Dominik Wawszczak
numer indeksu: 440014
numer grupy: 1

Algorytmika
praca domowa 3

Zadanie 1

Rozpocznijmy od udowodnienia, że dany w zadaniu problem jest w klasie NP. Istotnie, weryfikację czy konkretna funkcja f spełnia wszystkie krotki z $\mathcal{A}$ można zrealizować w czasie wielomianowym, zwyczajnie sprawdzając dla każdej krotki, czy spełniona jest co najmniej jedna z odpowiednich nierówności.

Pozostaje pokazać, że problem ten jest NP-trudny. W tym celu wskażemy wielomianową redukcję problemu 3-CNF-SAT do problemu z treści zadania. Weźmy więc dowolną instancję problemu 3-CNF-SAT. Niech m będzie liczbą zmiennych w tej instancji. Przyjmijmy $n = 2m + 1$. Zmienną x_i będziemy utożsamiać z liczbą $2i - 1$, a zaprzeczenie zmiennej $\neg x_i$ z liczbą $2i$. Liczbę $2m+1$ będziemy traktować jako sztuczny indykator tego czy zmienna jest prawdziwa, czy fałszywa. Konkretnie, jeśli $f(2i - 1) > f(2m + 1)$, to zmienna x_i jest prawdziwa, a jeśli $f(2i - 1) < f(2m + 1)$, to zmienna ta jest fałszywa.

Rozpocznijmy z pustym zbiorem krotek $\mathcal{A}$, do którego będziemy dodawać kolejne krotki. Na początek dla każdej pary $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ takiej, że $i < j$, wrzućmy krotkę (i, j, j, i) gwarantując tym samym, że jeśli istnieje odpowiednia funkcja f, to jest ona iniekcją.

Kolejnym krokiem będzie zagwarantowanie, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ zachodzi dokładnie jeden z dwóch przypadków: $f(2i) < f(2m+1) < f(2i-1)$, czyli $x_i = \top$, albo $f(2i-1) < f(2m+1) < f(2i)$, co oznacza, że $x_i = \bot$. Niech $a, b, c \in \{1, \ldots, n\}$ będą parami różne. Zauważmy, że wrzucając do $\mathcal{A}$ krotkę (c, b, b, a) sprawiamy, że nie może zachodzić $f(a) < f(b) < f(c)$, przy czym na każdym z pozostałych 5 możliwych posortowań $f(a)$, $f(b)$ i $f(c)$ krotka ta jest spełniona. Możemy w ten sposób „zabronić” wszystkie kolejności $f(2i-1)$, $f(2i)$ oraz $f(2m+1)$, z wyjątkiem dwóch wymienionych wyżej.

Bez straty ogólności możemy założyć, że żadna klauzula nie zawiera jednocześnie zmiennej i jej zaprzeczenia, gdyż takie klauzule są zawsze spełnione. Klauzulę z instancji problemu 3-CNF-SAT będziemy rozpatrywać jako zbiór liczb odpowiadających zawartym w niej literałom (powtórzenia możemy oczywiście zignorować), zgodnie z numeracją opisaną w drugim akapicie. Przykładowo, klauzulę $(x_4 \vee \neg x_6 \vee x_9)$ będziemy rozumieć jako multizbiór $\{7, 12, 17\}$, a klauzulę $(x_5 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2)$ jako $\{4, 9\}$. Dla każdego zbioru jednoelementowego $\{a\}$ dodamy do $\mathcal{A}$ krotkę $(2m+1, a, 2m+1, a)$. Dla każdego zbioru dwuelementowego $\{a, b\}$ dodamy do $\mathcal{A}$ krotkę $(2m+1, a, 2m+1, b)$. Wreszcie dla każdego zbioru trójelementowego $\{a, b, c\}$ dodamy do $\mathcal{A}$ krotkę $(2m+1, a, b \oplus 1, c)$, zakładając bez straty ogólności $a < b < c$, gdzie $\oplus$ jest operatorem bitowym xor.

Pozostaje wykazać równoważność:

$$\begin{aligned}&\text{istnieje funkcja } f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Q} \text{ spełniająca wszystkie krotki z } \mathcal{A} \iff \\ &\text{formuła z instancji problemu 3-CNF-SAT jest spełnialna.}\end{aligned}$$

Zaczniemy od wykazania implikacji „w lewo”. Weźmy więc wartościowanie spełniające formułę, po czym dla każdego $i = 1, \ldots, m$ przypiszmy $f(2i - 1) = i = f(2i) + m + 1$, jeżeli $x_i = \top$, albo $f(2i - 1) = i - m - 1 = f(2i) - m - 1$, w przeciwnym wypadku. $f(2m + 1)$ zdefiniujemy jako 0. Łatwo zauważyć, że funkcja f spełnia wszystkie krotki z akapitów 3 i 4. Dla klauzul, którym odpowiadają zbiory jedno lub dwuelementowe również nietrudno zauważyć, że funkcja f spełnia odpowiadające im krotki. Pozostają klauzule, którym odpowiadają zbiory trójelementowe

$\{a, b, c\}$. Przypuśćmy nie wprost, że $0 > f(a) \ \wedge \ f(b \oplus 1) > f(c)$. Skoro $b < c$ i klauzula ta nie zawiera jednocześnie zmiennej i jej zaprzeczenia, to $b \oplus 1 < c$. Ponieważ $f(a) < 0$, to odpowiadający jej literał jest fałszem, zatem $f(b) > 0$ lub $f(c) > 0$. Jeżeli $f(b) > 0$, mamy:

$$f(b \oplus 1) \ = \ \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor - m - 1 \ < \ \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor - m - 1 \ \leqslant \ f(c),$$

czyli sprzeczność. W drugim przypadku natomiast zachodzi:

$$f(c) \ = \ \left\lfloor \frac{c+1}{2} \right\rfloor \ > \ \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor \ \geqslant \ f(b \oplus 1),$$

co również daje sprzeczność.

