1.2 ポートフォリオの構築

1.2.1 投資機会集合と効率的フロンティア

前節ではポートフォリオの期待収益率とボラティリティを算出する手法を示したが，これらの量はポートフォリオの投資比率によって値が変わる．したがって，投資比率を決定する方法として，期待収益率やボラティリティの値を基準にして決めることが考えられる．

投資によって実現可能な期待収益率とボラティリティの組み合わせの集合を投資機会集合という．まず初めに，2つの資産（資産1，資産2）に投資する場合の投資機会集合について考える．資産が2つの場合，期待収益率及びボラティリティは以下のように書ける.

ただし，とする．相関係数の値によってボラティリティは変わるため，以下ではの３パターンについて考察する．式●●より，それぞれのボラティリティは以下のようになる．

期待収益率の式●●とより，なので，は以下のように表される．

の場合は式●●より，のみ変動させた場合，の大きさはがに等しいとき最小になり，がこの値から乖離すればするほどは大きくなることがわかる．の場合は，とすることで，が0になり，の場合と同様，がこの値から乖離すればするほどは大きくなる．また，相関の値に関わらず，またはの場合はどちらか一方の資産しか保有していないことになるため，は以下のようになる．

以上より，は図 1のような関係になる．

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

図 1　2資産の場合の投資機会集合

の場合，比率を適切に選定すれば，ポートフォリオのボラティリティは資産1及び資産2のどちらか一方しか保有しない場合よりも小さくすることができる．特にの場合は，一方の資産の価格が上昇（下落）すればもう一方の資産の価格が下落（上昇）するため，ポートフォリオの価格が変動しないようにすることができる．一方での場合は資産価格の変動方向は同じであるため，ポートフォリオを構築したとしてもリスクを低下させることはできない．

これまでは投資する資産を2つとしてきたが，３つ以上にした場合は実現可能なポートフォリオの期待収益率とボラティリティの組み合わせは広がる．例えば資産の数を3つにした場合，投資機会集合のイメージは図●●の通りである．資産が2つの場合と比較し，投資機会集合の左側の形状についてその特徴は変わらない．一方で，投資機会集合の広さや，投資機会集合の右側の形状については一般には変化する．

ダイアグラム

自動的に生成された説明

図 2　３資産の場合の投資機会集合のイメージ

1.2.1 効率的フロンティアと投資戦略

投資家は一般に，大きなリスクを負担する場合はそれに見合う高い収益率を期待し，リスクが小さい場合は期待収益率が低くても仕方がないと考える．この考えに基づくと，ボラティリティ（＝リスク）が同じならば，収益率が高いほうが良いと考えるはずである．同じボラティリティを持つポートフォリオのなかで期待収益率が最大になるポートフォリオを効率的ポートフォリオと呼び，効率的ポートフォリオの集合を効率的フロンティア（図 3の赤線）と呼ぶ．本節では複数ある効率的ポートフォリオの中で，どのようにポートフォリオを決めるのかという点を議論する．

ダイアグラム

自動的に生成された説明

図 3 効率的フロンティアのイメージ

* シャープレシオを最大化したポートフォリオ

ポートフォリオのパフォーマンスを表す指標として，期待収益率だけではなく，ボラティリティも考慮に入れた指標がある．そのような指標のうち，シャープレシオは以下のように定義される．

ここで，は無リスク金利である．シャープレシオの分子は，リスクを負うことで得られる超過収益であると考えられる．したがって，シャープレシオ自体はボラティリティ1単位当たりの超過期待収益率を表すため，この指標が高いポートフォリオは低いポートフォリオに比べて効率的に収益を獲得することができる．したがって，この指標を最大にするような効率的ポートフォリオの選定をすることで最適な投資比率の決定できる．

なお，式●●はと書き換えられるため，同一のシャープレシオを持つポートフォリオは図 3において切片が，傾きがの直線で表される．最適なポートフォリオはこの直線と効率的フロンティアの接点である（図●●左図）．

* 最小分散ポートフォリオ

ボラティリティが最小になるポートフォリオを最小分散ポートフォリオと言う（図●●右図）．したがって，投資する資産の数がの場合，このポートフォリオの投資比率は，の制約の下でを最小化することで得られるが，結果としては以下の通りである（導出は補論参照）．

ただし，はすべての要素が1である次元ベクトルである．

なお，上述の説明ではという制約条件のみ考慮したが，その他の条件（特定の資産のみ投資比率を20％以下にする等）を追加で加える場合は式●●はそのまま使用することはできないことに注意が必要である．この場合，例えば●●章で説明するソルバーを用いて数値的に計算する方法が考えられる．

【図】

（補論：最小分散ポートフォリオの投資比率について）

導出方法は複数存在するが，本資料ではラグランジュの未定乗数法を用いて導出する．

未定乗数をとすると，ラグランジアンは以下のようにあらわされる．

ラグランジアンを及びで微分した値が0であればよい．まずはでの微分を計算する．

したがって，この値が0であるとすると，

となる．したがって，投資比率の和は以下のようにあらわされる．

制約条件より，投資比率の和は1であるため，は以下のように求められる．

よって式●●と合わせると，投資比率は以下のようになる．