Personal Assignment 2

Mubarak

1. Cari semua turunan parsial kedua

(a) $f(x, y) = x^4y - 2x^3y^2$

Hitung turunan pertama dulu:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^4y - 2x^3y^2\big) = 4x^3y - 6x^2y^2,$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^4y - 2x^3y^2\big) = x^4 - 4x^3y.$$

Sekarang turunan kedua:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y - 6x^2y^2) = 12x^2y - 12xy^2 = 12xy(x - y),$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^4 - 4x^3y) = -4x^3,$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y - 6x^2y^2) = 4x^3 - 12x^2y = 4x^2(x - 3y),$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^4 - 4x^3y) = 4x^3 - 12x^2y = 4x^2(x - 3y).$$

(Terlihat $f_{xy} = f_{yx}$ seperti diharapkan.)

(b) $z = \dfrac{y}{2x + 3y}$

Definisikan $D = 2x + 3y$. Dengan aturan pembagian (quotient rule) untuk turunan parsial:

Turunan pertama

$$z_x = \frac{0 \cdot D - y \cdot (2)}{D^2} = -\frac{2y}{(2x + 3y)^2},$$

$$z_y = \frac{1 \cdot D - y \cdot (3)}{D^2} = \frac{2x + 3y - 3y}{(2x + 3y)^2} = \frac{2x}{(2x + 3y)^2}.$$

Turunan kedua

Turunan z_x terhadap x:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(-2y(2x+3y)^{-2}\Big) \\ &= -2y \cdot (-2)(2x+3y)^{-3} \cdot 2 \\ &= 8y(2x+3y)^{-3} \\ &\Rightarrow \quad z_{xx} = \frac{8y}{(2x+3y)^3}. \end{aligned}$$

Turunan z_y terhadap y:

$$\begin{aligned} z_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(2x(2x+3y)^{-2}\Big) \\ &= 2x \cdot (-2)(2x+3y)^{-3} \cdot 3 \\ &= -12x(2x+3y)^{-3} \\ &\Rightarrow \quad z_{yy} = \frac{-12x}{(2x+3y)^3}. \end{aligned}$$

Turunan silang (contoh z_{xy}, lalu z_{yx} untuk verifikasi):

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(-2y(2x+3y)^{-2}\Big) \\ &= -2(2x+3y)^{-2} + (-2y)\cdot(-2)(2x+3y)^{-3} \cdot 3 \\ &= -\frac{2}{(2x+3y)^2} + \frac{12y}{(2x+3y)^3} \\ &= \frac{-4x+6y}{(2x+3y)^3}. \end{aligned}$$

Jika dihitung $z_{yx} = \partial_x(z_y)$ diperoleh hasil yang sama:

$$z_{yx} = \frac{-4x+6y}{(2x+3y)^3}.$$

Jadi ringkasan turunan kedua untuk (b):

$$\boxed{z_{xx} = \frac{8y}{(2x+3y)^3}, \quad z_{yy} = \frac{-12x}{(2x+3y)^3}, \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{-4x+6y}{(2x+3y)^3}}.$$

2. Jelaskan F dan buat sketsa beberapa vektor dalam medan vektor $\mathbf{F}(x, y)$

(a) $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}y\,\mathbf{j}$

Interpretasi. Pada titik (x, y) vektornya adalah $(M, N) = (x, \frac{1}{2}y)$.

Komponen-x sebanding dengan x. Jika $x > 0$ arah ke kanan, jika $x < 0$ ke kiri.

Komponen-y sebanding dengan y tetapi setengah besarannya.

Divergensi: $\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x(x) + \partial_y(\frac{1}{2}y) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0 \rightarrow$ medan "menyebar" (sumber).

Titik asal $(0, 0)$ adalah titik nol vektor.

Beberapa vektor contoh dapat digambarkan berdasarkan koordinat dan komponen.

