粉笔直播课

方法精讲-数量 5

（笔记）

主讲教师：周末

授课时间：2020.10.12

粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量5（笔记）

学习任务：

1. 课程内容：排列组合与概率、植树问题。

2. 授课时长：3小时。

3. 对应讲义：160页～165页。

4. 重点内容：

（1）掌握常用的排列、组合公式，理解分类与分步的区别，并能熟练运用。

（2）掌握求概率的两种情况的解题思路，了解正难反易则从反面求解的技巧。

（3）掌握捆绑法、插空法的适用范围和使用步骤，掌握错位排列的条件识别特征并记住常见的错排数，了解枚举法的适用范围。

（4）掌握植树问题的三个基本公式以及不移动植树。

第十节　排列组合与概率

【知识点】排列组合与概率：排列组合是数学运算中最难的题型，经济利润/工程、行程等问题是小学就开始接触的，而排列组合是在高中才接触，甚至部分省份的文科生都没有接触。概率问题和排列组合有一定的相关系，因此难度也不低。在考试中，排列组合问题的难度是高于概率问题的，如果试卷中有排列组合问题和概率问题，排列组合题很难，可以尝试做一下概率问题。排列组合在往年考试中每年考1题，属于必考题型，如果在考试之前还没有学会排列组合，在考试中就放过自己，目前备考时间还很长，是可以试一试的。2017年～2019年广东省考中概率问题是不考的，而2020年概率考查了1题。

1. 两个原理：

（1）加法原理：分类用加法。用“要么……要么……”造句，说明用加法。假如老师现在在北京，安排老师去广州出差，坐高铁有5趟，坐飞机有3班，问老师从北京到广州有多少种出行方式。对于完成从北京到广州这件事，要么坐高铁，要么坐飞机，分类用加法，5+3=8种。

（2）乘法原理：分步用乘法。用“先……再……（既……又……）”造句，说明用乘法。从北京到广州出差，先去上海取电脑，再去广州，从北京到上海有5趟高铁，从上海到广州有3班飞机，问完成从北京到上海再到广州出差这件事有多少种出行方式。要完成这件事，需先从北京到上海，再从上海到广州，分步用乘法，5*3=15种。

2.排列与组合：

（1）排列（A）：与顺序有关。

（2）组合（C）：与顺序无关。

（3）判定标准：从已选的主体中任意挑出两个，调换顺序，有差别，与顺序有关（排列A）；无差别，与顺序无关（组合C）。从七个葫芦娃中，任选1个去救爷爷，有7种选法。选一个不涉及排列组合。一堆元素中选多个（≥2个），才涉及排列组合的区分。

①例1：从七个葫芦娃中，任选两个去救爷爷。

答：选多个，涉及排列组合的区分。假如选出的是大娃和二娃，先选大娃再选二娃，改变顺序，先选二娃再选大娃，对于做的事情，都是大娃和二娃救爷爷，没有区分，所以用C（7,2）。

②例2：从七个葫芦娃中，任选两个去救爷爷（第一个去探路，第二个去打架）。

答：选多个，涉及排列组合的区分。假如选出的是大娃（探路）和二娃（打架），先选大娃再选二娃，改变顺序，先选二娃（探路）再选大娃（打架），打架和探路的风险是不同的，调换顺序之后是不同的，有区别就是有顺序，用A（7,2）。

【例1】（2019广东乡镇）乡镇干部小李今天有3项不同的工作要完成，则他今天完成工作的顺序共有多少种？

A.3　　B.4

C.5　　D.6

【解析】例1.问干一件事有多少种方法，排列组合问题。

方法一：有三个工作，第一个干的工作是从三个工作里选一个，有三种选择；

第二个干的工作从剩余两个工作中选一个，有两种选择；剩下的一项工作就是最后干的工作。求结果，用相加或相乘，造句用“先……再……”，用相乘，3*2*1=6，对应D项。

方法二：A（3,3）=3*2*1，有三项不同的工作，安排的是三项工作的顺序，相当于三个工作在三个位置上排队，假如选出的是A、B工作，先做A再做B和先做B再做A，改变顺序，结果不同，用A（3,3）。【选D】

【知识点】排列数与组合数计算：

1.排列（A）：与顺序有关。比如A（8,3）。

A（n,m）=从n开始往下乘m个数。A（8,3）=8*7*6。A（9,4）=9*8*7*6。

2.组合（C）：与顺序无关。比如C（8,3）。

C（n,m）=从n开始往下乘m个数从m开始往下乘到1。C（8,3）=8*7*6/（3*2*1）=8*7。C（7,4）=7*6*5*4/（4*3*2*1），能约分先约分。C（7,5）=C（7，2），这种方法只能用于组合数（C），下角标相同，上角标相加=下角标，这两个数的结果是相等的，可以简化计算，比如C（8,7）=C（8,1）。

【例2】(2020北京)某家电维修公司的职工每人每天最多完成5次修理任务。维修工小张上个月工作了20天，总计完成修理任务98次。则他上个月每天完成的修理任务次数有多少种不同的可能？

A.190　　　　B.210

C.380　　　　D.400

【解析】例2.一天做多完成5次修理任务，小张上个月工作了20天，干满了就是5*20=100次。问“他上个月每天完成的修理任务次数有多少种不同的可能”，求多少种可能，排列组合问题，相当于问题98次分到20天一共有多少种分法。如果把98拆分为20个数去分析比较复杂，98次还差2次就干满了，反过来思考：差的2次有哪几种可能。20天少2次：

（1）某一天少2次，从20天中选1天，就20种方法。或者C（20，1）=20。

（2）某两天各少1次，从20天中选2天，选多个，考虑排列组合，假如选的是1号和2号，先选1号再选2号和先选2号再选1号，结果都是1号和2号这两天，用

组合C，C（20,2）=20*19/（2*1）=190。

求结果，用“要么……要么……”造句，用加法，20+190=210，对应B项。

【选B】

【注意】

1.经济利润问题、工程问题简单是因为有一定的解题套路，比较容易读懂题。但是排列组合问题相对比较抽象，不管会不会做，可能读着就费劲。考试中遇到排列组合问题，如果读不懂，不死磕，把时间留给简单题。

2.每天完成的次数有多少种可能，即每天完成的次数有几个5次、4次、3次。把98拆分为20个数去分析比较麻烦，98次还差2次就干满了，可以分析差的2次有哪几种可能。

