第六章　多元函数的微分学

第一节　多元函数的极限与连续性

一、本节学习目标

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义，会求多元函数的定义域;
2. 掌握二元函数的极限和连续的概念，了解有界闭区域上连续函数的性质.

二、本节重点、难点解析

1. 多元函数的概念

（1）二元函数的定义：设D是R^2的一个非空的子集，称映射$f:D\to R$为定义在D上的二元函数，通常记为$z=f(x,y)\quad (x,y)\in D$. 其中点集D称为该函数的定义域，x,y称为自变量，z称为因变量. 类似地，可定义二元以上的函数.

（2）二元函数的几何意义：$z=f(x,y)$在几何上一般表示空间直角坐标系中的一个曲面.

2. 二元函数的极限

定义：设二元函数$f(x,y)$的定义域为D，$p_0(x_0,y_0)$是D的聚点. 如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$的一切点$p(x,y)\in D$，都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$成立，则称常数$A$为函数$f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限，记作$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$或$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

注意：

（1）当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，是指以任意方式趋近时，$f(x,y)$均无限趋于常数A，此A才能称为$f(x,y)$的极限.

（2）由（1）可知，当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$趋于不同常数，或者$f(x,y)$趋于一个同方式有关的常数，或者$f(x,y)$的极限根本就不存在，均称$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在. 这一点正是证明重极限不存在的常用的有效方法。

（3）二元函数极限的运算法则（四则运算、复合运算）、性质（唯一性、局部有界性、局部保号性、夹逼性等）与一元函数极限完全类似.

3. 二元函数的连续性

定义：设函数$f(x,y)$在开区域（或闭区域）D内有定义，$p_0(x_0,y_0)$是D的聚点且$p_0\in D_0$，

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 连续. 如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

注意：二元连续函数性质与一元函数完全类似，例如：

（1）连续函数的和、差、积、商（分母不为 0）均是连续函数,复合后仍为连续函数；

（2）最值定理：在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上一定有最小值和最大值；

（3）介值定理：在有界闭区域 D 上的多元连续函数,可以取得它在 D 上的最小值和最大值之间的任何值；

（4）有界性定理：在有界闭区域 D 上的多元连续函数是有界的；

（5）多元初等函数在其定义区域内必连续.

三、典型例题及常考题型

1. 考点：求多元函数的极限

（1）若点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的连续点，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

例 1. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}$

解：点 $(1,2)$ 是函数的连续点，$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}=f(1,2)=\dfrac{3}{2}$

（2）利用一元函数求极限的方法

例 2. 求① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$；② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$；③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [1+\sin(xy)]^{\frac{1}{xy}}$.

解：①由积的极限运算法则,得

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\frac{\sin(x,y)}{xy}\cdot y\right]=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim_{y\to 2} y=2.$$

②“$\dfrac{0}{0}$”型，含根式，先有理化

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

③先作变量代换，化为一元函数求极限. 令 $u=xy$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$u\to 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} [1+\sin(xy)]^{\frac{1}{xy}}=\lim_{u\to 0}[1+\sin u]^{\frac{1}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to 0}[1+\sin u-1]\cdot\frac{1}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}}=e.$$

（3）利用夹逼准则求极限

例 3. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$，其中 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}=1$

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y|\le|y|\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0,$$

故由夹逼准则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=1\cdot0=0$.

2．考点：证明二元函数的极限不存在

常用确定极限不存在的方法：找两种不同的自变量趋近方式，使 $f(x,y)$ 在该方式下极限均存在，但不相等，此时也可断言 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.

例 4. 证明① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$；② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

证明：①当点 $P(x,y)$ 沿曲线 $y=kx^3$ 趋于点 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx^3}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}$

$=\dfrac{k}{1+k^2}$，其值随 k 的不同而变化，故极限不存在.

②当点 $P(x,y)$ 沿曲线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(kx)^2}{x^2(kx)^2+(x-kx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}$$

$=\begin{cases}1, & k=1\\0, & k\ne1\end{cases}$，所以极限不存在.

3．考点：讨论多元函数的连续性

例 5. 证明函数 在全平面连续.

证明：在 处， 为初等函数，故连续.

又因为 ， ，所以 ，

函数 在 处连续.

四、学生学习容易产生的问题

1. 二元函数的极限与一元函数的极限有何区别？

答：从二元函数极限定义的描述过程来看，似乎与一元函数极限定义没有什么区别，其实它们之间具有极大的不同，根源在于$\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0$的方式上．对于一元函数$y=f(x)$，$x\to x_0$至多有三种方式：左侧、右侧、双侧，但对于$\mathrm{P}(x,y)\to\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$，有无穷多种方式.

2. 如何判断二重极限$\lim\limits_{\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0} f(\mathrm{P})$不存在？

答：若二重极限$\lim\limits_{\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0} f(\mathrm{P})$存在，则沿任何方式$\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0$，$f(\mathrm{P})$的极限不仅存在，而且相等．反之，若沿某一特殊路径$\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0$，$f(\mathrm{P})$的极限不存在，则二重极限$\lim\limits_{\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0} f(\mathrm{P})$不存在；若沿两条不同路径$\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0$时，$f(\mathrm{P})$的极限均存在但不相等，则二重极限$\lim\limits_{\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0} f(\mathrm{P})$不存在；若累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$和$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$均存在但不相等，则二重极限$\lim\limits_{\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0} f(\mathrm{P})$不存在．这些是判断二重极限不存在的常用的比较有效的方法.

练习题 6.1

一．选择题

1. 函数$z=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x+y)}}$的定义域是__________

（A）$x+y>0$　　（B）$\ln(x+y)\neq 0$　　（C）$x+y>1$　　（D）$x+y\neq 1$

2. 设$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，则$f(\dfrac{y}{x},1)=$__________

（A）$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　（B）$\dfrac{x^2+y^2}{xy}$　　（C）$\dfrac{x}{x^2+1}$　　（D）$\dfrac{x^2}{1+x^4}$

二．填空题

1. 设　　　　　　，则　　　　=__________

2. 函数　　　　　　的定义域是____________

3. 函数$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在___________是间断的

三．计算题

1. 求下列函数的定义域

（1）　　　　　　　　　；（2）

2. 求下列函数的极限

（1）　　　　　　　　；（2） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$；（3） $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 5}}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$

（4）　　　　　　；（5） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(xy)$；（6） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)e^{x^2+2y^2}}$

四. 综合题

1. 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 的存在性

2. 证明极限　　　　　　　　不存在

3. 设　　　　　，求　　　　　和　　　　　. 试问：极限

　　　　是否存在？为什么？

4. 讨论下列函数的连续性

（1）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；　（2）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

第二节　偏导数

一、本节学习目标

1. 理解偏导数的概念，掌握偏导数及高阶偏导数的求法.

二、本节重点、难点解析

1. 偏导数定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ ），如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$z'_x(x_0,y_0)$，$f'_x(x_0,y_0)$. 同理, 类似的函数 $z=f(x,y)$ 在点

(x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为 $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$，记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z'_y(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0)$.

