Milí studenti,

projděte si nejprve soubor geost_5_odpovedi.pdf. Výsledky úkolů vložte do elaborátu.

S pozdravem,

JJ

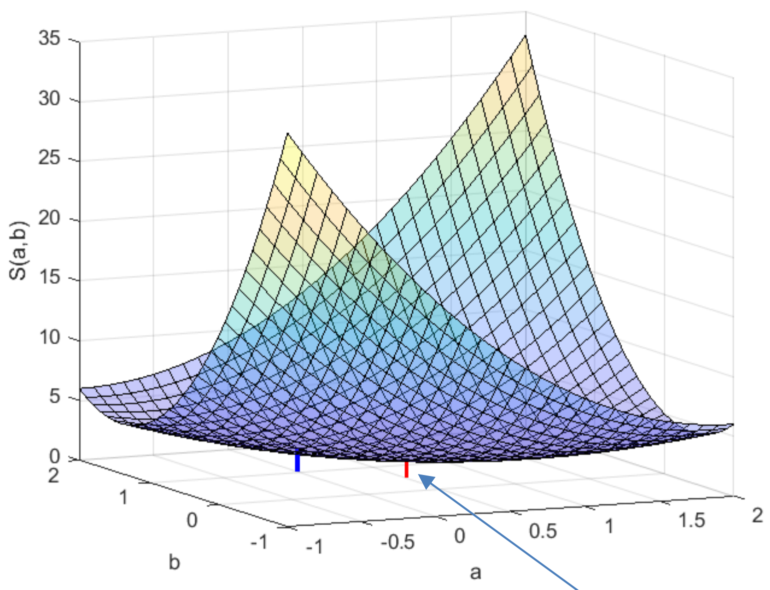
Ještě k metodě nejmenších čtverců

V předchozí lekci jste museli derivovat výraz pro sumu čtverců odchylek

$$S = \sum [z_i - (a + bx_i)]^2$$

Kdybychom neuměli derivovat, mohli bychom zkoušet opakovaně volit parametry *a* a *b* přímky, to jest jakoby hýbat přímkou mezi datovými body, a počítat tuto sumu. Za nejlepší přímku bychom vybrali tu, která dává sumu čtverců odchylek nejmenší.

To ilustruje zaslaná funkce `primka_U6_ukazka`. Prohlédněte si její kód a spusťte ji. Výsledkem je obrázek

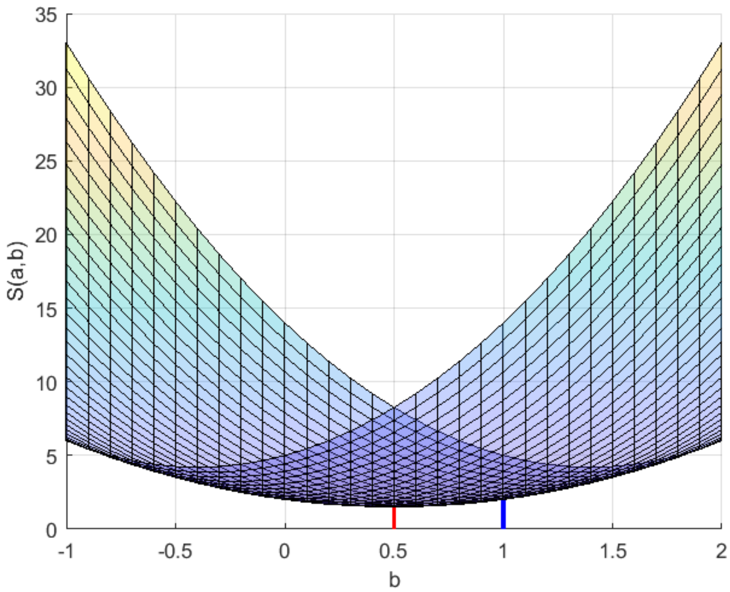


Hodnoty sumy S jsou spočteny pro mnoho různých přímek (různých *a* a *b* zadaných v rovině x-y). Vzniká tak vykreslená plocha, jejíž minimum se vypsalo

```
min_S =     1.5000
```

což nám vyšlo v úloze U6 pro tu červenou přímku. Vyznačil jsem to do obrázku a přidal i tu modrou, pro kterou byla suma = 2.

Zkuste obrázkem otáčet, abyste se o tom ujistili:



Metodou nejmenších čtverců (MNČ) jsme tedy nalezli to minimum jako nejnižší bod ve vykresleném údolí. Suma čtverců je vždy nezáporná a my hledáme globální minimum. U proložení přímky je to jednoduché, minimum je pouze jedno. Obecně při použití MNČ tomu tak být vždy nemusí, plocha může být členitější a také mohou existovat lokální minima.

