●スペクトル分解[[1]](#footnote-1)

の相関係数行列を、作成するシナリオの数を、異なるウィーナー過程の数をとする。この時、スペクトル分解による相関のある乱数の生成は以下のロジックで実行される。

1. 相関係数行列を固有値分解する。

|  |  |
| --- | --- |
| :固有ベクトルを列ベクトルとして持つ行列  :固有値を対角成分に持つ行列 |  |

1. 各要素が平均0、分散1の多次元正規乱数行列（行列）を生成
2. 以下の算式に基づいて相関を持つ乱数を生成する。

|  |  |
| --- | --- |
| :固有値の平方根を対角成分に持つ行列 |  |

5000本シナリオはEVの算式に含まれる「オプションと保証の時間価値」を計算するために使用される。この値はモンテカルロ法を用いて計算されるが、上記③によって生成された乱数は母集団の平均（０）・分散共分散行列（）とは一致せず[[2]](#footnote-2)、誤差が生じるため、モンテカルロ法の収束を遅くする要因となりうる。したがって、少ない試行回数でも誤差を小さくするような手法（分散減少法）と組み合わせることがある。

ESGではスペクトル分解で乱数を生成する場合、分散減少法のうちモーメント調整法の1次・2次サンプリング法を実施するかどうか選択することができる。ここで、1次・2次サンプリング法はそれぞれの平均・分散共分散行列を母集団のものと一致させる手法である。[[3]](#footnote-3)

具体的には③以降の手順の以下の③'～⑥'の手順に置き換えることで計算できる。

1. を構成する各列ベクトルをとする。この時、以下の算式に基づいて行列を算出する。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. 行列を特異値分解し、行列を定義する。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. を構成する各列ベクトルをとする。この時、以下の算式に基づいて行列を算出する。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. 以下の算式に基づき、相関を持つ乱数を作成する。

|  |  |
| --- | --- |
| :固有値の平方根を対角成分に持つ行列 |  |

●コレスキー分解[[4]](#footnote-4)

1. 相関係数行列をコレスキー分解分解する。

|  |  |
| --- | --- |
| :上三角行列 |  |

1. 各要素が平均0、分散1の多次元正規乱数行列Y（M×N行列）を生成
2. 以下の算式に基づいて相関を持つ乱数を生成する。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

計算速度の観点ではコレスキー分解を用いた乱数生成のほうが優位であるが、安定性の観点からはスペクトル分解を使用した乱数生成の方が優位である。また、使用しているパッケージの制約上、モーメント調整はスペクトル分解で使用しているMASSライブラリのmvrnorm関数でしかできないため、2020年12月現在、モーメント調整をしたスペクトル分解でシナリオを生成している。

1. ESGで使用するモデル

FT社で使用するESGでは、シナリオ作成のため、以下のモデルを使用している。

表（シナリオ作成のためのモデル。HJMと修正幾何ブラウンを書く。）

* Blackモデル・Normalモデル

|  |  |
| --- | --- |
| :フォワードレート  :ボラティリティ  :ブラウン運動 |  |

Blackモデルを解くとは対数正規分布に従うことがわかる。したがって、フォワードレートが負になることはない。一方で、Whiteモデルは負になりうるため、マイナス金利を導入している影響で負になりうるJPYとEURに適用する（2021年1月現在）。

3.1.1 金利関連モデル

3.1.1.1 HJMモデルとそのボラティリティ

ESGでは瞬間フォワードレートを以下のHJMモデルで仮定する。

|  |  |
| --- | --- |
| :時刻に観測される、将来時点が満期の  瞬間フォワードレート  :通貨の金利ボラティリティ  :通貨の現金過程をニューメレールとするウィーナー過程 |  |

上式より、HJMモデルにおいてはボラティリティのみで形が特定されるモデルである。特に以下のように仮定すると瞬間フォワードレートから導出される短期金利はHull-Whiteモデルになる。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Hull-Whiteモデル  ：回帰速度  ：回帰水準  ：金利ボラティリティ |  |

ESGにおいては金利ボラティリティとしてWTWと同様、JPYは階段状ボラティリティ（図表●●）、その他の通貨は時間によらず一定と仮定する。

階段状ボラティリティのイメージ

3.1.1.2 金利モデルを基に生成される資産の過程

本節では上記で説明したHJMモデル及びHull-Whiteモデルから導出される資産について説明する。導出の概要についてはAppendix●●に記載する。

* 現金過程

短期金利で連続複利運用を行う事で得られる過程なので、以下の算式で計算される。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 割引債価格

割引債価格と瞬間フォワードレートとの関係式は以下の算式で与えられる。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

また、フォワードレートとしてHJMを用いた場合、割引債価格が満たす確率微分方程式は以下の通りである。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 年パーイールド

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 債券指数

年割引債を購入し、後に割引債を売却、売却額で年割引債を買いなおすという債券運用を繰り返すことで得られる指数である。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

3.1.2 株式モデル

株式及びリスク性資産のモデルは以下の式に従うと仮定する。

|  |  |
| --- | --- |
| ：時刻における通貨の株価  ：通貨の短期金利  ：通貨の株価のボラティリティ  ：通貨の現金過程をニューメレールとするウィーナー過程 |  |

ここで、はHull-Whiteモデルと同様に階段状のボラティリティを用いる。ただし、時点は0年～3年、3年～4年、4年～5年、5年～6年、6年～7年、7年～8年、8年～9年、9年以降の8区間に区切る。

3.1.3 為替モデル

株式及びリスク性資産のモデルは以下の式に従うと仮定する。

|  |  |
| --- | --- |
| ：時刻における海外通貨1単位当たりの国内通貨の単位数  （通貨）  ：の短期金利  ：通貨の短期金利  ：外国為替（通貨）のボラティリティ  ：通貨の現金過程をニューメレールとするウィーナー過程 |  |

3.1.4 外債関連モデル

* オープン外債について

オープン外債を以下の式でモデル化する。

|  |  |
| --- | --- |
| ：時刻における通貨のオープン外債  ：時刻における通貨の債券指数  ：時刻における通貨の外国為替 |  |

この指数を使用し、WGBI、BC GABI、ドル1カ月債券、ユーロ1カ月債券、オーストラリアドル5年債券を以下の式でモデル化する。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ここで、とは以下の値を用いる。

* ヘッジ外債について

オープン外債と同じ期待収益率、割引債価格と同じボラティリティを持つ過程としてモデル化する。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. ESGではMASSライブラリのmvrnorm関数を使用している。 [↑](#footnote-ref-1)
2. サンプル数の増加に伴い母集団の平均・分散共分散行列に収束する。 [↑](#footnote-ref-2)
3. 石川達也・内田善彦, 「モンテカルロ法によるプライシングとリスク量の算出について」, 日本銀行金融研究所, 2002.

   <https://www.imes.boj.or.jp/research/papers/japanese/kk21-b1-2.pdf> [↑](#footnote-ref-3)
4. ESGではmvtnormライブラリのrmvnorm関数を使用している。 [↑](#footnote-ref-4)