Dominik Wawszczak
numer indeksu: 440014
numer grupy: 1

Algorytmika
praca domowa 1

Zadanie 1

Stwórzmy nowy nieskierowany graf G' taki, że

$$V(G') \coloneqq V(G) \cup \{t\} \quad \text{oraz} \quad E(G') \coloneqq E(G) \cup \{xt \;:\; x \in V(G)\}.$$

Niech funkcja kosztu $c : V(G') \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ będzie następująca:

$$c(xy) \coloneqq \begin{cases} g(xy), & \text{jeżeli } xy \in E(G), \\ f(x), & \text{gdy } y = t, \\ f(y), & \text{dla } x = t. \end{cases}$$

Lemat 1 Każdy zbiór $X \subseteq V(G)$ zawierający v_0 odpowiada pewnemu przekrojowi sieci przepływowej (G', c, v_0, t), w taki sposób, że koszt(X) jest równy przepustowości tego przekroju.

Dowód lematu 1 Dla konkretnego zbioru $X \subseteq V(G)$ zawierającego v_0 weźmiemy $S = X$ i $T = (V(G) \setminus X) \cup \{t\}$. Wtedy oczywiście $V(G') = S \cup T$ oraz $S \cap T = \emptyset$. Przepustowością tego przekroju jest wówczas

$$\sum_{x \in S \ \wedge \ y \in T} c(xy) \; = \; \sum_{x \in X} c(xt) + \sum_{x \in X \ \wedge \ y \in V(G) \setminus X} c(xy) \; = \; \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X \ \wedge \ y \in V(G) \setminus x} g(xy),$$

czyli koszt(X), co kończy dowód lematu.

Dla dowolnego przekroju (S, T) sieci (G', c, v_0, t), biorąc $X = S$ znowu otrzymamy, że koszt(X) jest równy przepustowości tego przekroju, zatem również każdemu przekrojowi odpowiada podzbiór wierzchołków grafu G zawierający v_0.

Z powyższego wynika, że minimalny możliwy koszt zbioru $X \subseteq V(G)$ zawierającego v_0 jest równy przepustowości minimalnego przekroju sieci (G', c, v_0, t), czyli wartości maksymalnego przepływu tej sieci. Maksymalny przepływ możemy znaleźć algorytmem Dinica mającym złożoność czasową $O\left(|V(G')|^2 |E(G')|\right)$.

Żeby odzyskać zbiór X wystarczy podzielić zbiór wierzchołków grafu G' na dwa zbiory: S – wierzchołki do których istnieje ścieżka z v_0 w sieci rezydualnej z maksymalnym przepływem oraz T – pozostałe wierzchołki. Można to zrealizować zwykłym algorytmem DFS w czasie $O\left(|V(G')| + |E(G')|\right)$. Wówczas S jest szukanym zbiorem.

Ponieważ zachodzi $|V(G')| = |V(G)| + 1$ oraz $|E(G')| = |E(G)| + |V(G)|$, to całkowita złożoność naszego algorytmu to $O\left(|V(G)|^2 (|V(G)| + |E(G)|)\right)$.

Zadanie 2

Lemat 1 Istnieje k parami rozłącznych krawędziowo ścieżek prostych z s do t.

Dowód lematu 1 Rozpatrzmy sieć przepływową $(G, \lambda xy.1, s, t)$. Zauważmy, że każdemu cięciu $Z \subseteq E(G)$ odpowiada pewien przekrój (S, T) tej sieci, ponieważ możemy wziąć

$$S = \{v : \text{istnieje ścieżka z } s \text{ do } v \text{ niezawierająca krawędzi z } Z\} \quad \text{oraz} \quad T = V(G) \setminus S.$$

Jeśli dodatkowo cięcie Z jest minimalne, czyli $|Z| = k$, to każda krawędź $xy \in Z$ spełnia warunek $x \in S \ \wedge \ y \in T$, gdyż w przeciwnym razie mamy jeden z dwóch przypadków:

- $x \in T$, wówczas krawędź xy jest redundantna i istnieje mniejsze cięcie $Z \setminus \{xy\}$, ponieważ i tak nie da się dojść z s do x;
- $y \in S$, wtedy podobnie krawędź xy nic nie zmienia i istnieje mniejsze cięcie $Z \setminus \{xy\}$, albowiem krawędź ta nie nakłada żadnych ograniczeń, jako że i tak istnieje inna ścieżka z s do y.