Patrně jste si všimli, že plocha má skoro ploché dno a hodnoty sumy S v okolí bodu ½,½ jsou sice větší nežli to minimum ale ne o moc. Možná vás napadlo, že odpovídající přímky jsou z hlediska MNČ „skoro stejně dobré" jako ta červená.

Při tomto vykresleném postupu vlastně nevíme, zda jsme trefili pesně to minimum, zda by se při zahušťování sítě trochu neposunulo. Výhodou analytického postupu, tj. derivování, bylo, že jsme minimum určili jednoznačně.

Lokání polynomický trend

V závěru poslední lekce jsme pomocí funkce `polynom_LSQ` demonstrovali, že proložit polynom stupně >1 je formálně stejné jako proložit přímku, jenom se musí doplnit matice regresorů o další sloupec

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots \\ & & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots \end{bmatrix} \tag{1}$$

Uvidíme, že další malá formální změna postupu učiní velkou změnu koncepční - přejdeme k *lokální regresi*.

Pro jednoduchost si představme, že prokládáme přímku $z = a + bx$ a zajímá nás jenom hodnota z v určitém bodě x. Přitom chceme, aby bližší datové body měly na proložení větší vliv. Můžeme to zařídit tak, že odchylkám (resp. čtvercům odchylek) dáme různou váhu, bližší body budou mít větší (podobně jako jsme uvažovali u metody IDW). Zapíšeme váhy do sumy čtverců reziduí

$$S(x) = \sum[z_i - (a + bx_i)]^2 w_i = min \qquad (2)$$

kde váhy w_i jsou nějakou funkcí vzdálenosti mezi počítaným bodem a datovými body

$$w_i = f(x - x_i)$$

Konkrétní tvar funkce *f* upřesnímě za chvíli.
Na sumu *S* aplikujeme stejný postup jako v předchozí lekci, budeme ji derivovat podle parametrů, atd. Vyjdou velmi podobné rovnice a po úpravě dostaneme

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{z} \qquad (3)$$

kde $\boldsymbol{W}$ je matice obsahující na diagonále váhy w_i (diagonální matice vah). Není to zas tak odlišné (jeden symbol navíc :). Spočtené koeficienty přímky (jsou ve vektoru $\boldsymbol{B}$) ale nyní použijeme pouze na vyčíslení hodnoty z v bodě x. Pokud chceme proložit „lokálně“ přímku v jiném bodě, musíme celý postup zopakovat (v programu se objeví cyklus).

Postup jsme vysvětlili na proložení přímky. Chceme-li lokálně prokládat polynom, zůstává vzorec (3) v platnosti, jenom musí regresní matice obsahovat sloupec s mocninami jako v (1).

Uděláme si příklad. Zadejte do Matlabu příkazy

```
xd=[0:100]/100*2*pi;
zd=sin(xd)+randn(1,101)*0.25;
plot(xd,zd,'.')
```

Tím jsme si vyrobili data, jsou to hodnoty na sinusovce, ke kterým jsme přičetli náhodné odchylky. Zkusíme proložit polynom 2. stupně

```
polynom_LSQ(xd,zd,xd)
```

Z pochopitelných důvodů nedostatečný výsledek, pozorujeme,, že koeficient *c* vychází malý, je to skoro přímka.

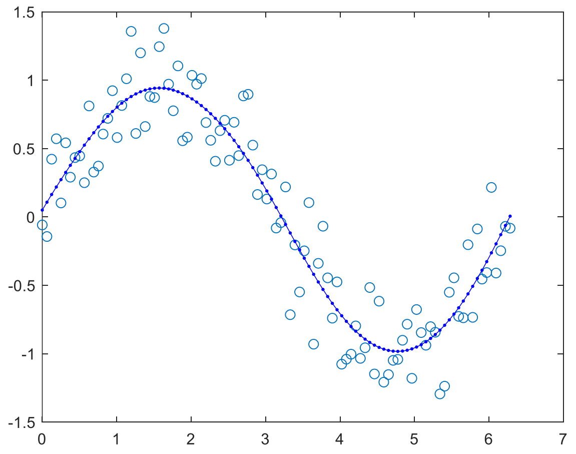
Načtěte si zaslanou funkci `polynom_lokalni`. Prohlédněte si její kód a pokuste se mu porozumět. Všimněte si, že na řádku 23 se počítají váhy, které jsou určeny vzorcem

```
w(j)=exp(-(d/h)^2); % gaussovske vahy
```

Úkol U1: Vykreslete graf funkce $f(d) = \exp\left(-(d/h)^2\right)$ pro h =1, 2 a 3 v intervalu $d \in \langle -10{,}10 \rangle$. Obrázek vložte do elaborátu.

