数学建模中的图论模型(C)

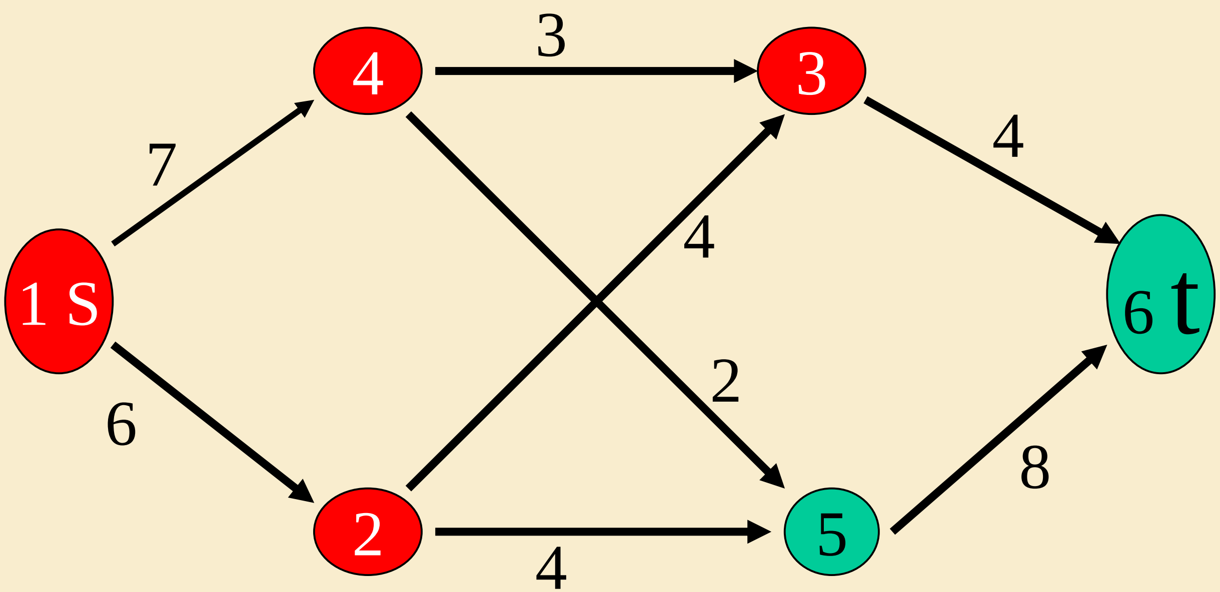
苏贵福
(gfs@mail.buct.edu.cn)

网络流简介

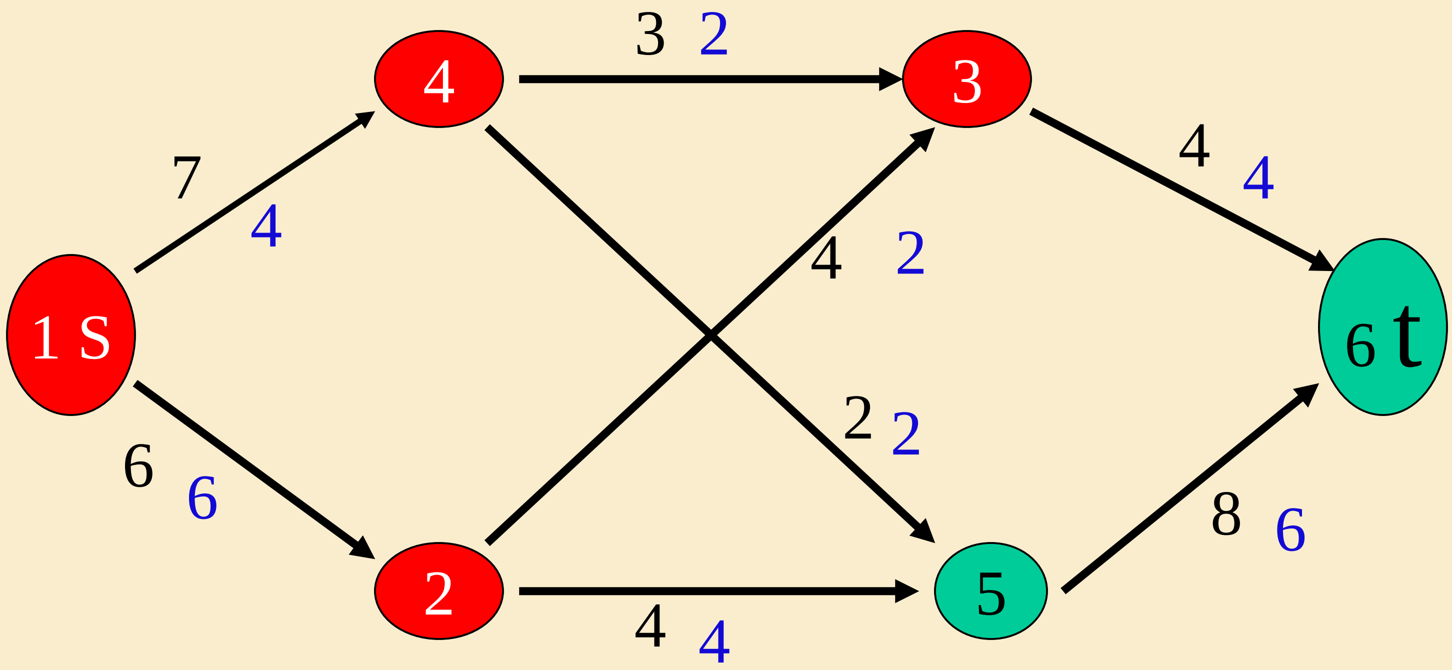
- 最大流算法
- 最小费用最大流
- 最大流最小割定理

实例1

有一自来水管道输送系统, 起点是S,目标是T, 途中经过的管道都有一个最大的容量.



