

#### Zadanie 4

Rozpocznijmy od udowodnienia, że dany w treści zadania problem jest w klasie NP. Łatwo wskazać maszynę Turinga, która dla danej formuły  $\varphi$  niedeterministycznie wybiera wartościowanie  $v$ , a następnie oblicza  $\text{score}(\varphi, v)$  i sprawdza czy spełnione jest  $3 \leq \text{score}(\varphi, v) \leq 5$ . Oczywiście wszystkie opisane wyżej kroki można przeprowadzić w czasie wielomianowym.

Pozostaje pokazać, że problem ten jest NP-trudny. W tym celu wskażemy wielomianową redukcję problemu 3-CNF-SAT do problemu z treści zadania. Weźmy więc dowolną formułę  $\psi$  w postaci 3-CNF. Stwórzmy nową formułę  $\varphi$  w następujący sposób:

- do każdej klauzuli w  $\psi$  dodajemy dwa razy literal  $x$ ;
- do formuły  $\psi$  dodajemy klauzulę  $(x \vee x \vee x \vee x \vee x)$ .

Oczywiście mając formułę  $\psi$ , formułę  $\varphi$  można łatwo obliczyć w czasie wielomianowym. Zakładamy przy tym, że zmienna  $x$  jest nową zmienną, niewystępującą w formule  $\psi$ .

Przykładowo, dla

$$\psi = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3)$$

będziemy mieli

$$\varphi = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x \vee x) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x \vee x) \wedge (x_3 \vee x \vee x) \wedge (x \vee x \vee x \vee x \vee x).$$

Udowodnimy teraz następującą równoważność:

$$\text{formuła } \psi \text{ jest spełnialna} \iff \text{istnieje wartościowanie } v \text{ takie, że } 3 \leq \text{score}(\varphi, v) \leq 5.$$

Założmy, że formuła  $\psi$  jest spełniona przez wartościowanie  $u$ . Wówczas  $1 \leq \text{score}(\psi, u)$ . Ponadto  $\text{score}(\psi, u) \leq 3$ , gdyż formuła  $\psi$  jest w formacie 3-CNF. Niech wartościowanie  $v$  będzie takie samo jak  $u$  z dodatkowym przypisaniem  $x = \top$ . Wtedy w każdej klauzuli formuły  $\varphi$  są co najmniej 3 literały będące prawdziwe przy wartościowaniu  $v$  – co najmniej jeden z wartościowania  $u$  i dwa razy  $x$ , a w ostatniej klauzuli 5 razy  $x$ . Zachodzi więc  $3 \leq \text{score}(\varphi, v)$ . Dodatkowo  $\text{score}(\varphi, v) \leq 5$ , ponieważ w każdej klauzuli jest co najwyżej 5 literałów.

Założmy teraz, że dla pewnego wartościowania  $v$  spełnione jest  $3 \leq \text{score}(\varphi, v) \leq 5$ . Łatwo zauważyć, że w wartościowaniu tym musi być  $x = \top$ , gdyż w przeciwnym wypadku ostatnia klauzula formuły  $\varphi$  byłaby fałszywa. Skoro  $3 \leq \text{score}(\varphi, v)$ , to w każdej klauzuli formuły  $\varphi$  jest co najmniej jeden literal inny niż  $x$  będący prawdziwy przy wartościowaniu  $v$ , ponieważ każda klauzula zawiera dokładnie dwa literały  $x$  (z wyjątkiem ostatniej klauzuli). Oznacza to, że wartościowanie  $u$  powstałe poprzez usunięcie z wartościowania  $v$  przypisania  $x = \top$  spełnia formułę  $\psi$ .

Powyższa redukcja implikuje, że problem opisany w treści zadania jest NP-zupełny, co kończy rozwiązanie zadania.

□