

確率空間と可測空間に対し，上で定義された関数が-可測であるとき，を確率変数という．

* 確率変数から生成された加法族

確率空間上で定義された可測空間に値をとる確率変数として確率変数に対し，集合族をから生成された集合族という．この集合を含む最小の加法族を確率変数から生成された加法族という．

1. 死力という言葉自体は，企業の倒産確率等の文脈でも使用される． [↑](#footnote-ref-1)
2. (5.15)式は子供を除いて，実際の生存率をかなり正確に記述できる．また，例として，（いわゆるpure Gompertz）の場合についてパラメータ推定がなされている．この例では，の値として，男性が，女性がという値が得られている．の値としては男性が，女性がという値が得られている． [↑](#footnote-ref-2)
3. かつてはフランスやイギリス，アメリカで一般的な年金商品であったが，上述の仕組み上，出資者どうしで

   殺しあう事が助長されるため，禁止された． [↑](#footnote-ref-3)
4. 売り手に対して支払われる前金は保険金の約20％～40%であり，ブローカーに対する支払いは5%～6%程度である． [↑](#footnote-ref-4)