数值分析第一次实验报告

计32 顾晓韬 2013011298

实验一：误差分析

I. 实验要求

1）已知$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$,令$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$,
则x_n构成逼近 ln2 的数列。根据交错级数和截断误差的知识，有估计式
$|x_n-\ln2|<\frac{1}{n+1}$。

记$|x_n-\ln2|<\varepsilon$，若取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-4}$，试用单精度 float 计算$x_n$，问 n 为何值时能满足精度要求？理论上的 n 值与实际计算的 n 值是否存在不同？为什么？
令 ln2 的准确值为 0.693147190546。

II. 实验原理

用程序模拟交错级数逼近 ln2 的过程，并与理论结果进行比较，分析截断误差带来的结果上的差异。

III. 实验过程

A. 实验组：用单精度float类型存储级数数列，模拟交错级数对 ln2 进行逼近，直到满足误差要求；
B. 对照组：用双精度double类型存储级数数列，模拟交错级数对 ln2 进行逼近，直到满足误差要求；

IV. 算法描述

```
xn := 0;
k := 1;
while |xn - 0.693147190546| < 0.5 * 1e-4:
```

k ++;

xn += $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

output k;

V. 实验结果

A. 理论值：通过 $\frac{1}{1+n} \leq \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ 计算得到理论值 n 不小于19999

B. 实验组：用float类型计算得到最小数列项数 n = 9013

C. 对照组：用double类型计算得到最小数列项数 n = 9999

VI. 分析与思考

实验结果表明，无论是使用float还是double类型存储数据，计算结果都与理论值有较大差距，而double类型代表的计算结果与理论值更为接近。原因主要有以下两点：

1. 理论值n=19999是一个下界，而非下确界，而实验得到的n则是n的下确界，因此，只要计算值不大于理论值，可以认为是合理的。
2. 计算值与理论值之间的较大差距不单单是由原因1造成的，更重要的是，在计算机存储的浮点型数据并非是其真实的分数值，存在着截断误差。浮点型数据的精度主要由其尾数决定。单精度float类型的尾数为23位，加上小数点前的默认一位，共24位，可表示 $2^{24} = 16777216$ 个不同数据，转化成十进制，则有效位数为7位；同理，双精度double类型的尾数为52位，十进制有效位数为16位。因此，浮点型数据精度比较有限，数值的表示与真实值之间存在着误差，这是导致计算值与理论值不符的主要原因。在同等条件下，double类型代表的计算值与理论值更为接近，是因为double类型的精度更高，误差较小。这也间接说明了，截断误差是引起计算值与理论值不符现象的主要原因。

用数值计算的方法引导计算机程序进行函数计算是数值分析的重要作用之一，然而我们在实际操作过程中应当时刻牢记计算机数据的精度限制，同时关注算法的病态性、误差敏感性，谨慎选择合适的算法，否则就可能得到粗糙甚至错误的结果。

实验二：插值法与Runge定理

I. 实验要求

2）对[-5,5]作等距划分 $x_i = -5 + ih$， $h = 10/n$， $i = 0,1,\cdots,n$，并对 Runge 给出的函数

$$f(x) = \frac{1}{1+16x^2}$$

作 Lagrange 插值和三次样条插值，观察 Runge 现象并思考改进策略。

<1>分别取 $n = 10, 20$ 作 Lagrange 代数插值 $L_{10}(x)$ 与 $L_{20}(x)$。

<2>分别取 $n = 10, 20$ 作第一类(一阶)边界条件的三次样条差值 $S_{10}(x)$ 与 $S_{20}(x)$。

<3>给出 $f(x)$ 及 $L_{10}(x)$、$L_{20}(x)$、$S_{10}(x)$、$S_{20}(x)$ 在区间[-5,5]的函数图像，观察其不同（绘图部分可以采用 matlab 等来绘制图像）。

<4>考察上述两种差值函数在 x=4.8 处的误差，并作分析和思考。

II. 实验原理

对于形式未知的函数，我们可以采用插值逼近的方法来计算特定的函数值的近似。拉格朗日插值就是一种简洁直观的多项式插值。

然而，高次插值可能存在病态性质，即其计算得到的近似值未必随插值节点的数目增加而收敛到真实值，这是龙格定理在实函数域下的对应现象。而三次样条插值的方法与拉格朗日插值相比，除了满足在插值节点处与原函数同值外，其作为分段低次插值函数同时满足一系列导数性质，从而能够克服龙格现象，更好地逼近原函数。

III. 实验过程

对于给定的原函数，在不同的插值节点数目上分别使用拉格朗日插值和三次样条插值进行近似，并作图比较。

这里，出作图外的所有代码使用C++编写，没有使用任何数学函数。三次样条插值中的方程组求解使用了书中5.2节介绍的追赶法进行编码完成。作图部分使用python完成，由C++代码调用。

IV. 算法描述

A. 拉格朗日插值

1. 计算所有插值节点
2. 计算所有插值节点的理论值
3. 对于给定x，直接按照插值公式给出计算值

B. 三次样条插值

1. 计算所有插值节点
2. 计算所有插值节点的理论值
3. 计算得到dn、μn、λn序列
4. 追赶法求Mn序列
5. 对于给定x，计算其插值区间，并在区间内按照插值公式给出计算值