2. 如果二元函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都有偏导数，一般地说，它们仍是 x, y 的函数，称为 $f(x, y)$ 的偏导函数，简称偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, z'_x(x, y), f'_x(x, y)$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, z'_y(x, y), f'_y(x, y)$.

3. 偏导数的几何意义：设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 是曲面 $z = f(x, y)$ 上一点，则偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是曲面被平面 $y = y_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率；偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$ 就是曲面被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

4. 高阶偏导数：函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = f''_{11}(x, y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = f''_{22}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y) = f''_{12}(x, y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y) = f''_{21}(x, y).$$

注意：两个二阶混合偏导数与求导顺序有关, 但当 在 内连续时,

. 一般初等函数在定义域内两个二阶混合偏导数是连续的.

三、典型例题及常考题型

1. 考点：求多元函数的偏导数

例 1：设 $z = \dfrac{x^2}{y^2}\ln(2x - y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：利用一元函数求导法则求偏导，可直接求出两个偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 即：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2}\ln(2x - y) + \frac{2x^2}{y^2(2x - y)},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y3}\ln(2x - y) - \frac{x^2}{y^2(2x - y)}$$

例 2：已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^4}}$，则（　　）

（A） $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都存在；　　（B） $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在；

（C） $f_x'(0,0)$ 存在， $f_y'(0,0)$ 不存在；　　　（D） $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$ 都不存在。

解： $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=1$， $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{e^{(\Delta y)^2}-1}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{(\Delta y)^2}{\Delta y}=0$，故选 (B).

2. 考点：讨论分片函数在分片点处的偏导数

例 3：设 $z=f\left(x,y\right)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right) \\ 0, \qquad \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$，其在 $(0,0)$ 处的偏导数是否存在？

解： 因为 $f_x'\left(0,0\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x,0\right)-f\left(0,0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 0\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+0^2}}}{x}=0$，由 $x,\ y$ 的对称性可知 $f_y'\left(0,0\right)=0$

四、学生学习容易产生的问题

1. 一元函数在一点可导，则其在该点必连续，二元函数是否有类似的结论？

答：二元函数在一点偏导数存在和在该点连续没有关系.

例如： $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处，但是两个偏导数却不存在；又如： $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \qquad x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处两个偏导数存在，但是在该点的极限不存在，因此也不连续.

练习题 6.2

一． 选择题

1. 　　在　　　处均存在是　　　在该点连续的____条件

（A）充分非必要（B）必要非充分 （C）充分必要 （D）既非充分也非必要

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处________

（A）连续，偏导数存在　　（B）连续，偏导数不存在

（C）不连续，偏导数存在　（D）不连续，偏导数不存在

3. 设函数 $z=x^3y-xy^3$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$________

（A）$6xy$　（B） $3x^2-3y^2$　（C） $-6xy$　（D） $3y^2-3x^2$

二. 填空题

1. 设 $z=\dfrac{\ln x}{y^2}$，则 =______； $z=\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}$=________

2. 设$z=x^y+y^x\ (x,y>0)$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______

3. 设 $z=f(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，且$f(x,0)=x$， $f(0,y)=y^2$，则

$f(x,y)=$_______.

三．计算题

1. 设 ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

2. 设$z=x^n f(\dfrac{y}{x^2})$（n为常数，$f(u)$可微），求$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

3. 设$f(x,y)=\int_x^{x^2+y^2}e^t dt$，求$f'_x(1,2)$，$f''_{xx}(1,2)$，$f''_{xy}(1,2)$和$f''_{yy}(1,2)$

4. 曲线$\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ y=1 \end{cases}$在$(1,1,\sqrt{3})$的切线与$x$轴正向所成的倾斜角是多少？

四．综合题

1. 设$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{2}{u}$

2. 证明不存在$f(x,y)$同时满足$\dfrac{\partial f}{\partial x}=y$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x$

3. 已知$z=f\left(x,y\right)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right) \\ 0,\qquad \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$，求$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$，并且讨论$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$在$(0,0)$的连续性

第三节 全微分

一、本节学习目标

1. 理解全微分的概念；
2. 了解多元函数连续、偏导数存在、可微三者之间的关系，并注意与一元函数中连续、可导、可微三者之间关系的差别.

二、本节重点、难点解析

1. 全微分定义：如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$A,B$不依赖于$\Delta x,\Delta y$而仅与$x,y$有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数

$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记为 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$. 函数若在某区域 D 内各点处处可微分，则称这函数在 D 内可微分.

2. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则函数在该点连续.

3. 可微的必要条件：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

4. 可微的充分条件：如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则该函数在点 (x,y) 可微分．定义 $\Delta x=dx,\Delta y=dy$，记全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$

三、典型例题及常考题型

1. 考点：判断二元函数的连续性、偏导数存在性与可微性

例 1：讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在性，连续性与可微性。

解：因为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$,

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处两个偏导数都存在.

又 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，故在 $(0,0)$ 处的极限不存在, 从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

而 $\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时, 上式极限不存在, 因而不是 ρ 的高阶无穷小, 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

例 2：设 $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

（1）求 dz；

（2）在 $(0,0)$ 点，函数是否连续？是否偏导数存在？是否可微？一阶偏导数是否连续？

解：（1）当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2xy^4-x^3y^2}{(x^2+y)^{5/2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x^4y-x^2y^3}{(x^2+y)^{5/2}}$,

$$dz=\frac{2xy^4-x^3y^2}{(x^2+y)^{5/2}}dx+\frac{2x^4y-x^2y^3}{(x^2+y)^{5/2}}dy；$$

当$(x,y)=(0,0)$时，$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$. 而当

当$\Delta y=\Delta x$，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{4(\Delta x)^4}=\frac{1}{4}\neq 0$$，故在$(0,0)$点，$z=f(x,y)$不可微.

（2）因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\overset{x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^3}$

$=0=f(0,0)$

所以$z=f(x,y)$在$(0,0)$点连续. 由（1）$z=f(x,y)$在$(0,0)$点偏导数存在但不可微，自然一阶偏导数不连续.

2. 考点：求函数的全增量及全微分

例 2：求函数$z=2x^2+3y^2$在点(10,8)处当$\Delta x=0.2,\Delta y=0.3$时的全增量及全微分.

解：函数的全增量为：$\Delta z=[2(10+0.2)^2+3(8+0.3)^2]-[2\cdot 10^2+3\cdot 8^2]=22.75$

$z_x(10,8)=4x\,|_{x=10}=40$，$z_y(10,8)=6y\,|_{y=8}=48$，可得：

$dz=40\times 0.2+48\times 0.3=22.4$.

四、学生学习容易产生的问题

1. 二元函数连续、偏导数存在、可微三者之间有什么具体关系？

答：关于二元函数在一点的几个微观性质，要牢记下面的关系：

$$\begin{array}{ccccccc}\text{偏导数存在且连续}&\Rightarrow&\text{可微}&\Rightarrow&\text{连续}&\Rightarrow&\text{极限存在}\\ &&\Downarrow&&\not\Updownarrow&&\not\Updownarrow\\ &&&&\text{偏导数存在}&&\end{array}$$

其中，“$A\Rightarrow B$”表示若A则B，A是B的充分条件，B则是A的必要条件；而符号“$A\not\Leftrightarrow B$”则表示A与B无关. 注意：前面与后面的关系都不是充要条件.