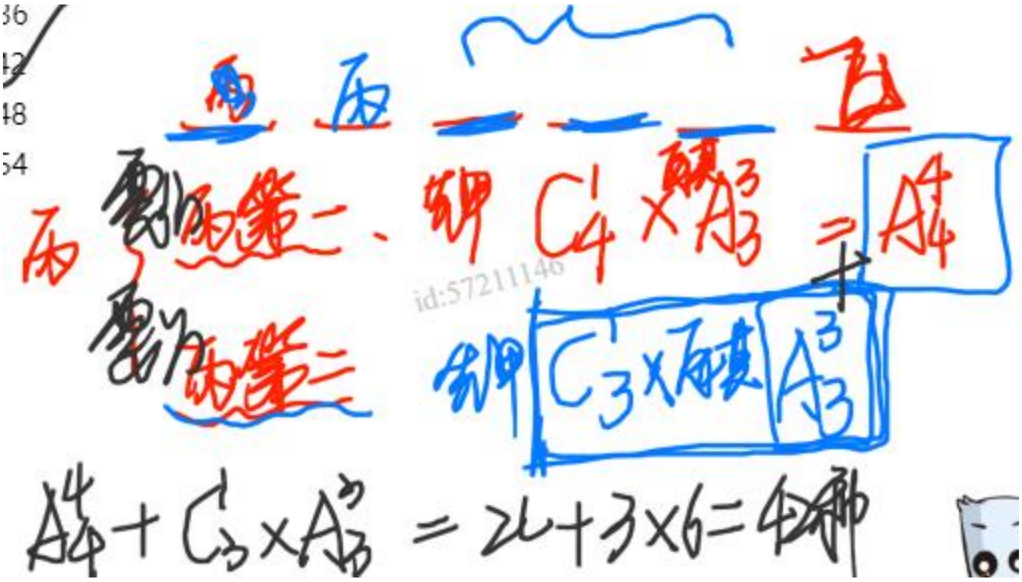
【例3】（2019深圳）某自驾游车队由6辆车组成，车队的行车顺序有如下要求：甲车不能排在第一位，乙车必须排在最后一位，丙车必须排在前两位，且任一车辆均不得超车或并行。该车队的行车顺序共有多少种可能？

A.36　　　　B.42

C.48　　　　D.54

【解析】例3.有多个元素排序，需要满足一定要求，先读懂要求，再选择从哪一个要求入手。6辆车就有6个位置，“甲车不能排在第一位，乙车必须排在最后一位，丙车必须排在前两位”，第二个要求是确定的结果，乙已经确定了，然后分析从第一个要求还是第二个要求入手，丙要么在第一位，要么在第二位，而分析甲有4种可能，从丙的要求入手简单。（1）丙在第一位，此时甲相当于从中间四个位置中随便选一个排，C（4,1），剩下3辆车随机排，车谁前谁后是不同的（奔驰、宝马、拖拉机和宝马、奔驰、拖拉机是不同的），有顺序全排列，为A（3,3），先安排甲，再安排其他，用乘法，C（4,1）*A（3,3），也可以理解为中间四个人随机排，A（4,4）；（2）丙在第二位，甲有特殊要求，先安排甲，甲不能排第一位，只能从中间三个位置选一个，为C（3,1），剩下3辆车和3个位置，有顺序，全排列，先安排甲，再安排其他，用乘法，C（3,1）*A（3,3）。求结果，用“要么……要么”造句，用加法，A（4,4）+C（3,1）*A（3,3）=24+3*6=42

种，对应B项。【选B】



【注意】常考排列数：A（5,5）=120，A（4,4）=24，A（3,3）=6。

【例4】（2017吉林）罐中有12颗围棋子，其中8颗白子，4颗黑子。从中任取3颗棋子。则至少有一颗黑子的情况有：

A.98种　　B.164种

C.132种　　D.102种

【解析】例4.求方法数。

方法一：选三颗棋子，至少有一个黑子，说明黑子的情况不止有一种：

（1）1颗黑子、2颗白子：从4颗黑子中选1颗，C（4,1）；从8颗白子中选2颗，假如白子为白A和白B，先选白A再选白B，改变顺序，先选白B再选白A，结果都是白A和白B，没有区别，只选不排序，用C（8,2），用“先……再……”造句，用乘法，为C（4,1）*C（8,2）。

（2）2颗黑子、1颗白子：从4颗黑子中选2颗，C（4,2）；再从8颗白子中选1颗，C（8,1），用乘法，为C（4,2）*C（8,1）。

（3）3颗黑子：从4颗黑子中选3颗，C（4,3）。

这三种情况造句用“要么……要么……”，用加法，C（4,1）*C（8,2）+C（4,2）*C（8,1）+C（4,3），对应B项。

方法二：正面需要分为三种情况，情况数较多，比较麻烦，可以反面思考，

满足条件情况数=总的情况数-不满足情况数。总的情况数：从12颗棋子中选3颗，只选择没有顺序，为C（12，3）。至少1颗黑子的反面是没有黑子，即全是白子的：从8颗白子中选3颗，只选择没有顺序，为C（8，3）。C（12，3）-C（8，3）=12*11*10/（3*2*1）-8*7*6/（3*2*1）=220-56，尾数为4，对应B项。【选B】

【注意】

1.正难反易：满足条件情况数=总的情况数-不满足情况数。

2.不能用C（4，1）*C（11，2），C（4，1）假如选的是黑1，C（11，2）选的是黑2和黑3；也有可能C（4，1）选的是黑2，C（11，2）选的是黑1和黑3，这两种情况是一样的。涉及多个中选几个，元素有分类（比如本题分为黑子和白子，选人的题分为男和女），需要分开选，不然容易错。

【知识点】概率问题：

1.给情况求概率（公务员考试中考查更多）：条件中没有概率。

（1）例：3个绿球、2个黄球、5个红球，球都一样，随便摸一个，摸到绿球的概率？

答：条件没有给概率，给情况求概率，概率=满足要求的情况数/总的情况数。总的情况数：一般“随便摸一个”对应总的情况数，总共10个球，从10个球中摸一个；满足情况数：满足情况数一般对应问题，摸到的球是绿的，有3个绿球，从3个绿球中摸一个，P=3/10。

（2）公式：概率=满足要求的情况数/总的情况数。

2.给概率求概率：条件中有概率。

【例5】（2019河南司法所）某书法兴趣班有学员12人，其中男生5人，女生7人。从中随机选取2名学生参加书法比赛，则选到1名男生和1名女生的概率为：

A.35/144　　B.35/72

C.35/132　　D.35/66

【解析】例5.没有给概率，属于给情况求概率，P=满足的情况数/总的情况数。总的情况数：从中随机选取2名学生参加书法比赛，即从12人中选2个，先甲

后乙和先乙后甲，改变顺序结果不变，用C（12,2）。满足的情况数：从5个男生中选1个，C（5,1）；从7个女生中选1个，C（7,1）；“先……再……”，用乘法，为C（5,1）*C（7,1）。因此P=35/[12*11/（2*1）]=35/66，对应D项。【选D】