W analogiczny sposób każdemu przekrojowi odpowiada pewne cięcie, z czego wynika, że przepustowość minimalnego przekroju wynosi k, skąd wartość maksymalnego przepływu również wynosi k. Na wykładzie było dowodzone, że przepływ ten rozkłada się na ścieżki i cykle, przy czym cykle możemy po prostu zignorować, a o ścieżkach założyć, że na każdej z nich wartość przepływu jest całkowita, czyli wynosi 1, ponieważ algorytm Forda-Fulkersona jest poprawny. Wnioskujemy stąd, że ścieżki te są parami rozłączne krawędziowo, gdyż w przeciwnym wypadku istniałaby krawędź, dla której funkcja przepływu przekraczałaby funkcję przepustowości. Otrzymaliśmy rodzinę k parami rozłącznych krawędziowo ścieżek prostych z s do t: $P = \{(s = v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,l_1} = t), (s = v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,l_2} = t), \ldots, (s = v_{k,1}, v_{k,2}, \ldots, v_{k,l_k} = t)\}$, co kończy dowód lematu.

Lemat 2 Każde k-cięcie zawiera po dokładnie jednej krawędzi na każdej ścieżce z P i nie zawiera żadnych innych krawędzi.

Dowód lematu 2 Każde k-cięcie musi zawierać po co najmniej jednej krawędzi na każdej ścieżce z P, ponieważ w przeciwnym wypadku nie byłoby cięciem. Ponadto, jeśli zawiera dwie krawędzie z którejś ścieżki lub pewną krawędź nienależącą do żadnej ze ścieżek, to ma rozmiar większy niż k, czyli sprzeczność, co kończy dowód lematu.

Niech $A \subseteq V(G)$ będzie zbiorem zawierającym takie wierzchołki v, że w dowolnym k-cięciu zachodzi $v \in S$, gdzie (S, T) jest odpowiadającym temu cięciu przekrojem. Podobnie definiujemy B, z tym że zbiór ten zawiera wierzchołki, które dla każdego k-cięcia są w T.

Lemat 3 Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ istnieje $p_i \in \{1, 2, \ldots, l_i - 1\}$ takie, że $v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,p_i} \in A$ oraz $v_{i,p_i+1}, v_{i,p_i+2}, \ldots, v_{i,l_i} \notin A$.

Dowód lematu 3 Nie ulega wątpliwości, że $s = v_{i,1} \in A$. Przypuśćmy nie wprost, że istnieją $a, b \in \{1, 2, \ldots, l_i - 1\}$ takie, że $a < b$ oraz $v_{i,a} \notin A \ \wedge \ v_{i,b} \in A$. Weźmy k-cięcie Z, dla którego $v_{i,a} \in T$. Z lematu 2 wnioskujemy, że dla pewnego $c \in \{1, 2, \ldots a - 1\}$ zachodzi $v_{i,c}v_{i,c+1} \in Z$, przy czym jest to jedyna krawędź na tej ścieżce należąca do Z. Oczywiście $v_{i,b} \in S$, zatem istnieje pewna ścieżka z s do $v_{i,b}$ niezawierająca krawędzi z Z. Możemy tę ścieżkę przedłużyć o $(v_{i,b}, v_{i,b+1}, \ldots, v_{i,l_i} = t)$ uzyskując ścieżkę z s do t niezawierającą krawędzi z Z, czyli sprzeczność, co kończy dowód lematu.

Lemat 4 Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ istnieje $q_i \in \{2, 3 \ldots, l_i\}$ takie, że $v_{i,q_i}, v_{i,q_i+1}, \ldots, v_{i,l_i} \in B$ oraz $v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,q_i-1} \notin B$.

Dowód lematu 4 Analogiczny jak lematu 3.

Niech

$$Z_A = \{v_{i,p_i}v_{i,p_i+1} \ : \ i = 1, 2, \ldots, k\} \quad \text{oraz} \quad Z_B = \{v_{i,q_{i-1}}v_{i,q_i} \ : \ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Lemat 5 Z_A i Z_B są k-cięciami.

Dowód lematu 5 Przypuśćmy nie wprost, że istnieje ścieżka $(s = v_1, v_2, \ldots, v_l = t)$, taka że żadna z krawędzi v_jv_{j+1} nie należy do Z_A, dla $j = 1, \ldots, l-1$. Weźmy największe takie $p \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$, że $v_1, v_2, \ldots, v_p \in A$. Wtedy z lematu 3 krawędź v_pv_{p+1} nie leży na żadnej ścieżce z P, zatem z lematu 2 nie jest w żadnym k-cięciu, skąd wnioskujemy, że $v_{p+1} \in A$, ponieważ $v_p \in A$, czyli sprzeczność, toteż Z_A jest k-cięciem. Analogicznie dowodzimy, że Z_B również jest k-cięciem, co kończy dowód lematu.

Z założeń $Z_A \cap Z_B \neq \emptyset$, co oznacza, że istnieje i, dla którego $p_i + 1 = q_i$. Krawędź $v_{i,p_i}v_{i,q_i}$ jest więc szukaną krawędzią, ponieważ gdyby istniało k-cięcie Z takie, że $v_{i,p_i}v_{i,q_i} \notin Z$, to spełnione by było $v_{i,q_i} \in S$, gdyż $v_{i,p_i} \in A$, co przeczy warunkowi $v_{i,q_i} \in B$. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.