

# 前 言

本书选材于作者在 Texas A&M 大学电子工程系为本科生和研究生讲授小波课程的材料以及在 Texas A&M 大学举行的几次短期培训课程和会议论文集,包括电磁学研究进展论文集(PIERS)、IEEE 无线与传播(IEEE-AP)论文集、IEEE 微波理论与技术(IEEE-MTT)会议论文集、计算电磁协会(ACES)会议论文集。参加短期课程培训的人员来自工业界和大学。他们主要具有电子工程、物理学和数学的背景知识,对小波一点不懂或知道的甚少。在准备讲稿时,我们参考了小波方面的许多书,有些书适合数学家和物理学家,而其他则更适合具有信号处理背景知识的工程师。因此,我们觉得写一本这样的书是有必要的。该书应该将小波的理论、算法及其应用结合在一起,使读者更容易学习小波并能够利用小波去解决实际问题,这正是我们写此书的目的,试图在数学的严密性与小波理论的实际应用之间建立平衡,许多数学概念尽量通过图形给予说明。

本书按以下进行组织。第 1 章给出本书总的轮廓,其余分为四个部分。第 2 章和第 3 章中回顾了线性代数、傅里叶分析和离散信号分析的基本概念。第 4 章、第 5 章和第 6 章中主要讨论了时频分析、多分辨分析和不同种类小波的构造。第 7 章和第 8 章中给出了计算小波变换及通过滤波器方法实现的一些算法。第 8 章、第 9 章和第 10 章中给出了小波在信号处理和边值问题中的许多有趣的应用。

在准备本书的过程中,我们得到许多人的帮助,与 Charles Chui 教授的合作使我们学习到许多小波的知识,对他表示深深的感谢。感谢 Raj Mittra 教授、Linda Katehi 教授和 Hao Ling 教授邀请我们在 IEEE-AP 和 MTT 联合会短期课程上的报告,也要感谢 L. Tsang 教授邀请我们组织 PIERS 的短期培训课程。第 4 章和第 9 章的部分内容取材于在 Texas A&M 大学与研究生的共同工作,特别值得一提的研究生是 Minsan Wang、Howard Choe、Nai-wen Lin、Tsai-fa Yu 和 Zhiwha Xu,对他们的贡献表示感谢。我们对 Michelle Rubin 为本书的录入和大部分的校对工作表示深深的感谢。感谢 Kai Chang 教授鼓励我们撰写此书,也要感谢责任编辑 George J. Telecki 先生和副主编 Angiolino Loreda 女士,他们在该书出版过程中进行了有效的管理和指导。最后感谢 Mousumi Goswami 和 Sophia Chan 以及我们的家人在本书的准备过程中所给予的鼓励和支持。

Jaideva C. Goswami  
Andrew K. Chan

# 目 录

第 1 章 本书论述了什么 .....	1
第 2 章 数学预备知识 .....	4
2.1 线性空间 .....	4
2.2 矢量与矢量空间 .....	5
2.3 基函数 .....	7
2.4 局部基与 Riesz 基 .....	10
2.5 离散线性赋范空间 .....	11
2.6 正交投影逼近 .....	12
2.7 矩阵代数与线性变换 .....	13
2.7.1 矩阵代数基础 .....	13
2.7.2 特征矩阵 .....	15
2.7.3 线性变换 .....	16
2.7.4 基变换 .....	16
2.7.5 Hermitian 矩阵、酉矩阵与正交变换 .....	17
2.8 数字信号 .....	18
2.8.1 信号采样 .....	18
2.8.2 线性平移不变系统 .....	18
2.8.3 卷积 .....	19
2.8.4 $z$ 变换 .....	21
2.8.5 收敛域 .....	21
2.8.6 逆 $z$ 变换 .....	23
2.9 习题 .....	23
参考文献 .....	24
第 3 章 傅里叶分析 .....	25
3.1 傅里叶级数 .....	25
3.2 例子 .....	26
3.2.1 整流正弦波 .....	26
3.2.2 梳函数和傅里叶级数核 $K_N(t)$ .....	27
3.3 傅里叶变换 .....	28
3.4 傅里叶变换的性质 .....	30
3.4.1 线性 .....	30

3.4.2	时间位移与时间尺度的变化 .....	30
3.4.3	频率位移与频率尺度的变化 .....	30
3.4.4	矩 .....	31
3.4.5	卷积 .....	31
3.4.6	帕塞瓦尔定理 .....	32
3.5	傅里叶变换的例子 .....	32
3.5.1	矩形脉冲 .....	32
3.5.2	三角形脉冲 .....	33
3.5.3	高斯函数 .....	34
3.6	泊松求和公式 .....	35
3.7	采样定理 .....	37
3.8	部分和与 Gibbs 现象 .....	39
3.9	离散时间信号的傅里叶分析 .....	40
3.9.1	离散傅里叶基与离散傅里叶级数 .....	40
3.9.2	离散时间傅里叶变换 .....	41
3.10	离散傅里叶变换 .....	43
3.11	习题 .....	44
	参考文献 .....	44
<b>第 4 章</b>	<b>时频分析 .....</b>	<b>45</b>
4.1	窗函数 .....	46
4.2	短时傅里叶变换 .....	47
4.2.1	逆变换公式 .....	48
4.2.2	Gabor 变换 .....	48
4.2.3	时频窗 .....	48
4.2.4	短时傅里叶变换的性质 .....	49
4.3	离散短时傅里叶变换 .....	50
4.4	离散 Gabor 表示 .....	52
4.5	连续小波变换 .....	52
4.5.1	逆小波变换 .....	54
4.5.2	时间频率窗 .....	54
4.6	离散小波变换 .....	56
4.7	小波级数 .....	57
4.8	时间频率图的解释 .....	58
4.9	Wigner-Ville 分布 .....	59
4.10	Wigner-Ville 分布的性质 .....	62
4.10.1	实性 .....	62
4.10.2	边缘性 .....	62

4.10.3 相关函数 .....	63
4.11 二次叠加原理 .....	63
4.12 模糊函数 .....	64
4.13 习题 .....	65
4.14 计算机程序 .....	66
4.14.1 短时傅里叶变换 .....	66
4.14.2 Wigner-Ville 分布 .....	67
参考文献 .....	69
<b>第5章 多分辨分析 .....</b>	<b>70</b>
5.1 多分辨空间 .....	71
5.2 正交、双正交及半正交分解 .....	72
5.3 二尺度关系 .....	75
5.4 分解关系 .....	76
5.5 样条函数 .....	77
5.6 映射函数到多分辨分析空间 .....	81
5.7 习题 .....	82
5.8 计算机程序 .....	83
参考文献 .....	84
<b>第6章 小波的构造 .....</b>	<b>85</b>
6.1 小波构造的必要条件 .....	85
6.1.1 二尺度序列之间的关系 .....	85
6.1.2 重构序列与分解序列之间的关系 .....	87
6.2 半正交样条小波的构造 .....	88
6.3 规范正交小波的构造 .....	92
6.4 规范正交尺度函数 .....	93
6.4.1 Shannon 尺度函数 .....	93
6.4.2 Meyer 尺度函数 .....	94
6.4.3 Battle-Lemarié 尺度函数 .....	98
6.4.4 Daubechies 尺度函数 .....	99
6.5 双正交小波的构造 .....	102
6.6 小波的图解显示 .....	104
6.6.1 迭代法 .....	104
6.6.2 频谱法 .....	105
6.6.3 特征值法 .....	106
6.7 习题 .....	106
6.8 计算机程序 .....	108
6.8.1 Daubechies 小波 .....	108

6.8.2 迭代法 .....	109
参考文献 .....	110
<b>第7章 离散小波变换与滤波器组算法 .....</b>	<b>111</b>
7.1 抽取与插值 .....	111
7.1.1 抽取 .....	111
7.1.2 插值 .....	114
7.1.3 先卷积后抽取 .....	115
7.1.4 先插值后卷积 .....	116
7.2 逼近子空间中信号的表示 .....	116
7.3 小波分解算法 .....	118
7.4 重构算法 .....	120
7.5 基变换 .....	121
7.6 半正交子空间中信号的重构 .....	123
7.6.1 样条函数的基变换 .....	123
7.6.2 样条小波的基变换 .....	126
7.7 例子 .....	129
7.8 二通道完全重构滤波器组 .....	132
7.8.1 二通道完全重构滤波器组的频谱域分析 .....	133
7.8.2 时间域分析 .....	138
7.9 滤波器组的多相位表示 .....	141
7.9.1 多相位域的信号表示 .....	141
7.9.2 多相位域的滤波器组 .....	142
7.10 离散小波变换和完全重构滤波器组的注记 .....	143
7.11 习题 .....	144
7.12 计算机程序 .....	145
参考文献 .....	147
<b>第8章 快速积分变换及其应用 .....</b>	<b>148</b>
8.1 较细的时间分辨率 .....	148
8.2 较细的尺度分辨率 .....	150
8.3 函数映射到倍频程间的逼近子空间 .....	153
8.4 例子 .....	154
8.4.1 线性函数的积分小波变换 .....	155
8.4.2 裂缝检测 .....	158
8.4.3 非倍频程频率成分信号的分解 .....	158
8.4.4 扰动正弦信号 .....	159
8.4.5 线性调频信号 .....	162
8.4.6 带噪声音乐信号 .....	163