试问从S到T的最大水流量是多少?



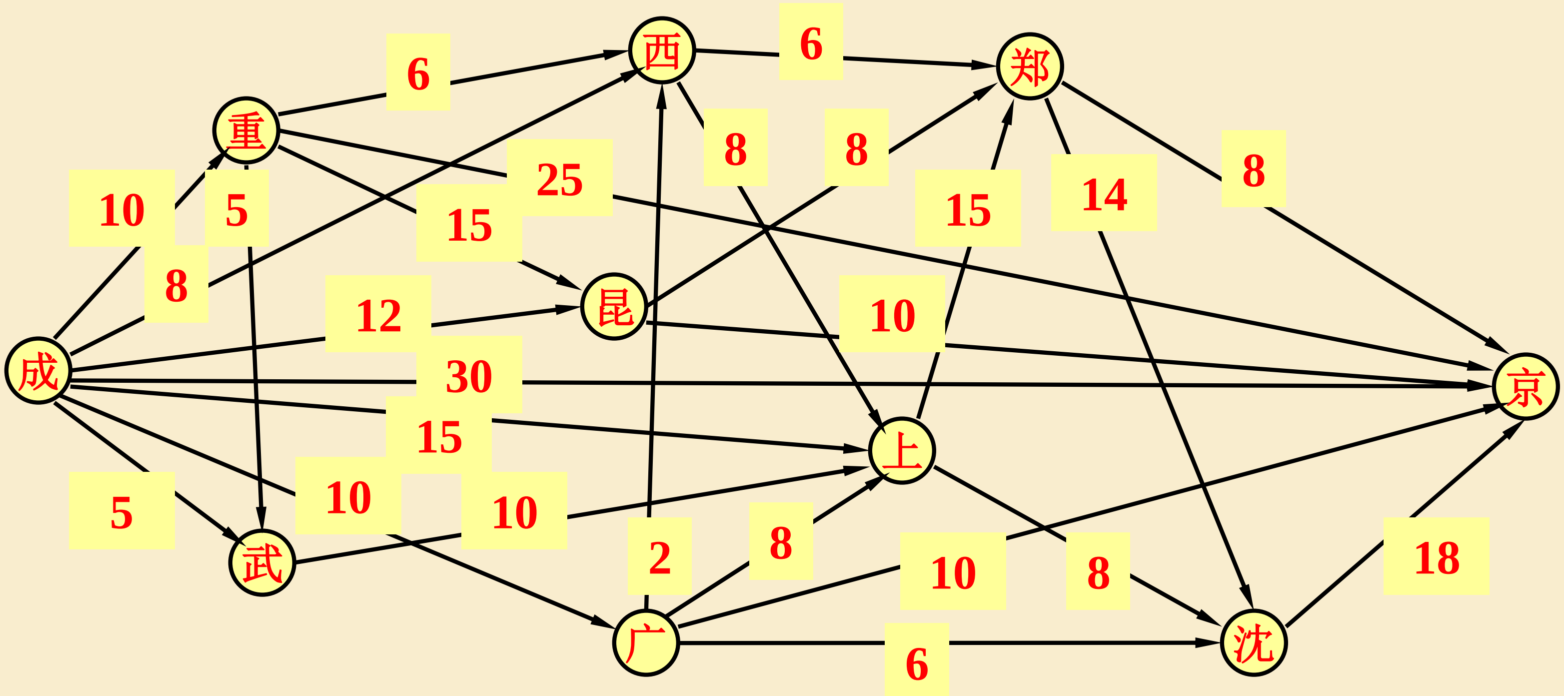
最大水流量是10

实例2

国庆大假期间旅游非常火爆, 机票早已订购一空. 成都一家旅行社由于信誉好, 服务好, 所策划的国庆首都游的行情看好, 要求参加的游客众多, 游客甚至不惜多花机票钱辗转取道它地也愿参加此游. 旅行社只好紧急电传他在全国各地的办事处要求协助解决此问题. 很快各办事处将其已订购机票的情况传到了总社. 根据此资料总社要作出计划, 最多能将多少游客从成都送往北京以及如何取道转机. 各办事处已订购机票的详细情况表:

	成都	重庆	武汉	上海	西安	郑州	沈阳	昆明	广州	北京
成都		10	5	15	8			12	10	30
重庆			5		6			15		25
武汉				10						
上海						15	8			
西安				8		6				
郑州							14			8
沈阳										18
昆明						8				10
广州				8	2		6			10

用图来描述就是



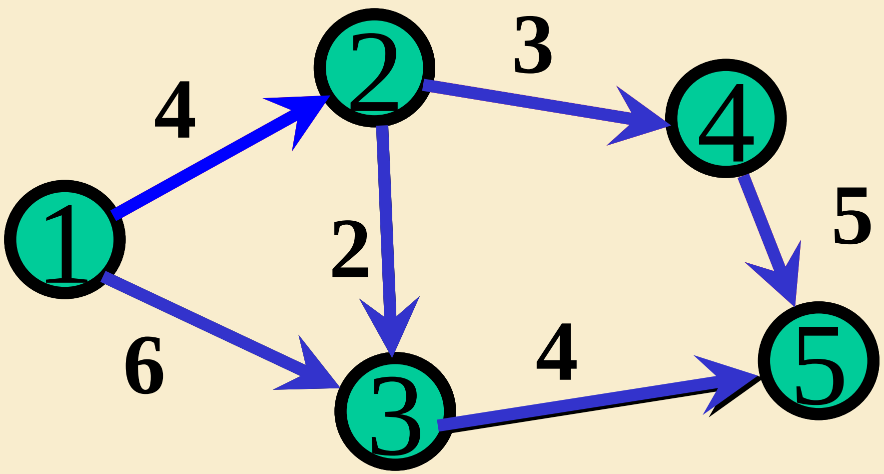
发点v_s =成都, 收点v_t =北京. 已订购机票情况表中的数字即是各边上的容量. 当各边上的实际客流量为零时略去不写, 以零流作为初始可行流.

