2章　正の確率変数による測度変換

**2.1　測度変換と価格付け**

|  |  |
| --- | --- |
| 内容 | * 測度変換の基本的な考え方 * 測度変換な条件 * 変換前後の期待値の大小関係 * 測度変換を利用した計算例（ブラックショールズの公式を導出） |

* 測度変換の基本的な考え方

確率空間上で定義された正で可積分な確率変数に対して，関数を以下のように定義する．この時，は測度であり，「正で可積分な確率変数を使ってからへ確率測度が変換された」とみなせる．

の正値性を明白にするために，を確率変数として，と置くことで，以下の式が得られる．この変換をエッシャー変換と呼ぶ．

* 測度変換な条件

|  |
| --- |
| 定理2.1（Radon-Nikodym） |
| 可測空間()上の同値な確率測度とに対して，以下の式を満たす正で可積分な確率変数が唯一存在する． |
| 定義2.1（同値） |
| 可測空間()上の2つの確率測度とがすべてのに対して，となるとき，確率測度とは同値であるという． |

* 変換前後の期待値の大小関係

測度変換によって確率密度関数は以下のように変換される．

が単調非減少（非増加）の時，の期待値はにおける評価よりもにおける評価の方が大きい（小さい）．この事実は2.2節における保険料の議論に利用する．

* 測度変換を利用した計算例（ブラックショールズの公式を導出）

１章の内容より，ヨーロピアンコールオプションの価格は以下の式で表される．

ただし，は権利行使価格を表す．は状態価格密度，は株価であり，以下の算式で表される．

なお，はリスクの市場価格，は標準ブラウン運動である．

リスク中立確率測度へ変換することで，として，

さらに，第一項を評価するために，測度変換を行う．