8.4.7 波导模式的扩散性 .....	164
参考文献 .....	165
<b>第9章 小波在数字信号处理中的应用</b> .....	166
9.1 小波包 .....	166
9.2 小波包算法 .....	170
9.3 阈值处理 .....	171
9.3.1 硬阈值处理 .....	171
9.3.2 软阈值处理 .....	171
9.3.3 百分率阈值处理 .....	172
9.3.4 实现 .....	172
9.4 抑制干扰 .....	172
9.5 故障轴承特征的识别 .....	175
9.5.1 声音信号的模式识别 .....	175
9.5.2 小波、小波包及 FFT 的特性 .....	178
9.6 二维小波与小波包 .....	180
9.6.1 二维小波 .....	180
9.6.2 二维小波包 .....	182
9.7 二维信号的小波与小波包算法 .....	183
9.7.1 二维小波算法 .....	183
9.7.2 二维小波包算法 .....	183
9.8 图像压缩 .....	186
9.8.1 图像编码 .....	186
9.8.2 小波树编码器 .....	186
9.8.3 嵌入零树小波编码 .....	186
9.8.4 嵌入零树小波举例 .....	187
9.8.5 空间定向树 .....	190
9.8.6 广义自相似树 .....	191
9.9 微钙化点检测 .....	191
9.9.1 CAD 算法的结构 .....	192
9.9.2 图像分割与非线性对比度增强 .....	192
9.9.3 子图像的小波分解 .....	192
9.9.4 小波系数域处理 .....	194
9.9.5 直方图阈值处理和黑色像素消除 .....	194
9.9.6 参数 ART2 聚类 .....	195
9.9.7 结果 .....	195
9.10 多载波通信系统 .....	195
9.10.1 OFDM 多载波通信系统 .....	195

9.10.2 小波包基 M CCS .....	197
9.11 三维医学图像可视化 .....	199
9.11.1 三维小波和算法 .....	199
9.11.2 绘制方法 .....	200
9.11.3 兴趣区域 .....	201
9.11.4 总结 .....	202
9.12 计算机程序 .....	203
9.12.1 二维小波算法 .....	203
9.12.2 小波包算法 .....	207
参考文献 .....	209
<b>第 10 章 小波在边值问题中的应用 .....</b>	<b>211</b>
10.1 积分方程 .....	211
10.2 矩量法 .....	214
10.3 小波方法 .....	214
10.3.1 快速小波算法的使用 .....	215
10.3.2 小波的直接应用 .....	215
10.3.3 频谱域小波 .....	216
10.3.4 小波包 .....	220
10.4 区间小波 .....	220
10.5 稀疏度和误差修正 .....	223
10.6 数值实例 .....	224
10.7 半正交小波与正交小波 .....	230
10.8 微分方程 .....	231
10.9 样条与小波的表达式 .....	232
参考文献 .....	234

# 第 1 章 本书论述了什么

20 世纪初期小波分析的概念已经在不同领域以不同的形式出现。调和分析中的 Littlewood-Paley 技巧、Calderón-Zygmund 理论以及信号处理中数字滤波器组理论被认为是小波分析的先驱工作。然而,通过不同领域一些研究者的工作,包括 Strömberg、Morlet、Grossmann、Meyer、Battle、Lemarié、Coifman、Daubechies、Mallat、Chui 等人,在 20 世纪 80 年代,小波理论引起人们的关注,还有很多研究人员也作出了重要贡献。

在离散数据集的应用中,小波可以被认为是一个函数的膨胀与平移所生成的基函数。类似于傅里叶分析,也有小波级数(WS)和积分小波变换(IWT)。在小波分析中,WS 与 IWT 密切相关。实直线上能量有限的函数的 IWT 在时间—尺度域中某点的值给出了其小波级数表示的系数。傅里叶级数与傅里叶变换之间不存在这种关系,这是由于它们应用于不同的函数类,傅里叶级数应用于能量有限的周期函数,而傅里叶变换应用于实直线上能量有限的函数。此外,傅里叶分析是研究函数的所有时间(频率)成分对函数的每个频率(时间)分量的影响。另一方面,小波分析是一种局部分析工具,这种局部特性使得小波分析更适合于信号的时间—频率分析。

小波技巧使得我们能够将一个复杂函数分解为一些较为简单的函数,然后分别进行研究。这个性质结合快速小波算法使得小波技巧在分析与综合问题中很吸引人,快速小波算法与快速傅里叶变换相比同样有效。不同类型的小波已经作为工具用于解决许多领域的问题,这些领域包括信号分析、图像分析、医学诊断、边值问题、地球物理信号处理、统计分析、模式识别等。小波在这些领域已获得广泛应用,而其新的应用仍在不断探索中。

小波能够有效地表示非平稳(瞬变)信号,这是其流行的主要原因。由于大部分自然和人工信号具有瞬变的特点,因此除了平稳信号用傅里叶表示外,不同的小波已用于许多类非平稳信号的表示。傅里叶分析利用整体(非局部)正弦和余弦函数作为基函数,而小波分析利用时间域和频率域局部化的基函数表示非平稳信号,这样会更加有效。因此,小波表示更加简洁而且容易实现。利用非常有效的多分辨率分析,人们能够将信号表示为不同分辨率下有限个分量的和,而每个分量可以根据应用的不同目的进行自适应处理。小波分析的主要作用是它能够给出信号在不同分辨率下的简洁表示。在偏微分方程的数值解法中,未知解能够用不同分辨率的小波去表示,从而导致了解的多网格表示。利用小波基阈值技巧能够将积分算子得到的稠密矩阵进行解的任意精确度的稀疏化。

已经有许多关于小波的专著和特定应用领域的教科书,然而,我们感觉缺乏一本系统介绍小波专题及其广泛应用的教科书,这正是我们写这本入门书的动机。我们的目的是:(1)在容易阅读的形式下给出数学上细致的分析;(2)给读者介绍一些可能的应用领域,包括信号处理和边值问题;(3)提供了一些算法和计算机代码。本书的定位是大学高年级学生和一年级研究生。同时充分的细节对于没有信号分析背景知识的实际工程师来说也是



有用的。

本书按逻辑关系介绍小波的概念,共分四个主要部分。我们宁可不去花费精力证明定理和发展算法,而是利用基函数对信号非常基本的表示来系统地讨论本学科面临的问题。通过与傅里叶分析和短时傅里叶变换的比较来解释小波分析,研究多分辨分析来说明分解和重建算法,结合滤波器理论使得读者可以对滤波器算法与小波算法进行比较。小波在不同方面的特殊应用包括信号处理、图像处理、电磁波扩散、边值问题、小波成像系统和抑制干涉等。本书各章详细概括如下。

第2章和第3章回顾一些基本的数学概念和方法,给出时间—频率分析与时间—尺度分析。为了更好地理解小波理论,回顾线性函数空间的基础是必须的。将欧几里得矢量空间中的概念推广到高维空间。矢量的投影、基函数、局部基和 Riesz 基、正交性以及双正交性等概念也将在第2章中讨论。此外,还将讨论函数的最小二乘逼近和一些数学工具,比如矩阵代数和  $z$  变换等,为连续小波变换和离散小波变换的发展建立基础。第3章对傅里叶分析进行了简单回顾。这一章的主要目的不是继续发展傅里叶分析,而是提供给读者傅里叶分析中的一些重要问题和关系,它们与后面的讨论密切相关。讨论了傅里叶级数和傅里叶变换的主要性质,还研究了几个较著名的定理,包括泊松(Poisson)求和公式、单位分解定理、采样定理以及部分求和的 Dirichlet 核等。为了将其与连续和离散小波变换进行比较,还简单地讨论了离散时间傅里叶变换和离散傅里叶变换,给出了傅里叶分析在信号表示中的一些优点和缺陷。

时间—频率分析与时间—尺度分析的发展构成了本书第二部分的核心内容。第4章主要致力于讨论短时傅里叶变换(时间—频率分析)和连续小波变换(时间—尺度分析),说明了这两种变换之间的相似性和差异,此外还介绍了窗宽的概念,用它来度量时间函数及其频谱的局部化。这一章还包括这些变换的主要性质,比如完全重建和逆的唯一性等。在时间—频率分析方面,通过对 Gabor 变换和 Wigner-Ville 分布的讨论来结束这一章。第5章介绍多分辨分析。通过二尺度关系和分解关系的推导研究了嵌套逼近空间与小波空间的关系,讨论了空间之间和基函数之间的正交性与双正交性以及它们的整数平移。这一章还讨论了半正交  $B$  样条函数以及将函数映射到多分辨空间上的技巧。在第6章中详细讨论了小波构造的方法和必要的条件,通过举例说明正交、半正交和双正交小波的构造过程。这一章还讨论了双正交小波子空间及其正交性,本章最后给出了计算中所用公式的推导和小波的图形。

在第7章和第8章中研究了小波分析的算法。第7章提供了分解算法与重建算法的构造和实现。本章首先讨论这些算法的基本构造模块,推导出抽取、插值、离散卷积以及它们之间的联系。尽管这些算法对不同类型的小波是普适的,但特别关注的是紧支集半正交  $B$  样条小波,推导出样条空间与对偶样条空间之间的映射公式。在这一章,还利用  $z$  变换研究了数字信号处理中滤波器组的完全重建算法,讨论了时间域与多相域算法的等价性。本章最后给出了双正交小波构造的例子。在第7章中局限于离散小波算法的讨论,包括离散小波变换的时变性和数据分布的稀疏性。为了减少阅读的难度,在第8章中研究了半正交样条小波的快速积分小波变换(FIWT)算法。在这一章逐渐地将算法展开讨论,以增强时间分辨率作为开始,而以增强尺度分辨率作为结束,通过 FIWT 一系列的应用来说明其重要性。