1. 网络流的定义

设G=(V, E)是一有向图, 如果:

- 有唯一的一个源点S (入度为 0:出发点)
- 有唯一的一个汇点 T(出度为 0: 结束点)
- 图中每条弧 (u, v)都有一非负容量 c(u, v)

则称图G为一个网络流图. 记为G=(V, E, C).



1. 网络流的定义

- 每条弧(u, v)上给定一个实数f(u, v)满足:

$$0<=f(u, v)<=c(u, v)$$

则称f(u,v)为弧(u, v)上的流量.

- 如果有一组流量满足:

源点s : 流出量=整个网络的流量

汇点t : 流入量=整个网络的流量

中间点: 总流入量=总流出量

则称整个网络中的流量为一个可行流.

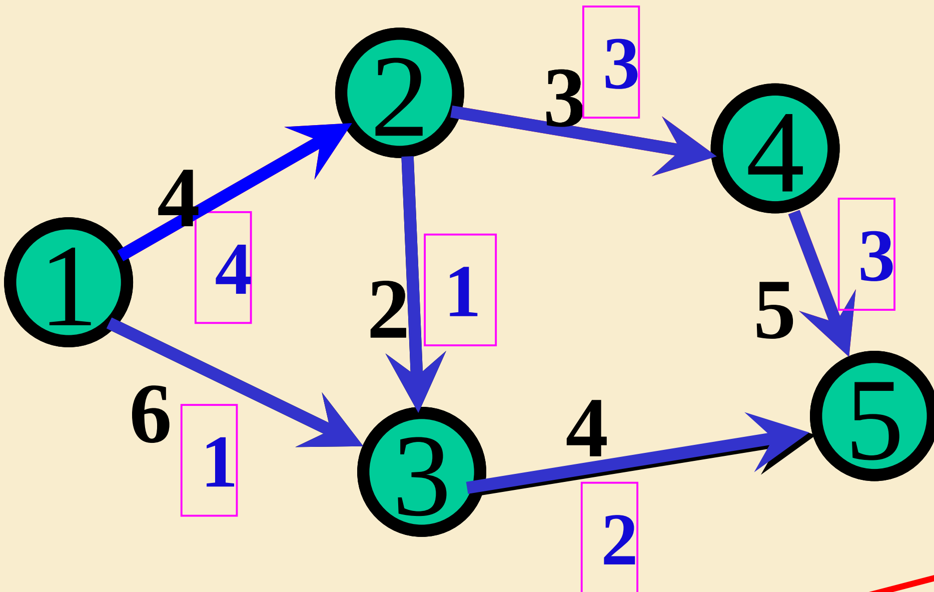


图1

一个大小为5的可行流

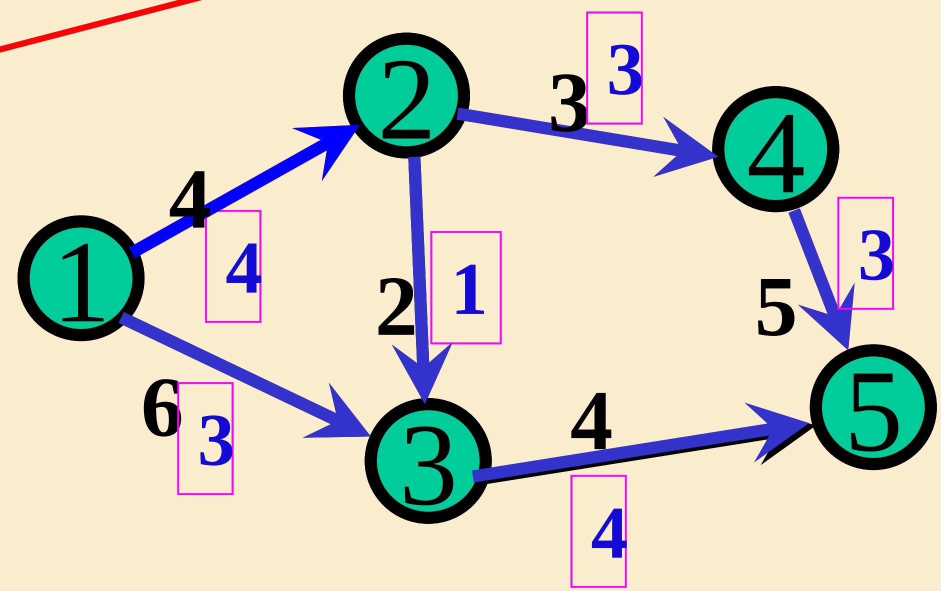


图2

一个大小为7的可行流

2. Ford-Fulkerson最大流算法

- 在所有的可行流中流量最大的一个流的流量称为最大流.
- 最大流可能不只一个.