Titik (x, y)	$\mathbf{F}(x, y) = \left(x, \frac{1}{2}y\right)$
$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(1, 0)$	$(1, 0)$
$(0, 1)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
$(1, 1)$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
$(-1, 1)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
$(2, 0)$	$(2, 0)$

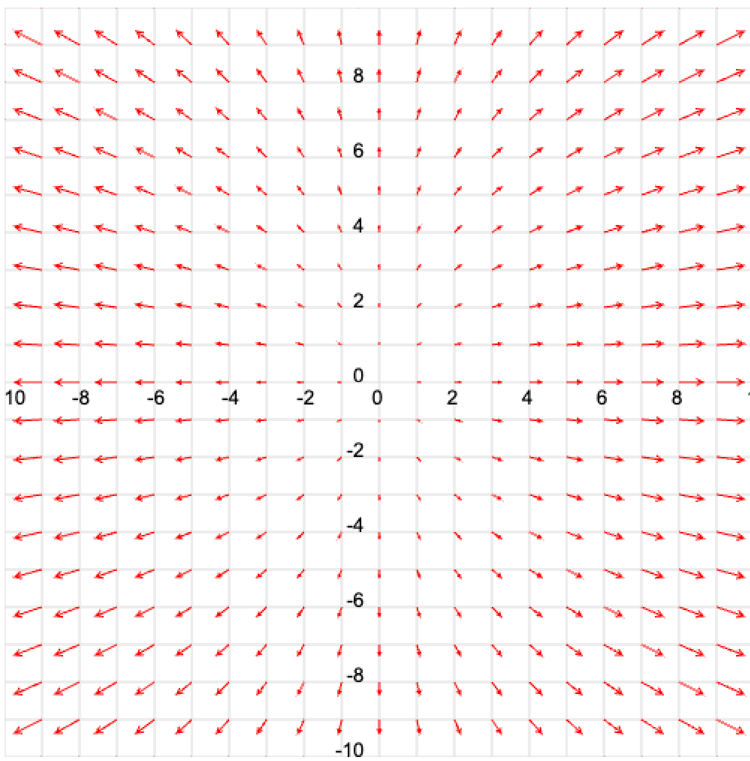

Figure 1: Vector Field

(b) $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j}$

Interpretasi. Pada titik (x, y) vektornya $(M, N) = (y, x + y)$.

Komponen-x bergantung pada y, komponen-y bergantung pada x dan y.

Divergensi: $\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x(y) + \partial_y(x + y) = 0 + 1 = 1 > 0$.

Periksa rotasi (curl) 2D: $\text{curl}_z = \partial_x N - \partial_y M = \partial_x(x + y) - \partial_y(y) = 1 - 1 = 0$. Karena curl $= 0$ di $\mathbb{R}^2$ (domain sederhana), medan ini konservatif — ada potensial skalar.

Potensial $\phi(x, y)$ dapat dicari: dari $\phi_x = y \Rightarrow \phi(x, y) = xy + g(y)$. Dari $\phi_y = x + g'(y)$ harus sama dengan $x + y \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{1}{2}y^2$. Jadi

$$\phi(x, y) = xy + \tfrac{1}{2}y^2 + C.$$

Beberapa vektor contoh dapat digambarkan berdasarkan koordinat dan komponen.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y) = (y,\, x + y)$
$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(1, 0)$	$(0, 1)$
$(0, 1)$	$(1, 1)$
$(1, 1)$	$(1, 2)$
$(-1, 1)$	$(1, 0)$
$(2, -1)$	$(-1, 1)$

