

Zadanie 4

Rozpocznijmy od udowodnienia, że dany w treści zadania problem jest w klasie NP. Łatwo wskazać maszynę Turinga, która dla danej formuły φ niedeterministycznie wybiera wartościowanie v , a następnie oblicza $\text{score}(\varphi, v)$ i sprawdza czy spełnione jest $3 \leq \text{score}(\varphi, v) \leq 5$. Oczywiście wszystkie opisane wyżej kroki można przeprowadzić w czasie wielomianowym.

Pozostaje pokazać, że problem ten jest NP-trudny. W tym celu wskażemy wielomianową redukcję problemu 3-CNF-SAT do problemu z treści zadania. Weźmy więc dowolną formułę ψ w postaci 3-CNF. Stwórzmy nową formułę φ w następujący sposób:

- do każdej klauzuli w ψ dodajemy dwa razy literal x ;
- do formuły ψ dodajemy klauzulę $(x \vee x \vee x \vee x \vee x)$.

Oczywiście mając formułę ψ , formułę φ można łatwo obliczyć w czasie wielomianowym. Zakładamy przy tym, że zmienna x jest nową zmienną, niewystępującą w formule ψ .

Przykładowo, dla

$$\psi = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3)$$

będziemy mieli

$$\varphi = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x \vee x) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x \vee x) \wedge (x_3 \vee x \vee x) \wedge (x \vee x \vee x \vee x \vee x).$$

Udowodnimy teraz następującą równoważność:

$$\text{formuła } \psi \text{ jest spełnialna} \iff \text{istnieje wartościowanie } v \text{ takie, że } 3 \leq \text{score}(\varphi, v) \leq 5.$$

Założmy, że formuła ψ jest spełniona przez wartościowanie u . Wówczas $1 \leq \text{score}(\psi, u)$. Ponadto $\text{score}(\psi, u) \leq 3$, gdyż formuła ψ jest w formacie 3-CNF. Niech wartościowanie v będzie takie samo jak u z dodatkowym przypisaniem $x = \top$. Wtedy w każdej klauzuli formuły φ są co najmniej 3 literały będące prawdziwe przy wartościowaniu v – co najmniej jeden z wartościowania u i dwa razy x , a w ostatniej klauzuli 5 razy x . Zachodzi więc $3 \leq \text{score}(\varphi, v)$. Dodatkowo $\text{score}(\varphi, v) \leq 5$, ponieważ w każdej klauzuli jest co najwyżej 5 literałów.

Założmy teraz, że dla pewnego wartościowania v spełnione jest $3 \leq \text{score}(\varphi, v) \leq 5$. Łatwo zauważyć, że w wartościowaniu tym musi być $x = \top$, gdyż w przeciwnym wypadku ostatnia klauzula formuły φ byłaby fałszywa. Skoro $3 \leq \text{score}(\varphi, v)$, to w każdej klauzuli formuły φ jest co najmniej jeden literal inny niż x będący prawdziwy przy wartościowaniu v , ponieważ każda klauzula zawiera dokładnie dwa literały x (z wyjątkiem ostatniej klauzuli). Oznacza to, że wartościowanie u powstałe poprzez usunięcie z wartościowania v przypisania $x = \top$ spełnia formułę ψ .

Powyższa redukcja implikuje, że problem opisany w treści zadania jest NP-zupełny, co kończy rozwiązanie zadania.

□