【注意】男生和男生是有区别的，但是只选一个男生是没有区别的。

【例6】（2020浙江）某公司对10个创新项目进行评选，选出最优秀的3个项目投入运行。小张随机预测3个项目将会入选。问他至少猜对1个入选项目的概率在以下哪个范围内？

A.不到50%　　B.50%～60%

C.60%～70%　　D.超过70%

【解析】例6.从10个中选3个，问至少猜对1个入选项目的概率，概率问题，条件中没有概率，属于给情况求概率，P=满足的情况数/总的情况数。

方法一：（1）猜对1个：从3个优秀中选一个，为C（3,1），总共有10个，3个为优秀，那么剩余7个就是不优秀，再从7个不优秀中选两个，“先……再……”，用乘法，C（3,1）*C（7,1）。

（2）猜对2个：从3个优秀中选两个，再从7个不优秀中选1个，C（3,1）*C（7,1）。

（3）猜对3个：全猜对，C（3,3）=1。

“要么……要么”，用加法，满足的情况数=C（3,1）*C（7,1）+C（3,1）*C（7,1）+1。总的情况数：从10个项目中预测3个，C（10,3）。P=[C（3,1）*C（7,1）+C（3,1）*C（7,1）+1]/C（10,3）。

方法二：反面思考，至少猜对1个的反面就是一个都不对。总概率就是1。总的情况数还是从10个项目中预测3个，C（10,3）；满足要求的情况数：至少猜对1个的反面就是全错，从7个不优秀中选三个，C（7,3）。总概率-反面概率=1-C(7,3)/C（10,3）=1-[7*6*5/（3*2*1）÷10*9*8/（3*2*1）]=1-7/24=17/24，首位商7，结果是70%+，对应D项。【选D】

【注意】排列组合和概率问题中出现“至少”或“至多”，正面分析会有多种情况，如果正面有3种以上情况，可以反面思考。

【例7】（2018辽宁）一张纸上画了5排共30个格子，每排格子数相同。小王将1个红色和1个绿色棋子随机放入任意一个格子（2个棋子不在同一格子），则2个棋子在同一排的概率：

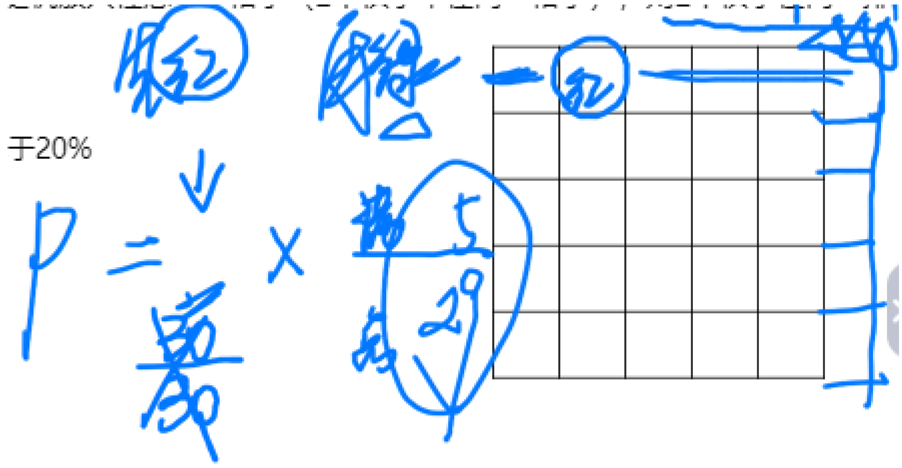
A. 不高于15%　　　　B. 高于15%但低于20%

C. 正好为20%　　　　D. 高于20%

【解析】例7.改编自2018年国考。“5排共30个格子，每排格子数相同”，每排格子数=30/5=6个。求概率，条件中没有概率，属于给概率求概率，P=满足的情况数/总的情况数。

方法一：总的情况数：1个红色和1个绿色棋子随机放入任意一个格子，从30个格子中选两个把1个红色和1个绿色棋子放入，本题严格来说应该是排列，红上绿下和绿下红上是不同的，A（30,2），但是用组合发现结果也是正确的，因为在概率的分子分母同是排列或组合是可以上下消掉的。满足的情况数：在同一排中选2个，谁在前谁在后是不同的，A（6,2），还需要确定是再哪一排，C（5,1），选确定哪一排再选位置，C（5,1）*A（6,2）。P=C（5,1）*A（6,2）/A（30,2）=5*6*5/（30*29）=5*29≈17%，对应B项。

方法二：跟屁虫，两个棋子要在同一排，在同一排并不受先放的棋子的影响，假设先放红色棋子，有没有在同一排取决于后放的棋子，因此先放的棋子放哪里都可以。假如先放红色棋子，再放绿色棋子，第一个棋子一定要放下去，一定要发生的事情的概率是P=30/30=1。红色棋子已经放好，对于绿色棋子不考虑同一排，从剩余30-1=29个格子中选一个，有29种情况，要与红色棋子同一排，只能从红色棋子所在排剩余的5个格子中选一个，有5种情况。概率=1*（5/29）=5/29，对应B项。【选B】



【例8】（2019联考）某学校举行迎新篝火晚会，100名新生随机围坐在篝火四周，其中，小张与小李是同桌，他俩坐在一起的概率为：

A. 2/97　　　　B. 2/98

C. 2/99　　　　D. 2/100

【解析】例8. 方法一：跟屁虫，篝火晚会往往是围一圈，问概率，条件中没有概率，属于给情况求概率，出现谁和谁在一起，主要取决于第一个人坐下后第二个人的选择。小张已经坐下，概率为1，坐在一起取决于小李，总的情况数：对于小李可以从剩余99个位置选一个；要满足坐在一起的要求，只能从小张的左边或者右边的2个位置中选一个，P=2/99。

方法二：给情况求概率，P=满足的情况数/总的情况数。总的情况数：100名新生随机环形排列，A（99,99）。满足的情况数：小张和小李挨着，把这两个人捆在一起，张在左李在右或者李在左张在右，有2种情况，两人捆成一个大胖子和剩余的98个人环形排列，即99个人环形排列，A（98,98），P=2*A（98,98）/A（99,99）=2/99。【选C】

A. 2/97

B. 2/98

C. 2/99

D. 2/100

$$=\frac{2\times A_{98}^{98}}{A_{99}^{99}}$$

【知识点】环形排列：

1.结论：n个人进行环形排列，有A（n-1,n-1）种排法。4个人环形排列的排法为A（3,3）。5个人环形排列的排法为A（4,4）。

2.例：4个人围圆桌坐下，有多少种不同的坐法？

答：4个人直线排列有A（4,4）种情况，但每4种情况在环排时是同一种，故环排是A（4,4）/4=（3,3）种。在环形上，只要相对位置不变就是同一种情况，所以这四种情况在环形中是同一种。

