

---

### Zadanie 1

Skoro w każdej klauzuli każda zmienna występuje w co najwyżej jednym literale, to zbiór  $X$  jest zbiorem rozwiązującym wtedy i tylko wtedy, gdy każda klauzula zawiera co najwyżej dwie zmienne niebędące w  $X$ . Wynika z tego, że jeśli  $X$  nie jest zbiorem rozwiązującym, to istnieje klauzula, która zawiera przynajmniej 3 zmienne niebędące w  $X$ . Obserwacja ta prowadzi do następującego algorytmu:

---

#### Algorithm 1 SolvingSet

---

```
1: procedure SOLVINGSET( $k, X = \emptyset$ )
2:   if every clause has at most two variables not in  $X$  then
3:     return true
4:   end if
5:   if  $k \leq 0$  then
6:     return false
7:   end if
8:    $(a, b, c) \leftarrow$  three variables not in  $X$  from one clause
9:   return SOLVINGSET( $k - 1, X \cup \{a\}$ ) or SOLVINGSET( $k - 1, X \cup \{b\}$ ) or
      SOLVINGSET( $k - 1, X \cup \{c\}$ )
10: end procedure
```

---

Algorytm ten wykorzystuje fakt, że jeśli aktualny zbiór  $X$  jest podzbiorem pewnego zbioru rozwiązującego, to przynajmniej jedna ze zmiennych  $a$ ,  $b$  lub  $c$  musi być w tym zbiorze.

W drzewie rekurencji tego algorytmu, na  $i$ -tym poziomie głębokości jest co najwyżej  $3^i$  wierzchołków, dla  $i = 0, \dots, k$ . Łącznie daje to maksymalnie  $\frac{3^{k+1}-1}{2}$  wywołań rekurencyjnych. W każdym wywołaniu musimy jedynie znaleźć odpowiednią klauzulę i wybrać z niej trzy zmienne, bądź stwierdzić, że taka klauzula nie istnieje, co oczywiście da się zrobić w czasie  $|\varphi|^{O(1)}$ . Ostateczna złożoność czasowa naszego algorytmu wynosi zatem  $3^k \cdot |\varphi|^{O(1)}$ , co kończy rozwiązanie pierwszej części zadania.