本书最后一部分涉及到小波对工程问题的应用。第 9 章讲述小波在信号与图像处理中的应用。在第 10 章中我们讨论小波在求解边值问题中的应用。为了改善小波在频谱域的性能,第 9 章首先讨论小波包的概念,它是小波分析的推广,信号在频谱域中的小波包表示比小波表示更加精细,这是由于小波包将小波频谱进一步分解成子频谱,讨论雷达干涉抑制时这是有用的。这一章还讨论了 3 种幅值的阈值处理,它们被用于图像压缩,以故障轴承的特征识别来结束一维小波信号处理。第 7 章中的小波算法被推广到二维图像处理,这一章主要的小波图像处理包括图像压缩、目标检测与识别。由于篇幅所限,没有包括树形图像编码的细节,然而,对乳房 X-光照片中微小钙化点的检测、识别和分类进行了较详细的讨论。还讨论了小波包在多通道通信系统中的应用,以及小波分析在三维医学图像可视化中的应用。第 10 章涉及到边值问题中的小波,同时研究了传统矩量法与小波基矩量法,讨论了矩量法中使用小波的不同途径。特别地,在一定程度上详细讨论了有界区间上的小波在求解电磁散射问题时所出现的积分方程中的应用,这些边界小波在图像处理中还适合于避免边界效应。最后,利用小波求解传输线路中的不连续问题来说明小波在频谱域中的应用。

本书的大部分材料取自于作者在 Texas A&M 大学电子工程系为大学生和研究生所开设的课程以及联合会短期课程的讲稿。本书的材料可以作为一个学期的课程,这些专题也可以作为其他信号处理课程的补充。每一章都用许多图表来解释数学概念,在有些章节后配有习题,而且在一些章节后还给出了计算机源代码。

## 第 2 章 数学预备知识

本章的目的是使读者熟悉一些数学记号和工具,这将有利于理解小波理论。因为小波是满足某些允许性条件的连续函数,因此,讨论函数空间的一些定义和性质是明智的。对于函数空间更详细的讨论,读者可以参考实分析的标准参考书。下一章讨论的小波算法涉及到系数序列的数字处理,数字信号处理中相关专题,比如采样、 $z$  变换、线性平移不变系统以及离散卷积等的基础知识,这对于掌握好小波理论是必备的。此外,线性代数和矩阵技巧的简单讨论在滤波器组的离散时间域分析中是非常有用的。对本章内容熟悉的读者可以跳过这一章。

### 2.1 线性空间

在广泛的意义上,函数空间是指满足一定数学结构模式的函数的集合。例如,有限能量空间  $L^2(-\infty, \infty)$  是平方可积函数的集合,也就是满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.1)$$

线性空间上的一些要求和运算规则说明如下:

- (1) 空间  $S$  必须是非空的;
- (2) 若  $x \in S$  和  $y \in S$ , 则  $x + y = y + x$ ;
- (3) 若  $z \in S$ , 则  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- (4) 在  $S$  中存在唯一的元素  $0$ , 使得  $x + 0 = x$ ;
- (5) 在  $S$  中存在另一个唯一的元素  $-x$ , 使得  $x + (-x) = 0$ 。

除了这些简单而重要的规则以外,还定义了标量乘法  $y = cx$ , 使得:若  $x \in S$ , 则对于每一个标量  $c$  有  $y \in S$ 。对于空间  $S$ , 有下面附加规则:

- (1)  $c(x + y) = cx + cy$ ;
- (2)  $(c + d)x = cx + dx$ , 对于标量  $c$  和  $d$ ;
- (3)  $(cd)x = c(dx)$ ;
- (4)  $1 \cdot x = x$ 。

满足这些附加规则的空间称为线性空间。然而,到目前为止,我们还没有定义度量线性空间中元素大小的标准。对  $S$  中的每个函数,如果我们赋予一个数  $\|x\|$ , 称为  $x$  的范数,这样的空间成为赋范线性空间(即具有范数的线性空间)。空间的范数还必须满足一些数学性质:

- (1)  $\|x\| \geq 0$ , 而且  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- (2)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;

(3)  $\|ax\| = |a| \|x\|$ , 其中  $a$  是标量。

函数的范数是函数到原点(即 0) 的距离。换句话说, 我们能够使用范数

$$\|x - y\| \quad (2.2)$$

度量两个函数  $x$  与  $y$  之间的差异(或距离)。

对于特别的线性空间有许多范数可供选择。例如, 有限能量空间  $L^2(-\infty, \infty)$  使用范数

$$\|x\| = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} < \infty \quad (2.3)$$

将这个范数称为  $L^2$ - 范数。这个范数也被用来度量两个有限能量函数的整体差异(或误差)。均方根误差(RMSE) 定义为

$$\text{RMSE} = \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - f_a(x)|^2 dx \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

式中  $f_a(x)$  是  $f(x)$  的逼近函数。式(2.4) 中的表达式是  $L^2$ - 范数下的逼近误差。

## 2.2 矢量与矢量空间

基于在 2.1 节所讨论的函数空间的基本概念, 我们现在讨论矢量空间的一些基本概念。首先简单回顾几何矢量分析。

三维欧几里得矢量空间的矢量  $\mathbf{V}$  由三个复数  $\{v_1, v_2, v_3\}$  来定义, 这三个复数与三个正交的单位矢量  $\{a_1, a_2, a_3\}$  相联系。有序集  $\{v_j\}_{j=1}^3$  表示矢量  $\mathbf{V}$  的三个标量分量, 其中单位矢量集  $\{a_j\}_{j=1}^3$  生成三维欧几里得矢量空间。欧几里得矢量空间中的任何矢量  $\mathbf{U}$  能够被分解为三个矢量分量  $\{u_j a_j\}_{j=1}^3$  [如图 2.1(d) 所示]。

欧几里得矢量空间中矢量的加法和标量乘法定义为

$$(1) \mathbf{U} + \mathbf{V} = \{u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3\};$$

$$(2) k\mathbf{V} = \{kv_1, kv_2, kv_3\}.$$

除以上这些运算以外, 三维欧几里得空间中的矢量还满足交换律与结合律:

$$(1) \mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U};$$

$$(2) (\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W} = \mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}).$$

我们可以用列矩阵表示一个矢量:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

这是由于上面的所有数学规则都可以应用于列矩阵。类似于函数的范数的定义, 我们定义矢量的长度为

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (2.6)$$

在矢量代数中, 两个矢量的数量积(内积) 是一个非常重要的运算, 我们将在下面讨论这

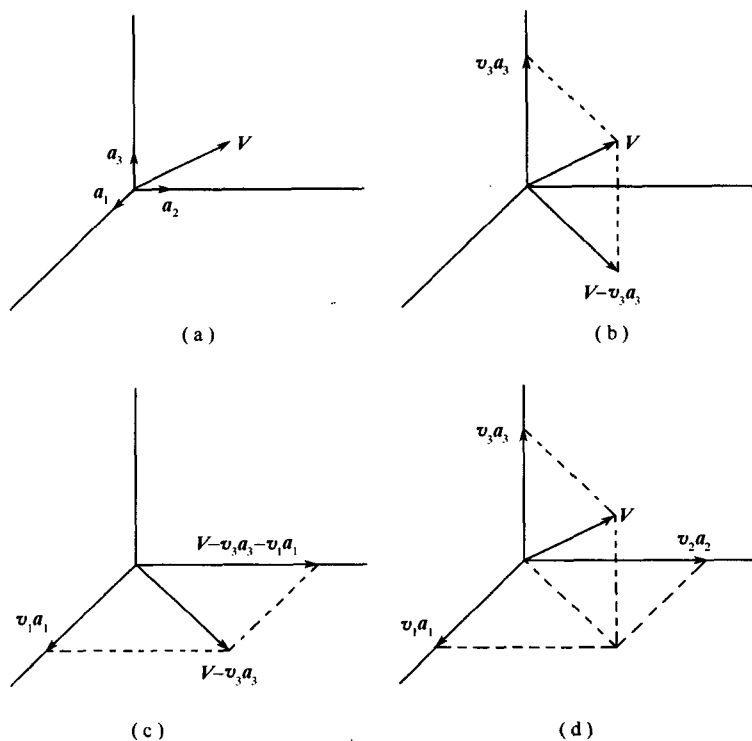


图 2.1 欧几里得空间中矢量的正交分解

个问题。两个矢量的数量积定义为

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{U}| |\mathbf{V}| \cos(\widehat{\mathbf{U}, \mathbf{V}}) =$$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

式中上标 T 表示矩阵的转置运算。众所周知,数量积满足交换律:  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}$ 。若  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$ , 则称这两个矢量  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  互相正交。我们定义一个矢量在另一个矢量上的投影为

$$\frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}_v = \mathbf{U} \text{ 在 } \mathbf{a}_v \text{ 方向的投影} =$$

$$\mathbf{U} \text{ 在 } \mathbf{a}_v \text{ 方向的分量} \quad (2.8)$$

投影是一个重要的概念,它将在以后的讨论中经常使用。如果需要找到一个矢量在给定方向上的分量,我们只要取该矢量与给定方向单位矢量的数量积。

现在,我们可以将三维欧几里得空间中基底与投影的概念推广到  $N$  维矢量空间。一

个矢量在该空间中的分量构成  $N \times 1$  列矩阵, 而基矢量  $\{a_j\}_{j=1}^N$  构成一个正交集满足:

$$a_k \cdot a_l = \delta_{k,l} \quad \forall k, l \in \mathbf{Z} \quad (2.9)$$

式中  $\delta_{k,l}$  是 Kronecker  $\delta$  函数, 定义为

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (2.10)$$

利用内积我们能获得矢量  $\mathbf{V}$  特定的分量  $v_j$  (或  $\mathbf{V}$  在方向  $a_j$  的投影):

$$v_j = \mathbf{V} \cdot a_j \quad (2.11)$$

而且矢量  $\mathbf{V}$  可以表示为它的矢量分量的线性组合:

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^N v_k a_k \quad (2.12)$$

众所周知, 一个矢量能被分解为沿基矢量方向的基本矢量, 每次可以找到它的一个分量。图 2.1 说明了这个过程, 在图 2.1(a) 中的矢量  $\mathbf{V}$  被分解为  $\mathbf{V}_p = \mathbf{V} - v_3 a_3$  和它的正交补矢量  $v_3 a_3$ 。矢量  $\mathbf{V}_p$  被进一步分解为矢量  $v_1 a_1$  和  $v_2 a_2$ 。图 2.1(d) 表示矢量  $\mathbf{V}$  由其分量的重构。

尽管图 2.1 中所示的例子很初等, 但它类似于小波分解与重构算法, 不同之处是正交分量是小波函数:

## 2.3 基函数

我们将欧几里得几何矢量空间的概念推广到赋范线性空间, 也就是说, 将几何矢量的集合想象成函数的集合。用基函数代替基矢量, 基函数可以表示相应空间中的任意函数, 这些基函数是相应空间中函数的基本构成成分。我们将以傅里叶级数作为例子, 傅里叶级数将在第 3 章中更详细地讨论。

例子: 让我们回顾, 周期函数  $p_T(t)$  能被展开成级数:

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.13)$$

式中  $T$  是函数的周期;  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f$  是基本频率;  $e^{jk\omega_0 t}$  是基本频率的  $k$  次谐波。如果建立  $p_T(t)$  与  $\mathbf{V}$ 、 $c_k$  与  $v_k$  以及  $e^{jk\omega_0 t}$  与  $a_k$  之间的等价关系, 则等式 (2.13) 等同于等式 (2.12), 因此, 函数集  $\{e^{jk\omega_0 t}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  构成离散频率傅里叶空间的基, 这里  $\mathbf{Z}$  是所有整数  $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  的集合, 系数集  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  通常称为离散频谱。众所周知, 离散傅里叶基是一个正交基。利用函数的内积记号

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} g(t) \overline{h(t)} dt \quad (2.14)$$

式中  $\overline{h(t)}$  表示  $h(t)$  的复数共轭。我们用下面的等式表示正交性

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt = \delta_{k,l} \quad \forall k, l \in \mathbf{Z} \quad (2.15)$$

对它们除以  $\sqrt{T}$ , 则我们可以规范化基函数(关于单位能量), 因此,  $\{e^{jk\omega_0 t} / \sqrt{T}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  构成离

散傅里叶空间的标准正交基。

## 正交性与双正交性

函数的正交展开是信号分析的一个重要工具,展开的系数表示信号分量的大小。在前面的例子中,傅里叶系数表示信号谐波频率的幅度。如果为了特别信号处理的目的,我们决定使某些谐波频率(比如 60Hz 噪声)减到最小(或使其为 0),可以在此频率处简单地设计一个滤波器去除噪声。因此,在处理信号之前将其分解为不同的成分对于观测信号是非常有意义的。

信号的正交分解是直接的,而且系数的计算是简单和高效的。若函数  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$  关于某个规范正交集  $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}} \subset L^2(\mathbf{R})$  展开,可以写成:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) \quad (2.16)$$

计算系数时只要取函数与基函数的内积就可以得到系数:

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi_k(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \phi_l(t) \overline{\phi_k(t)} dt = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \delta_{l,k} = c_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

式(2.17)中内积的计算需要对于所有的  $t$  函数  $f(t)$  的知识而且不是实时可计算的。

我们已经看到规范正交基是表示信号有效和直接的方法,然而,在某些应用中规范正交基函数可能缺乏某些期望信号处理的性质,这导致了处理中的不方便。双正交表示是一个可能的选择,它有利于克服正交性约束而且对于给定的函数产生一个好的逼近。设  $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}} \subset L^2(\mathbf{R})$  是一个双正交基函数的集合,如果存在另一个基函数的集合  $\{\tilde{\phi}_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}} \subset L^2(\mathbf{R})$  使得:

$$\langle \phi_k, \tilde{\phi}_l \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t) \overline{\tilde{\phi}_l(t)} dt = \delta_{k,l} \quad (2.18)$$

集合  $\{\tilde{\phi}_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  被称为  $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  的对偶基。按照双正交基可以将函数  $g(t)$  展开为

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \phi_k(t)$$

而且得到系数

$$d_n = \langle g, \tilde{\phi}_n \rangle = \quad (2.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\tilde{\phi}_n(t)} dt \quad (2.20)$$

另一方面,也可以按照对偶基展开函数  $g(t)$ :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{d}_k \tilde{\phi}_k(t) \quad (2.21)$$

而且得到对偶系数

$$\tilde{d}_l = \langle g, \phi_l \rangle = \quad (2.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\phi_l(t)} dt \quad (2.23)$$

回想一下,在正交基的情形下所有基函数属于同一空间,但在双正交基的情形下,对偶基可能不在原来的空间中。如果双正交基及其对偶属于同样的空间,则称这些基为半正交的。一个任意阶样条函数属于半正交类。关于样条函数更多的细节将在以后的章节中考虑。

利用二维矢量空间中的几何矢量来说明双正交性。设矢量

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

构成二维欧几里得空间的双正交基。这个基的对偶基是

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

这些基如图 2.2 所示。通过解联立方程组,能够简单地计算二维欧几里得空间中的对偶基。设双正交基为

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

而对偶基是

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

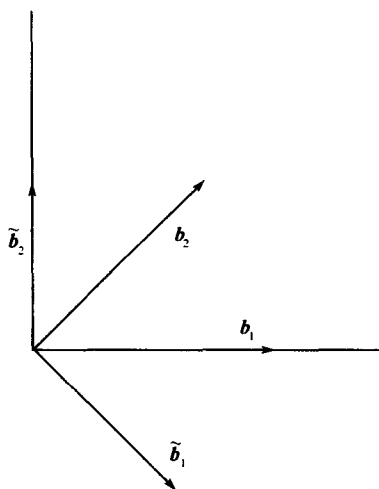


图 2.2 二维欧几里得空间中的双正交基

求解  $\tilde{\mathbf{b}}_1$  与  $\tilde{\mathbf{b}}_2$  的联立方程组为:



$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_1, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle &= 1 \\
\langle \mathbf{b}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1 \rangle &= 0 \\
\langle \mathbf{b}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle &= 0 \\
\langle \mathbf{b}_2, \tilde{\mathbf{b}}_2 \rangle &= 1
\end{aligned} \tag{2.24}$$

这个过程能够被推广到基矢量构成一个斜(非正交)坐标系的有限维矢量空间。计算对偶基时需要进行线性矩阵变换,对此过程不再作详细说明,有兴趣的读者可以参考文献[1]。

## 2.4 局部基与Riesz基

2.3节,我们讨论了具有全局性质的正交基 $\{\phi(t); t \in (-\infty, \infty)\}$ 。显然,傅里叶级数的正弦和余弦基函数定义在整个实直线 $(-\infty, \infty)$ 上,因此称为整体基。实直线的有限区间中存在许多基 $\{\phi(t); t \in (a, b)\}$ 满足正交性或双正交性条件,我们称其为局部基,Haar基是局部基最简单的例子。

**例1:** Haar基由 $\phi_{H,k}(t) = \chi_{[0,1]}(t-k), k \in \mathbf{Z}$ 来描述,其中:

$$\chi_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{2.25}$$

是特征函数。显然,Haar基满足正交性条件

$$\langle \phi_{H,j}(t), \phi_{H,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(t-j) \overline{\chi_{[0,1]}(t-k)} dt = \delta_{j,k} \tag{2.26}$$

为了用局部基 $\{\phi(t), t \in (a, b)\}$ 表示整体函数 $f(t), t \in (-\infty, \infty)$ ,函数位于有限区间外的部分必须能够用基函数在实直线上的平移(延迟)来表示,整体函数的整数平移还能够构成线性空间的基。Shannon函数 $\phi_{SH}(t)$ 是这种基的一个例子。

**例2:** Shannon函数定义为

$$\phi_{SH}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \tag{2.27}$$

而且Shannon基由以下函数构成:

$$\phi_{SH,k}(t) = \frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{2.28}$$

它是整体规范正交基。在频谱域中说明规范正交性是最佳的。

设 $g(t) \in L^2(\mathbf{R})$ ,用基函数 $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 将其展开成级数:

$$g(t) = \sum_k c_k \phi_k(t) \tag{2.29}$$

基 $\{\phi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 被称为Riesz基,如果它满足下面的不等式:

$$R_1 \|c_k\|_l^2 \leq \|g(t)\|^2 \leq R_2 \|c_k\|_l^2 \tag{2.30}$$

$$R_1 \|c_k\|_l^2 \leq \left\| \sum_k c_k \phi_k(t) \right\|^2 \leq R_2 \|c_k\|_l^2 \tag{2.31}$$