3.n个人直线排列有种情况，但每n种情况在环排时是同一种，故环排是A(n,n)/n＝A（n-1,n-1）种。

【知识点】给概率求概率：考得少，判断是概率相加还是相乘即可。

1.分类相加（要么……要么）：$P=P_1+P_2+\cdots\cdots+P_n$。

例：不下雨的概率＝晴天概率+阴天概率。

2.分步相乘（先……再……）：$P=P_1*P_2*\cdots\cdots*P_n$。

例：连续两次闯红灯的概率＝闯第一个的概率*闯第二个的概率。

【例9】(2020上海)天气预报预测未来2天的天气情况如下:第一天晴天50%、下雨20%、下雪30%；第二天晴天80%、下雨10%、下雪10%，则未来两天天气状况

不同的概率为：

A. 45%　　　　B. 50%

C. 55%　　　　D. 60%

【解析】例9. 本题属于给概率求概率，从问题入手，本题可以正向思考，也可以反向思考，本题反向思考会更容易一些，如果正向考虑：第一天晴天、第二天不是晴天，第一天下雨、第二天不下雨，第一天下雪、第二天不下雪，有3种情况。如果从反面来思考：1-$P_{反}$（两天天气相同），要么两天都晴天，要么两天都下雨，要么两天都下雪，都是晴天的概率=50%*80%，都是下雨的概率=20%*10%，都是下雪的概率=30%*10%。对于两天相同，是“要么……要么”连接，用加法，则1-（50%*80%+20%*10%+30%*10%）=1-（40%+5%）=55%，对应C项。【选C】

【注意】逆向思维：正难反易，P=1-反面情况概率。

【知识点】四种特殊模型即枚举法：

1. 捆绑法——相邻：

（1）先捆：把要相邻的元素捆绑起来，注意内部顺序；

（2）再排：将捆绑后的看成一个元素，进行后续排列。

（3）例：五人站成一排，李雷和韩梅梅挨着，有多少种不同的安排方式？

答：看到“挨着”想到相邻，用捆绑法，先捆：李雷和韩梅梅捆起来，内部有顺序，为A（2,2）；再排：李雷和韩梅梅相当于“大胖子”，和另外的3人形成4人全排列，为A（4,4），分步相乘，A（2,2）*A（4,4）=48种。

2. 插空法。

3. 错位排列。

4. 枚举法。

【例10】（2019四川）某场科技论坛有5G、人工智能、区块链、大数据和云计算5个主题，每个主题有2位发言嘉宾。如果要求每个主题的嘉宾发言次序必须相邻，问共有多少种不同的发言次序？

A. 120　　　　B. 240

C.1200　　D.3840

【解析】例10.看到“相邻”，大概率考捆绑，两步走：（1）先捆：每个主题的嘉宾发言次序必须相邻，5个主题均有2个人，内部有顺序，则5G为A（2,2），同理人工智能、区块链、大数据和云计算，均为A（2,2），每个主题都要捆，意味着是”先……再……”的关系，用乘法：A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）；（2）再排：5个胖子排队，有顺序，全排列为A（5,5）=120，先捆……再排……，用乘法，A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）=2^5，则结果=2^5*120=32*120＞3000，结果对应D项。【选D】

【例11】（2017广东）单位工会组织拔河比赛，每支参赛队都由3名男职工和3名女职工组成。假设比赛时要求3名男职工的站位不能全部连在一起，则每支队伍有多少种不同的站位方式？

A.432　　B.504

C.576　　D.720

【解析】例11.本题稍微有点特殊，但是用的方法是一样的，属于近几年考得最难的一道题。“要求3名男职工的站位不能全部连在一起”即可以3男全都分开，也可以2男与1男分开，问每支队伍有多少种不同的站位方式，求方法数。本题是分类，可以正难则反，不全连在一起的反面是全连在一起，即相邻，用全总的情况数-反面（3男相邻），总情况数：6个人排列，有顺序，为A（6,6），出现相邻用捆绑法，（1）先捆：3男内部有顺序，为A（3,3）；（2）再排：3男相当于一个“大胖子”和剩下的3男全排列，相当于4人排队，为A（4,4），分步相乘，则反面情况数=A（3,3）*A（4,4），列式：A（6,6）-（3,3）*A（4,4）=120*6-6*24=720-6*24，尾数是6，对应C项。【选C】

【知识点】插空法—不相邻：

1.方法：

（1）先排：先安排可以相邻的元素，形成若干个空位。

（2）再插：将不相邻的元素插入到空位中。

2.例：五人站成一排，李雷和韩梅梅不挨着，有多少种不同的安排方式？

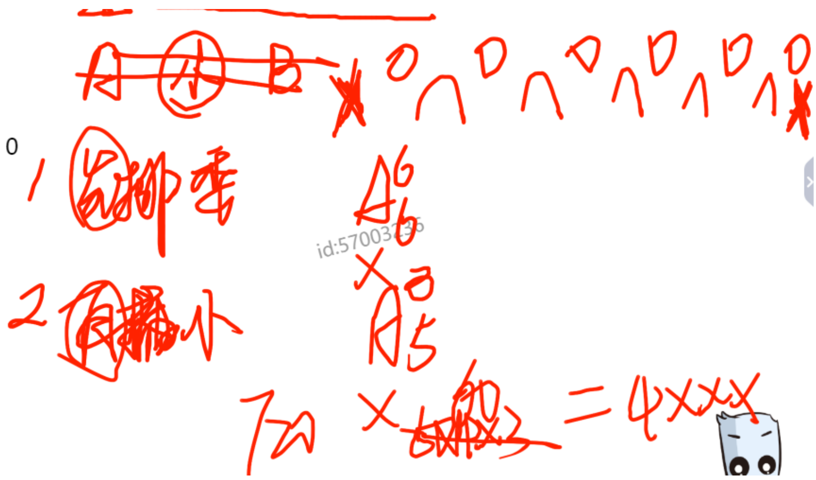
答：出现“不挨着”，用插空，两步走：（1）先排：5人除了李雷和韩梅梅，还有3人排队，有顺序，为A（3,3）；（2）再插：3人有4个空位，从4个空位选2个安排李雷和韩梅梅即可，谁在前面结果不一样，有顺序，用A（4,2），分步相乘：A（3,3）*A（4,2）=72。

【例12】（2018浙江事业单位）某地组织9名政协委员负责调研农民工子弟小学教学情况。调研结束合影前有3名委员因紧急工作已经离开，学校决定安排3名小学生代表与委员一起坐在前排。现要求每位小学生的两边都坐着政协委员，一共有多少种不同的方式？

