

Zadanie 2.1

Rozpatrzmy gramatykę bezkontekstową $\mathcal{G} = (\{a, b\}, \{S, X, Y, Z\}, P, S)$ z produkcjami:

- $S \longrightarrow aXbYa$,
- $X \longrightarrow ZaXb \mid \varepsilon$,
- $Y \longrightarrow bYaZ \mid \varepsilon$,
- $Z \longrightarrow bZ \mid \varepsilon$.

Rozpocznijmy od udowodnienia, że X generuje wszystkie słowa postaci $b^{n_1}ab^{n_2}a \dots ab^{n_k}$, gdzie $n_k = k - 1$. W tym celu skorzystamy z indukcji matematycznej po długości słowa w generowanego przez X .

Pierwszy krok: Jeżeli $|w| = 0$, to $w = \varepsilon$, czyli $k = 1$, a $n_1 = 0 = k - 1$.

Krok indukcyjny: Dla słowa w o długości n większej niż 0 pierwszą użytą produkcją musi być $X \longrightarrow ZaXb$. Łatwo zauważyć, że Z generuje język b^* , zatem dla pewnego $w' = b^{n_1}ab^{n_2}a \dots ab^{n_k}$, gdzie $n_k = k - 1$, zachodzi

$$w = b^{n_0}aw'b = b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}a \dots ab^{n_k+1}.$$

Zmieniając nieco oznaczenia kolejnych wykładników dostajemy tezę.

Wykażemy teraz, że każde słowo postaci $b^{n_1}ab^{n_2}a \dots ab^{n_k}$, gdzie $n_k = k - 1$ jest generowane przez X . Niech więc $w = b^{n_1}ab^{n_2}a \dots ab^{n_k}$, gdzie $n_k = k - 1$. Skorzystajmy $k - 1$ razy z produkcji $X \longrightarrow ZaXb$, a następnie z produkcji $X \longrightarrow \varepsilon$, otrzymując

$$\underbrace{ZaZa \dots aZa}_{k-1 \text{ wystąpień } Za} b^{k-1}.$$

Z każdego nieterminala Z możemy uzyskać odpowiednią liczbę wystąpień symbolu b , otrzymując słowo w , co kończy dowód.

Analogicznie dowodzimy, że Y generuje wszystkie słowa postaci $b^{m_1}ab^{m_2}a \dots ab^{m_l}$, gdzie $m_1 = l - 1$.

Z powyższego wnioskujemy, że S , oprócz słowa a , generuje słowa postaci

$$ab^{n_1}ab^{n_2}a \dots ab^{n_k}bb^{m_1}ab^{m_2}a \dots ab^{m_l}a, \quad \text{gdzie } n_k = k - 1 \quad \text{oraz} \quad m_l = l - 1.$$

Inaczej, po zmienieniu oznaczeń i uproszczeniu, są to słowa postaci

$$ab^{n_1}ab^{n_2}a \dots ab^{n_k}a, \quad \text{gdzie } \exists_{i \in [1, k] \cap \mathbb{Z}} n_i = k.$$

Łatwo też pokazać, że każde słowo tej postaci jest generowane przez S . Dla $w = ab^{n_1}a \dots ab^{n_k}a$ takiego, że $n_i = k$, dla konkretnego $i \in [1, k] \cap \mathbb{Z}$, po skorzystaniu z produkcji $S \longrightarrow aXbYa$ wystarczy z X wygenerować słowo $b^{n_1}a \dots ab^{n_{i-1}}ab^{i-1}$, a z Y słowo $b^{k-i}ab^{n_{i+1}}a \dots ab^{n_k}$.

Z powyższego wynika, że $L(\mathcal{G}) = L_\exists$, co kończy rozwiązanie zadania.

□

Zadanie 2.2

Na początek zauważmy, że

$$L_{\forall} = \{a(b^n a)^n : n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\},$$

co wynika wprost z definicji języka L_{\forall} . Wnioskujemy stąd, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$ istnieje dokładnie jedno słowo $w \in L_{\forall}$ spełniające $\#_a(w) = n$ i jest to słowo $a(b^{n-1}a)^{n-1}$.

Udowodnimy, że język L_{\forall} nie jest bezkontekstowy. W tym celu skorzystamy z lematu o pompowaniu dla języków bezkontekstowych. Niech więc N będzie stałą z lematu o pompowaniu dla języka L_{\forall} .

Weźmy słowo $w = a(b^N a)^N \in L_{\forall}$. Wówczas $|w| \geq N$, zatem istnieje faktoryzacja

$$w = \text{prefix} \cdot \text{left} \cdot \text{infix} \cdot \text{right} \cdot \text{suffix}$$

taka, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ zachodzi

$$\text{prefix} \cdot \text{left}^k \cdot \text{infix} \cdot \text{right}^k \cdot \text{suffix} \in L_{\forall},$$

przy czym $|\text{left} \cdot \text{right}| \geq 1$ oraz $|\text{left} \cdot \text{infix} \cdot \text{right}| \leq N$. Niech $m = |\text{left} \cdot \text{right}|$. Oczywiście $1 \leq m \leq N$.

Z powyższego wnioskujemy, że $\#_a(\text{left} \cdot \text{infix} \cdot \text{right}) \leq 1$, mamy więc dwa przypadki:

1. $\#_a(\text{left} \cdot \text{right}) = 0$

Wtedy $\#_b(\text{left} \cdot \text{right}) = |\text{left} \cdot \text{right}| = m$. Rozpatrzmy słowo

$$w' = \text{prefix} \cdot \text{left}^2 \cdot \text{infix} \cdot \text{right}^2 \cdot \text{suffix}.$$

Z lematu o pompowaniu wynika, że $w' \in L_{\forall}$. Zauważmy, że

$$\#_a(w') = N + 1 = \#_a(w) \quad \text{oraz} \quad \#_b(w') = N^2 + m > N^2 = \#_b(w),$$

zatem $w' \neq w$. Otrzymujemy więc sprzeczność z poczynioną na początku obserwacją.

2. $\#_a(\text{left} \cdot \text{right}) = 1$

Wówczas $\#_b(\text{left} \cdot \text{right}) = |\text{left} \cdot \text{right}| - 1 = m - 1$. Ponownie będziemy rozpatrywać słowo

$$w' = \text{prefix} \cdot \text{left}^2 \cdot \text{infix} \cdot \text{right}^2 \cdot \text{suffix},$$

które oczywiście należy do języka L_{\forall} . Niech $v = a(b^{N+1}a)^{N+1} \in L_{\forall}$. Łatwo zauważyć, że

$$\#_a(w') = \#_a(w) + 1 = N + 2 = \#_a(v).$$

Ponadto

$$\#_b(w') = \#_b(w) + m - 1 = N^2 + m - 1 \leq N^2 + N - 1 < (N + 1)^2 = \#_b(v),$$

toteż $w' \neq v$. Tym razem również dostajemy sprzeczność z obserwacją z początku, co kończy rozwiązanie zadania.

□