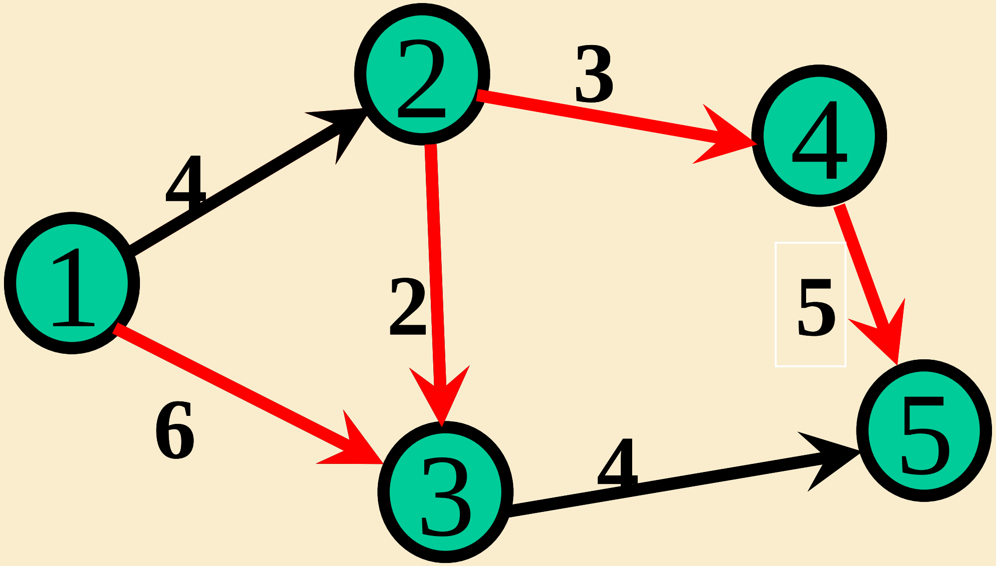
Ford-Fulkerson最大流算法

(1) 如果存在增广路径, 就找出一条增广路径.

(2) 然后沿该条增广路径进行更新流量(增加流量).

增广路径

设P是从s到t的一条简单路径, 若边(u, v)的方向与路径P的方向一致, 则称(u, v)为正向边;若边(u, v)的方向与路径P的方向相反, 则称其为逆向边.



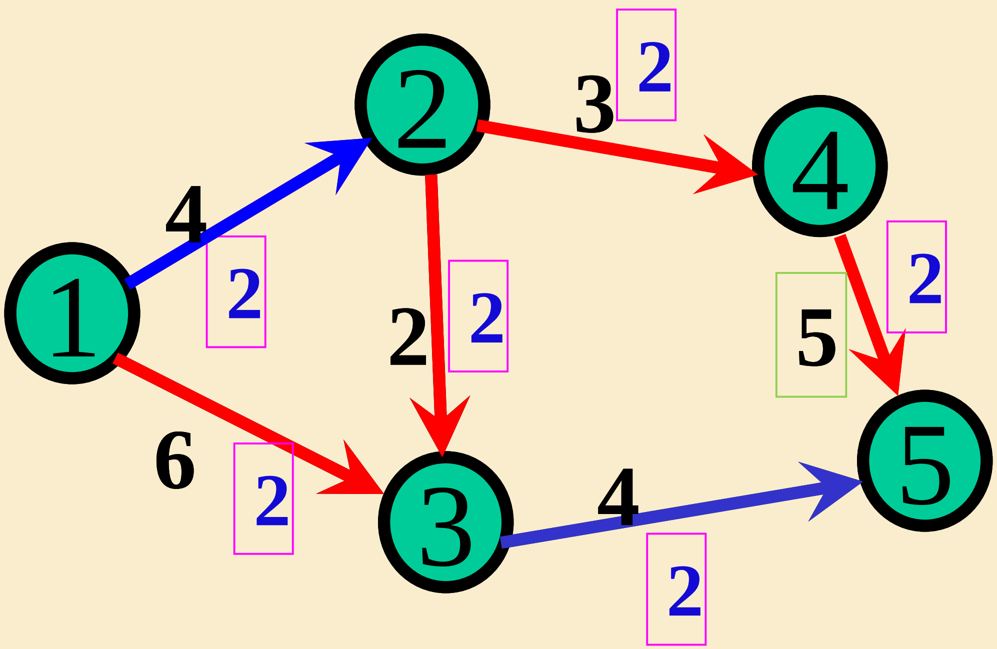
例如1→3 → 2→4→5是一简单图. 其中(1, 3), (2, 4)和(4, 5)是有向边, 而(3, 2)是逆向边.

若路径P上所有的边满足:

① 所有正向边有: $f(u, v)<c(u, v)$

② 所有逆向边有: $f(u, v)>0$

则称该路径为一条增广路径 (可增加流量).



两条增广路径:

1→3→5

1→3 → 2→4→5

增加流量=?

沿增光路径增广

(1) 先设l为正无穷(可增加流, 余流量)

