Kacper Bal 439948
Piotr Blinowski 439949
Dominik Wawszczak 440014

Zadanie 1

Udowodnimy, że język
$$L = \left(\left\{a^n b^n \ : \ n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right\}\right)^*$$
nie jest rozpoznowany przez żaden automat ze stosem pracujący w skończenie wielu fazach.

Na początek udowodnimy, że $L \in \text{CFL}$. Weźmy gramatykę $\mathcal{G} = (\{a, b\}, \{S, T\}, P, S)$ z produkcjami:

- $S \longrightarrow SS \mid T \mid \varepsilon$,
- $T \longrightarrow aTb \mid \varepsilon$.

Łatwo widać, że gramatyka $\mathcal{G}$ opisuje język L, jednak nie będziemy zagłębiać się w szczegóły. Wynika z tego, że $L \in \text{CFL}$.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje automat ze stosem $\mathcal{A}$ o zbiorze stanów Q i zbiorze symboli stosowych Γ, działający w co najwyżej k fazach, rozpoznający język L. Przez resztę rozwiązania zadania będziemy działać na słowie $w = \left(a^X b^X\right)^Y \in L$, gdzie $X = (21 \cdot |Q| \cdot |\Gamma| + 37)^2$, a $Y = 69 \cdot k \cdot X + 420$.

Wprowadźmy następujące definicje:

- *długością* fazy nazwiemy liczbę przejść, które dana faza zawiera, przy czym uwzględniamy tutaj zarówno przejścia po literach czytanego słowa, jak i ε-przejścia;
- *zmianą* fazy nazwiemy wartość bezwzględną różnicy rozmiaru stosu na początku i na końcu fazy.

Lemat 1
W biegu akceptującym automatu $\mathcal{A}$ po słowie w, w ramach jednej fazy nie może być ciągu $|Q|$ kolejnych przejść niezmieniających stosu. Zakładamy przy tym, że wspomniany bieg nie ma ε-przejść niezmieniających stanu ani stosu, ponieważ gdyby miał, to możnaby je usunąć.

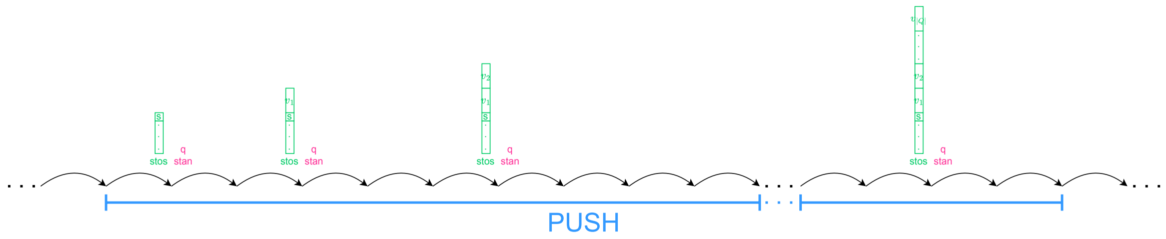
Dowód Lematu 1
Przypuśćmy nie wprost, że w pewnej fazie wystąpiło $|Q|$ kolejnych przejść niezmieniających stosu. Wówczas z Zasady Szufladkowej Dirichleta wynika, że wśród tych przejść pewien stan q wystąpił co najmniej dwa razy, gdyż łącznie automat przeszedł przez $|Q|+1$ stanów. Zauważmy, że słowo wczytane w tym okresie jest niepuste, ponieważ założyliśmy, że nie ma ε przejść niezmieniających stanu ani stosu. Łatwo widać, że słowo to można napompować, a skoro ma ono długość co najwyżej $|Q|$, to z pewnością nie jest ono postaci $\left(a^X b^X\right)^m$, dla pewnego $m \in \mathbb{Z}^+$, zatem na skutek tego pompowania powstanie nowe słowo nienależące do L, po którym będzie istniał bieg akceptujący automatu $\mathcal{A}$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu.

Lemat 2

$$\text{Jeśli faza ma długość } n, \text{ to jej zmiana należy do przedziału } \left[\left\lfloor \frac{n}{|Q|} \right\rfloor, n\right].$$

Lemat ten jest bezpośrednim wnioskiem z lematu 1.

