Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kita akan mencari dekomposisi LU dari matriks A, yaitu $A = LU$, di mana L adalah matriks segitiga bawah (lower triangular) dan U adalah matriks segitiga atas (upper triangular).

Kita gunakan eliminasi Gauss tanpa pivoting untuk memperoleh matriks U, dan elemen-elemen pengali digunakan untuk membentuk matriks L.

Langkah 1: Eliminasi elemen di bawah pivot baris pertama.

Pivot: $a_{11} = 2$

- Untuk baris 2: $R_2 \leftarrow R_2 - \frac{4}{2}R_1 = R_2 - 2R_1$

$$\begin{aligned} \text{Baris 2 baru: } & (4 - 2 \cdot 2,\ -1 - 2 \cdot 1,\ -1 - 2 \cdot (-2)) \\ & = (0,\ -3,\ 3) \end{aligned}$$

Pengali: $l_{21} = 2$

- Untuk baris 3: $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{2}{2}R_1 = R_3 - R_1$

$$\begin{aligned} \text{Baris 3 baru: } & (2 - 2,\ -1 - 1,\ 1 - (-2)) \\ & = (0,\ -2,\ 3) \end{aligned}$$

Pengali: $l_{31} = 1$

Matriks setelah langkah 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Langkah 2: Eliminasi elemen di bawah pivot baris kedua.

Pivot: $u_{22} = -3$

- Untuk baris 3: $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{-2}{-3}R_2 = R_3 - \frac{2}{3}R_2$

$$\begin{aligned} \text{Baris 3 baru: } & \left(0,\ -2 - \frac{2}{3} \cdot (-3),\ 3 - \frac{2}{3} \cdot 3\right) \\ & = (0,\ -2 + 2,\ 3 - 2) \\ & = (0,\ 0,\ 1) \end{aligned}$$

Pengali: $l_{32} = \frac{2}{3}$

Matriks U (hasil akhir):

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks L dibentuk dengan menempatkan pengali pada posisi yang sesuai dan diagonal utama bernilai 1:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Verifikasi: $LU = A$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Jadi, dekomposisi LU dari matriks A adalah:

$$\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$