若(u, v)是正向边

$l=\min\{l, c(u, v)-f(u, v)\}$

若(u, v)是逆向边

$l=\min\{l, f(u, v)\}$

(2) 对于该增广路径上的边

若(u, v)是正向边

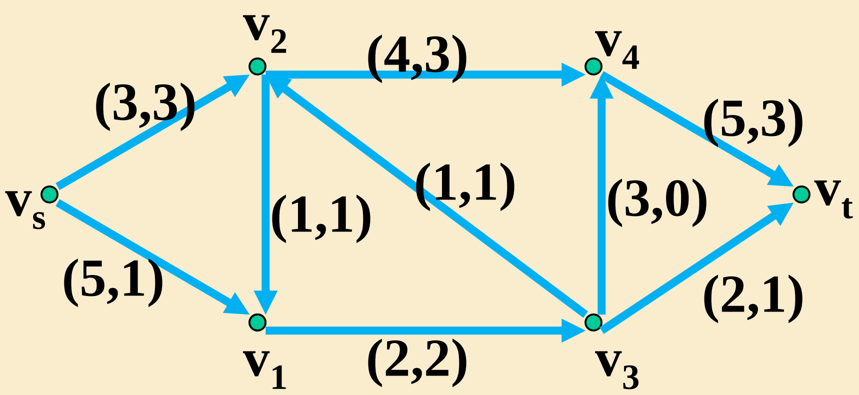
$f(u, v)=f(u, v)+l$

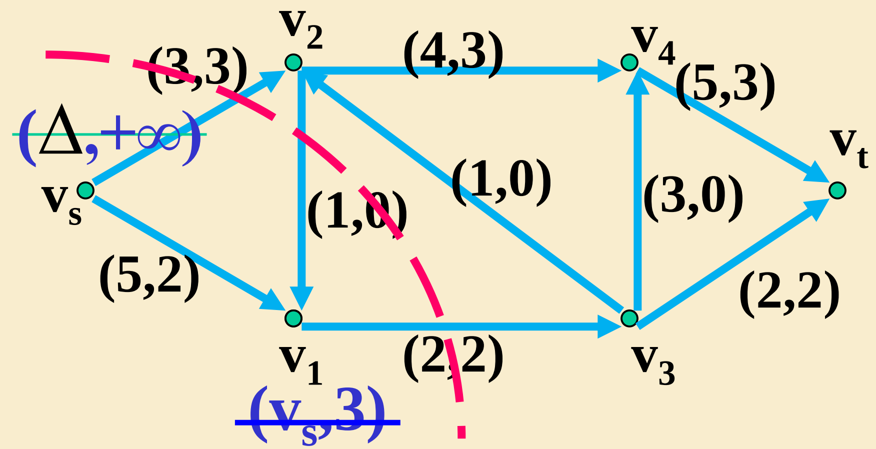
若(u, v)是逆向边

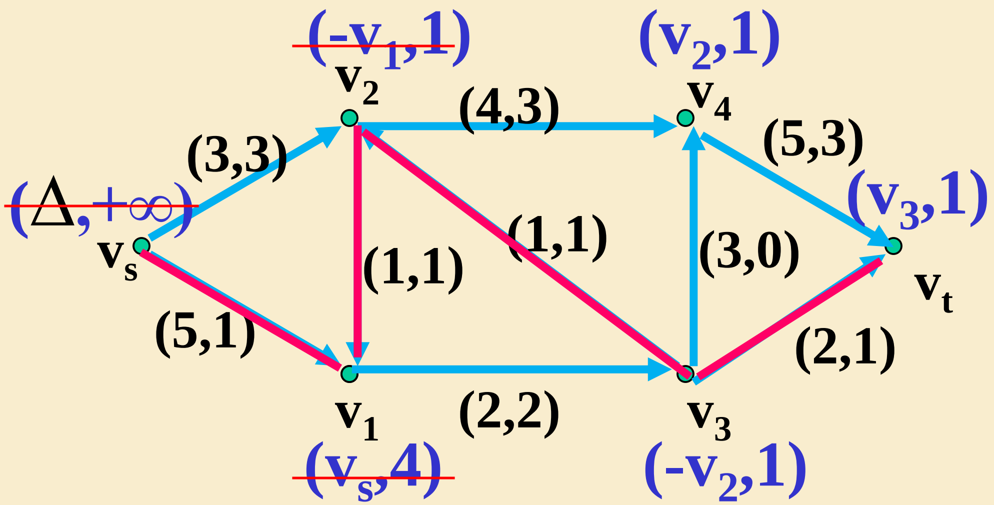
$f(u, v)=f(u, v)-l$

3. 应用举例

例1 求下列网络中由 v_s 到 v_t 的最大流.



