poznámky ke geost 5

Milí studenti,
díky za elaboráty. Zde jsou moje odpovědi a poznámky.
S pozdravem,
JJ

U1: Funkci `primka` vytvořte v Matlabu a spusťte na data xd=[1,3], zd=[10,20]. Vstupní vektor udává místa, kde se vypočtou hodnoty bodů na přímce. Zadáte-li např. x=[0,4], zobrazí se přímka v tomto rozsahu.

Nebyly problémy, jenom jsem si všiml, že by se vám hodil příkaz `format compact`,

který způsobí hustší řádkování výpisu. Může být uplatněn z příkazové řádky nebo uvnitř programu.

U2: Tužka papír. Pokuste se derivovat sumu (5) podle *a* a *b*. Výsledky vhodným způsobem upravte tak, abyste dostali soustavu dvou rovnic pro hledané parametry *a* a *b*. Výsledek mi vložte do elaborátu.

Všichni to dokázali, byly ale pochybnosti:

Nevím, zda je to dobře zderivováno, přecejen jsme byli de facto minulý rok v matematice parciálních derivací ušetřeni kvůli koronaviru. Velice bych uvítal, kdybyste, prosím, ukázal i správný výsledek i postup řešení v odpovědích, abych si to mohl zkontrolovat. Dosti by mi to pomohlo.

Podstatné je si uvědomit, že suma znamená součet určitého (konečného) počtu členu a každý z nich lze derivovat zvlášť. Takže derivujeme složenou funkci (tu závorku na druhou).
Naše kolegyně úkol přehledně zapsala

U2 $$S = \sum \left(z_i - (a + b x_i)\right)^2 \rightarrow \min$$

$$S'_a = \sum 2\,(z_i - a - b x_i)\cdot(-1)$$

$$S'_b = \sum 2\,(z_i - a - b x_i)\cdot(-x_i)$$

$$\sum 2\,(z_i - a - b x_i)\cdot(-1) = 0 \qquad |:2$$

$$\sum 2\,(z_i - a - b x_i)\cdot(-x_i) = 0 \qquad |:2$$

$$\sum -z_i + a + b x_i = 0$$

$$\sum -x_i z_i + a x_i + b x_i^2 = 0$$

$$\sum^{n} a + \sum b x_i = \sum z_i$$

$$\sum a x_i + \sum b x_i^2 = \sum x_i z_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} a\cdot n + b\sum x_i &= \sum z_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 &= \sum x_i z_i \end{aligned}}$$

U3: Funci `primka` uložte jako `primka_LSQ_pokus`. Výše uvedenými 3 příkazy nahraďte tu část, kterou jsme dříve vyznačili žlutě. Doplňte data o 3. bod označený v obrázku výše šipkou a funkci spusťte. Výsledný obrázek mi vložte do elaborátu.

OK

U4: Vyzkoušejte spuštění funkce na libovolná data obsahující více bodů a také na data sestávající pouze ze dvou bodů z U1.

OK

U5: Podívejte se do funkce, `primka_LSQ`, kterou jsem vám zaslal minule, a najděte tam řádek, kde je regresní matice vytvořena. Spusťte funkci `primka_LSQ` na stejná data jako v U3 a ověřte, že dává stejné výsledky.

Správná odpověď
Řádek, kde je vytvořena regresní matice –

```
X=[ones(1,nd);xd]';
```

ale nikoliv
V příkazu `primka_LSQ` je řádek, který vytváří regresní matici, tento: `B=inv(X'*X)*X'*zd'`
Tento řádek už řeší soustavu rovnic a to B je vektor obsahující řešení.

Přímka je zjevně totožná, jen mě zarazilo, že výsledek v příkazové řádce vyšel jinak pro *a* a *b*.
V případě použití funkce *primka_LSQ* mi vychází

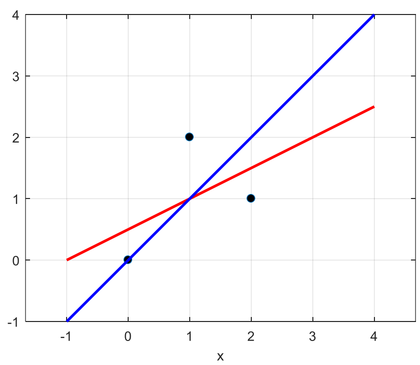
a = 2.1429

b = 7.1429

Při použití funkce *primka_LSQ_pokus* ale vychází, že *a = 5* a *b = 5*

Pokud se zadají data [1 3 3.5],[10 20 30], tak by měl vyjít metodou nejmenších čtvreců ten první uvedený výsledek.

U6: Na následujícím obrázku je trojice bodů proložených dvěma přímkami (jen 3 body, aby se to snadno spočítalo).
Napište rovnice obou přímek a zjistěte, která z nich vystihuje data lépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.



Někdo našel rovnice přímek tak, že odečetl z grafu souřadnice vybraných 2 bodů na přímce a dosadil do rovnice přímky. To je samozřejmě OK.

Vzhledem k jednoduchému zadání lze ovšem ty rovnice vyčíst přímo z obrázku. Uvažujme rovnici přímky ve tvaru y=*a*+*b*x, kde *b* je směrnice, *a* vyjadřuje úsek na ose y.

Modrá přímka prochází počátkem a prochází diagonálně čtvercovou sítí – její směrnice je tedy 1, takže rovnice přímky je $y = x$.

