

Algorytmika, seria zadań domowych nr 1, marzec 2024

Zadanie 1. Dany jest graf nieskierowany G z wyróżnionym wierzchołkiem $v_0 \in V(G)$ oraz kosztami $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $g : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, przy czym $f(v_0) = 0$. Dla zbioru $X \subseteq V(G)$, kosztem X nazwiemy wartość:

$$\text{koszt}(X) := \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{xy \in E(G) : |\{x,y\} \cap X| = 1} g(xy).$$

Opracuj wielomianowy algorytm dla znajdowania zbioru $X \subseteq V(G)$ zawierającego v_0 o minimalnym możliwym koszcie. Oszacuj złożoność czasową swojego algorytmu.

Zadanie 2. Dany jest graf skierowany G z wyróżnionymi wierzchołkami $s, t \in V(G)$, $s \neq t$. Zbiór krawędzi $Z \subseteq E(G)$ nazwiemy *cięciem*, jeśli każda ścieżka z s do t w G zawiera co najmniej jedną krawędź z Z . Niech k oznacza najmniejszą możliwą wielkość cięcia w G .

Wykaż, że jeśli dla każdych dwóch cięć Z_1 i Z_2 wielkości k zachodzi $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, to istnieje krawędź należąca do każdego cięcia wielkości k (tj. istnieje krawędź $e \in E(G)$ taka, że dla każdego cięcia Z wielkości k mamy $e \in Z$).

Zasady

1. W zadaniu 1 liczba punktów będzie zależeć od złożoności czasowej otrzymanego algorytmu, przy czym każdy algorytm wielomianowy na pewno otrzyma co najmniej połowę punktów.
2. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 10pkt, czyli łącznie 20pkt za tę serię. Łącznie, w ciągu semestru, będzie do zdobycia 80pkt z prac domowych.
3. Można powoływać się tylko na fakty udowodnione na ćwiczeniach i wykładzie (ewentualnie także z MD, ASD).
4. Prace powinny być samodzielne. Poszukiwanie rozwiązań w internecie, publikowanie zadania na serwisach typu stackexchange jest zabronione. Po pierwsze jest nie w porządku, a po drugie psuje zabawę. Nieprzestrzeganie tej zasady będzie skutkowało niezaliczeniem przedmiotu.
5. Rozwiązanie wgrać do środy 27.03.2020, godz. 20.00 na kurs Algorytmika w moodle. Polecamy spisywanie rozwiązań w LaTeXu, ale skany rozwiązań spisanych ręcznie też są akceptowane.