其中  $0 < R_1 \leq R_2 < \infty$  被称为 Riesz 界。空间  $L^2(\mathbf{R})$  与离散序列空间  $l^2$  相对应, 其上的范数定义为

$$\|c_k\|_{l^2} = \left( \sum_k |c_k|^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (2.32)$$

在频谱域中不等式(2.30)的一个等价表示为

$$0 < R_1 \leq \sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq R_2 < \infty \quad (2.33)$$

式(2.33)的推导作为习题留给读者,  $\hat{\phi}$  表示  $\phi$  的傅里叶变换, 在第3章中再进行专门的讨论。

如果  $R_1 = R_2 = 1$ , 则 Riesz 基是规范正交的。Shannon 基是 Riesz 基的一个例子而且是规范正交的, 这是由于在区间  $[-\pi, \pi]$  中 Shannon 函数的频谱为 1, 因此

$$\sum_k |\hat{\phi}_{SH}(\omega + 2\pi k)|^2 \equiv 1 \quad (2.34)$$

如果基函数  $\{\phi(t-k); k \in \mathbf{Z}\}$  不是规范正交的, 按照以下关系我们能够得到一个规范正交基  $\{\phi^\perp(t-k); k \in \mathbf{Z}\}$

$$\hat{\phi}^\perp(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\left\{ \sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \right\}^{1/2}} \quad (2.35)$$

设

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \sum_j a_j^{(1)} \phi_j(t) \\ g_2(t) &= \sum_j a_j^{(2)} \phi_j(t) \end{aligned}$$

如果函数有较小的差将会导致系数有较小的差, 反过来也一样, 在这样的意义下, Riesz 基也被称为稳定基。换句话说, 稳定性意味着:

$$\|g_1(t) - g_2(t)\|^2 \text{ 非常小} \Leftrightarrow \|a_j^{(1)} - a_j^{(2)}\|_{l^2}^2 \text{ 非常小} \quad (2.36)$$

## 2.5 离散线性赋范空间

离散线性赋范空间是一个具有范数的实或复数离散序列的集合。对于离散赋范线性空间, 在 2.1 节中的运算规则也能应用于离散线性赋范空间。 $N$  维线性空间中的元素由序列

$$x(n) = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\} \quad (2.37)$$

表示, 而两个元素的和表示为

$$w(n) = x(n) + y(n) = \{x(0) + y(0), x(1) + y(1), \dots, x(N-1) + y(N-1)\} \quad (2.38)$$

离散线性空间中的内积与范数分别定义为

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_n x(n) \bar{y}(n) \quad (2.39)$$

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_n |x(n)|^2} \quad (2.40)$$

前面定义的正交性和双正交性也适用于离散基的情形,双正交离散基满足条件

$$\langle \phi_i(n), \tilde{\phi}_j(n) \rangle = \sum_n \phi_i(n) \overline{\tilde{\phi}_j(n)} = \delta_{i,j} \quad (2.41)$$

规范正交基是自对偶的,也就是说

$$\phi_j = \tilde{\phi}_j \quad (2.42)$$

**例 1:** 离散 Haar 基是  $H_0(n)$  的偶数平移所构成的规范正交基,而  $H_0(n)$  定义为

$$H_0(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.43)$$

然而 Haar 基不是完备的,也就是说,存在某个序列不能按照这个基的展开来表示,需要一个补空间使其完备化。Haar 的补空间是由  $H_1(n)$  的奇数平移所生成的空间,  $H_1(n)$  定义为

$$H_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.44)$$

因此任何实数序列都能够用 Haar 基来表示。

**例 2:** 序列

$$D_2(n) = \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right\} \quad (2.45)$$

是四元数的有限序列,而其整数平移构成一个规范正交基。正交性的证明留给读者作为习题。

## 2.6 正交投影逼近

假设  $V$  是由  $\{\phi_k\}$  生成的线性矢量空间且  $u(n) \notin V$ , 我们希望找到  $u(n)$  的一个逼近  $u_p \in V$ , 使用  $u$  在空间  $V$  上的正交投影作为逼近, 投影定义为

$$u_p = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k \quad (2.46)$$

注意到逼近误差  $u - u_p$  正交于空间  $V$ , 也就是说

$$\langle u - u_p, \phi_k \rangle = 0, \quad \forall k$$

此外这个逼近的均方误差(MSE)是极小的。

下面证明 MSE 对任意正交投影的极小性。考虑用规范正交基函数  $\{\phi_k : k = 0, \dots, N-1\}$  的线性组合来逼近函数  $g \in L^2[a, b]$ , 满足条件:

$$g(t) \approx g_c(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \phi_j(t) \quad (2.47)$$

其中

$$c_j = \langle g, \phi_j \rangle \quad (2.48)$$

逼近函数  $g(t)$  的逐点误差  $\epsilon_c(t)$  为

$$\epsilon_c(t) = g(t) - g_c(t) = g(t) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \phi_j(t) \quad (2.49)$$

我们希望证明当系数序列  $\{c_j\}$  按照正交投影由式(2.48)确定时,  $\text{MSE} \|\epsilon_c(t)\|^2$  取极小值。为证明这一点, 假设存在不是由正交投影获得的另外一个序列  $\{d_j : j = 0, \dots, N-1\}$  也使得误差取得极小值, 从而证明  $c_j = d_j (j = 0, \dots, N-1)$ , 这样就完成了证明。

对于序列  $\{d_j\}$ , 我们有

$$g(t) \approx g_d(t) = \sum_{j=0}^{N-1} d_j \phi_j(t) \quad (2.50)$$

及

$$\begin{aligned} \|\epsilon_d(t)\|^2 &= \left\| g(t) - \sum_{j=0}^{N-1} d_j \phi_j(t) \right\|^2 = \left\langle g(t) - \sum_{j=0}^{N-1} d_j \phi_j(t), g(t) - \sum_{j=0}^{N-1} d_j \phi_j(t) \right\rangle = \\ &= \langle g, g \rangle - \sum_{j=0}^{N-1} d_j \langle \phi_j(t), g \rangle - \sum_{j=0}^{N-1} \bar{d}_j \langle g, \phi_j(t) \rangle + \sum_{j=0}^{N-1} |d_j|^2 = \\ &= \langle g, g \rangle - \sum_{j=0}^{N-1} d_j \bar{c}_j - \sum_{j=0}^{N-1} \bar{d}_j c_j + \sum_{j=0}^{N-1} |d_j|^2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

为了将式(2.51)中最后三项配成完全平方, 加上一项与减去一项  $\sum_{j=0}^{N-1} |c_j|^2$ , 则有

$$\begin{aligned} \|\epsilon_d(x)\|^2 &= \left\| g(x) - \sum_{j=0}^{N-1} d_j \phi_j(t) \right\|^2 = \\ &= \left\| g(x) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \phi_j(t) \right\|^2 + \sum_{j=0}^{N-1} |d_j - c_j|^2 = \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\|\epsilon_c(x)\|^2 + \sum_{j=0}^{N-1} |d_j - c_j|^2 \quad (2.53)$$

显然, 要使均方误差 MSE 取极小值必须有  $d_j = c_j, j = 0, \dots, N-1$ , 这样就完成了证明。

## 2.7 矩阵代数与线性变换

在有限维欧几里得空间中, 我们使用列矩阵去表示矢量, 矩阵是这些空间中的算子。在这一节, 我们简单回顾矩阵代数的知识, 讨论一些特殊矩阵, 这些对理解小波与滤波器组的时间域分析是有用的。有关细节读者可以参考文献[2]。

### 2.7.1 矩阵代数基础

#### 1. 定义

一个矩阵  $\mathbf{A} = [A_{ij}]$  是元素的矩形数组, 元素可以是实数、复数或多项式, 第一个整数

下标  $i$  表示元素所在的行指标,而第二个整数下标  $j$  表示元素所在的列指标。如果  $i, j \rightarrow \infty$ , 则称矩阵是无限的。一个  $m \times n$  矩阵可以表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & & \\ A_{21} & A_{22} & & & \\ A_{31} & & & & \\ & & & & \\ & & & & A_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

如果  $m = n$ , 则  $\mathbf{A}$  是方阵。一个  $N \times 1$  列矩阵(仅仅有一列)表示一个  $N$  维矢量。

## 2. 转置

$\mathbf{A}^T$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的转置,其元素为  $A_{ji}$ 。若  $\mathbf{A}$  的维数是  $m \times n$ , 则  $\mathbf{A}^T$  的维数为  $n \times m$ , ( $N \times 1$ ) 列矩阵的转置是  $(1 \times N)$  行矩阵。

## 3. 矩阵加法与减法

如果两个矩阵具有相同的维数,则它们可以相加或相减,即

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \Rightarrow C_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}$$

## 4. 矩阵乘法

只有当两个矩阵的维数相容时才能进行乘法运算。相容性是指第一个矩阵列的维数必须与第二个矩阵行的维数相同。如果矩阵  $\mathbf{A}$  与矩阵  $\mathbf{B}$  的维数分别为  $m \times p$  和  $p \times q$ , 则乘积矩阵  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  的维数是  $m \times q$ , 元素  $C_{ij}$  按如下方式来确定:

$$C_{ij} = \sum_{l=1}^p A_{il} B_{lj}$$

由于  $p \times q$  与  $m \times p$  不一定相容,因此矩阵乘法不满足交换性。一般情况下,  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 。

## 5. 单位矩阵

单位矩阵是一个方阵,其主对角线上的元素全是 1 而其余元素均为 0,形式如下:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 6. 矩阵的余子式

