

Udowodnimy, że język

$$L = (\{a^n b^n : n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\})^*$$

nie jest rozpoznawany przez żaden automat ze stosem pracujący w skończenie wielu fazach.

Na początek udowodnimy, że $L \in \text{CFL}$. Weźmy gramatykę $\mathcal{G} = (\{a, b\}, \{S, T\}, P, S)$ z produkcjami:

- $S \longrightarrow SS \mid T \mid \varepsilon$,
- $T \longrightarrow aTb \mid \varepsilon$.

Łatwo widzieć, że gramatyka \mathcal{G} opisuje język L , jednak nie będziemy zagłębiać się w szczegóły. Wynika z tego, że $L \in \text{CFL}$.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje automat ze stosem \mathcal{A} o zbiorze stanów Q i zbiorze symboli stosowych Γ , działający w co najwyżej k fazach, rozpoznający język L . Przez resztę rozwiązania zadania będziemy działać na słowie $w = (a^X b^X)^Y \in L$, gdzie $X = 21 \cdot |Q| \cdot |\Gamma| + 37$, a $Y = 69 \cdot k \cdot X + 420$.

Wprowadźmy następujące definicje:

- *długością* fazy nazwiemy liczbę przejść, które dana faza zawiera, przy czym uwzględniamy tutaj zarówno przejścia po literach czytanych słowa, jak i ε -przejścia;
- *zmianą* fazy nazwiemy wartość bezwzględną różnicy rozmiaru stosu na początku i na końcu fazy.

Lemat 1

W biegu akceptującym automatu \mathcal{A} po słowie w , w ramach jednej fazy nie może być ciągu $|Q|$ kolejnych przejść niezmiennych stosu.

Dowód Lematu 1

Przypuśćmy nie wprost, że w pewnej fazie wystąpiło $|Q|$ kolejnych przejść niezmiennych stosu. Wówczas z Zasady Szufladkowej Dirichleta wynika, że wśród tych przejść pewien stan q wystąpił co najmniej 2 razy, ponieważ łącznie automat przeszedł przez $|Q| + 1$ stanów. Jeśli od pierwszego do drugiego znalezienia się w stanie q automat wykonał same ε -przejścia, to nie miały one sensu, ponieważ nic się nie zmieniło, możemy więc założyć, że słowo wczytane w tym okresie jest niepuste. Łatwo widzieć, że słowo to można napompować, a ponieważ ma ono długość co najwyżej $|Q|$, to z pewnością nie jest ono postaci $(a^X b^X)^m$, dla pewnego $m \in \mathbb{Z}^+$, zatem na skutek tego pompowanie powstanie nowe słowo nienależące do L , po którym będzie istniał bieg akceptujący automatu \mathcal{A} . Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu.

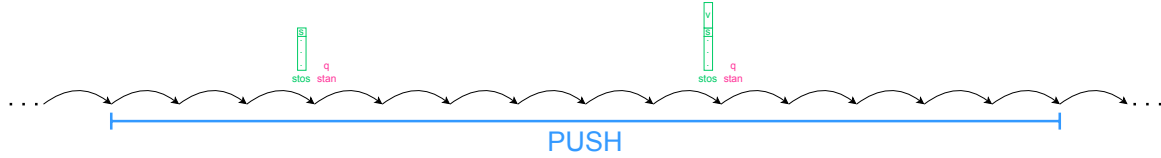
Lemat 2

Jeśli faza ma długość n , to jej zmiana należy do przedziału $\left[\left\lfloor \frac{n}{|Q|} \right\rfloor, n \right]$.

Lemat ten jest bezpośrednim wnioskiem z lematu 1.

Zauważmy, że w biegu akceptującym automatu \mathcal{A} po słowie w musi istnieć faza push długości co najmniej $3X$, co wynika z doboru stałej Y , ponieważ w przeciwnym wypadku z lematu 2 musiałby być wykonany pop na pustym stosie. W trakcie tej fazy wczytany więc zostanie

pełny blok b^X . Z doboru stałej X oraz Zasady Szufladkowej Dirichleta wynika, że w trakcie przechodzenia tej fazy przez blok b^X dwa razy wystąpi moment, że aktualny stan to pewne q , a aktualny symbol na szczycie stosu to pewne s . Ponownie, wczytane słowo pomiędzy tymi dwoma momentami jest niepuste, a dodatkowo ma długość co najwyżej $|Q| \cdot |\Gamma|$. Stos natomiast powiększy się o pewne słowo v długości również co najwyżej $|Q| \cdot |\Gamma|$, którego ostatnia litera to oczywiście s .



Chcemy teraz podwoić fragment przeczytany pomiędzy dwoma opisanymi w poprzednim akapicie momentami. Oczywiście skutkiem takiego podwojenia będzie uzyskanie nowego słowa $w' \notin L$. Rozważmy dwa przypadki:

1. Symbol s do końca biegu automatu pozostaje na stosie.

Łatwo wówczas zauważyć, że słowo w' zostanie zwyczajnie zaakceptowane przez automat \mathcal{A} , ponieważ podwojony fragment dopisuje tylko słowo v do stosu, a skoro litera bezpośrednio pod tym słowem nie zostanie zdjęta, to z perspektywy automatu nie będzie różnicy.

2. W przeciwnym wypadku, w dalszej części biegu automatu istnieje spójny fragment ciągu przejść odpowiadający za zdjęcie ze stosu słowa v . Bardziej formalnie, na początku tego ciągu stos jest postaci $pref \cdot v$, a na koniec po prostu $pref$. W trakcie natomiast na stosie mogą być wykonywane zarówno operacji push, jak i pop. Zmodyfikujmy słowo w' tak, aby ten drugi fragment również był podwojony. Słowo to dalej nie należy do języka L , ponieważ nie zgadza się liczba liter b w tym pierwszym podwojonym fragmencie (w drugim może być cokolwiek, istotne jest to, że występuje on później). Tak jak w poprzednim przypadku, z perspektywy automatu nie będzie różnicy i ponownie będzie wykonywał takie przejścia jak w biegu akceptującym po słowie w , w oparciu jedynie o aktualny stan, aktualną literę i aktualny symbol na szczycie stosu.

Z powyższego wynika, że automaty ze stosem pracujące w skończenie wielu fazach nie rozpoznają wszystkich języków bezkontekstowych (w szczególności L), co kończy rozwiązanie zadania.

□