Dominik Wawszczak
numer indeksu: 440014
numer grupy: 1

Algorytmy Parametryzowane
praca domowa 1

Zadanie 1

Oznaczmy

$$V(G) \;=\; \{v_1, \ldots, v_n\} \quad \text{oraz} \quad S_n \;=\; \left\{\sigma \;:\; \sigma \in \{1, \ldots, n\}^{\{1,\ldots,n\}} \;\wedge\; \sigma \text{ jest bijekcją}\right\}.$$

Niech

$$\text{cutwidth}_\sigma(i) \;=\; |\{(u, v) \;:\; u \in \{v_{\sigma_1} \ldots v_{\sigma_i}\} \;\wedge\; v \in \{v_{\sigma_{i+1}}, \ldots, v_{\sigma_n}\} \;\wedge\; (u, v) \in E(G)\}|,$$

gdzie $\sigma \in S_n$ jest dowolną permutacją. Celem jest znalezienie permutacji $\sigma \in S_n$, dla której wartość

$$\max_{i \in \{1,\ldots,n-1\}} \text{cutwidth}_\sigma(i)$$

jest najmniejsza możliwa. Konkretnie, chcemy obliczyć tę wartość.

Zdefiniujmy funkcję

$$\text{out}(X) \;=\; |\{(u, v) \;:\; u \in X \;\wedge\; v \in V(G) \setminus X \;\wedge\; (u, v) \in E(G)\}|,$$

gdzie X jest dowolnym podzbiorem $V(G)$. Wówczas

$$\text{cutwidth}_\sigma(i) \;=\; \text{out}(\{v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_i}\}).$$

Oczywiście, dla konkretnego X, wartość $\text{out}(X)$ można łatwo obliczyć w czasie $n^{\mathcal{O}(1)}$.

Pozwala nam to skorzystać z programowania dynamicznego po podzbiorach. Niech

$$\text{dp}(X) \;=\; \min\left\{\max_{i \in \{1,\ldots,|X|-1\}} \text{cutwidth}_\sigma(i) \;:\; \sigma \in S_n \;\wedge\; \{v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_{|X|}}\} = X\right\},$$

gdzie X jest dowolnym podzbiorem $V(G)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \text{dp}(\emptyset) &\;=\; 0, \\ \text{dp}(X) &\;=\; \min\{\max(\text{dp}(X \setminus \{x\}), \text{out}(X \setminus \{x\}) \;:\; x \in X\}. \end{aligned}$$

Naturalnie, wynikiem jest $\text{dp}(\{1, \ldots, n\})$. Żeby obliczyć wartości dp dla wszystkich podzbiorów $V(G)$, można na przykład przeglądać je w kolejności niemalejących rozmiarów. Całkowita złożoność naszego algorytmu wynosi $2^n \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.