数值分析第四次实验报告

计32 顾晓韬 2013011298

I. 实验要求

1、用不同数值方法计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$。

（1）若用复合梯形公式，问区间[0,1]应分为多少等份才能使误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-6}$；若改用复合辛普森公式，要达到同样精度，区间[0,1]应分为多少等份？

要求：先通过余项公式估计步长大小（即等分数），然后选择估计的步长进行程序实现，观察实验结果与理论结果的异同。

（2）若用龙贝格求积计算要达到同样精度，则需要将区间[0,1]分为多少等份？

2、用下面的复合高斯公式作近似积分$\pi=4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$，即将[a,b]作等距划分$x_i=a+ih(i=0,\cdots,n)$，$h=\frac{b-a}{n}$，在每个子区间内应用二点高斯公式，则有

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{h}{2\sqrt{3}})+f(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2\sqrt{3}})]+\frac{(b-a)h^4}{4320}f^{(4)}(\zeta_1),\ \zeta_1\in(a,b),$$

其中$x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+\frac{h}{2}$， 试对步长 h 作先验估计，然后利用上式近似积分，将理论值（即 π）与实验结果进行比较。

II. 复合梯形公式

A. 等分区间估计

$$n\ge\sqrt{\frac{\max(|f''(\eta)|)}{12\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}}}$$

，其中 $\max(f''(\eta))=e$，从而 n 取 673

B. 算法描述

1. 等分积分区间[0,1]为n份，使得 $h=\frac{1}{n}, x_k=k\cdot h\ \ (k=0,1,2,...,n)$
2. 计算值 $T_n=\frac{h}{2}\sum_{0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$

C. 估计结果（理论区间数）

1. 区间数 = 673
2. 计算值 = 1.718282145
3. 误差值 = 3.161425897e-07

D. 实际结果（最小区间数）

1. 区间数 = 536
2. 计算值 = 1.718282327
3. 误差值 = 4.984063282e-07

III. 复合辛普森公式

A. 等分区间估计

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{\max\left(\left|f^{(4)}(\eta)\right|\right)}{180 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}}}$$ ，其中 $\max\left(f^{(4)}(\eta)\right) = e$，从而 n 取 6

B. 算法描述

1. 等分积分区间[0,1]为n份，使得 $h = \frac{1}{n}, x_k = k \cdot h \ \ (k = 0,1,2,...,n)$
2. 计算值 $T_n = \frac{h}{6}\sum_{0}^{n-1}[f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$

C. 估计结果（理论区间数）

1. 区间数 = 6
2. 计算值 = 1.718282288
3. 误差值 = 4.599789756e-07

D. 实际结果（最小区间数）

1. 区间数 = 6
2. 计算值 = 1.718282288
3. 误差值 = 4.599789756e-07

IV. 龙贝格公式

A. 算法描述

1. 以一个map字典table模拟T表。
2. 对于T表中位置为k=Kt, m=Mt的元素而言，通过哈希函数offset找到其在table中的对应索引: offset(Kt, Mt) = Kt * 10000 + Mt
3. 初始化:

   h = 1

   k = 0

   mdelta = 0.5e-6

   table[offset(-1,-1)] = 9999999;

   table[offset(0,0)] = h * (1 + 0) / 2;

4. 循环:

```
while (fabs(table[offset(k,k)] - table[offset(k-1,k-1)]) > mdelta) {
    k++;
    double next = table[offset(k-1,0)] / 2;
    for (int i = 0; i < pow(2,k-1); i++) {
        next += h / 2 * f(down + (i+0.5)*h);
    }
    table[offset(k,0)] = next;
    for (int i = 1; i <= k; i++) {
        double tup = table[offset(k-1,i-1)];
        double tdown = table[offset(k,i-1)];
        table[offset(k,i)] = (pow(4,i) * tdown - tup) / (pow(4,i) - 1);
    }
    h /= 2;
}
```

5. 循环结束:

   由循环结束条件知，此时已经满足误差条件。

   2^k即为最终的区间数，table[offset(k,k)]即为计算值结果。

B. 运行结果

1. 区间数 = 4
2. 计算值 = 1.718281828
3. 误差值 = 3.286260153e-14

V. 复合高斯公式

A. 等分区间估计

这里仍取0.5e-6为最大误差。

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{\max\left(\left|f^{(4)}(\eta)\right|\right)}{4320 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}}}$$，其中 $\max\left(f^{(4)}(\eta)\right) = 96$，从而 n 取 14

B. 算法描述

1. 等分积分区间[0,1]为n份，使得 $h = \frac{1}{n}, x_k = k \cdot h \ (k = 0,1,2,\ldots,n)$
2. 计算值Tn = $\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2\sqrt{3}}) + f(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\sqrt{3}})]$

C. 估计结果（理论区间数）

1. 区间数 = 14
2. 计算值 = 3.141592654
3. 误差值 = 1.48350221e-10

D. 实际结果（最小区间数）

1. 区间数 = 4
2. 计算值 = 3.141592761
3. 误差值 = 1.075583027e-07

VI. 分析与思考

经过实验发现，运用复合梯形公式和复合辛普森公式时，在理论计算得到的步长下，都能得到误差允许范围内的计算值。

非常有趣的现象在于，在误差近似的情况下，复合辛普森公式所需的区间数不到复合梯形公式所需区间数的1%。这说明复合辛普森公式的收敛速度远远快于复合梯形公式，从原理上看，这是由于前者的余项阶数高于后者的余项阶数，因此在步长小于1的情况下能够更快收敛。这一现象非常重要，因为在算法实现过程中可以看到，这两种算法的时间复杂度与区间数呈线性关系，因此，需要更少等分区间的复合辛普森公式在效率上远远高于复合梯形公式。这为我们在工程实现上提供了很好的选择依据。

进一步地，使用龙贝格公式时，其迭代次数为等分区间数的对数。在实验中看到，龙贝格公式的迭代次数为4次，低于复合辛普森公式和复合梯形公式，然而其计算得到的误差值确远远小于后两者。可见，龙贝格公式无论从算法效率还是从算法精度上，都有着明显的优势。结合书中的理论分析，令人感叹数值算法的精妙。

实验2中的复合高斯公式给出了另一种用数值计算求解积分值的方法，在仅用14次迭代的情况下给出了误差在10^(-10)量级的结果，为pi的近似求解提供了新思路。

通过这次实验，我对课上介绍的几种数值计算求解积分值的方法有了更加深入的理解。收获一方面体现在对于公式、计算过程的熟悉，更体现在对于算法之间不断改进、去粗取精的过程的体会和欣赏，激发了更大的学习兴趣。

附：程序清单，对于两个实验，请使用g++编译integeral.cpp，即可得到各方法的输出结果。（test.cpp为复合高斯公式实验中，寻找目标函数四阶导最大值的代码片段)