练习题 6.3

一. 选择题

1. 考虑二元函数$f(x,y)$下面的四条性质：

① $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；② $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续；

③ $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微；④ $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在；

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质P推出性质Q，则有_______

(A) ②⇒③⇒①； (B) ③⇒②⇒①；(C) ③⇒④⇒①； (D) ③⇒①⇒④

2. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是_______

（A） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$；

（B） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$；

（C） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$；

（D） $\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.

3．使得 $df=\Delta f$ 的函数为_______

(A) $ax+by+c$ (a,b,c 为常数)；　（B） $\sin xy$；　（C） e^x+e^y；　（D） x^2+y^2

二．填空题

1．设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量为 Δz，全微分为 dz，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量与全微分的关系式是_____

2．函数 $z=x^2y^3$ 在点(2,-1)处的全微分 $dz=$___________

3．设 $z=e^{\sin xy}$，则 $dz=$_______

4．设 $u=x^{yz}$，则 $du=$_______

5．设一元函数 $f(t)$ 可导，$u=f(ax+by+cz)$，其中 a,b,c 是常数，则 $du=$________

三．计算题

1. 设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，$z=f(4x^2-y^2)$，计算 $dz\big|_{(1,2)}$

2. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分

3. 计算 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$ 的近似值

四．综合题

1. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，试问：

（1） $\varphi(x,y)$ 满足什么条件使得 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在？

（2） $\varphi(x,y)$ 满足什么条件使得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微？

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，证明：

（1） $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续；（2） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微

3. 当$|x|$，$|y|$很小时，用全微分求 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}$ 的近似公式.

第四节　多元复合函数的求导法则

一、本节学习目标

1. 熟练掌握各种多元复合函数的求导法则

2. 理解全微分的形式不变性

二、本节重点、难点解析

1. 中间变量为一元函数的复合函数求导

设 $z=f(u,v), u=\varphi(t), v=\psi(t)$，则复合函数 $z=f[(\varphi(t),\psi(t)]$ 是 t 的一元函数，且 $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dt}$，称为 z 关于 t 的全导数。

2．中间变量为多元函数的复合函数求导

（1）若函数 $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x 及对 y 的偏导数存在，$z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 对 u 及对 v 有连续的偏导数（或可微），则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处对 x 及对 y 的偏导数存在，且有公式 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$。

（2）对 $z=f(u,v,w), u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y), w=w(x,y)$ 亦有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}；\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}。$$

3. 中间变量既有一元函数亦有多元函数的情形

（1）对 $z=f(u,x,y), u=u(x,y)$ 有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial x}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial y}$。

注意: 以上结论是求多元复合函数偏导的原理和方法，特别是求一般抽象函数的复合函数的求导方法，大致可概括为两句话：

1）f 有几个中间变量，求偏导时就有几项相加（这就解决了一般抽象函数求偏导问题）。

2）f 有几个中间变量，那么 $f_1', f_2', f_{11}'', f_{12}'', f_{21}'', f_{22}'', \cdots$ 仍然有几个中间变量（这就解决了一般抽象函数求高阶偏导的问题）。

4. 全微分的形式不变性

设函数 $z=f(u,v), u=u(x,y), v=v(x,y)$ 都具有连续一阶偏导数，则全微分满足：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv \quad ；$$

即 z 无论看作是 x 及 y 的函数，或者是 u 及 v 的函数，其微分具有同样的形式。

注意：同一元函数类似，利用微分的形式不变性求偏导有时会很方便。

三、典型例题及常考题型

1. 考点：证明多元函数的偏导数满足等式

例 1. 设 $z = xy + xF(u)$，而 $u = \dfrac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + xy$。

证明：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + F(u) + xF'(u)(-\dfrac{y}{x^2}) = y + F(u) - \dfrac{y}{x}F'(u)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + xF'(u)\dfrac{1}{x} = x + F'(u)$，

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x(y + F(u) - \dfrac{y}{x}F'(u)) + y(x + F'(u)) = 2xy + F(u) = z + xy$。

2. 考点：一般抽象函数求偏导和高阶偏导

例 2、设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + ye^{xy}f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2yf_1' + xe^{xy}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xyf_{11}'' + 2(x^2 - y^2)e^{xy}f_{12}'' + xye^{2xy}f_{22}'' + (1 + xy)e^{xy}f_2'$$

练习题 6.4

一．选择题

1．设函数 $u(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；　（B）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；　（C）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；　（D）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

二．填空题

1．设 $z = \arcsin(x - y)$，$x = 3t$，$y = 4t^3$，则 $\dfrac{dz}{dt} =$________

2．设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z = f(x^y, y^x)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$________

3．设 $f(u,v)$ 是二阶可微函数，$z = f(\dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} =$______

4．设 f 和 g 为连续可微函数，$u = f(x, xy)$，$v = g(x + xy)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} =$______

5．设函数 $F(x,y) = \int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(0,2)} =$______

6．设 $f(x,y)$ 是可微函数，且 $f(x,2x) = x$，$f_x(x,2x) = x^2$，则 $f_y(x,2x) =$________

7. 设$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$________

三．计算题

1．设 $z=f(x,y)$ 在点（1, 1）处可微且 $f(1,1)=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f[x,f(x,x)]$，求：$\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$

2. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，同时又已知：$g(x,y)=f[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)]$。求：$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

3. 设$u=yf(\dfrac{x}{y})+xg(\dfrac{y}{x})$，其中 f 和 g 具有二阶连续导数，求：$x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

4. 设$u=f(x,xy,xyz)$，求：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$

四．综合题

1. 设变换$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$可把方程$6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a$

2. 设 $u=f(r,\theta),\ r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arctan\dfrac{y}{x}$，$f$ 具有一阶连续偏导数。证明：$(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial u}{\partial y})^2=(\dfrac{\partial u}{\partial r})^2+\dfrac{1}{r^2}(\dfrac{\partial u}{\partial \theta})^2$

第五节 隐函数求导法则

一、本节学习目标

1. 掌握隐函数的求导法

二、本节重点、难点解析

1．一元隐函数的求导法

设函数$F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程$F(x,y)=0$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数$y=f(x)$，它满足条件$y_0=f(x_0)$，并有$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

2. 二元隐函数的求导法

设函数$F(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程$F(x,y,z)=0$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一

个单值连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$，它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}，\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

3. 方程组情形$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$

设$F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，且$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比式）$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$不等于零，则方程组$F(x,y,u,v)=0$、$G(x,y,u,v)=0$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件$u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\begin{vmatrix}F_u & F_x\\G_u & G_x\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\begin{vmatrix}F_y & F_v\\G_y & G_v\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\begin{vmatrix}F_u & F_y\\G_u & G_y\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}.$$

三、典型例题及常考题型

1. 考点：求一个方程所确定隐函数的导数

例1.　设$\mathrm{e}^{-xy}-2z+\mathrm{e}^{-z}=0$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解一：用公式法，设$F(x,y,z)=\mathrm{e}^{-xy}-2z+\mathrm{e}^{-z}=0$，

