Kacper Bal 439948
Piotr Blinowski 439949
Dominik Wawszczak 440014

Zadanie 1

Udowodnimy, że język

$$L \;=\; \left(\left\{a^n b^n \;:\; n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right\}\right)^*$$

nie jest rozpoznowany przez żaden automat ze stosem pracujący w skończenie wielu fazach.

Na początek udowodnimy, że $L \in \mathrm{CFL}$. Weźmy gramatykę $\mathcal{G} = (\{a, b\}, \{S, T\}, P, S)$ z produkcjami:

- $S \longrightarrow SS \mid T \mid \varepsilon$,
- $T \longrightarrow aTb \mid \varepsilon$.

Łatwo widać, że gramatyka $\mathcal{G}$ opisuje język L, jednak nie będziemy zagłębiać się w szczegóły. Wynika z tego, że $L \in \mathrm{CFL}$.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje automat ze stosem $\mathcal{A}$ o zbiorze stanów Q i zbiorze symboli stosowych Γ, działający w co najwyżej k fazach, rozpoznający język L. Przez resztę rozwiązania zadania będziemy działać na słowie $w = \left(a^X b^X\right)^Y \in L$, gdzie $X = 21 \cdot |Q| \cdot |\Gamma| + 37$, a $Y = 69 \cdot k \cdot X + 420$.

Wprowadźmy następujące definicje:

- *długością* fazy nazwiemy liczbę przejść, które dana faza zawiera, przy czym uwzględniamy tutaj zarówno przejścia po literach czytanego słowa, jak i ε-przejścia;
- *zmianą* fazy nazwiemy wartość bezwzględną różnicy rozmiaru stosu na początku i na końcu fazy.

Lemat 1
W biegu akceptującym automatu $\mathcal{A}$ po słowie w, w ramach jednej fazy nie może być ciągu $|Q|$ kolejnych przejść niezmieniających stosu. Zakładamy przy tym, że wspomniany bieg nie ma ε-przejść niezmieniających stanu ani stosu, ponieważ gdyby miał, to możnaby je usunąć.

Dowód Lematu 1
Przypuśćmy nie wprost, że w pewnej fazie wystąpiło $|Q|$ kolejnych przejść niezmieniających stosu. Wówczas z Zasady Szufladkowej Dirichleta wynika, że wśród tych przejść pewien stan q wystąpił co najmniej 2 razy, ponieważ łącznie automat przeszedł przez $|Q| + 1$ stanów. Jeśli od pierwszego do drugiego znalezienia się w stanie q automat wykonał same ε-przejścia, to nie miały one sensu, ponieważ nic się nie zmieniło, możemy więc założyć, że słowo wczytane w tym okresie jest niepuste. Łatwo widać, że słowo to można napompować, a ponieważ ma ono długość co najwyżej $|Q|$, to z pewnością nie jest ono postaci $\left(a^X b^X\right)^m$, dla pewnego $m \in \mathbb{Z}^+$, zatem na skutek tego pompowanie powstanie nowe słowo nienależące do L, po którym będzie istniał bieg akceptujący automatu $\mathcal{A}$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu.

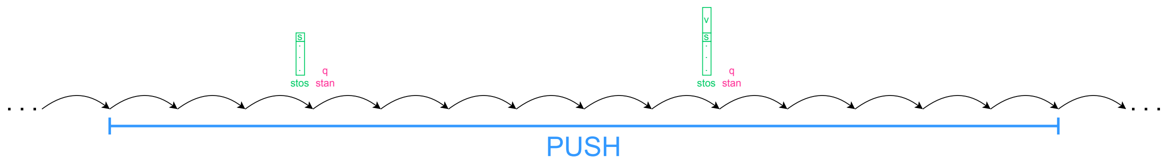
Lemat 2

$$\text{Jeśli faza ma długość } n\text{, to jej zmiana należy do przedziału } \left[\left\lfloor \frac{n}{|Q|} \right\rfloor, n\right].$$

Lemat ten jest bezpośrednim wnioskiem z lematu 1.

Zauważmy, że w biegu akceptującym automatu $\mathcal{A}$ po słowie w musi istnieć faza push długości co najmniej $3X$, co wynika z doboru stałej Y, ponieważ w przeciwnym wypadku z lematu

2 musiałby być wykonany pop na pustym stosie. W trakcie tej fazy wczytany więc zostanie pełny blok b^X. Z doboru stałej X oraz Zasady Szufladkowej Dirichleta wynika, że w trakcie przechodzenia tej fazy przez blok b^X dwa razy wystąpi moment, że aktualny stan to pewne q, a aktualny symbol na szczycie stosu to pewne s. Ponownie, wczytane słowo pomiędzy tymi dwoma momentami jest niepuste, a dodatkowo ma długość co najwyżej $|Q| \cdot |\Gamma|$. Stos natomiast powiększy się o pewne słowo v długości również co najwyżej $|Q| \cdot |\Gamma|$, którego ostatnia litera to oczywiście s.



Chcemy teraz podwoić fragment przeczytany pomiędzy dwoma opisanymi w poprzednim akapicie momentami. Oczywiście skutkiem takiego podwojenia będzie uzyskanie nowego słowa $w' \notin L$. Rozważmy dwa przypadki:

1. Symbol s do końca biegu automatu pozostaje na stosie.

   Łatwo wówczas zauważyć, że słowo w' zostanie zwyczajnie zaakceptowane przez automat $\mathcal{A}$, ponieważ podwojony fragment dopisuje tylko słowo v do stosu, a skoro litera bezpośrednio pod tym słowem nie zostanie zdjęta, to z perspektywy automatu nie będzie różnicy.

2. W przeciwnym wypadku, w dalszej części biegu automatu istnieje spójny fragment ciągu przejść odpowiadający za zdjecie ze stosu słowa v. Bardziej formalnie, na początku tego ciągu stos jest postaci $pref \cdot v$, a na koniec po prostu $pref$. W trakcie natomiast na stosie mogą być wykonywane zarówno operacji push, jak i pop. Zmodyfikujmy słowo w' tak, aby ten drugi fragment również był podwojony. Słowo to dalej nie należy do języka L, ponieważ nie zgadza się liczba liter b w tym pierwszym podwojonym fragmencie (w drugim może być cokolwiek, istotne jest to, że występuje on później). Tak jak w poprzednim przypadku, z perspektywy automatu nie będzie różnicy i ponownie będzie wykonywał takie przejścia jak w biegu akceptującym po słowie w, w oparciu jedynie o aktualny stan, aktualną literę i aktualny symbol na szczycie stosu.

Z powyższego wynika, że automaty ze stosem pracujące w skończenie wielu fazach nie rozpoznają wszystkich języków bezkontekstowych (w szczególności L), co kończy rozwiązanie zadania.

$\square$