Poté, co jsme si ujasnili, jak vypadají váhy, spusťte funkci podobně jako předchozí `polynom_LSQ`, přičemž vyberte (na základě právě vykresleného grafu vah nebo zkusmo) vhodnou hodnotu pro její vstupní parametr *h*, který určuje míru lokálnosti.

Výsledný obrázek by mohl vypadat asi takto



Při spuštění funkce `polynom_LSQ` se do výpočtu koeficientů prokládané křivky stejnou měrou podílely všechny datové body. Takové postupy můžeme označit za globální. Je to tedy globální regrese. Oproti tomu funkce `polynom_lokalni` provádí lokální regresi.

U2: Funkci `polynom_lokalni` uložte jako `primka_lokalni` a upravte její kód tak, aby se lokálně prokládala přímka. Vhodným nastavením parametru lokálnosti se pokuste dosáhnout uspokojivého proložení. Kód i obrázek vložte do elaborátu.

V předchozích příkladech jsme použili gaussovské váhy (říká se tomu podle souvislosti také gaussovské okno nebo jádro, anglicky *Gaussian window*, *kernel*). Existují samozřejmě i jiné váhy (okna, jádra). Například tri-kubické, které je dáno vzorcem

$$f(d) = \left[1 - \left(\frac{|d|}{h}\right)^3\right]^3 \quad \text{pro } d < h$$

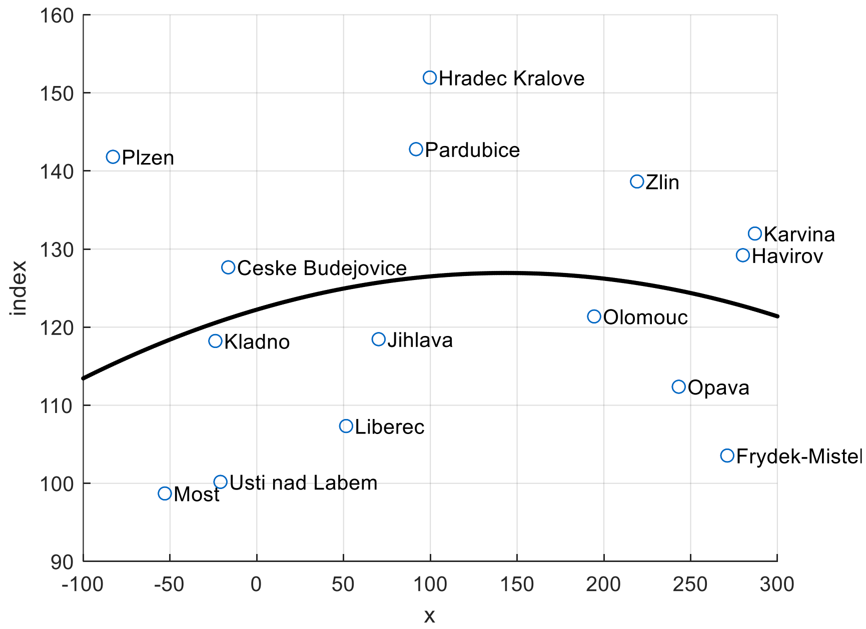
$$= 0 \quad \text{pro } d \geq h$$

U3: Vykreslete graf tri-kubického okna pro h =1 v intervalu $d \in \langle -1.5, 1.5 \rangle$

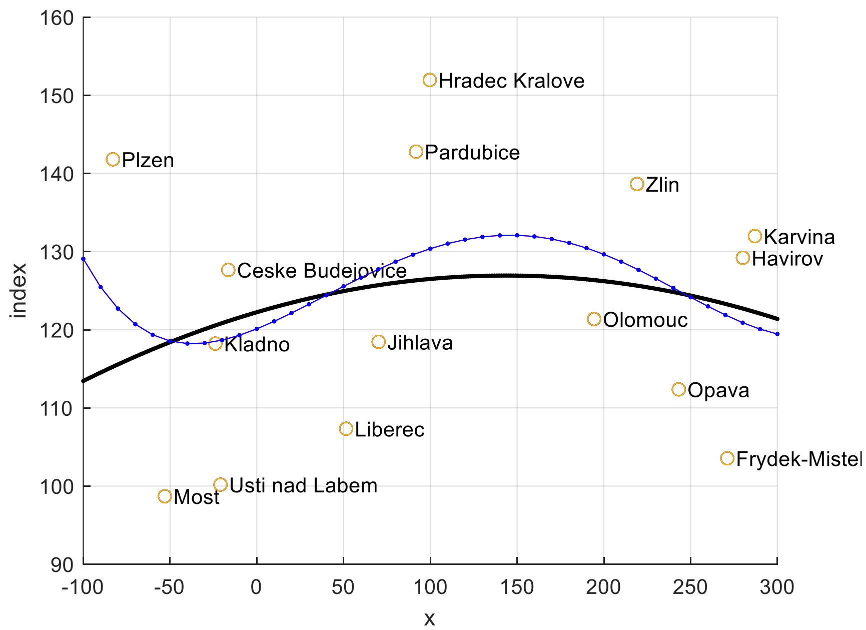
U4: Načtěte zaslaná data pocházející ze sčítání lidu 2011. Jde o tzv. index stáří.:

```
[xd,zd,name]=data_index_stari;
```