Zauważmy, że w biegu akceptującym automatu $\mathcal{A}$ po słowie w musi istnieć faza push długości co najmniej $3X$, co wynika z doboru stałej Y, ponieważ w przeciwnym wypadku z lematu 2 musiałby być wykonany pop na pustym stosie. W trakcie tej fazy wczytany więc zostanie pełny blok b^X. Z doboru stałej X oraz Zasady Szufladkowej Dirichleta wynika, że w trakcie przechodzenia tej fazy przez blok b^X $|Q|+1$ razy wystąpi moment, że aktualny stan to pewne q, a aktualny symbol na szczycie stosu to pewne s. Ponownie, wczytane słowo pomiędzy każdymi dwoma momentami jest niepuste, a dodatkowo ma długość co najwyżej $|Q| \cdot |\Gamma|$ i składa się z samych liter b. Stos natomiast pomiędzy momentami i-tym a $i+1$-szym powiększy się o pewne słowo v_i długości również co najwyżej $|Q| \cdot |\Gamma|$, którego ostatnia litera to oczywiście s.



Rozważmy dwa przypadki:

1. Symbol s do końca biegu automatu pozostaje na stosie.

   Łatwo wówczas zauważyć, że możemy podwoić słowo złożone przeczytane pomiędzy pierwszym a drugim momentem, uzyskując w ten sposób nowe słowo $w' \notin L$, bo podwojony fragment składa się z samych liter b. Słowo to zostanie zwyczajnie zaakceptowane przez automat $\mathcal{A}$, gdyż podwojony fragment dopisuje tylko słowo v_1 do stosu, a skoro litera bezpośrednio pod tym słowem nie zostanie zdjęta, to z perspektywy automatu nie będzie różnicy, czyli sprzeczność, ponieważ automat $\mathcal{A}$ zaakceptuje słowo nienależące do L.

2. W przeciwnym wypadku, każde ze słów $v_1, v_2, \ldots, v_{|Q|}$ zostanie kiedyś ze stosu zdjęte. Innymi słowy, istnieje spójny fragment ciągu przejść odpowiadający za zdjecie ze stosu słowa $v_1 v_2 \ldots v_{|Q|}$. Bardziej formalnie, na początku tego ciągu stos jest postaci $pref \cdot v_1 v_2 \ldots v_{|Q|}$, a na koniec po prostu $pref$. W trakcie natomiast na stosie mogą być wykonywane zarówno operacje push, jak i pop. Fragment ten można podzielić na $|Q|$ mniejszych fragmentów w taki sposób, że w i-tym ze stosu zostaje zdjęte słowo v_i („zdjęte" jako efekt końcowy – w trakcie mogą dziać się różne rzeczy).

   Każdy z tych fragmentów kończy w jakimś stanie, z którego następnie rozpoczyna się kolejny fragment. Z Zasady Szufladkowej Dirichleta wynika, że pewne dwa z tych stanów będą takie same. Możemy podwoić konkatenację liter odpowiadających fragmentom pomiędzy nimi, jednocześnie podwajając litery przeczytane przez stos z odpowiedniego fragmentu wspomnianej wcześniej fazy push. Oczywiście, jak zostało zaznaczone wcześniej, będą to tylko litery b. W tym przypadku zatem również otrzymamy nowe słowo $w' \notin L$, które automat zaakceptuje, gdyż z jego perspektywy nie będzie różnicy – wykonuje przejścia w oparciu jedynie o aktualny stan, symbol na szczycie stosu i czytaną literę. W tym przypadku jednak nieco trudniejsze jest zauważenie, że $w' \notin L$. Wynika to z tego, że podwojona lewa część składa się z samych liter b, zatem liczba tych liter w nowym bloku b z pewnością będzie różna od liczby liter a w bloku poprzednim.

Z powyższego wynika, że automaty ze stosem pracujące w skończenie wielu fazach nie rozpoznają wszystkich języków bezkontekstowych (w szczególności L), co kończy rozwiązanie zadania.

$\square$