Na koniec pozostaje wykazać implikację „w prawo”. Niech więc f będzie funkcją spełniającą każdą klauzulę z $\mathcal{A}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f(2m+1) = 0$, po prostu odejmując stałą $f(2m+1)$ od każdej wartości funkcji, co nie wpłynie na żadną nierówność. Zgodnie z tym, co opisano w drugim akapicie, przyjmiemy $x_i = \top$, jeśli $f(2i-1) > 0$, albo $x_i = \bot$, gdy $f(2i-1) < 0$. Od razu widać, że formuły zawierające jeden lub dwa literały są spełnione przy takim wartościowaniu. Żeby formuła trójelementowa, której odpowiada zbiór $\{a, b, c\}$ była niespełniona, musiałoby zachodzić $f(a), f(b), f(c) < 0$. Skoro $f(b) < 0$, to $f(b \oplus 1) > 0$, czyli nie zachodzi żadna z nierówności $f(2m+1) < f(a)$ i $f(b \oplus 1) < f(c)$, co oznacza sprzeczność, gdyż istnieje krotka w $\mathcal{A}$, której funkcja f nie spełnia.

Wykazana równoważność kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2

Rozpocznijmy od napisania programu liniowego do problemu z treści zadania:

$$\begin{aligned}
&\forall_{u\in V(G)}\ 0 \leqslant x_u \leqslant 1,\\
&\forall_{uv\in E(G)}\ x_u + x_v \geqslant 1,\\
&\forall_{u\in V(G)}\ \sum_{v\in N[u]} x_v \leqslant y,\\
&\min:\ y.
\end{aligned}$$

Weźmy rozwiązanie tego programu w liczbach rzeczywistych, które oczywiście możemy uzyskać w czasie wielomianowym. Wówczas zachodzi $y \leqslant \mathrm{OPT}(G)$, ponieważ biorąc rozwiązanie programu w liczbach całkowitych otrzymamy optymalne rozwiązanie problemu. Niech

$$X \;=\; \left\{u \;:\; x_u \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Wówczas X jest pokryciem wierzchołkowym, ponieważ gdyby dla pewnej krawędzi $uv \in E(G)$ zachodziło $x_u < \frac{1}{2}$ i $x_v < \frac{1}{2}$, to mielibyśmy $x_u + x_v < 1$.

Zauważmy, że dla każdego $u \in V(G)$ spełnione jest

$$|X \cap N[u]| \;\leqslant\; 2\cdot \sum_{v\in N[u]} x_v \;\leqslant\; 2\cdot y \;\leqslant\; 2\cdot \mathrm{OPT}(G). \tag{*}$$

Wynika stąd, że wskazany algorytm jest algorytmem 2-aproksymacyjnym tego problemu, co kończy rozwiązanie pierwszej części zadania.

Żeby gęstość pokrycia wierzchołkowego znaleziona przez nasz algorytm wyniosła więcej niż $2\cdot \mathrm{OPT}(G) - 1$, musi istnieć wierzchołek $u \in V(G)$, dla którego w każdej nierówności ciągu nierówności * zachodzi równość. W szczególności oznacza to, że dla pewnego $u \in V(G)$ w nierówności

$$|X \cap N[u]| \;\leqslant\; 2\cdot \sum_{v\in N[u]} x_v$$

zachodzi równość.

Nierówność ta bierze się z dodania stronami nierówności postaci $1 \leqslant 2x_v$, dla $v \in X$, oraz $0 \leqslant 2x_v$, dla $v \notin X$. We wszystkich tych nierównościach musi więc zachodzić równość, zatem

$$\forall_{v\in N[u]}\ x_v \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

Jeżeli dla pewnego $v \in N[u] \setminus \{u\}$ byłoby $x_v = 0$, to mielibyśmy $x_u + x_v \leqslant \frac{1}{2} < 1$, czyli sprzeczność, toteż $x_v = \frac{1}{2}$, dla każdego $v \in N[u] \setminus \{u\}$.

Jeśli $x_u = 0$ oraz u nie jest wierzchołkiem izolowanym, to biorąc dowolnego sąsiada v otrzymujemy $x_u + x_v = \frac{1}{2} < 1$, czyli również sprzeczność, z czego wynika, że $x_u = \frac{1}{2}$. O wierzchołkach izolowanych natomiast możemy założyć, że nie ma ich w naszym pokryciu, ponieważ i tak są one zbędne.

Z powyższego wynika, że jeżeli gęstość pokrycia wierzchołkowego jest większa niż $2\cdot\mathrm{OPT}(G)-1$, to istnieje wierzchołek w tym pokryciu, którego wszyscy sąsiedzi również w nim są. Możemy więc go zwyczajnie usunąć z tego pokrycia i powtarzać tę procedurę tak długo, aż taki wierzchołek istnieje. Na koniec zostaniemy z pokryciem o gęstości co najwyżej $2\cdot \mathrm{OPT}(G) - 1$, co kończy rozwiązanie zadanie.