则 $F_x=-y\mathrm{e}^{-xy}$，$F_y=-x\mathrm{e}^{-xy}$，$F_z=-2-\mathrm{e}^{-z}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-y\mathrm{e}^{-xy}}{-2-\mathrm{e}^{-z}}=-\frac{y\mathrm{e}^{-xy}}{2+\mathrm{e}^{-z}}；\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-x\mathrm{e}^{-xy}}{-2-\mathrm{e}^{-z}}=-\frac{x\mathrm{e}^{-xy}}{2+\mathrm{e}^{-z}}.$$

解二：方程两端求导，由于方程有三个变量，故只有两个变量是独立的，所以求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$时，

将 z 看做 x， y 的函数。方程两端对 x 求偏导数，得

$$e^{-xy}(-y)-2\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0，即 \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ye^{-xy}}{2+e^{-z}}；$$

方程两端对 y 求偏导数，得

$$e^{-xy}(-x)-2\frac{\partial z}{\partial y}-e^{-z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0，即 \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^{-xy}}{2+e^{-z}}.$$

解三：利用全微分求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

方程两边求全微分，利用微分形式不变性，则

$d(e^{-xy})-2dz+de^{-z}=0$，即 $-e^{-xy}d(xy)-2dz-e^{-z}dz=0$，所以有

$-e^{-xy}(ydx+xdy)-(2+e^{-z})dz=0$，移项整理可得：

$dz=-\frac{ye^{-xy}}{2+e^{-z}}dx-\frac{xe^{-xy}}{2+e^{-z}}dy$。因此 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ye^{-xy}}{2+e^{-z}}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^{-xy}}{2+e^{-z}}$.

注意：解法一中用公式法求隐函数的偏导数时，将 $F(x,y,z)$ 看成是三个自变量 x， y， z 的函数，即 x， y， z 处于同等地位。 解法二中方程两边对 x 求偏导数时， x， y 是自变量， z 是 x， y 的函数，它们的地位是不同的。

例 2．设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由 $e^{xy}-xy=2$ 和 $e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ ，求 $\frac{du}{dx}$。

解:两方程两边关于 x 求导,得: $e^{xy}(y+xy')-(y+xy')=0$, $e^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}(1-z')$,

联立解得 $y'=-\frac{y}{x}, z'=1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}$

因此, $\frac{du}{dx}=f_1'-\frac{y}{x}f_2'+\left[1-\frac{e^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right]f_3'$

2. 考点：求方程组所确定隐函数的导数

例 3. 设 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,求 $\frac{dz}{dx}$

解 1：各方程两边关于 x 求导，得：

$z'=f+x\cdot f'\cdot(1+y')$， $F_x+F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=0$，

变形： $-xf'\cdot y'+z'=f+xf'$， $F_y\cdot y'+F_z\cdot z'=-F_x$。

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}-x f' & f+x f' \\ F_y & -F_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-x f' & 1 \\ F_y & F_z\end{vmatrix}}=\frac{(f+xf')F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z},$$

其中，$(F_y+xf'\cdot F_z\neq 0)$。

解 2：$z=xf(x+y),\ F(x,y,z)=0$两边求微分，

$\mathrm{d}z=f\,\mathrm{d}x+xf'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$，　$F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y+F_3'\mathrm{d}z=0$，

化简：$(f+xf')\,\mathrm{d}x+xf'\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=0$，$F_1'\,\mathrm{d}x+F_2'\,\mathrm{d}y+F_3'\mathrm{d}z=0$，

消去$\mathrm{d}y$，得到结果。

练习题 6.5

一． 填空题

1. 设方程$\sin y+e^x-xy^2=0$确定了隐函数$y=y(x)$，$\dfrac{dy}{dx}=$________

2. 如果$\dfrac{x}{z}=e^{y+z}$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________

3. 设$z=z(x,y)$由方程$f(y^2-x^2,x^2-z^2)=0$确定，其中$f(u,v)$可微且$zf_v\neq 0$，则

$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}$________

三．计算题

1. 设$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2=xf(\dfrac{y}{x})$确定，$f$可微，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设$z=z(x,y)$由方程$z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0$确定，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

3. 设$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$

4. 设$\begin{cases} u=f(ux,v+y) \\ v=g(u-x,v^2y)\end{cases}$，其中$f,g$具有一阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$

5. 设 $y=xt,$ 而 t 是方程 $\frac{x}{t}=\ln\frac{t}{y}$ 所确定的 x,y 的函数，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{e}}$ 的值

四．综合题

1. 设 $\varphi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明由方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数

$z=z(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$

第六节 多元函数微分学的几何应用

一、本节学习目标

1. 掌握曲线的切线及法平面的求法

2. 掌握曲面的切平面及法线的求法

二、本节重点、难点解析

1. 空间曲线的切线及法平面

（1）设 Γ 的参数方程为 $x=x(t),\ y=y(t)$， $z=z(t)$，其中 $x(t),y(t),z(t)$ 都是 t 的可导函数，当 $t=t_0$ 时， $x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0)$， $z_0=z(t_0)$ 对应曲线 Γ 上的定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ 不全为零，则 Γ 在 M_0 的切向量为 $\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$，

切线方程为 $$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程为 $$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0。$$

（2）若 Γ 的方程为 $\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$， $y(x),z(x)$ 都是 x 的可导函数，则在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切向量为 $\{1,y'(x_0),z'(x_0)\}$，

切线方程为： $$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

法平面方程为： $$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0。$$

（3）若 Γ 的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$， $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 的偏导数均存在，则在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切向量为 $T_1=\left\{\left.\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}\right|_{M_0},\ \left.\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}\right|_{M_0},\ \left.\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\right|_{M_0}\right\},$，

切线方程为： $$\frac{x-x_0}{\left.\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\right|_{M_0}},$$

法平面方程为： $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}(z-z_0)=0.$

2. 空间曲面的切平面及法线

（1）隐式方程情形：设曲面Σ的方程为$F(x,y,z)=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$为Σ上的一点，$F(x,y,z)$在M_0的偏导数连续且不全为零，则Σ在M_0的法向量：$\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$，

切平面方程: $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$,

法线方程： $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$。

（2）显式方程情形：设曲面Σ的方程为$z=f(x,y)$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$为Σ上的一点，$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处有连续偏导数，则Σ在M_0的法向量为：$\left\{f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),-1\right\}$；

切平面方程为：$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$；

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$。

注意：求曲线的切线和法平面，以及求曲面的切平面和法线的关键是：求出曲线的切向量和曲面的法向量。

三、常考题型及典型例题

1. 考点：求曲线的切线与法平面方程

例 1：求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线与法平面方程。

解：设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，则$F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z$。