A. 7200　　　　B. 29600

C. 43200　　　　D. 362880

【解析】例12. 调研结束合影前有3名委员因紧急工作已经离开，则还剩6个委员，“要求每位小学生的两边都坐着政协委员”，即小学生要插委员的空，先把委员排好，再安排小学生，（1）先排：6个委员排队有顺序，为A（6,6）；（2）再插：根据题意，可知小学生只能选择中间的空位，有5个空位，3个小学生，5个空位选3个，每个小学生不一样，有顺序，为A（5,3），分步相乘：A（6,6）*A（5,3）=720*60=4XXXX，对应C项。【选C】

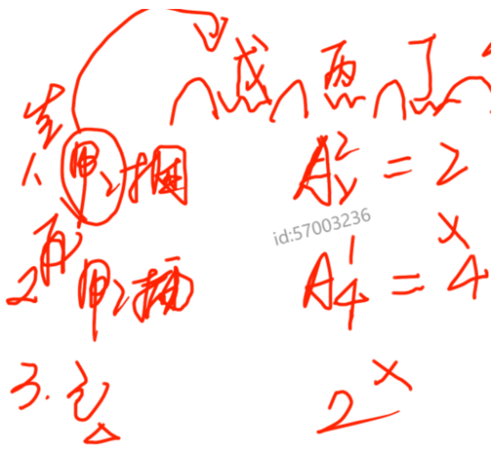


【例13】（2020国考）扶贫干部某日需要走访村内6个贫困户甲、乙、丙、丁、戊和己。已知甲和乙的走访次序要相邻，丙要在丁之前走访，戊要在丙之前走访，己只能在第一个或最后一个走访。问走访顺序有多少种不同的安排方式？

A. 24　　　　B. 16

C. 48　　　　D. 32

【解析】例13.根据“甲和乙的走访次序要相邻，丙要在丁之前走访，戊要在丙之前走访”，可知甲和乙要相邻；没有说丙和丁要挨着；戊要在丙之前，则顺序只能是戊、丙、丁。出现“相邻“用捆绑，先把相邻的甲乙捆起来，内部有顺序，为A（2,2）=2，戊、丙、丁的顺序已经确定，无需再排，相当于把甲乙放到戊、丙、丁形成的4个空，为A（4,1）；己要么在第一个，要么在最后一个，要么……要么，则有2种情况，本题是“先……再……”，用乘法：2*4*2=16，对应B项。【选B】



【知识点】错位重排：记住结论即可

1. 识别：重新排序后，每个主体都不在原来的位置上。如人员交流或相互借调、相互审核或检验、停车问题等。

2. 例：三位厨师各做一道菜，每位厨师需品尝一道菜且不能品尝自己做的菜，一共有多少种排法？

答：假如是A、B、C三个厨师，做了a、b、c三道菜，每人都不尝自己的，是错位问题。

3. 结论：$D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$，$D_4=9$，$D_5=44$。如果想多记，可以当成一个数推，（0+1）*2=2、（1+2）*3=9、（2+9）*4=44、则下项是（9+44）*5=53*5=265，一般用不到，记住常用的几组数即可。

元素个数	1	2	3	4	5
错排数	0	1	2	9	44

【例14】（2015山东）某单位从下属的5个科室各抽调了一名工作人员，交流到其他科室，如每个科室只能接收一个人的话，有多少种不同的人员安排方式？

A. 120　　B. 78

C. 44　　D. 24

【解析】例14. 根据题意，可知每人都不能回自己的科室，是5个错位，对应的方法数是44，对应C项。【选C】

【例15】（2017国考）某集团企业5个分公司分别派出1人去集团总部参加培训，培训后再将5人随机分配到这5个分公司，每个分公司只分配1人。问5个参加培训的人中，有且仅有1人在培训后返回原分公司的概率：

A. 低于20%　　B. 在20%～30%之间

C. 在30%～35%之间　　D. 大于35%

【解析】例15. 概率问题，本题属于给情况求概率，用满足要求情况数/总情况数，总情况数：培训后再将5人随机分配到这5个分公司，相当于5个人对应5

个公司排序，有顺序，为A（5,5）；满足情况数：5人有1人回去，5人选1人，有C（5,1），另外4人错位重排，有9种方法，列式：[C（5,1）*9]/A（5,5）=9/24=3/8=37.5%，对应D项。【选D】

【知识点】枚举法：数据≤10。

1.选项数据不大（往往是凑数题）用枚举法。

2.注：不重不漏按顺序枚举（如从大到小）。

【例16】（2019青海法检）小明计划到商店为自己购买衣服和鞋子，预算不超过800元，已知衣服每套的售价是99元，每双鞋子的售价是67元，如果小明至少要买4套衣服和3双鞋。那么他有多少种不同的购买方式？

A.5　　B.7

C.8　　D.4

【解析】例16.“预算不超过800元”即最多花800元，已知衣服每套的售价是99元，每双鞋子的售价是67元，如果小明至少要买4套衣服和3双鞋，则花了4*99+3*67=597，预算不超过800元，则剩下的钱=800-597=203，问有多少种不同的购买方式，即看剩下的钱怎么花，在衣服和鞋子上凑203，可以考虑枚举法：