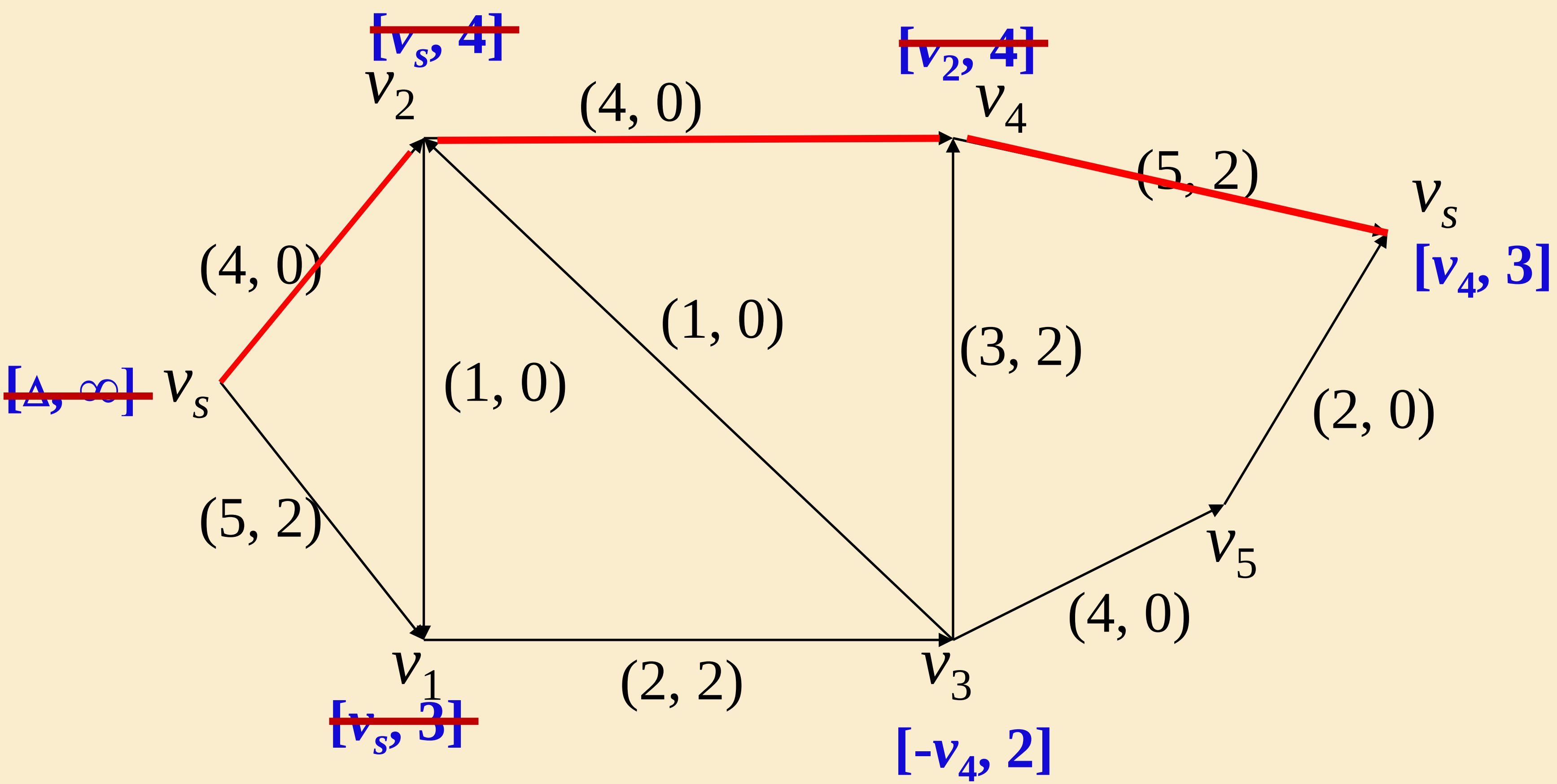




得增广链标号并进入调整过程

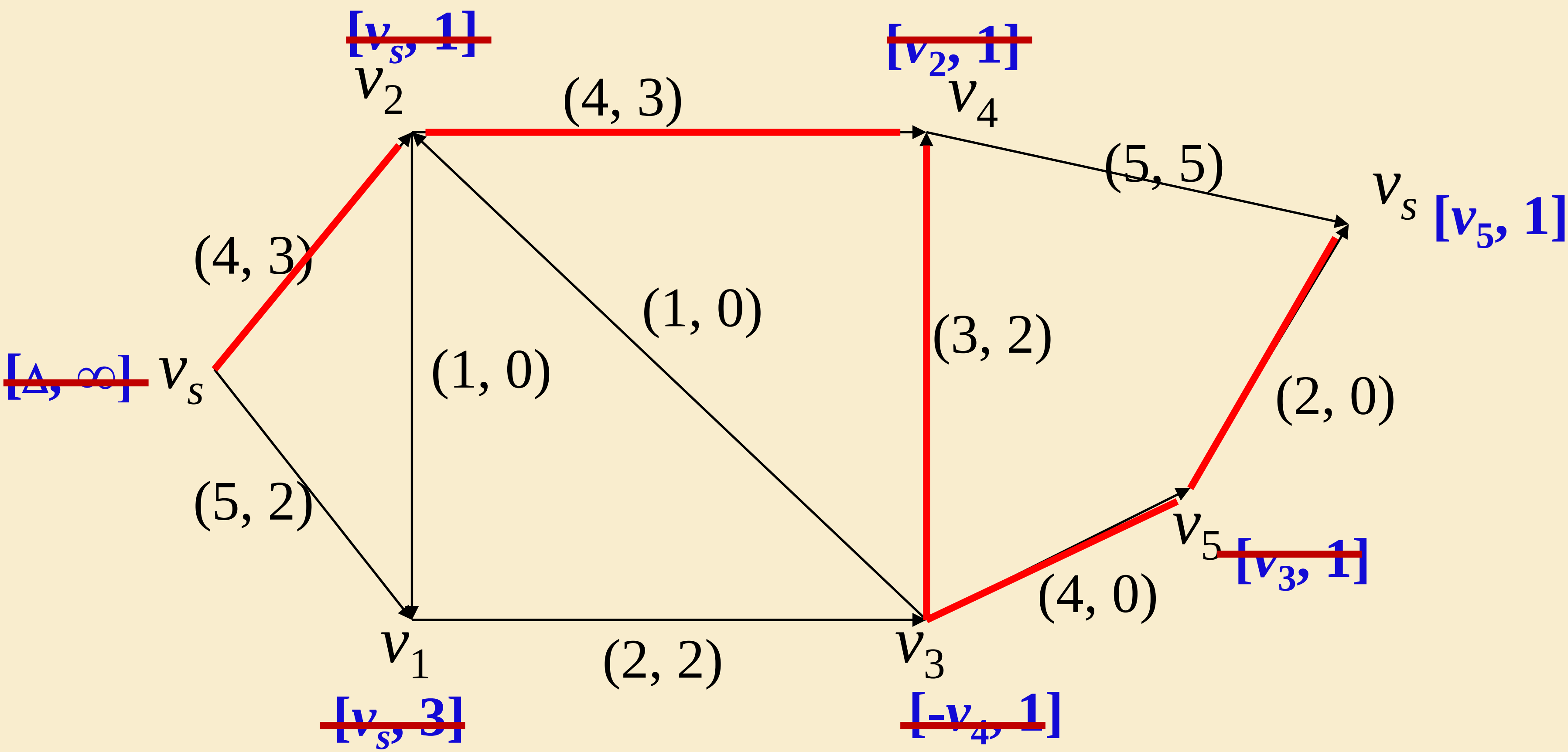
无增广链, 标号结束,
得最大流最小割

例2 下图已经标示了一个可行流, 试求最大流.