$\boldsymbol{s}$为曲线在切点的切向量，n_1为球面在$(1,-2,1)$的法向量，n_2为平面的法向量，则

$$\mathrm{s}=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-6i+6k$$

切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$,

法平面方程为 $-(x-1)+(z-1)=0$，即 $x-z=0$。

2. 考点：求曲面的法线及切平面方程

例 2：求曲面$x^2+2y^2+z^2=1$上平行于平面$x-y+2z=0$的切平面方程。

解：设曲面上(x,y,z)处的切平面平行于平面，

令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$，则切平面的法向量为$\{2x,4y,2z\}$，且$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2}=t$，而$(x,y,z)$在曲面上，从而$(\frac{t}{2})^2+2(-\frac{t}{4})^2+t^2=1$，解之得$t=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$，此时切点为$(\sqrt{\frac{2}{11}},-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},2\sqrt{\frac{2}{11}})$，$(-\sqrt{\frac{2}{11}},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},-2\sqrt{\frac{2}{11}})$。将$(\sqrt{\frac{2}{11}},-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},2\sqrt{\frac{2}{11}})$及$(-\sqrt{\frac{2}{11}},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},-2\sqrt{\frac{2}{11}})$代入$x-y+2z+D=0$中，得$D=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$。所以切平面方程为：　$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$。

注意：要记住公式，在没有给出具体切点的情况下，应根据具体问题中所满足的几何条件，由解析几何的知识列出一些等式，联立这些等式，求出切点，代入相应的公式，就得出所求的方程。

3. 考点：利用曲面的切平面和法线的性质证明一些几何关系

例 3：试证曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$上作一点处的切平面在各坐标轴上截距之和等于$a$。

证明：　设$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则$F_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},F_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},F_z=\frac{1}{2\sqrt{z}}$，

切平面方程为：$\frac{1}{\sqrt{x}}(X-x)+\frac{1}{\sqrt{y}}(Y-y)+\frac{1}{\sqrt{z}}(Z-z)=0$，即$\frac{1}{\sqrt{x}}X+\frac{1}{\sqrt{y}}Y+\frac{1}{\sqrt{z}}Z-\sqrt{a}=0$。

它在三坐标轴上的截距分别为$X=\sqrt{ax},Y=\sqrt{ay},Z=\sqrt{az}$，从而$X+Y+Z=a$。

例 4：证明曲面$F(x-my,z-ny)=0$的所有切平面都与定直线平行，其中$F(u,v)$可微。

证明：曲面上任一点的法向量为$\vec{n}=(F_1',F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n),F_2')$，取定直线的方向向量为$\vec{l}=(m,1,n)$（定向量），则$\vec{l}\cdot\vec{n}=0$，故结论成立。

练习题 6.6

一. 选择题

1. 已知曲面$z=4-x^2-y^2$在点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$，则P点的坐标是________

(A) $(1,-1,2)$；　(B) $(-1,1,2)$；　(C) $(1,1,2)$；　(D) $(-1,-1,2)$

2. 设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$附近有定义，且$f_x'(0,0)=3$，$f_y'(0,0)=1$，则______

(A) $dz\big|_{(0,0)}=3dx+dy$；

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$；

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$；

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$

二．填空题

1. 曲线 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=4\sin\dfrac{t}{2}$ 在对应 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程为__________，法平面方程为___________；

2. 曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向处侧的单位法向量为_________；

3. 旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xoy 面夹角的余弦是____

4. 曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程是________，法线方程是_______

三．计算题

1. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程及法平面方程。

2. 设直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 的值。

3. 求曲面 $x^2+y^2+z^2-xy=3$ 上同时垂直于平面 $x+y+1=0$ 与平面 $x+y+2z-2=0$ 的切平面方程

四．综合题

1. 证明曲面 $xyz=a^3\ (a>0)$ 的切平面与坐标平面所成的四面体的体积为常数

2. 证明曲面 $z=xf(\dfrac{y}{x})$ 上任一点的切平面都通过原点

第七节　方向导数与梯度

一、本节学习目标

1. 熟悉方向导数的概念和计算公式.

2. 了解梯度的概念和计算方法以及梯度与方向导数之间的关系.

二、本节重点、难点解析

1. 方向导数的定义

定义：设三元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $\bigcup(P_0)$ 内有定义，l 为从点 P_0 出发的射线，$P(x,y,z)$ 为 l 上且含于 $\bigcup(P_0)$ 内的任一点，以 ρ 表示 P 与 P_0 两点间的距离，若极限

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta_l f}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数 f 在点 P_0 沿方向 l 的方向导数，记为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$，$f_l'(P_0)$，$f_l'(x_0,y_0,z_0)$.

2. 方向导数的计算

定理：若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微，则 f 在点 P_0 处沿任一方向 l 的方向导数都存在，且 $f_l'(P_0)=f_x'(P_0)\cos\alpha+f_y'(P_0)\cos\beta+f_z'(P_0)\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 为 l 的方向余弦.

3. 梯度的定义：$gradf=\left(f_x'(P_0),\ f_y'(P_0),\ f_z'(P_0)\right)$，

$$|gradf|=\sqrt{\left(f_x'(P_0)\right)^2+\left(f_y'(P_0)\right)^2+\left(f_z'(P_0)\right)^2}.$$

易见，对可微函数 f，方向导数是梯度在该方向上的投影.

4. 梯度的几何意义：对可微函数，梯度方向是函数变化最快的方向．这是因为 $f_l(P_0)=gradf\cdot l=|gradf(P_0)|\cos\theta$，其中 θ 是 l 与 $gradf(P_0)$ 夹角. 可见 $\theta=0$ 时 $f_l(P_0)$ 取最大值，在 l 的反方向取最小值.

三、典型例题及常考题型

1. 考点：求函数在某点沿某个方向的方向导数

例 1．求函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数.

解：由已知 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$，则 $l=\overrightarrow{AB}^{\,0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，又

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\frac{1}{2},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

例 2. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处______

(A)不连续；　(B)偏导数存在；　(C)任意方向的导数存在；　(D)可微

解：(A)错，显然在点 $(0,0)$ 处连续；

(B)错，$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+0}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在，同理 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也不存在；

(C)正确， 这是因为：$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+(0+\Delta y)^2}-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=1$；

(D)错，可微的必要条件是偏导数存在.

注意：此题说明了，沿任意方向的导数存在但偏导数可能却不存在。

2. 考点：求函数在某点的梯度

例 3. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $gradu\big|_{(1,2,-2)}=$____

解：

$$\mathrm{grad}u\big|_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{(1,2,-2)}=\left(\frac{2x}{r^2},\frac{2y}{r^2},\frac{2z}{r^2}\right)\Bigg|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{9}(1,2,-2)$$

四、学生学习容易产生的问题

1. 方向导数和偏导数之间有何区别？

答：以二元函数为例，偏导数表示函数在水平和垂直方向上的变化率，而方向导数表示函数在某个给定方向上的变化率。每个偏导数实际上对应两个方向导数（例如：x 轴的正方向和负方向）。因此偏导数存在，则表示四个方向上的方向导数存在；而方向导数存在，并不意味着偏导数存在，因为 x 轴的正方向和负方向上的方向导数可能不相等。

练习题 6.7

一． 选择题

1. 设 $f_x'(0,0)=1$，$f_y'(0,0)=-2$，则应有________

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续 (B) $df(x,y)\big|_{(0,0)}=dx-2dy$

(C) $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\cos\alpha-2\cos\beta$，其中 $\cos\alpha$， $\cos\beta$，为 l 的方向余弦

(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴负方向的方向导数为-1

2. 函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于________

(A) $\vec{i}$ (B) $-\vec{i}$ (C) $\vec{j}$ (D) $-\vec{j}$

二．填空题

1. 函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$，向量 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，则 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{(1,2,3)}=$______

2. 函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 方向的方向导数为________

3. 设函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，则 $\mathrm{grad}\ f(1,1,1)=$______

三．计算题

1. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处沿球面外法线方

向的方向导数

2. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，切沿 x 轴正向到射线 l 的转角 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$，$\theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$ 方向的方向导数分别为 1 和 0，求 $f(x,y)$ 在此点的最快增长方向及最大增长率

四．综合题

1. 问函数 $u = xy^2z$ 在点 $(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求此方向导数的最大值.