（1）买0套衣服、0双鞋子；

（2）买1套衣服、0双鞋子；

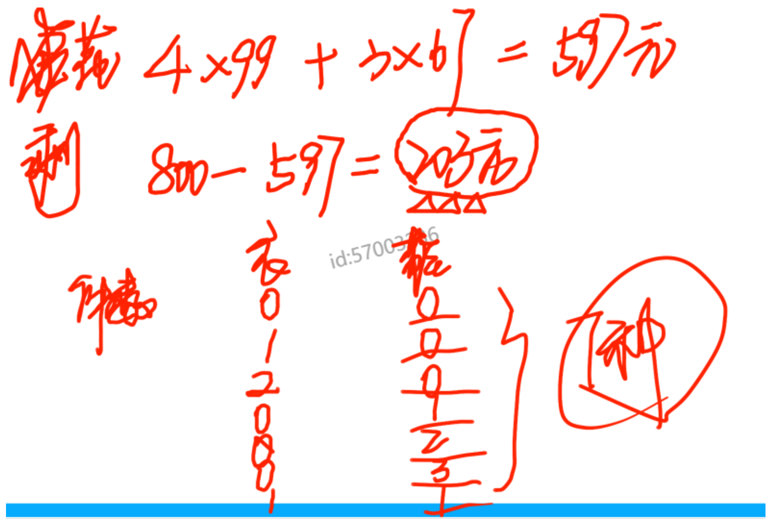
（3）买2套衣服、0双鞋子；

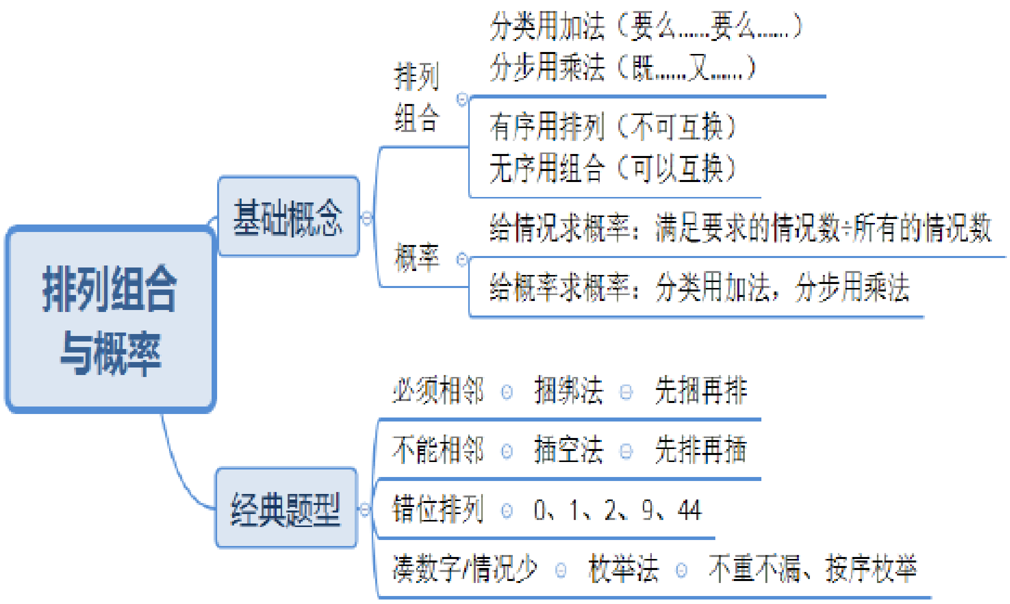
（4）买0套衣服、1双鞋子；

（5）买0套衣服、2双鞋子；

（6）买0套衣服、3双鞋子；

（7）买1套衣服、1双鞋子。总共有7种，对应B项。【选B】





【注意】排列组合与概率：

1.基础概念：

（1）排列组合：

①分类用加法（要么……要么……），分步用乘法（既……又……）。

②有序用排列（不可互换），无序用组合（可以互换）。

（2）概率：

①给情况求概率：满足要求的情况数/所有的情况数。

②给概率求概率：分类用加法，分步用乘法。

2.经典题型：

（1）必须相邻：捆绑法，先捆再排。

（2）不能相邻：插空法，先排再插。

（3）错位排列：0、1、2、9、44。

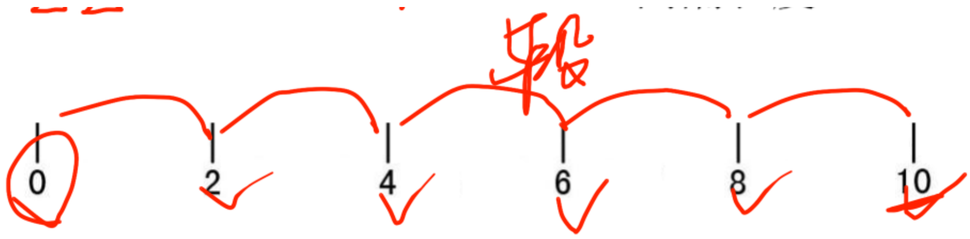
（4）凑数字/情况少：枚举法，不重不漏、按序枚举。

第十一节 植树问题

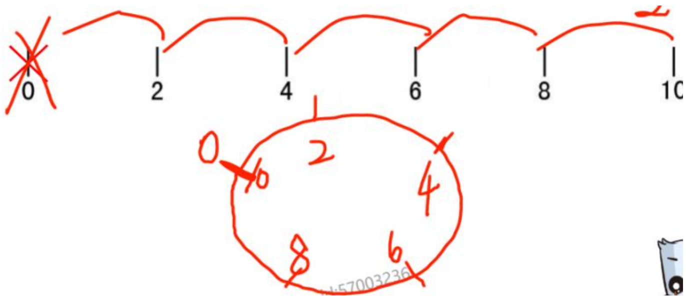
【知识点】植树问题：是一种小题型，但是在广东属于特色题，从2017年开始每年考1题。考查类型：

1.基础植树（考得多）：插旗、装路灯也是植树问题。

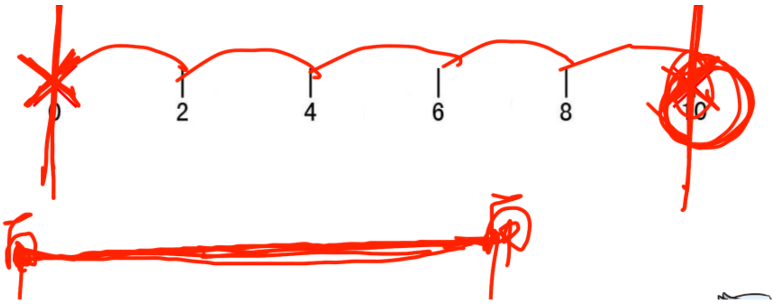
（1）两端植树：棵树=段数+1=总长/间隔长度+1。比如一条路有10米长，每2米种一棵，则段数=10/2=5，题目如果说两头都种，还需加上1，即棵树=段数+1。



（2）单端植树（环形植树）：棵树=段数=总长/间隔长度。比如有10米长的路，每隔2米种一棵，起点不种，则棵树=段数=总长/间隔长度=10/2=5。封闭图形的植树，也是环形植树。



（3）楼间植树（两端都不植）：棵树=段数-1=总长/间隔长度-1。比如两栋楼之间是10米，每2米种一棵，不能种在墙上，则棵树=段数-1=总长/间隔长度-1=10/2-1=4。比如墙角不能装灯也类似两端都不种。



（4）注意：

①分清是两端/单端（环形）/楼间。

②注意是单侧种树还是两侧种树。先分析一侧，另外一侧乘2即可。

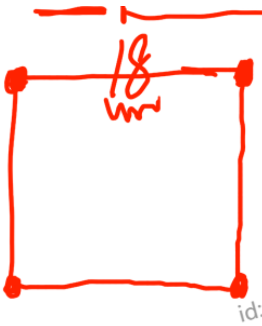
2.不移动植树。

【例1】（2019广东）某机构计划在一块边长为18米的正方形空地开展活动，需要在空地四边每隔2米插上一面彩旗，若该空地的四个角都需要插上彩旗，那么一共需要多少面彩旗？