矩阵  $\mathbf{A}$  的余子式  $\mathbf{S}_{ij}$  是删除  $\mathbf{A}$  的第  $i$  行以及第  $j$  列后所得到的子矩阵。如果矩阵  $\mathbf{A}$  的维数是  $m \times n$ , 则余子式  $\mathbf{S}_{ij}$  的维数是  $(m-1) \times (n-1)$ 。

## 7. 行列式

方阵  $\mathbf{A}$  的行列式是一个数值,它可以由余子式的定义逐次计算。我们按照下式计算一个  $(m \times m)$  方阵的行列式:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} A_{ij} \det(\mathbf{S}_{ij})$$

指标  $j$  是 1 到  $m$  之间的任意整数。

## 8. 逆矩阵

$A^{-1}$  是方阵  $A$  的逆矩阵, 满足条件  $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ 。逆矩阵的元素计算如下:

$$A_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{i+j} \det(S_{ji})$$

如果  $\det(A) = 0$ , 则矩阵是奇异的且  $A^{-1}$  不存在。

## 2.7.2 特征矩阵

矢量空间  $V$  到其自身的线性变换是指一个映射  $A: V \rightarrow V$  (对于  $x \in V$  对应于另一个矢量  $y = Ax \in V$ ) 且满足可加性与齐次性。一般情况下, 矢量  $y$  是矢量  $x$  的相似变换、旋转变换以及平移变换。特别地, 如果输出矢量  $y$  仅仅是输入矢量的标量倍数, 则称此标量为  $A$  的特征值, 而系统称为特征系统, 在数学上可以写成

$$y = Ax = \mu x \quad (2.55)$$

式中  $A$  是一个  $N \times N$  矩阵,  $x$  是一个  $N$  维矢量, 而  $\mu$  是标量特征值。我们可以通过解特征方程确定特征值:

$$\det(A - \mu I) = 0 \quad (2.56)$$

如果  $x$  是一个  $N \times 1$  列矩阵, 则在此系统中存在  $N$  个特征值, 这些特征值可以相同或互不相同, 相对应于每个特征值都有一个特征矢量。特征矢量与特征值的解释依赖于现实问题的性质, 将每个特征值  $\mu_j$  代入式 (2.56) 中可以解出特征矢量  $x_j$ , 利用下面的例子来说明这个过程。设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

是变换矩阵。根据式 (2.56) 知特征方程是:

$$\begin{aligned} \det(A - \mu I) &= \det \begin{bmatrix} 3-\mu & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mu & -1 \\ 0 & -1 & 3-\mu \end{bmatrix} = \\ &= (3-\mu)[(2-\mu)(3-\mu)-1] - (3-\mu) = \\ &= (3-\mu)(\mu-1)(\mu-4) = 0 \end{aligned}$$

因此特征值是  $\mu = 4, 1$  和  $3$ 。将  $\mu = 4$  代入式 (2.55), 得到

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

且有下面的线性方程组

$$\begin{aligned}
-x_1 - x_2 + 0 &= 0 \\
-x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\
0 - x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

这是线性相关的代数方程组。假设  $x_1 = \alpha$ , 从而得到对应于  $\mu = 4$  的特征矢量为

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0 \tag{2.58}$$

作为习题读者可以自己计算另外两个特征矢量。

### 2.7.3 线性变换

利用 2.7.2 小节中特征系统的例子, 我们有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_j = 1, 3, 4 \quad \text{对于 } j = 1, 2, 3$$

且对应于特征值的特征矢量为

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

根据特征值与特征函数的定义, 我们有

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mu_j\mathbf{e}_j \quad \text{对于 } j = 1, 2, 3 \tag{2.60}$$

可以将方程重新排列为

$$\mathbf{A}[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] = [\mu_1\mathbf{e}_1 \quad \mu_2\mathbf{e}_2 \quad \mu_3\mathbf{e}_3] \tag{2.61}$$

为了更加明确, 我们将式(2.61) 写成更加简洁的矩阵形式

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} = \mathbf{E}\boldsymbol{\mu} \tag{2.62}$$

式中  $\boldsymbol{\mu}$  是对角矩阵, 而  $\mathbf{E}$  是特征矩阵。如果矩阵  $\mathbf{E}$  是非奇异的, 则在式(2.62) 两端左乘以  $\mathbf{E}^{-1}$  就可以对角化矩阵  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E} = \boldsymbol{\mu} \tag{2.63}$$

因此在线性变换中可以利用特征矩阵  $\mathbf{E}$  对角化矩阵  $\mathbf{A}$ 。

### 2.7.4 基变换

从前面的例子中可以看出矩阵  $\mathbf{A}$  定义了一个线性系统:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  是一个变换, 将  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  映射为  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ 。 $\mathbf{y}$  的分量与  $\mathbf{x}$  的分量之间的关系通过式 (2.64) 所定义的线性变换来确定。由于  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  以及  $\mathbf{e}_3$  是线性无关的矢量, 所以它们可以作为  $\mathbf{R}^3$  的基底, 因此在这个基下可以展开矢量  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = x'_1 \mathbf{e}_1 + x'_2 \mathbf{e}_2 + x'_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}\mathbf{x}' \quad (2.65)$$

而且系数矢量  $\mathbf{x}'$  按下式计算:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{x} \quad (2.66)$$

关于这个新的基底矢量  $\mathbf{y}$  的新坐标成为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{E}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \\ &\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{x}' = \boldsymbol{\mu}\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (2.67)$$

方程 (2.67) 说明根据基的变换我们可以将线性系统  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  变换为另一系统  $\mathbf{y}' = \boldsymbol{\mu}\mathbf{x}'$ , 而且矩阵  $\boldsymbol{\mu}$  是对角矩阵, 我们称这种通过特征矩阵所进行的线性变换为相似变换。

### 2.7.5 Hermitian 矩阵、酉矩阵与正交变换

设  $\mathbf{H}$  是给定的复值矩阵, 对  $\mathbf{H}$  的转置矩阵取共轭就能得到它的 Hermitian 矩阵  $\mathbf{H}^h$ , 即

$$\mathbf{H}^h = \overline{\mathbf{H}^T} \quad (2.68)$$

显然, 根据定义可以得到下面两个恒等式:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^h)^h &= \mathbf{H} \\ (\mathbf{GH})^h &= \mathbf{H}^h\mathbf{G}^h \end{aligned}$$

设  $N$  维矢量空间的基矢量是  $\mathbf{b}_i, i = 1, \dots, N$ , 这里  $\mathbf{b}_i$  是长度为  $N$  的矢量。正交基是指任意两个不同基矢量的内积为 0, 即满足下面的条件:

$$\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i \rangle = [\mathbf{b}_j]^T [\mathbf{b}_i] = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \mathbf{Z} \quad (2.69)$$

如果  $\mathbf{b}_i$  的范数是 1, 则称这个基是规范正交基。用规范正交矢量作为列构成一个  $N \times N$  变换矩阵  $\mathbf{P}$  如下:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N] \quad (2.70)$$

因为

$$[\mathbf{b}_j]^h [\mathbf{b}_i] = \delta_{i,j} \quad (2.71)$$

因此

$$\mathbf{P}^h \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (2.72)$$

而且



$$P^h = P^{-1} \quad (2.73)$$

除了列的正交性之外,如果  $P$  还满足行的正交性  $PP^h = I$ , 则矩阵  $P$  被称为酉(或规范正交)矩阵。

## 2.8 数字信号

这一节我们给出信号处理中的一些基本记号与运算,关于细节读者可以参考文献[3]。

### 2.8.1 信号采样

设  $x(t)$  是一个能量有限的连续时间(模拟)信号,如果以步长  $h$  测量信号的幅值并且记录结果,则得到一个离散时间信号:

$$x(n) = x(t_n), n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.74)$$

其中

$$t_n = nh$$

为了书写简单和计算方便,在采样周期  $h$  被理解的情况下,我们用  $x(n)$  表示离散时间信号,这些离散采样值构成的信号称为数字信号。

为了从其样本值  $\{x(n)\}$  对连续带限函数  $x(t)$  有一个好的逼近,采样区间  $h$  必须满足

$$h \leq \frac{\pi}{\Omega}$$

其中  $2\Omega$  是函数  $x(t)$  的带宽(即对于任意  $|\omega| > \Omega$  恒有  $\hat{x}(\omega) = 0$ )。上面选择的  $h$  称为 Nyquist 采样率,而且 Shannon 恢复公式:

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nh) \frac{\sin \pi(t - nh)}{\pi(t - nh)} \quad (2.75)$$

使得我们能够恢复原始模拟信号  $x(t)$ 。利用傅里叶变换和傅里叶级数的泊松(Poisson)求和公式,很容易证明这个定理,在第3章中我们将证明该定理。

### 2.8.2 线性平移不变系统

让我们考虑由其脉冲响应所表征的系统。我们称系统是线性平移不变的,如果输入  $x(n)$  与输出  $y(n)$  满足下面的关系:

平移不变性:

$$\begin{aligned} x(n) &\Rightarrow y(n) \\ x(n - n') &\Rightarrow y(n - n') \end{aligned} \quad (2.76)$$

线性:

$$\begin{aligned} x_1(n) &\Rightarrow y_1(n) \text{ 与 } x_2(n) \Rightarrow y_2(n) \\ x_1(n) + mx_2(n) &\Rightarrow y_1(n) + my_2(n) \end{aligned} \quad (2.77)$$