Pomocí funkce `polynom_LSQ` se pokuste vyrobit tento obrázek



a pak pomocí funkce `polynom_lokalni`, kde vhodně nastavíte parametr *h*, obrázek následující



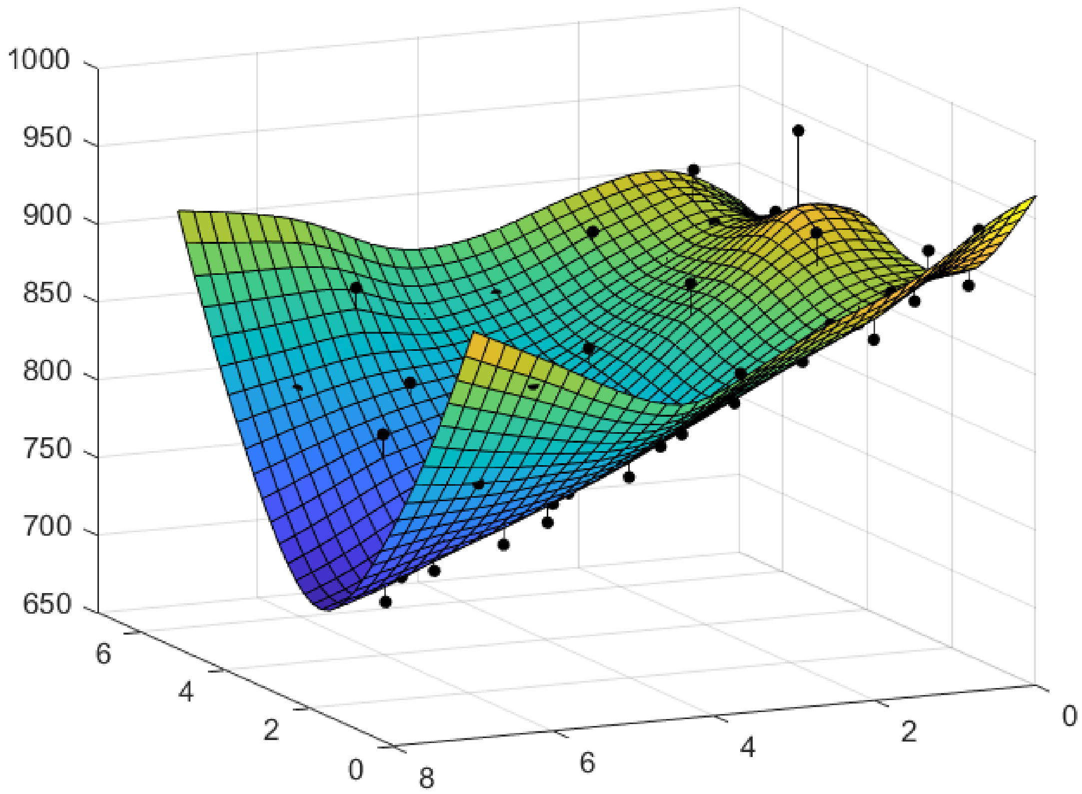
Výsledné obrázky vložte do elaborátu.

Lokání polynomický trend ve 2D

Prohlédněte si nyní znovu text GPI na str. 49-52 a pak si prostudujte str. 52 dole-55.

Zbývá udělat ukázku.
Načtěte data Davis, která už znáte . Načtěte do editoru Matlabu zaslanou funkci `pol_trend_2`. V jejím záhlaví jsou vysvětleny vstupní parametry – to pečlivě prostudujte a pak se pokuste funkci spustit na data Davis. Zvolte podle svého uvážení stupeň polynomu a parametr h.

Mohlo by vyjít třeba něco takového:



U5: Svůj výsledek mi vložte do elaborátu.

U6: Zkuste vypočítat průměrnou a střední kvadratickou odchylku dat od trendové plochy.

Těším se na vaše výsledky :)