2章　正の確率変数による測度変換

**2.1　測度変換と価格付け**

|  |  |
| --- | --- |
| 内容 | * 測度変換の基本的な考え方 * 測度変換な条件 * 変換前後の期待値の大小関係 * 測度変換を利用した計算例（ブラックショールズの公式を導出） |

* 測度変換の基本的な考え方

確率空間上で定義された正で可積分な確率変数に対して，関数を以下のように定義する．この時，は測度であり，「正で可積分な確率変数を使ってからへ確率測度が変換された」とみなせる．

の正値性を明白にするために，を確率変数として，と置くことで，以下の式が得られる．この変換をエッシャー変換と呼ぶ．

* 測度変換な条件

|  |
| --- |
| 定理2.1（Radon-Nikodym） |
| 可測空間()上の同値な確率測度とに対して，以下の式を満たす正で可積分な確率変数が唯一存在する． |
| 定義2.1（同値） |
| 可測空間()上の2つの確率測度とがすべてのに対して，となるとき，確率測度とは同値であるという． |

* 変換前後の期待値の大小関係

測度変換によって確率密度関数は以下のように変換される．

が単調非減少（非増加）の時，の期待値はにおける評価よりもにおける評価の方が大きい（小さい）．この事実は2.2節における保険料の議論に利用する．

* 測度変換を利用した計算例（ブラックショールズの公式を導出）

１章の内容より，ヨーロピアンコールオプションの価格は以下の式で表される．

ただし，は権利行使価格を表す．は状態価格密度，は株価であり，以下の算式で表される．

なお，はリスクの市場価格，は標準ブラウン運動である．

リスク中立確率測度へ変換することで，として，

さらに，第一項を評価するために，測度変換を行う．

**2.2 保険料計算原理**

|  |  |
| --- | --- |
| 内容 | * 代表的な保険料計算原理の紹介 * エッシャー変換 * ワン変換 * 指数原理 * 均衡価格とワン変換の関係 |

* 保険料計算原理

保険料の決定の仕方として，利益を考えなければ保険料は保険金の期待値に設定する（）．ここで保険料に何等かのリスクマージンを導入しようとするのが保険料計算原理である．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **分散原理** |  | **標準偏差原理** |  |
| **指数原理** |  | **エッシャー原理** |  |
| **ワン変換** |  |  |  |

* エッシャー原理
* ワン変換

|  |  |
| --- | --- |
| 定義 |  |
| リスクマージン |  |

* 保険金が正規分布の場合

確率密度関数を変換する関数は以下のように表され，エッシャー変換に一致する．

* 保険金が対数正規分布の場合

ワン変換をした後の分布関数に従う確率変数は対数正規分布に従う

* 均衡価格

|  |  |
| --- | --- |
|  | 投資家の人数 |
|  | 投資家の効用関数 |
|  | 初期の富 |
|  | 晒されているリスク量 |
|  | リスク交換量 |
|  | リスク交換のために必要な金額 |

が均衡であるとは

1. 各投資家は1期間後の期待効用を最大化
2. 市場の清算:

全ての投資家が指数効用を持つ場合，均衡価格は