A.32　　　　B.36

C.44　　　　D.48

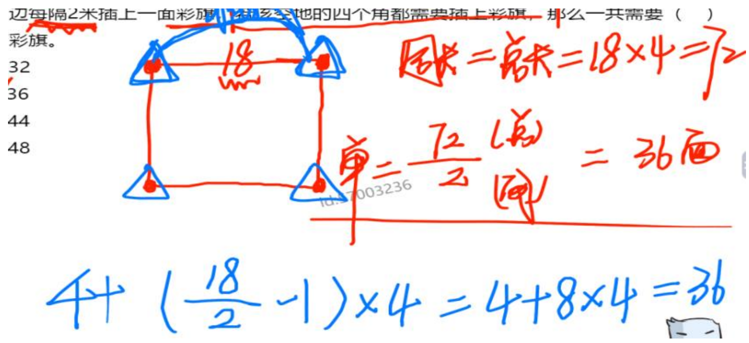
【解析】例1.方法一：正方形是封闭图形（单端种树），即环形植树，边长为18米，则周长=总长=18*4=72，在空地四边每隔2米插上一面彩旗，则彩旗数=72/2=36面，对应B项。



周长=总长=18×4=72

单=72/2 (总/间) = 36面

方法二：4个顶点先插4个旗，两头都插了旗，无需考虑两端，相当于楼间植树，列式：4+（18/2-1）*4=4+8*4=36，对应B项。【选B】



【注意】本题不考虑“若该空地的四个角都需要插上彩旗”，也能做对，因为每条边18都是间隔2的倍数，则插的一定是整数段，首尾都能插上旗。

【例2】（2016北京）某单位两座办公楼之间有一条长204米的道路，在道路起点的两侧和终点的两侧已各栽种了一棵树。现在要在这条路的两侧栽种更多的树，使每一侧每两棵树之间的间隔不多于12米，如栽种每棵树需要50元人工费，则为完成栽种工作，在人工费这一项至少需要做多少预算？

A. 800元　　　　　　　　B. 1600元

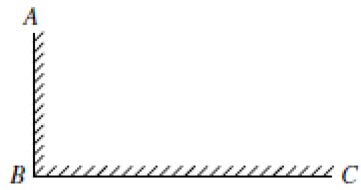
C. 1700元　　　　　　　D. 1800元

【解析】例2.“在道路起点的两侧和终点的两侧已各栽种了一棵树”说明起点和终点都不用种，即楼间植树。

方法一：出现“两侧”，植树问题有两侧一定有坑，两次需要乘以2，A、B项存在2倍关系，问两侧，直接选B项。

方法二：单价是50，要想花的钱少，则棵树要尽量少，因为预算=50*棵树。总长是固定值，则间距要大，每一侧每两棵树之间的间隔不多于12米，因此间距要取12，棵树=总长/间距-1=204/12-1=16，一侧种16棵，两侧种32棵，则花费32*50=1600，对应B项。【选B】

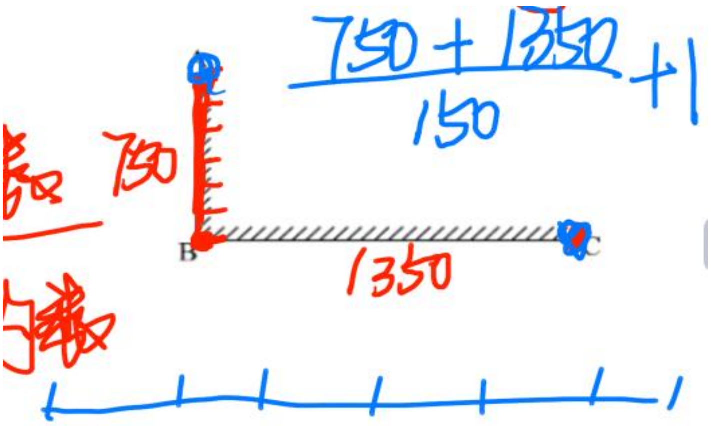
【例3】（2020广东）为加强治安防控，现计划在一段L形的围墙（如下图）上安装治安摄像头，其中A点到B点长度为750米，B点到C点长度为1350米。按要求A、B、C三个位置必须安装一个摄像头，且相邻两个摄像头之间的距离要保持一致，则整段围墙至少需要安装多少个摄像头？



A. 14　　　　B. 15

C. 16　　　　D. 17

【解析】例3. A、B、C总长固定，要想摄像头安得少，则间距要大，本题没有说间距是多少。根据题意，可知要想端点有摄像头，则间距是长度的约数，同理，要想满足A、B、C都装摄像头，可知间距不光是750的约数，也是1350的约数，即1350和750的公约数，间距还得尽可能大，则相当于找1350和750的最大公约数，除以10剩下75、135，再除以5，剩下15、27，除以3，剩下5、9，因此最大公约数=10*5*3=150，此时可以当成一整段，因为间距是长度的约数，就能保证短点都有灯，相当于两端植树，因为首尾都有要求，则（750+1350）/150+1=15，对应B项。【选B】



二、不移动植树类

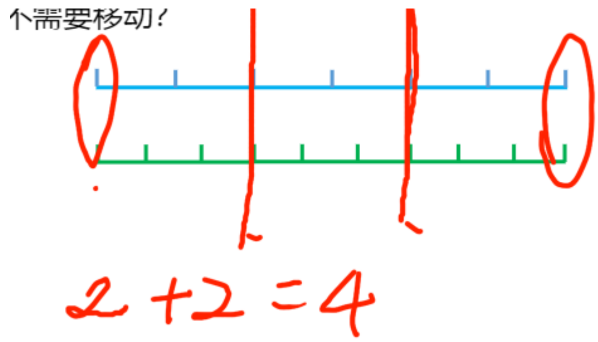
【知识点】不移动植树：

1. 引例：

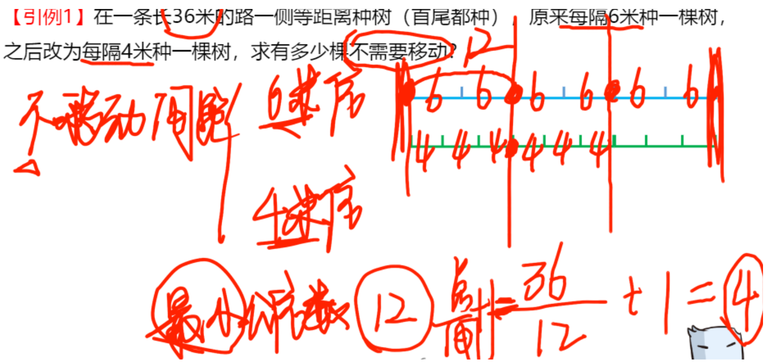
（1）在一条长36米的路一侧等距离种树（首尾都种），原来每隔6米种一棵树，之后改为每隔4米种一棵树，求有多少棵不需要移动？