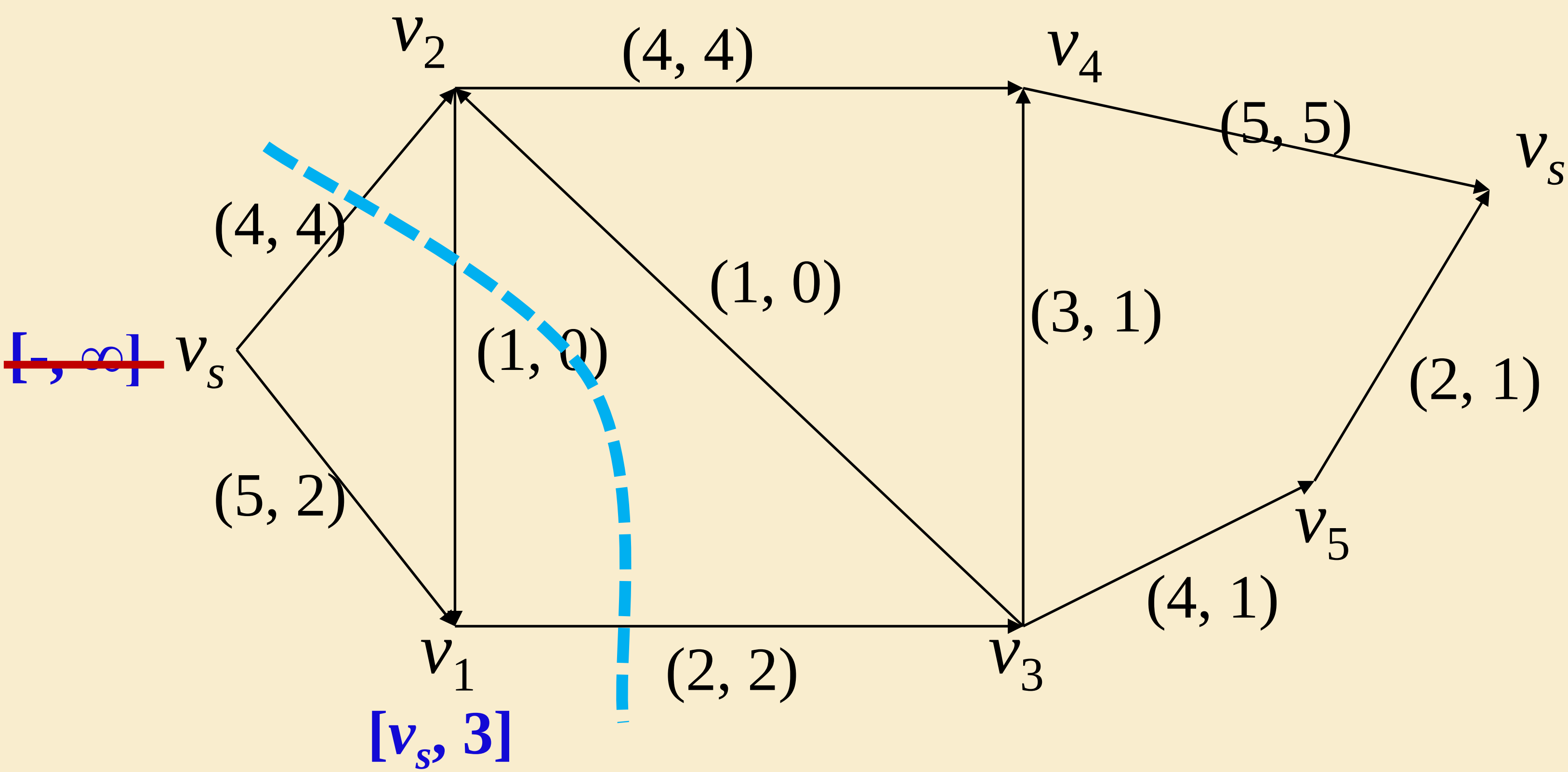
如图已经得到增广链, 然后进行调整.

调整后的可行流如下图:



如图已经得到增广链, 然后进行调整.

调整后的可行流如下图：

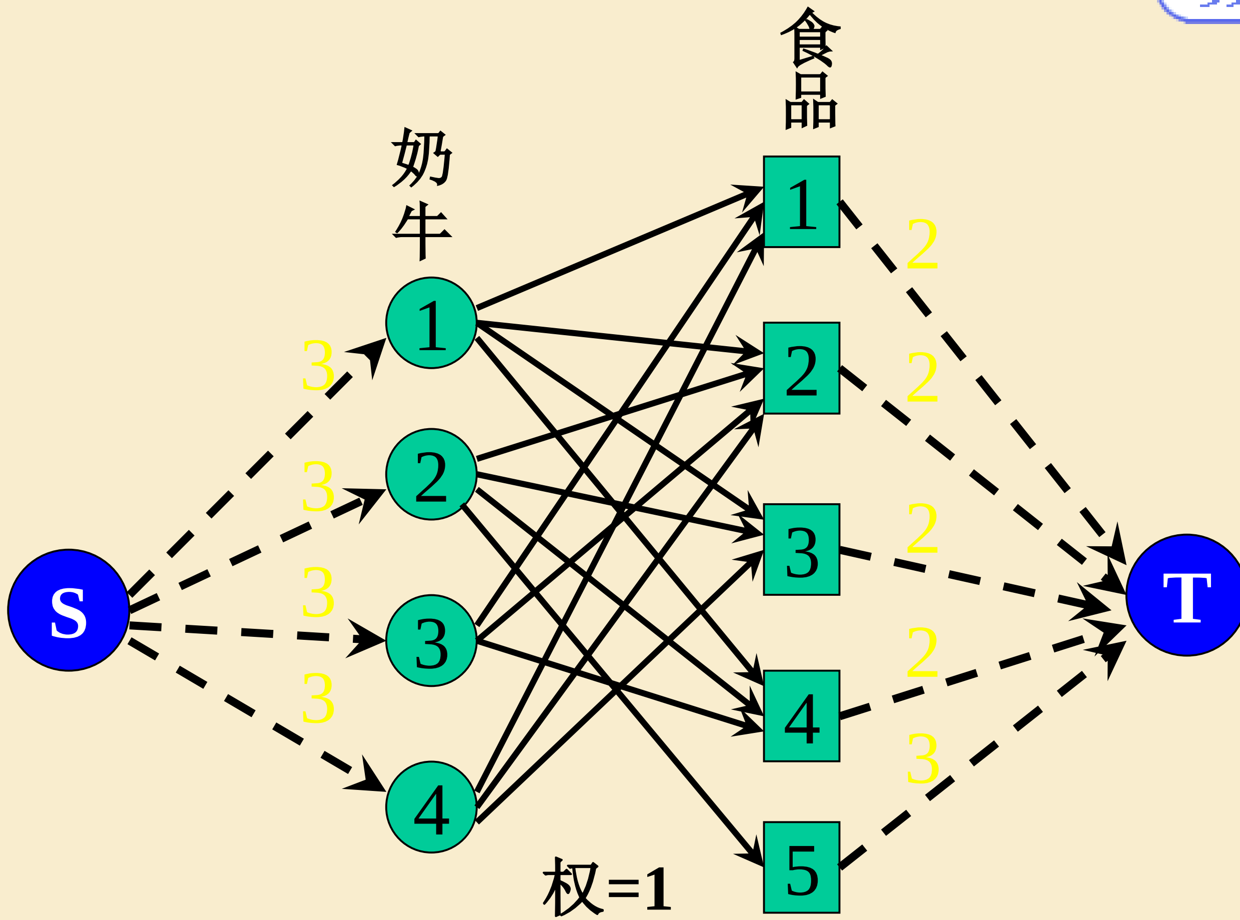


如图所示最小割集的容量就是最大流的流量.