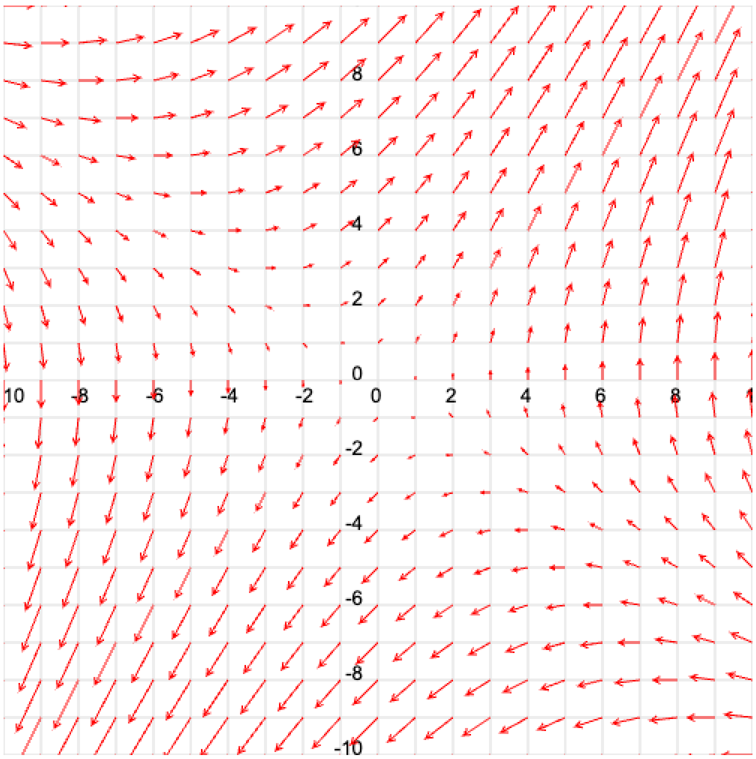

Figure 2: Vector Field

3. Gunakan Cramer's Rule untuk menyelesaikan sistem (LO2)

Sistem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Tuliskan matriks koefisien A dan vektor ruas kanan b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Determinan $\det(A)$

Menghitung determinan A (metode Sarrus atau ekspansi):

$$\det(A) = -2.$$

(Penghitungan singkat: $2\cdot2\cdot1+1\cdot(-2)\cdot3+(-1)\cdot5\cdot1-\big((-1)\cdot2\cdot3+1\cdot5\cdot1+2\cdot(-2)\cdot1\big) = -2$.)
Karena $\det(A) \neq 0$, solusi unik ada.

Matriks A_1, A_2, A_3 (mengganti kolom sesuai variabel)

$A_1 = A$ dengan kolom ke-1 diganti b:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_1) = -10.$$

$A_2 = A$ dengan kolom ke-2 diganti b:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 9 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_2) = 18.$$

$A_3 = A$ dengan kolom ke-3 diganti b:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \det(A_3) = 2.$$

Solusi menurut Cramer

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-10}{-2} = 5, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{18}{-2} = -9, \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Jadi solusi: $\boxed{x_1 = 5,\ x_2 = -9,\ x_3 = -1}$.

4. Gunakan Gauss–Jordan untuk menyelesaikan (LO2)

Mulai dari matriks augmentasi $[A|b]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -2 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Langkah 1. Bagi baris 1 dengan 2 agar pivot = 1:

$$R_1 \leftarrow \tfrac{1}{2}R_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Langkah 2. Hapus elemen bawah di kolom 1:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1,$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1.$$

Hasil:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{array}\right]$$

Langkah 3. Buat pivot 1 pada baris 2: kalikan R_2 dengan (-2):

$$R_2 \leftarrow -2R_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{array}\right]$$

Langkah 4. Hilangkan entri kolom 2 pada baris 1 dan baris 3:

$$R_1 \leftarrow R_1 - \tfrac{1}{2}R_2,$$
$$R_3 \leftarrow R_3 + \tfrac{1}{2}R_2.$$

Hasil:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Langkah 5. Bagi baris 3 dengan 2 untuk membuat pivot 1, lalu hilangkan entri kolom 3 di baris 2:

$$R_3 \leftarrow \tfrac{1}{2}R_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Lalu

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Maka bentuk tereduksi (RREF) menunjukkan solusi langsung:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -9, \quad x_3 = -1.$$