2. 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$，证明：f 在 $(0,0)$ 连续，且 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 都存在，但 f 在原点沿方向 (a,b) 的方向导数不存在（其中 a,b 为任意非零常数）.

第八节　多元函数的极值

一、本节学习目标

1. 掌握多元函数极值和最值的求法；
2. 掌握多元函数条件极值的求法。

二、本节重点、难点解析

1. 二元函数的极值与驻点

（1）极值　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，如果对在此邻域内除点 $P_0(x_0,y_0)$ 外的任意点 $P(x,y)$，均有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$），则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点（或极小值点）．$f(x_0,y_0)$ 称为极大值（或极小值），极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

（2）驻点　使 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 (x,y) 称为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点.

2．极值的条件

（1）必要条件

设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 存在，且在点 (x_0,y_0) 处取得极值，则 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$。

注意　可导函数的极值点必定为驻点，但是函数 $z=f(x,y)$ 的驻点却不一定是极值点.

（2）充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续的一阶和二阶偏导数，(x_0,y_0) 为函数的驻点，令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，$\Delta=B^2-AC$，

i）若 $\Delta<0$，则点 (x_0,y_0) 是 $z=f(x,y)$ 的极值点，且当 $A<0$ 时，点 (x_0,y_0) 为极大值点，当

$A>0$ 时，点 (x_0,y_0) 为极小值点；

ii）若 $\Delta>0$，则点 (x_0,y_0) 不是 $z=f(x,y)$ 的极值点；

iii）若 $\Delta=0$， (x_0,y_0) 可能是 $z=f(x,y)$ 的极值点，也可能不是 $z=f(x,y)$ 的极值点。

3. 条件极值与拉格朗日乘数法

⑴ 条件极值

求多元函数的极值问题或最大值、最小值问题时，对自变量的取值往往要附加一定的约束条件，这类附有约束条件的极值问题，称为条件极值.

⑵ 拉格朗日乘数法（以三元函数为例）

求函数 $u=f(x,y,z)$ 在满足约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的条件极值，其常用方法是拉格朗日乘数法。拉格朗日乘数法的具体步骤如下：

①构造拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$，

其中 λ 为待定常数，称其为拉格朗日乘数.

②求四元函数 $F(x,y,z,\lambda)$ 的驻点，即列方程组

$$\begin{cases} F_x = f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)=0, \\ F_y = f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)=0, \\ F_z = f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)=0, \\ F_\lambda=\varphi(x,y,z)=0, \end{cases}$$

求出上述方程组的解 x,y,z,λ，那么驻点 (x,y,z) 有可能是极值点；

③判别求出的点 (x,y,z) 是否是极值点，通常由实际问题的实际意义来确定.

注意：对于两个自变量或者多于三个自变量的函数或多于一个约束条件的情形也有类似的结果.

三、典型例题及常考题型

1. 考点：求函数的极值

例 1、求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)$ 的极值.

解：（1）求驻点

由 $\begin{cases} f_x(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)+2x\mathrm{e}^{x-y}=0, \\ f_y(x,y)=-\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)-4y\mathrm{e}^{x-y}=0, \end{cases}$

得两个驻点 $(0,0)$，$(-4,-2)$，

（2）求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数

$f_{xx}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+4x+2)$， $f_{xy}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(2y^2-x^2-2x-4y)$，

$f_{yy}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4)$，

（3）讨论驻点是否为极值点

在 $(0,0)$ 处，有 $A=2$，$B=0$，$C=-4$，$B^2-AC=8>0$，由极值的充分条件知 $(0,0)$ 不是极值点，$f(0,0)=0$ 不是函数的极值；

在 $(-4,-2)$ 处，有 $A=-6\mathrm{e}^{-2}$，$B=8\mathrm{e}^{-2}$，$C=-12\mathrm{e}^{-2}$，$B^2-AC=-8\mathrm{e}^{-4}<0$，而 $A<0$，

由极值的充分条件知 $(-4,-2)$ 为极大值点，$f(-4,-2)=8\mathrm{e}^{-2}$ 是函数的极大值.

2. 考点：求条件极值以及实际问题中求函数的最值

例 2. 某公司要用不锈钢板做成一个体积为 $8\,\mathrm{m}^3$ 的有盖长方体水箱。问水箱的长、宽、高如何设计，才能使用料最省？

解一： 用条件极值求问题的解.

设长方体的长，宽，高分别为 x，y，z. 依题意，有

$$xyz=8\ ,\quad S=2(xy+yz+zx)$$

令 $f(x,y,z,\lambda)=2(xy+yz+zx)+\lambda(xyz-8)$，

由 $\begin{cases} f_x=2(y+z)+\lambda yz=0 & , \\ f_y=2(x+z)+\lambda xz=0 & , \\ f_z=2(y+x)+\lambda xy=0 & , \\ f_\lambda=xyz-8=0 & , \end{cases}$ 解得驻点（$2,2,2$）.

根据实际问题，最小值一定存在，且驻点惟一. 因此，当水箱的长、宽、高分别为 $2\,\mathrm{cm}$ 时，才能使用料最省.

解二： 将条件极值转化为无条件极值.

设长方体的长，宽，高分别为 x，y，z. 依题意，有

$$xyz=8\ ,\quad s=2(xy+yz+zx)$$

消去 z，得面积函数 $S=2(xy+\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{y})$，　$x>0$，$y>0$，$xy\le 8$.

由 $\begin{cases} S_x=2(y-\dfrac{8}{x^2})=0 \\ S_y=2(x-\dfrac{8}{y^2})=0 \end{cases}$ 得驻点 （$2,2$），

根据实际问题，最小值一定存在，且驻点惟一. 因此，（$2,2$）为 $S(x,y)$ 的最小值点，即

当水箱的长、宽、高分别为 $2\,\mathrm{cm}$ 时，才能使用料最省.

注意：求条件极值时，可以化为无条件极值去解决，或用拉格朗日乘数法. 条件极值一般都是解决某些最大、最小值问题. 在实际问题中，往往根据问题本身就可以判定最大（最小）值是否存在，并不需要比较复杂的条件（充分条件）去判断.