Červená přímka stoupá pomaleji, na 2 dílky na ose x připadá jeden na ose y, takže směrnice je ½. Pro x=0 nabývá hodnoty ½, resp. protíná osu y v bodě [0,1/2]. Takže rovnice přímky je $y = 1/2 + 1/2x$.

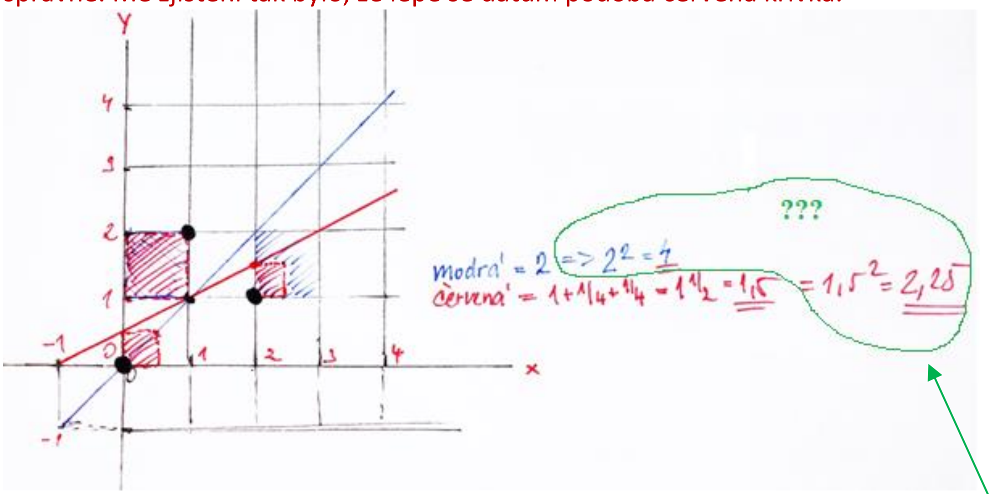
Porovnat přímky z hlediska metody nejmenších čtverců znamená ty sumy čtverců spočítat a porovnat. Tj. dosadit do vzorce

$$\sum [z_i - (a + bx_i)]^2$$

Přímo z obrázku vyčteme, že u modré přímky to bude 2 a u červené 1.5.

To chtěl asi říci kolega, který napsal

Šel jsem na to úvahou, odhadem (tedy jsem to neřešil přes vzorce), avšak moc nevím, zda je to správně. Mé zjištění tak bylo, že lépe se datům podobá červená křivka.



V souvislosti s 6. úkolem bych se rád zeptal a dozvěděl celé řešení úkolu a případně jak tohle řešit v Matlabu. Mnohokrát děkuji.

Ten obrázek obsahuje řešení úkolu, navíc graficky ilustrované (bravo). Ale pak se to nějak vymkne a objeví se část, která je nesmyslná (zeleně).

To vyjádření „že lépe se datům podobá" bych nahradil, že je ve smyslu metody nejmenších čtverců lépe vystihuje, aproximuje apod.

„...jak tohle řešit v Matlabu“

Jistě by se dala spustit funkce `primka_LSQ` a spočíst suma čtverců odchylek příkazem

```
sum((zd-(a+b*xd)).^2)
```

Minule jste počítali `rmse` , kde to bylo podobné (byla tam navíc odmocnina).

Někdo použil k porovnání přímek koeficient determinace – souhlas, ale pro tuto úlohu stačí ta suma čtverců (obě přímky jsou ve stejném měřítku a mají stejný počet bodů).

Poznámka: Lze rovnici přímky určit ještě jiným způsobem? U metody čtverců mi nebylo úplně jasné, která z rovnic se měla pro výpočet použít.

Jako už jsem řekl, dala by spustit na funkce `primka_LSQ`, která by našla tu červenou. Vzpomínám si, že jsem ji proto do toho zadání vybral.

Ale hlavně, ty přímky už jsou tam nakreslené, ta úloha je o tom je, jak je porovnat a vybrat tu „lepší“. Čili, že chápeme kritérium metody nejmenších čtverců.

Že je to ta červená přímka, kterou nalezne metoda nejmenších čtverců, si můžete ověřit vyvoláním naší funkce, např.

```
primka_LSQ([0 1 2],[0 2 1],[-1:.1:4])
```

Rozhodl jsem se k tomuto úkolu ještě něco přidat na začátku další lekce :)

Otevřete zaslanou funkci `polynom_LSQ` a porovnejte její kód s funkcí `primka_LSQ` (zjistěte, kde se liší). Pokuste se funkci `polynom_LSQ` spustit tak, abyste vykreslili obrázek se 4 datovými body výše.Do elaborátu toto vkládat nemusíte, jen kdyby byl nějaký problém.

Zřejmě nebyl, nikdo se neozval.

Vypracování elaborátu mi zabralo přibližně pět hodin včetně nastudování parciálních derivací, které jsme v rámci předmětu Matematika C neprobírali.

Netušil jsem, že ty derivace jste neprobírali. Ale všichni jste se s tím „popasovali“ a to je dobře.

I když třeba nepochopíte do detailů nějaký matematický postup, je pořád lepší ho jakžtakž nějak projít a uvědomit si, na čem jsou založeny modely používané ve vašem oboru, nežli je používat úplně naslepo. Pochopení principu konstrukce modelu umožňuje si uvědomit jeho slabiny a vyvarovat se nesmyslných interpretací (chtít od modelu víc, než může dát).