答：方法一：首尾都种是两端植树，问有多少棵不需要移动，是不移动植树。原来每隔6米种一棵树，总长/间隔=36/6=6段；之后改为每隔4米种一棵树，则总

长/间隔=36/4=9段，如图，首尾都不种，还有中间的2棵，发现有2+2=4棵不用种。



方法二：如图，不需要移动的树间距是6、4的倍数，因此不移动的间距既是6米的倍数，又是后来4的倍数，相当于是6和4的最小公倍数12，可知每12米就有1棵不动，则总长/间距+1=36/12+1=4。



（2）在一条路一侧等距离种了7棵树（首尾都种），现要增种3棵树，且通过移动一部分树使相邻的树距离相等(不含首尾两棵)，求有多少棵不需要移动？

答：首尾都种是两端植树，这段路的长度不变，按照两种间距种树，不含首尾两棵即种中间，是等距离种树，问有多少棵不需要移动，是不移动植树。一开始种7棵，现在增种3棵，则后来种10棵。7棵树有6段，10棵树有9段，本题相当于只知道段数，总长=间距*段数，相当于三量只知道一量，可以赋值总量，为了好算，①可以赋总长：6*9=54米（两个段数的乘积）；②求间隔：总长/段数，单个间隔分别为9米和6米；③找间隔最小公倍数（不移动间隔长度）：9和6的最小公倍数18米；④求个数：不移动棵树=不移动段数+1：54/18+1=4棵。

2. 原理：两个数的乘积/最小公倍数=最大公约数。

3. 方法总结：

（1）求不移动的段数：直接求两次段数的最大公约数。

（2）求不移动棵树：

①两端植树：不动棵数=不动段数+1=最大公约数+1。

②单端（环形）植树：不动棵数=不动段数=最大公约数。

③楼间植树：不动棵数=不动段数-1=最大公约数-1。

【例4】（2018广州）某条道路进行灯光增亮工程，原来间隔35米的路灯一共有21盏，现要将路灯的间隔缩短为25米，那么有几盏路灯无需移动？

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

【解析】例4. 方法一：本题是不移动植树，不移动间距要满足原来间隔35和现在间隔25的最小公倍数，有公约数5，约掉5剩下7和5，则最小公倍数=5*7*5=175。总长=间距*段数，2盏灯有1段，3盏灯有2段，则21盏灯有20段，则总长=35*20=700米，每175米有1盏灯不用种，本题首尾都有灯，则不移动棵树=700/175+1=4+1=5盏。

方法二：（1）先求段数：21盏灯有20段，总长=35*20=700，则总长/间隔=700/25=28段，找20和28的最大公约数是4；（2）问两头都种，则4+1=5。【选D】

【注意】

1. 数学常识补充：两个数的乘积=最大公约数*最小公倍数。比如25和30，有公因子5，剩下5和6，因此最大公约数=5，最小公倍数=5*5*6，因此25*30=5*5*5*6。

2. 求不移动的段数：直接求两次段数的最大公约数。

3. 求不移动棵树：两端植树：不动棵数=不动段数+1=最大公约数+1。

【例5】（2017广东）施工队给一个周长为40米的圆形花坛安装护栏。刚开始，每隔1米挖一个洞用于埋栏杆。后来发现洞的间隔太远，决定改为每隔0.8米挖一个洞。那么，至少需要再挖多少个洞？

A. 39　　B. 40

C. 41　　D. 42

【解析】例5. 方法一："周长为40米"说明是封闭图形，则本题为单端种树，要找不移动，因为是单端，则段数=40/1=40段；"决定改为每隔0.8米挖一个洞"，

则40/0.8=50段，此时找两个段数的最大公约数，40和50的最大公约数是10。问至少需要再挖多少个洞，要想挖的少，则前面的40个洞里后面也能用，不移动就是最大公约数，不挖的有10个，总共有50个洞，则需要再挖50-10=40个洞，对应B项。

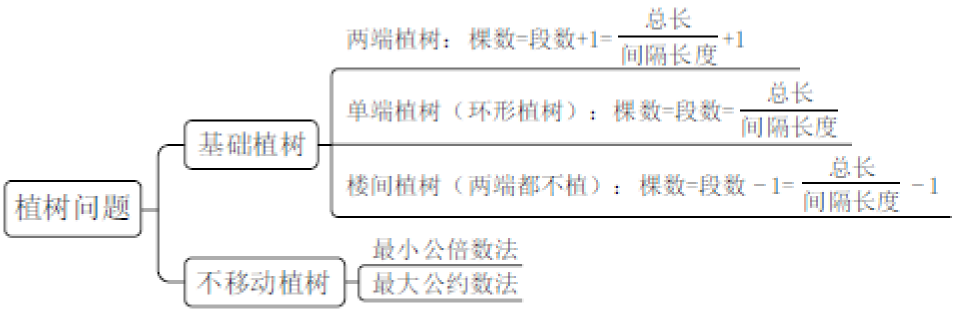
方法二：原来的间隔是1，后来的间隔是0.8，找间隔1和0.8的最小公倍数为0.2*5*4=4，每4米有一个洞不需要移动，则40/4=10，本题是封闭图形，无需加1。改成0.8米一个洞，则40/0.8=50，因此有50-10=40棵不需要挖。【选B】

【注意】

1.求不移动的段数：直接求两次段数的最大公约数。

2.求不移动棵树：单端（环形）植树：不动棵数=不动段数。

思维导图



【注意】植树问题：

1.基础质数：

（1）两端植树：棵树=段数+1=总长/间隔长度+1。

（2）单端植树（环形植树）：棵树=段数=总长/间隔长度。

（3）楼间植数（两端都不植）：棵树=段数-1=总长/间隔长度-1。

2.不移动质数：最小公倍数法；最大公约数法。

【注意】课后寄语：

1.结合思维导图整理每节课的思维逻辑，看回放查漏补缺，把能够掌握的题型做到烂熟于心，确实怎么都弄不懂的题型战略性放弃。

2.理论知识掌握扎实后，不断做题总结，将理论和题目相结合。

3.题目选择：广东/国考/北京/联考/山东/浙江等。

4.坚持经常参加每周模考，不断寻找实战感觉。复习过程中数资遇到困难：粉笔周末。

5.焦虑和质疑并不能创造价值，反而会阻碍我们迈向未来的脚步。能够让我们走向未来的，是坚定地信心、直面未来的勇气和行动。你的坚持，终将美好！

【答案汇总】排列组合与概率：1-5：DBBBD，6-10：DBCCD；11-15：CCBCD；16：B

植树问题：1-5：BBBDB

遇见不一样的自己

Be your better self