Dominik Wawszczak
numer indeksu: 440014
numer grupy: 1

Algorytmika
praca domowa 3

Zadanie 1

Rozpocznijmy od udowodnienia, że dany w zadaniu problem jest w klasie NP. Istotnie, weryfikację czy konkretna funkcja f spełnia wszystkie krotki z $\mathcal{A}$ można zrealizować w czasie wielomianowym, zwyczajnie sprawdzając dla każdej krotki czy spełniona jest co najmniej jedna z odpowiednich nierówności.

Pozostaje pokazać, że problem ten jest NP-trudny. W tym celu wskażemy wielomianową redukcję problemu 3-CNF-SAT do problemu z treści zadania. Weźmy więc dowolną instancję problemu 3-CNF-SAT. Niech m będzie liczbą zmiennych w tej instancji. Przyjmijmy $n = 2m+1$. Zmienną x_i będziemy utożsamiać z liczbą $2i-1$, a zaprzeczenie zmiennej $\neg x_i$ z liczbą $2i$. Liczbę $2m+1$ będziemy traktować jako sztuczny indykator tego czy zmienna jest prawdziwa, czy fałszywa. Konkretnie, jeśli $f(2i-1) > f(2m+1)$, to zmienna x_i jest prawdziwa, a jeśli $f(2i-1) < f(2m+1)$, to zmienna ta jest fałszywa.

Rozpocznijmy z pustym zbiorem krotek $\mathcal{A}$, do którego będziemy dodawać kolejne krotki. Na początek dla każdej pary $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ takiej, że $i < j$, wrzućmy krotkę (i,j,j,i) gwarantując tym samym, że jeśli istnieje odpowiednia funkcja f, to jest ona iniekcją.

Kolejnem krokiem będzie zagwarantowanie, że dla każdego $i \in \{1,\ldots,m\}$ zachodzi dokładnie jeden z dwóch przypadków: $f(2i) < f(2m+1) < f(2i-1)$, czyli $x_i = \top$, albo $f(2i-1) < f(2m+1) < f(2i)$, co oznacza, że $x_i = \bot$. Niech $a,b,c \in \{1,\ldots,n\}$ będą parami różne. Zauważmy, że wrzucając do $\mathcal{A}$ krotkę (c,b,b,a) sprawiamy, że nie może zachodzić $f(a) < f(b) < f(c)$, przy czym na każdym z pozostałych 5 możliwych posortowań $f(a)$, $f(b)$ i $f(c)$ krotka ta jest spełniona. Możemy w ten sposób „zabronić” wszystkie kolejności $f(2i-1)$, $f(2i)$ oraz $f(2m+1)$, z wyjątkiem dwóch wymienionych wyżej.

Następnie zagwarantujemy, że jeśli dla pewnych a, b zachodzi $f(2m+1) < f(a) < f(b)$ lub $f(a) < f(b) < f(2m+1)$, to $a < b$. Dla każdych $a,b \in \{1,\ldots,2m\}$ takich, że $a < b$, możemy, tak jak w poprzednim akapicie, zabronić kolejności $f(2m+1) < f(b) < f(a)$ oraz $f(b) < f(a) < f(2m+1)$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że żadna klauzula nie zawiera jednocześnie zmiennej i jej zaprzeczenia, gdyż takie klauzule są zawsze spełnione. klauzulę z instancji problemu 3-CNF-SAT będziemy rozpatrywać jako zbiór (powtórzenia możemy oczywiście zignorować) liczb odpowiadających zawartym w niej literałom, zgodnie z numeracją opisaną w drugim akapicie. Przykładowo, klauzulę $(x_4 \vee \neg x_6 \vee x_9)$ będziemy rozumieć jako multizbiór $\{7,12,17\}$, a klauzulę $(\neg x_2 \vee x_5 \vee \neg x_2)$ jako $\{4,9\}$. Dla każdego zbioru jednoelementowego $\{a\}$ dodamy do $\mathcal{A}$ krotkę $(2m+1,a,2m+1,a)$. Dla każdego zbioru dwuelementowego $\{a,b\}$ dodamy do $\mathcal{A}$ krotkę $(2m+1,a,2m+1,b)$. Wreszcie dla każdego zbioru trzyelementowego $\{a,b,c\}$ dodamy do $\mathcal{A}$ krotkę $(2m+1,a,b \oplus 1,c)$, zakładając bez straty ogólności $a < b < c$, gdzie $\oplus$ jest operatorem bitowym xor.

Pozostaje wykazać równoważność:

$$\text{istnieje funkcja } f : \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{Q} \text{ spełniająca wszystkie krotki z } \mathcal{A} \iff \text{formuła z instacji problemu 3-CNF-SAT jest spełnialna.}$$

Zaczniemy od wykazania implikacji „w lewo”. Weźmy więc wartościowanie spełniające formułę i dla każdego $i = 1,\ldots,m$ przypiszmy $f(2i-1) = i = f(2i) + m + 1$, jeżeli $x_i = \top$, albo

$f(2i-1) = i - m - 1 = f(2i) - m - 1$, w przeciwny wypadku. $f(2m+1)$ zdefiniujemy jako 0. Łatwo zauważyć, że funkcja f spełnia wszystkie krotki z akapitów 3, 4 i 5. Dla klauzul, którym odpowiadają zbiory jedno lub elementowe również nietrudno zauważyć, że funkcja f spełnia odpowiadające im krotki. Pozostają klauzule, którym odpowiadają zbiory trzyelementowe $\{a, b, c\}$, gdzie mamy cztery przypadki:

1. $f(a) > 0$

   Wtedy oczywiście $f(a) > 0 = f(2m+1)$, czyli krotka jest spełniona.

2. $f(b) > 0 \wedge f(c) > 0$

   Wówczas $f(b \oplus 1) = f(b) - m - 1 < 0 < f(c)$, zatem krotka jest spełniona.

3. $f(b) > 0 \wedge f(c) < 0$

   W tym przypadku zachodzi

   $$f(b \oplus 1) \;=\; \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor - m - 1 \;<\; \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor - m - 1 \;=\; f(c),$$

   toteż krotka także jest spełniona.

4. $f(b) < 0 \wedge f(c) > 0$

   Mamy

   $$f(b \oplus 1) \;=\; \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor \;<\; \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor \;=\; f(c),$$

   więc krotka również jest spełniona.

Na koniec pozostaje wykazać implikację „w prawo". Niech więc f będzie funkcją spełniającą każdą klauzulę z $\mathcal{A}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f(2m+1) = 0$, po prostu odejmując stałą $f(2m+1)$ od każdej wartościfunkcji, co nie wpłynie na żadną nierówność. Zgodnie z tym co opisano w drugim akapicie, przyjmiemy $x_i = \top$, jeśli $f(2i-1) > 0$, albo $x_i = \bot$, gdy $f(2i-1) < 0$. Od razu widać, że formuły zawierające jeden lub dwa literały są spełnione przy takim wartościowaniu. Żeby formuła trzyelementowa, której odpowiada zbiór $\{a, b, c\}$ była niespełniona, musiałoby zachodzić $f(a), f(b), f(c) < 0$. Skoro $f(b) < 0$, to $f(b \oplus 1) > 0$, czyli nie zachodzi żadna z nierówności $f(2m+1) < f(a)$ i $f(b \oplus 1) < f(c)$, co oznacza sprzeczność, gdyż istnieje krotka w $\mathcal{A}$, której funkcja f nie spełnia.