Dominik Wawszczak
numer indeksu: 440014
numer grupy: 6

Zadanie 2.1

Rozpatrzmy gramatykę bezkontekstową $\mathcal{G} = (\{a, b\}, \{S, X, Y, Z\}, P, S)$ z produkcjami:

- $S \longrightarrow aXbYa \mid a$,
- $X \longrightarrow ZaXb \mid \varepsilon$,
- $Y \longrightarrow bYaZ \mid \varepsilon$,
- $Z \longrightarrow bZ \mid \varepsilon$.

Rozpocznijmy od udowodnienia, że X generuje wszystkie słowa postaci $b^{n_1}ab^{n_2}a\ldots ab^{n_k}$, gdzie $n_k = k-1$. W tym celu skorzystamy z indukcji matematycznej po długości słowa w generowanego przez X.

Pierwszy krok. Jeżeli $|w| = 0$, to $w = \varepsilon$, czyli $k = 1$, a $n_1 = 0 = k-1$.

Krok indukcyjny. Dla słowa w o długości n większej niż 0 pierwszą użytą produkcją musi być $X \longrightarrow ZaXb$. Łatwo zauważyć, że Z generuje język b^*, zatem dla pewnego $w' = b^{n_1}ab^{n_2}a\ldots ab^{n_k}$, gdzie $n_k = k-1$, zachodzi

$$w \;=\; b^{n_0}aw'b \;=\; b^{n_0}ab^{n_1}ab^{n_2}a\ldots ab^{n_k+1}.$$

Zmieniając nieco oznaczenia kolejnych wykładników dostajemy tezę.

Wykażemy teraz, że każde słowo postaci $b^{n_1}ab^{n_2}a\ldots ab^{n_k}$, gdzie $n_k = k-1$ jest generowane przez X. Niech więc $w = b^{n_1}ab^{n_2}a\ldots ab^{n_k}$, gdzie $n_k = k-1$. Skorzystajmy $k-1$ razy z produkcji $X \longrightarrow ZaXb$, a następnie z produkcji $X \longrightarrow \varepsilon$, otrzymując

$$\underbrace{ZaZa\ldots aZa}_{k-1 \text{ wystąpień } Za} b^{k-1}.$$

Z każdego nieterminala Z możemy uzyskać odpowiednią liczbę wystąpień smymbolu b, otrzymując słowo w, co kończy dowód.

Analogicznie dowodzimy, że Y generuje wszystkie słowa postaci $b^{m_1}ab^{m_2}a\ldots ab^{m_l}$, gdzie $m_1 = l-1$.

Z powyższego wnioskujemy, że S, oprócz słowa a, generuje słowa postaci

$$ab^{n_1}ab^{n_2}a\ldots ab^{n_k}bb^{m_1}ab^{m_2}a\ldots ab^{m_l}a, \quad \text{gdzie} \quad n_k = k-1 \quad \text{oraz} \quad m_1 = l-1.$$

Inaczej, po zmienieniu oznaczeń i uproszczeniu, są to słowa postaci

$$ab^{n_1}ab^{n_2}a\ldots ab^{n_k}a, \quad \text{gdzie} \quad \underset{i\in[1,k]\cap\mathbb{Z}}{\exists} n_i = k.$$

Łatwo też pokazać, że każde słowo tej postacji jest generowane przez S. Dla $w = ab^{n_1}ab^{n_2}a\ldots ab^{n_k}a$ takiego, że $n_i = k$, dla konkretnego $i \in [1,k]\cap\mathbb{Z}$. Wówczas po skorzystaniu z produkcji $S \longrightarrow aXbYa$ wystarczy z X wygenerować słowo $b^{n_1}a\ldots ab^{n_{i-1}}ab^{i-1}$, a z Y słowo $b^{k-i}ab^{n_{i+1}}a\ldots ab^{n_k}$.

Z powyższego wynika, że $L(\mathcal{G}) = L_\exists$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.2

Na początek zauważmy, że

$$L_\forall \;=\; \left\{a\,(b^n a)^n \;:\; n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right\},$$

co wynika wprost z definicji języka $L_\forall$. Wnioskujemy stąd, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$ istnieje dokładnie jedno słowo $w \in L_\forall$ spełniające $\#_a(w) = n$ i jest to słowo $a\,(b^{n-1}a)^{n-1}$.

Udowodnimy, że język $L_\forall$ nie jest bezkontekstowy. W tym celu skorzystamy z lematu o pompowaniu dla języków bezkontekstowych. Niech więc N będzie stałą z lematu o pompowaniu dla języka $L_\forall$.

Weźmy słowo $w = a\left(b^N a\right)^N \in L_\forall$. Wówczas $|w| \geqslant N$, zatem istnieje faktoryzacja

$$w \;=\; prefix \cdot left \cdot infix \cdot right \cdot suffix$$

taka, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ zachodzi

$$prefix \cdot left^k \cdot infix \cdot right^k \cdot suffix \;\in\; L_\forall,$$

przy czym $|left \cdot right| \geqslant 1$ oraz $|left \cdot infix \cdot right| \leqslant N$. Niech $m = |left \cdot right|$. Oczywiście $1 \leqslant m \leqslant N$.

Z powyższego wnioskujemy, że $\#_a(left \cdot infix \cdot right) \leqslant 1$, mamy więc dwa przypadki:

1. $\#_a(left \cdot right) = 0$

   Wtedy $\#_b(left \cdot right) = |left \cdot right| = m$. Rozpatrzmy słowo

   $$w' \;=\; prefix \cdot left^2 \cdot infix \cdot right^2 \cdot suffix.$$

   Z lematu o pompowaniu wynika, że $w' \in L_\forall$. Zauważmy, że

   $$\#_a(w') \;=\; N+1 \;=\; \#_a(w) \quad \text{oraz} \quad \#_b(w') \;=\; N^2+m \;>\; N^2 \;=\; \#_b(w),$$

   zatem $w' \neq w$. Otrzymujemy więc sprzeczność z poczynioną na początku obserwacją.

2. $\#_a(left \cdot right) = 1$

   Wówczas $\#_b(left \cdot right) = |left \cdot right| - 1 = m - 1$. Ponownie będziemy rozpatrywać słowo

   $$w' \;=\; prefix \cdot left^2 \cdot infix \cdot right^2 \cdot suffix,$$

   które oczywiście należy do języka $L_\forall$. Niech $v = a\left(b^{N+1}a\right)^{N+1} \in L_\forall$. Łatwo zauważyć, że

   $$\#_a(w') \;=\; \#_a(w)+1 \;=\; N+2 \;=\; \#_a(v).$$

   Ponadto

   $$\#_b(w') \;=\; \#_b(w)+m-1 \;=\; N^2+m-1 \;\leqslant\; N^2+N-1 \;<\; (N+1)^2 \;=\; \#_b(v),$$

   toteż $w' \neq v$. Tym razem również dostajemy sprzeczność z obserwacją z początku, co kończy rozwiązanie zadania.