练习题 6.8

一． 选择题

1. 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极小值，则下列结论正确的是_____

（A） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 的导数等于零；（B） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 的导数大于零；

（C） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 的导数小于零； （D） $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 的导数不存在。

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$ 处_____

（A）不是 $f(x,y)$ 的连续点； （B）不是 $f(x,y)$ 的极值点；
（C）是 $f(x,y)$ 的极大值点； （D）是 $f(x,y)$ 的极小值点。

3. 设 $f(x,y)$与$\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0)是$f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是_____

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$；（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$；

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$；（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$。

二．填空题

1. 二元函数 $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极小值点是_____

2. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短的点为_____

三．计算题

1. 求下列函数的极值

(1). $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$；(2). $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$

2. 已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，

$z=f(x+y,f(x,y))$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$

3. 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值。

4. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数。求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

5. 已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

四．综合题

1. 求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的最大长方体的体积，其中长方体的各个面平行于坐标面

2. 已知矩形的周长为$2P$，将它绕其一边旋转而构成一圆柱体，求所得圆柱体体积为最大的矩形.

第六章　复习题

一. 选择题

1. 二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可导（偏导数存在）与可微的关系是_____.

A. 可导必可微； B. 可导一定不可微 ； C.可微不一定可导；D.可微必可导.

2. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在$(0,0)$处_____

A. 连续，偏导数存在； B. 连续，偏导数不存在；
C. 不连续，偏导数存在； D. 不连续，偏导数不存在。

3. 函数$u=8x^2y^2-2y+4x+6z$在原点沿向量$\vec{a}=\{2,3,1\}$方向的方向导数为_____

A. $-\frac{8}{\sqrt{14}}$　B. $\frac{8}{\sqrt{14}}$　C. $\frac{3}{\sqrt{14}}$　D. $-\frac{3}{\sqrt{14}}$

4. 函数$z=xy$，原点$(0,0)$_____

A. 不是驻点； B. 是驻点但非极值点；
C. 是驻点且为极大值点； D. 是驻点且为极大值点.

5. 方程$xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0, 1, 1)的一个邻域，在此邻域内该方程_____

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$；

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$；

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$；

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$.

二. 填空题

1. 函数$z=\ln(4-x^2-y^2)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$的定义域是________

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{y\sin(xy)}{x}=$________，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{y}}=$__________

3. 设 $z=x^y$，则 $z_x(1,0)=$________，　$z_y(1,0)=$________，$dz=$_________

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由函数 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________

5． $z=xe^{2y}$ 在点 $M_1(1,0)$ 处沿点 $M_1(1,0)$ 到点 $M_2(2,-1)$ 的方向的方向导数是_____

三．计算题

1. 设 $u=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$，其中 $x=3t^2, y=\sqrt{t^2+1}$，求 $\frac{du}{dt}$

2. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{yz}=xz+xy+y$ 确定，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)}$

3. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出该法线方程

4. 设 $f(x,y)=3x+4y-\alpha x^2-2\alpha y^2-2\beta xy$，试问：参数 α,β 满足什么条件时 $f(x,y)$ 有唯一极大值？有唯一极小值？

5. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值

6. 设 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$

四．综合题

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处的连续性、偏导数存在性和可微性

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，证明：$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

3. 证明曲面 S：$z^2=(x+y^2)f(\frac{y}{x})$ 的切平面经过一个定点，其中 f 是可微函数

4. 证明曲面 $x+2y-\ln z+4=0$ 和曲面 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点 $\mathrm{P}(2,-3,1)$ 处相切

5. 若$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$，且当$x=0$时$z=\sin y$，当$y=0$时$z=\sin x$，试确定$z$关于$x$、$y$的函数关系式。

6. 设$u=u(x,y)$具有二阶连续偏导数，利用变换$\xi=x+ay,\eta=x+by$变换下列方程

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0$，并适当选取$a$、$b$的值使变换后的方程为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$

第六章　自测题

一、选择题

1. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2 y}$在点$(0,0)$处_____

（A）不连续；　（B）连续，但偏导数$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$不存在；

（C）连续且偏导数$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都存在，但不可微；　（D）可微

2. 函数$f(x,y)=x^2y^3$在点$(2,1)$沿方向$\vec{l}=\vec{i}+\vec{j}$的方向导数为_____

(A) 16；　(B) $\dfrac{16}{\sqrt{2}}$；　(C) 28；　(D) $\dfrac{28}{\sqrt{2}}$.

3. 设$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$，则下面结论正确的是_____

（A）点$(2,2)$是$f(x,y)$的驻点，且为极大值点；　（B）点$(2,2)$是极小值点；

（C）点$(0,0)$是$f(x,y)$的驻点，但不是极值点；　（D）点$(0,0)$是极大值点。

4. 函数$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$的极值点是函数的_____

（A）　可微点　（B）　不可微点　（C）　驻点　（D）　间断点

5. 设函数$z=z(x,y)$由方程$F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$确定，其中$F$是可微函数，且$F_z'\neq 0$，则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____

(A)　x；　(B) z；　(C) $-x$；　(D) $-z$.

二、填空题

1. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(\dfrac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$ =______

2. 设 $z=\arctan(xy)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________

3. $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________

4. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点(1,-2,2)处的法线方程__________

5. $u=x^2+y^2+z^2$ 在点(1,2,3)处方向导数的最大值是_______

三、计算题

1. 设 $u=xe^{\frac{y}{z}}+\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$；

2. 设 $z=f(x,y)$ 而 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}\sin u+xy=0\\ e^y-x^2+3u=0\end{cases}$ 确定，其中 u 为 x 的函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

3. 设 $z=f(u),u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$，其中 $f(u)$ 可微，$p(t)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，$\varphi'(u)$ 连续，求 $p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}+p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}$

4. 求 $z=a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2$ 在点 $P(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在该点法线（指向原点）方向的方向导数

5. 求 $f(x,y)=4x-4y-x^2-y^2$ 在区域 D：$x^2+y^2\le 18$ 上的最大值和最小值

6. 求过直线 $\begin{cases}x-1=0\\ 2y+z-1=0\end{cases}$ 且与曲面 $x^2-4y^2=4z$ 相切的平面方程

四、综合题

1. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性、可微性及偏导数的连续性

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$ 确定的，其中 f 为可微函数，试计算 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$，并化成最简形式

3. 设 $F(u,v)$ 的偏导数连续且不全为零，证明曲面 $F(lx-mz,ly-nz)=0$ 上所有的平面均与一条固定直线平行（这里 l,m,n 不全为零）

4. 设方程 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f(\dfrac{y}{x})$ 确定了曲面 $z=z(x,y)$，其中 f 可微

（1）. 求曲面上任意一点的切平面方程；

（2）. 证明切平面在 oz 轴上的截距与切点到原点距离之比为常数，并求此常数

参考答案

练习题 6. 1

一、1. C；2. A

二、1. $\dfrac{x^2(1+y)}{1-y}$；2. $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4, x\neq 0\}$；3. 抛物线 $y^2-2x=0$ 上

三、1、(1). $D=\{(x,y)\mid x+y>0, x-y>0\}$；(2). $D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1, y^2\le 4x\}$；

2、(1). 2；(2). 2；(3). e；(4). 1；(5). 0；(6). $\dfrac{1}{2}$；

四、1、极限不存在（提示：自变量变化取 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x}$ 两种方式）；2、提示：取 (x,y) 沿 x 轴和 $y=x$ 分别趋于原点；3、1 和-1，不存在。