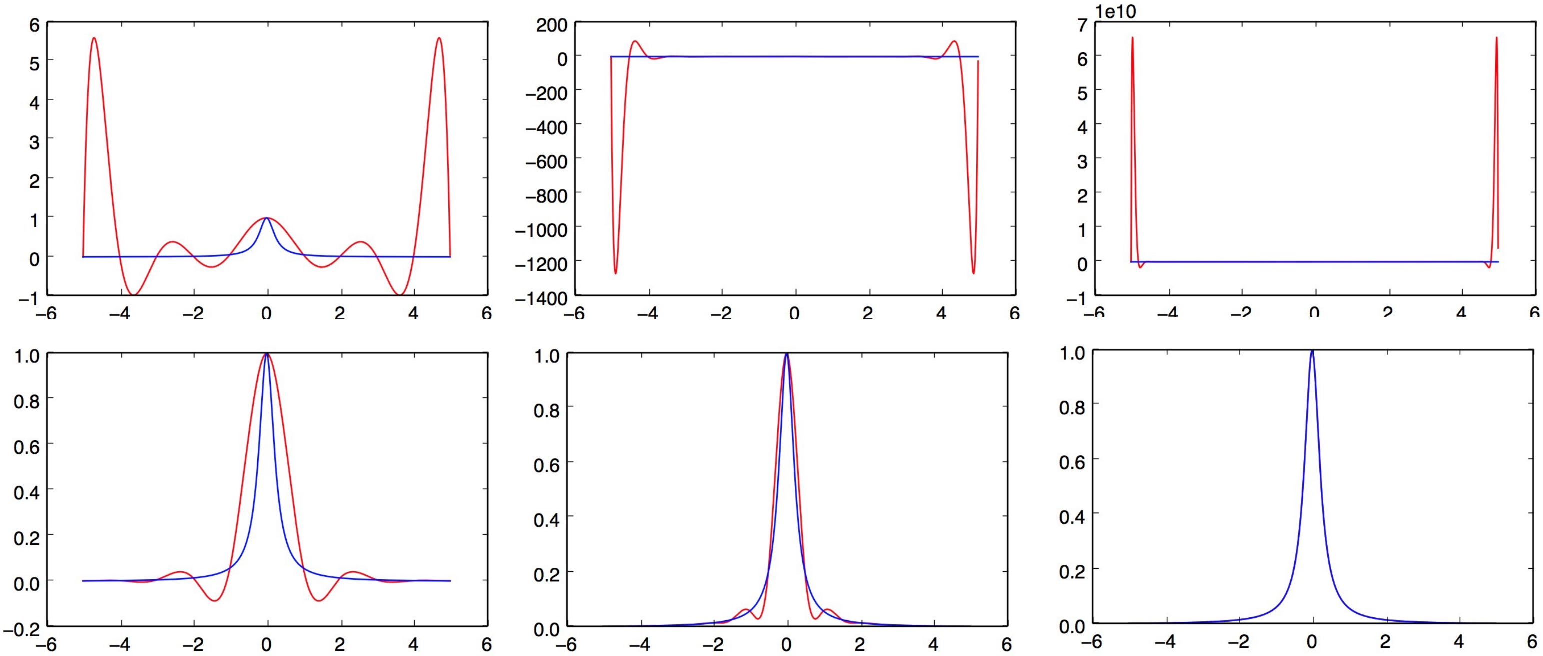
V. 实验结果

A. 作图比较

为直观对比，蓝线部分画出原函数图像，红色部分为插值图像

第一行从左到右分别为10点、20点、50点拉格朗日插值；

第二行从左到右分别为10点、20点、50点三次样条插值；



B. x = 4.8处的误差比较和分析

在 x = 4.8 处，原函数值为0.00270533，以下是拉格朗日插值和三次样条插值在10点和20点下的计算值：

	10点	20点
拉格朗日插值	5.15132	-1080.74
三次样条插值	0.00309777	0.00270423

VI. 分析与思考

在x = 4.8处的函数值对比可以发现，拉格朗日插值得到的计算值与理论值差距较大，且误差随节点数的增加不降反升；另一方面，三次样条插值则得到了非常接近原函数值的结果，且插值节点增加时误差降低了。

通过对比图可以明显观察到，拉格朗日插值难以很好地描述原函数，尤其是在插值区间的两端有明显的远离。当插值节点数增多时，这种病态性体现地越发明显，以至于插值函数与原函数难以在同一个数量级下观察。这是由于

高次插值带来的误差随着插值节点数的增加成倍增长，因而计算值不能收敛到理论值，是一个病态算法。

相较之下，三次样条插值通过分段插值的方法，较好地模拟了原函数的形状走势，并且随着插值节点数的增长不断逼近原函数。在插值节点达到50个时，已经很难从对比图中分出红蓝线，说明此时三次样条插值函数几乎与原函数相同。经误差计算可知，三次样条插值能够一致收敛到原函数。

由以上的观察和分析可以知道，三次样条插值的方法在逼近原函数的意义上要由于简单的拉格朗日插值。本次实验加深了我对插值方法的原理以及横向差异的理解。拉格朗日意义明确，推导简明，但只有深入计算研究才能发现其病态性。我们在实际学习操作中，对于一些显然的结论也不应当轻信，而应当细致推导，反复琢磨，从而找到更优的解决方案。

附：程序清单，对于两个实验，请分别使用g++编译exp1-1.cpp 和 exp1-2.cpp，即可得到相应结果和图表。对于实验二，运行后将生成img文件夹，其中是各函数对比图。