4. 练习

奶牛们要举办一次别开生面的新年晚会. 每头奶牛会做一些不同样式的食品(单位是盘). 到时候他们会把自己最拿手的不超过k样食品各做一盘带到晚会, 和其他奶牛一起分享. 但考虑到食品太多会浪费掉, 他们给每种食品的总盘数都规定了一个不一定相同的上限值. 这让他们很伤脑筋, 究竟应该怎样做才能让晚会上食品的总盘数尽量的多呢?

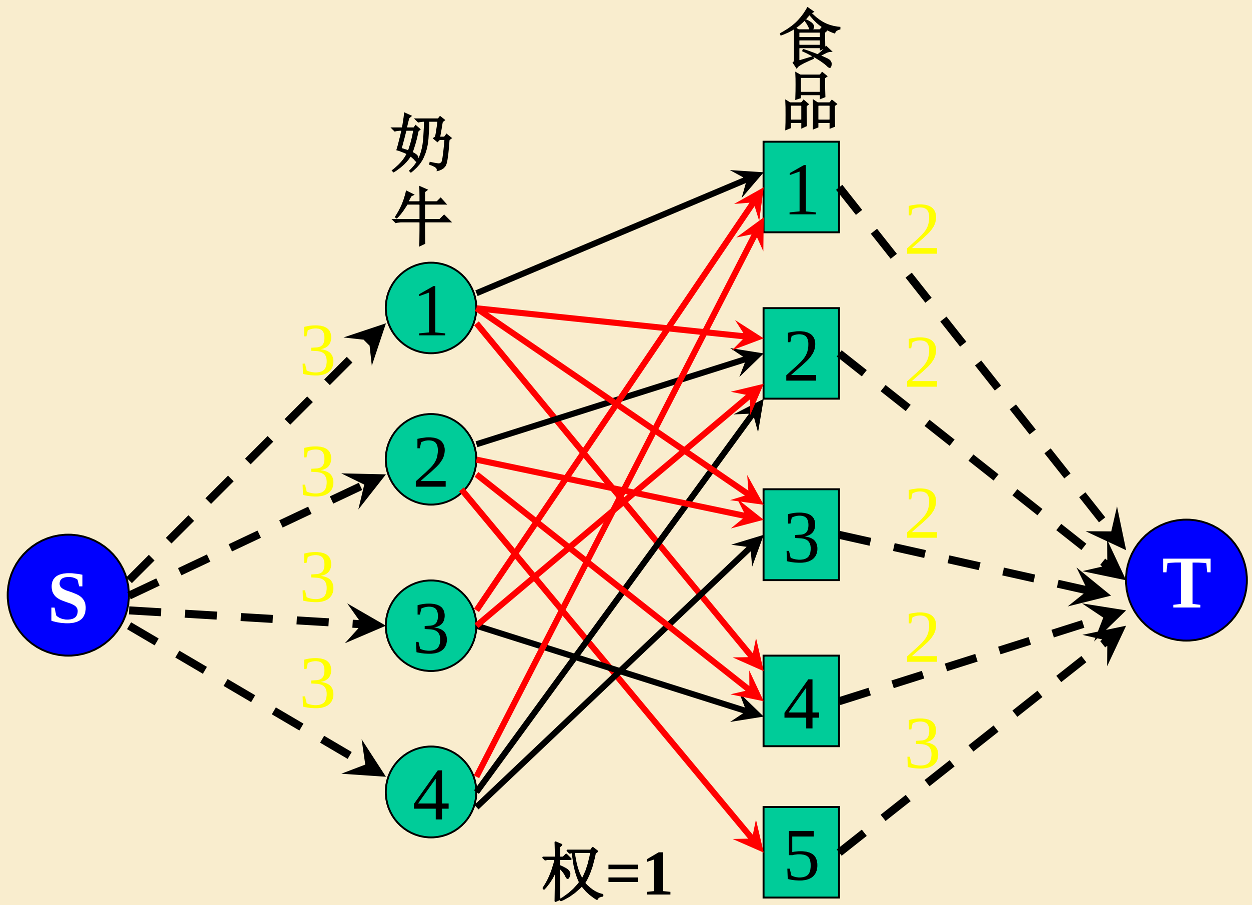
例如:有4头奶牛, 每头奶牛最多可以带3盘食品. 一共有5种食品, 它们的数量上限是2, 2, 2, 2, 3. 奶牛1会做食品1, 2, 3, 4, 奶牛2会做食品2, 3, 4, 5, 奶牛3会做食品1, 2, 4, 奶牛4会做食品1, 2, 3. 那么最多可以带9盘食品到晚会上. 即奶牛1做食品2, 3, 4, 奶牛2做食品3, 4, 5, 奶奶3做食品1, 2, 奶牛4做食品1. 这样4种食品有2, 2, 2, 2, 1盘.



边：S→奶牛, 保证每头奶牛带的食品的最大量.

边：食品→T, 保证每种食品的最大数量.

食品的总盘数的最大值=S到T的最大流



S到T的最大流=9

END