通常一个线性平移不变系统具有以下特征：

$$x_1(n-n') + mx_2(n-n') \Rightarrow y_1(n-n') + my_2(n-n') \quad (2.78)$$

### 2.8.3 卷积

离散卷积通常也称为移动平均，它能够明确表示线性平移不变系统的输入 / 输出关系。线性卷积的数学定义是：

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_k h(k-n)x(k) = \sum_k x(k-n)h(k) \quad (2.79)$$

可以用矩阵记号将卷积表示为

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) & \cdot & \cdot \\ \cdot & h(2) & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) & \cdot \\ \cdot & \cdot & h(2) & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

作为一个例子，如果  $h(n) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$ ，而  $x(n) = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1\}$  是因果序列，则输入与输出关系的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & & & & \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & & & \\ & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\ & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & \\ & & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & \\ & & & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \\ & & & & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ & & & & & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & & & & & & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & & & & & & & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & & & & & & & & & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(-2) = 0 \\ x(-1) = 0 \\ x(0) = 1 \\ x(1) = 0 \\ x(2) = 1 \\ x(3) = 0 \\ x(4) = 1 \\ x(5) = 0 \\ x(6) = 1 \\ x(7) = 0 \\ x(8) = 0 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

另一方面,如果滤波器的脉冲响应为  $h(n) = \left\{ \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right\}$ , 我们有一个微分滤波器或高通滤波器。对于前面的输入信号  $x(n]$  得到的输出信号为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ & & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ & & & & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ & & & & & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ & & & & & & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x(-2) &= 0 \\ x(-1) &= 0 \\ x(0) &= 1 \\ x(1) &= 0 \\ x(2) &= 1 \\ x(3) &= 0 \\ x(4) &= 1 \\ x(5) &= 0 \\ x(6) &= 1 \\ x(7) &= 0 \\ x(8) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

滤波器可以使输入信号的振荡部分通过而平均值(dc分量)被这个滤波器拒绝,显然输出的平均值几乎是0而输入的平均值是 $\frac{1}{2}$ 。

## 2.8.4 $z$ 变换

$z$  变换是离散信号分析中非常有用的工具。我们在引出小波与滤波器组的算法中时常会使用  $z$  变换,它被定义为无穷和:

$$H(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) z^{-k} = \cdots + h(-1)z^{-1} + h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots \quad (2.83)$$

变量  $z^{-1}$  表示采样区间1个单位的延迟,  $z^{-M}$  意味着  $M$  个单位的延迟。如果用  $e^{j\omega}$  代替  $z$ , 则  $z$  变换成为离散傅里叶变换,这将在第3章中详细讨论:

$$H(z)_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-jk\omega} \quad (2.84)$$

在以后的讨论中我们将交替使用这些记号。 $z$  变换的一个重要的性质是线性离散卷积的  $z$  变换等于  $z$  变换域中的乘积:

$$y(n) = h(n) * x(n) \Rightarrow y(z) = H(z)X(z) \quad (2.85)$$

## 2.8.5 收敛域

在  $z$  变换中的变量  $z$  是复值。对于某些  $z$  的值  $z$  变换:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$  可能不收敛。 $z$  变换的收敛域(ROC)是指复平面上的区域,对于该区域中的任何  $z$  值  $z$  变换都收敛。两个序列可能具有相同的  $z$  变换但其收敛区域是不同的。

**例 1:** 给出  $x(n) = a^n \cos(\omega_0 n) u(n)$  的  $z$  变换,其中  $u(n)$  是单位阶跃函数,其定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

**解:** 根据  $z$  变换的定义,可以得到

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\omega_0 n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} z^{-n} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{j\omega_0} z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega_0} z^{-1})^n \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - a e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - a e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad \text{ROC: } |z| > |a| \end{aligned}$$

当  $a = 0.9$  和  $\omega_0 = 10\pi$  时的情形如图 2.3 所示。

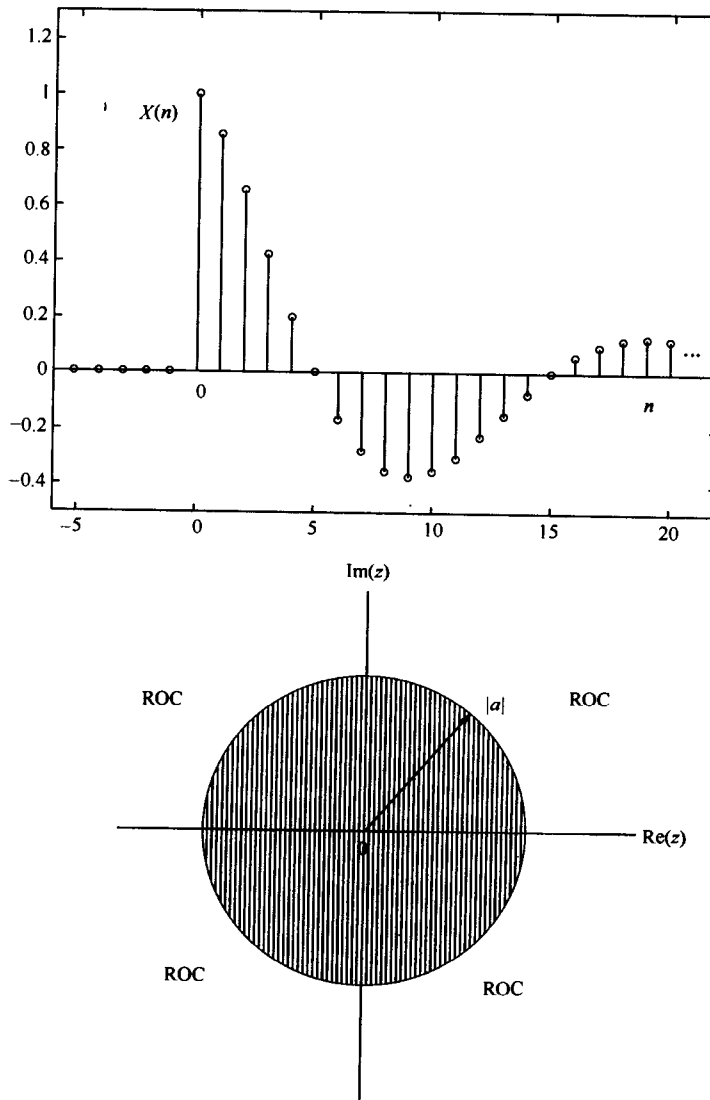


图 2.3 序列和 ROC( $a = 0.9$ )

特别情形:

1. 如果  $a = 1$  和  $\omega_0 = 0$ , 则可以得到

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

2. 如果  $a = 1$ , 则可以得到

$$X(z) = \frac{1 - \cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}, \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

3. 如果  $\omega_0 = 0$ , 则可以得到

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - 2az^{-1} + a^2z^{-2}} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

## 2.8.6 逆 $z$ 变换

由 $z$ 变换恢复原来的序列涉及到下面形式的复积分:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (2.86)$$

式中 $c$ 是 $X(z)$ 收敛域内环绕 $z$ 平面原点的一条逆时针方向的闭合围线。基于本书的目的,我们不会使用式(2.86)去恢复序列,因为本书中感兴趣的信号和滤波器是 $z$ 的有理函数,利用部分分式或者长除法去恢复序列更加方便。

例2: 确定下列 $z$ 变换所对应的序列 $x(n)$ :

$$X(z) = \frac{z-1}{(z-0.7)(z-1.2)} = \frac{z-1}{z^2-1.9z+0.84}, \text{ROC: } |z| > 1.2$$

解: 利用长除法,可以得到:

$$X(z) = z^{-1} + 0.9z^{-2} + 0.87z^{-3} + \frac{0.897z^{-2} - 0.7308z^{-3}}{z^2 - 1.9z + 0.84}$$

由于收敛域位于半径为 $r=1.2$ 的圆外,显然可以得到 $x(0)=0, x(1)=1, x(2)=0.9, x(3)=0.87, \dots, x(n)$ 是一个右侧无限序列。

如果 ROC:  $|z| < 0.7, x(n)$  是一个左侧序列,利用长除法可以得到:

$$X(z) = \frac{-1+z}{0.84-1.9z+z^2} = -\frac{1}{0.84} + \frac{1}{0.84} \left(1 - \frac{1.9}{0.84}\right)z + \dots$$

序列 $\{x(n)\}$ 成为 $z$ 的升幂序列而且是一个左侧序列,其中 $x(0)=-1/0.84=-1.19, x(-1)=1/0.84(1-1.9/0.84)=1.5, x(-2)=\dots$ 。

## 2.9 习 题

1. 设 $u = (-4, -5)$ 和 $v = (12, 20)$ 是二维空间中的两个矢量,求 $-5u, 3u+2v, -v$ 和 $u+v$ 。对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ ,证明 $|au| + |bv| \geq |au + bv|$ 。

2. 将函数 $f(t) = \sin t$ 在多项式的集合 $\{t^n; n=0, 1, 2, \dots\}$ 所构成的基下展开,请问 $\{t^n; n=0, 1, 2, \dots\}$ 是正交集吗?