4、(1). 在 $(0,0)$ 处不连续，在 R^2 除 $(0,0)$ 外均连续；(2). 在 R^2 上连续

练习题 6. 2

一、1. D；2. C；3. B

二、1. $\dfrac{1}{x^2y};-2\ln 2$；2. $yx^{y-1}+y^x\ln y$；3. $\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+y^2$

三、1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y\ln(xy)+y^x\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}\ln(xy)+y^x\dfrac{1}{y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln y[\ln y\ln(xy)+\frac{2}{x}]-\frac{y^x}{x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}[x\ln y\ln(xy)+\ln xy+\ln y+1];$$

2. nz；3. $2e^5-e$，$6e^5-e$，$8e^5$，$18e^5$；4. $\dfrac{\pi}{6}$

四、2. 提示：提示由 $\partial f(x,y)=y$ 知 $f(x,y)=xy+c(y)$；

3. $$f_x'(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0) \\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$f_x'(x,y)$ 在原点无极限，所以 $f_x'(x,y)$ 在原点不连续；同理可求 $f_y'(x,y)$。

练习题 6. 3

一、1. A；2. C；3. A

二、1. $\Delta z = dz + o(\rho)$；2. $-4dx + 12dy$ ；3. $e^{\sin xy}\cos(xy)(ydx + xdy)$；

4. $yzx^{yz-1}dx + zx^{yz}\ln xdy + yx^{yz}\ln xdz$；5. $du = f'(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)$

三、1. $dz\big|_{(1,2} = 4dx - 2dy$；2. －0.119，－0.125；3. 0.005

四、1. $\varphi(0,0) = 0$；$\varphi(0,0) = 0$；3. $f(x,y) \approx x + y$

练习题 6. 4

一、1. B

二、1. $3(1-4t^2)/\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}$ ；2. $yx^{y-1}f_1' + y^x\ln yf_2'$；3. $-\dfrac{2y}{x}f_1' + \dfrac{2x}{y}f_2'$；

4. $(f_1' + yf_2')(1+y)g'$；5. 4；6. $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$；7. 0

三、1. 51；2. $x^2 + y^2$；3. 0；4. $xf_3' + xy(xf_{32}'' + xzf_{33}'')$

四、1. $a = 3$

练习题 6. 5

一、1. $(y^2 - e^x)/(\cos y - 2xy)$；2. $-\dfrac{z}{x(1+z)^3}$；3. $\dfrac{xy}{z}$；

二、1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}f'(\frac{y}{x}) - 2x}{2z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{f'(\frac{y}{x}) - 2y}{2z}$；

2. $\dfrac{-ze^{-(x^2+y^2)}}{(z+1)^3}$；3. $\dfrac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \dfrac{x}{3z+1}$；

4. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-uf'_1(2yvg'_2 - 1) - f'_2g'_1}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2g'_1}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{g'_1(xf'_1 + uf'_1 - 1)}{(xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2g'_1}$；5. $\dfrac{3}{e}$

练习题 6. 6

一、1. C；2. C

二、1. $x - (\dfrac{\pi}{2} - 1) = y - 1 = \dfrac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, x + y + \sqrt{2}z = \dfrac{\pi}{2} + 4$；2. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$；

3. $\dfrac{3}{\sqrt{22}}$；4. $x + 2y - 4 = 0, \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{0}$

三、1. $\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$；$16x+9y-z-24=0$；2. $a=-5,b=-2$；3. $x-y+2=0$

3. $x-y+2=0 \quad x-y-2=0$

练习题 6.7

一、1. D；2. A

二、1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$；2. $\frac{98}{13}$；3. $6\vec{i}+3\vec{j}$

三、1. $\frac{1}{R}(x_0+y_0+z_0)$；2. $\theta=-\frac{\pi}{6}$，2

四、1. $\operatorname{grad}u=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ 是方向导数取最大值的方向，此方向导数的最大值为 $\left|\operatorname{grad}u\right|=\sqrt{21}$

练习题 6.8

一、1. A；2. D；3. D

二、1. $(2,2)$；2. $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$

三、1. (1) 极大值 $f(2,-2)=8$；(2) 极小值 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{e}{2}$；

2. $f''_{11}(2,2)+f'_2(2,2)\cdot f''_{12}(1,1)$；3. 最大值为 $f(0,2)=8$，最小值为 $f(0,0)=0$

4. 极大值为 $z(9,3)=3$，极小值为 $z(-9,-3)=-3$

5. $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$

四、1. $\frac{8}{\sqrt[3]{3}}abc$；2. 矩形的边长分别为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$，且绕短边旋转时所得体积最大

第六章 复习题

一、1. D；2. C；3. B；4. B；5. D

二、1. $1<x^2+y^2<4$；2. 4，1；3. 0，0，$yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$；4. $\frac{z}{x+z}$；5. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

三、1. $t(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\cot\frac{3t^2}{(t^2+1)^{\frac{1}{4}}}\left[6-\frac{3-t^2}{2(t^2+1)}\right]$；2. 1；

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x$，法线的方向向量为 $n=\{y,x,-1\}$，它与已知平面的法向量平行，所以，$\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}$，解之得 $x=-3,y=-1,z=xy=3$。所求点的坐标为 $(-3,-1,3)$，法

线方程为 $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$。

4. $2\alpha^2-\beta^2>0$，且$\alpha<0$时有唯一极小值；$2\alpha^2-\beta^2>0$，且$\alpha>0$时有唯一极大值

5. 最大值 $f(-2,-2,8)=72$，最小值 $f(1,1,2)=6$

6. $f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$

四、1. 连续，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，不可微；3. 过原点；

4. 提示：证明这两个曲面在点$(2,-3,1)$的法向量平行；5. $xy+\sin x+\sin y$；

6. $\begin{cases}a=\frac{1}{2}(-5+\sqrt{21})\\ b=\frac{1}{2}(-5-\sqrt{21})\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}(-5-\sqrt{21})\\ b=\frac{1}{2}(-5+\sqrt{21})\end{cases}$

第六章 自测题

一、1. C；2. B；3. D；4. B；5. B

二、1. 0；2. $\frac{y}{1+(xy)^2}$；3. 1；4. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{12}$；5. $2\sqrt{14}$；

三、1. $e^{\frac{y}{z}}+\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{x}{z}e^{\frac{y}{z}}+\frac{y}{x^2+y^2+z^2},-\frac{xy}{z^2}e^{\frac{y}{z}}+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$；

2. $f_1+(3y+2x\cos u)f_2/(e^y\cos u-3x)$；

3. 0；

4. $\sqrt{2(a^2+b^2)}ab$

5. $f_{\max}(2,-2)=8, f_{\min}(-3,3)=-42$

6. $2y+z-1=0$ 及 $x-2y-z=0$

四、1. 连续，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，不可微， 偏导数不连续；

2. $\frac{z}{1-xyf'(z^2)}$；

3. 提示：考虑固定直线的方向矢量$\{l,m,n\}$，$F_xm+F_yn+F_zl=0$

4. 常数为 -2；