3. 请问3个矢量 $e_1 = (1, 2, 1), e_2 = (1, 0, -2), e_3 = (0, 4, 5)$ 构成的基是规范正交基吗?如果不是,请通过 $\{e_k; k=1, 2, 3\}$ 的线性组合构成一个规范正交基。

4. 设 $e_1 = (1, 0)$ 和 $e_2 = (0, 1)$ 是二维欧几里得空间中的单位矢量。设 $x_1 = (2, 3)$ 和 $x_2 = (-1, 2)$ 是非正交基的单位矢量。如果点 $w$ 关于欧几里得空间的坐标为 $(3, 1)$ ,请确定点 $w$ 关于非正交坐标基的坐标。

5. 设 $e_1 = (0.5, 0.5)$ 和 $e_2 = (0, -1)$ 是双正交基,请确定其对偶基。

6. 证明如果对于任意的 $b_1$ 和 $b_2$ 恒有 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ,则 $A=C$ 。设

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,计算 $(AB)^T$ 和 $B^T A^T$ 并且说明它们是相同的,问 $AB$ 与 $BA$ 是

否相等。

7. 求出下列矩阵  $A$  的特征值与特征矢量:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

并且构造变换矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP$  是对角矩阵。

8. 求出  $x(n)$  与  $D_2(n)$  的卷积, 其中  $x(n) = (1, 3, 0, 2, 4), n = 0, 1, 2, 3, 4, D_2(n)$  在式(2.45)中给定。画出  $x(n)$  与  $h(n) = x(n) * D_2(n)$  的图形。

9. 求出下列序列的  $z$  变换并确定其收敛域(ROC):

$$(1) x(n) = \begin{cases} \cos(n\alpha), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$(2) x(n) = \begin{cases} n, & 1 \leq n \leq m \\ 2m - n, & m + 1 \leq n \leq 2m - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

10. 对于下列离散系统求出其系统函数的  $z$  变换:

$$(1) y(n) = 3x(n) - 5x(n-1) + x(n-3)。$$

$$(2) y(n) = 4\delta(n) - 11\delta(n-1) + 5\delta(n-4), \text{其中}$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

### 参 考 文 献

- [1] E. A. Guillemin. The Mathematics of Circuit Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1949.
- [2] Ben Noble and James W. Daniel. Applied Linear Algebra. Upper Saddle River, N. J. : Prentice Hall, 1988.
- [3] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. Discrete-Time Signal Processing. Upper Saddle River, N. J. : Prentice Hall, 1989.

## 第 3 章 傅里叶分析

自 Joseph 傅里叶时代以来,傅里叶分析已被应用于工程科学的所有领域和一些社会科学领域。简单地说,傅里叶方法是信号分析最强有力的技巧,它将信号从一个域变换到另一个域,以便展现出信号的许多特征,人们通常将这个变换域称为频谱域或者频率域(spectral or frequency domain),而原来信号的域通常称为时间域或空间域(time or spatial domain)。傅里叶分析包括傅里叶变换(或者傅里叶积分)与傅里叶级数。傅里叶变换被应用于定义在实直线上的函数,而傅里叶级数用来分析周期函数。由于在许多方面小波分析类似于傅里叶分析,因此本章的目的是从信号分析的角度概述傅里叶分析的基本内容,但没有深入研究其数学细节,陈述的大部分数学恒等式和性质没有给出证明。

### 3.1 傅里叶级数

由于傅里叶分析与傅里叶级数涉及两类不同的函数,数学家通常对它们分别进行处理,然而,工程技术人员习惯地认为周期函数的周期可以趋向于无穷大,这样可以将傅里叶变换看成是傅里叶级数的扩展。按照这样的思路,我们首先讨论傅里叶级数。实值周期函数  $p(t)[p(t) = p(t+T)]$  的傅里叶级数为

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\omega_0 t} \quad (3.1)$$

这里

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.2)$$

式中  $\alpha_k$  是傅里叶系数;  $T$  表示周期  $T = 2\pi/\omega_0$ ;  $\omega_0$  是基本频率。函数集  $\{e_k\} = \{e^{ik\omega_0 t}; k \in \mathbb{Z}\}$  构成空间  $L^2[t_0, t_0+T]$  的完全正交基,也就是说

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e_k \bar{e}_l dt = T \delta_{k,l}$$

将系数  $\alpha_k$  写成内积的形式:

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \langle p(t), e^{ik\omega_0 t} \rangle \quad (3.3)$$

它表示函数  $p(t)$  在  $k\omega_0$  的正交分量,因此傅里叶级数是函数  $p(t)$  关于基底  $\{e_k\}$  的正交展开。在式(3.1)中的表示是精确的,然而如果我们截断级数,比如取  $\pm N$  项( $k = -N, \dots, N$ ),则会引起某些误差。如同在 2.6 节中所描述的正交投影一样,傅里叶系数使得这个均方误差最小。

傅里叶级数可以用其他形式表示。利用正弦函数和余弦函数可以将其表示为



$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \quad (3.4)$$

式中  $a_k$  和  $b_k$  都是实数。只是利用正调和函数的复表示可将其表示为

$$p(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (3.5)$$

这里

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \theta_k = \arctan\left(-\frac{b_k}{a_k}\right) \quad (3.6)$$

其中  $c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$  是复数,  $a_k$  和  $b_k$  的计算公式为

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (3.7)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (3.8)$$

## 3.2 例 子

### 3.2.1 整流正弦波

考虑如图 3.1 所示的具有周期  $T = \pi$  和  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\text{rad/s}$  的函数  $p(t) = |\sin t|$ 。因为函数  $p(t)$  关于  $t = 0$  是一个偶函数, 即满足条件  $p(-t) = p(t)$ , 因此对于所有的  $k$  恒

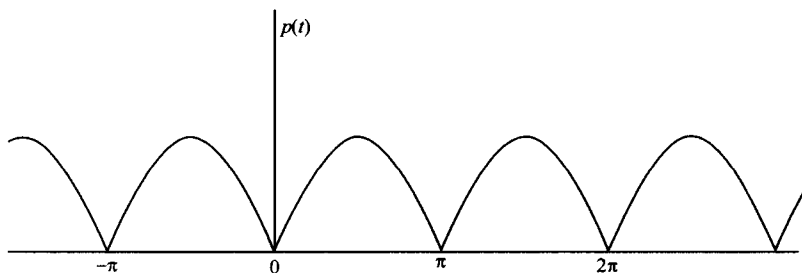


图 3.1 整流正弦波

有:  $b_k = 0$ 。系数  $\{a_k\}$  的计算如下:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos 2kt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(1-2k)t + \sin(1+2k)t] dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(1-2k)t}{1-2k} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(1+2k)t}{1+2k} \right]_0^{\pi} = \\ &= -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2 - 1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

因此  $p(t)$  的傅里叶级数为

$$p(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2kt$$

### 3.2.2 梳函数和傅里叶级数核 $K_N(t)$

在这个例子中,我们想给出周期冲激串(即  $\delta$  函数  $\delta(t)$  的周期串, $\delta$  函数在经典意义下不是一个函数,它被称为广义函数或分布,但是在本书中我们将其称为  $\delta$  函数)的傅里叶级数。周期为  $T$  的冲激串为

$$I_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.10)$$

傅里叶系数由下式来确定:

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.11)$$

由于在积分区域内唯一的  $n$  是  $n = 0$ ,从而可以得到:

$$\alpha_k = \frac{1}{T}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

所以冲激串  $I_T(t)$  的傅里叶级数展开为

$$I_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad (3.12)$$

考察式(3.12)的截断形式的性质具有指导意义。设  $K_N(t)$  是  $I_T(t)$  的  $(2N+1)$  项有限傅里叶和:

$$K_N(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N e^{jk\omega_0 t} \quad (3.13)$$

$K_N(t)$  通常称为傅里叶级数核。计算式(3.13)中几何级数的和得到:

$$K_N(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t}{\sin(\omega_0 t/2)}$$

图 3.2 中给出了当  $N = 4$  时  $K_N(t)$  的图形。对于  $N = 10$  和  $N = 15$ ,我们还计算了傅里叶级数核,但可以看到随着  $N$  值的增大除了振荡频率相应增大外,核的形状没有发生变化;随着  $N$  值的增大图形的主瓣(主峰)变窄, $K_N(t)$  的振荡特性是由 Gibbs 现象引起的,这将在后面讨论。通过加权式(3.12)中系数的幅度,这些振荡模式能够被改变,在天线排列设计<sup>[1]</sup> 这是一个通用的做法。

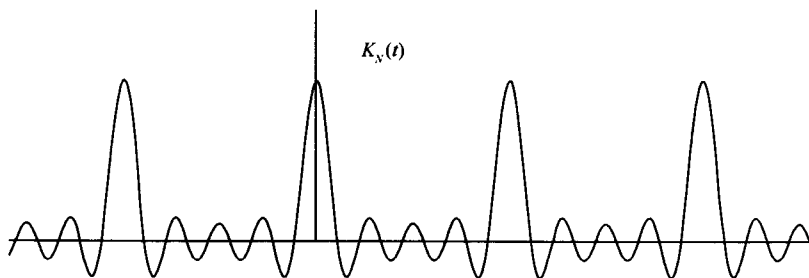


图 3.2 傅里叶级数核  $K_N(t)$

因为  $K_N(t)$  是周期函数, 我们仅需考虑  $K_N(t)$  在区间  $[-T/2, T/2]$  中核的性质。

显然  $t/\sin(\omega_0 t/2)$  在区间  $[-T/2, T/2]$  中是有界的, 且当  $N$  趋向于无穷大时,  $\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right]/t$  趋向于  $\delta(t)^{[2]}$ 。因此

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N(t) = \delta(t), \quad |t| \leq \frac{T}{2}$$

将这个过程应用到所有其他区间  $[kT - T/2, kT + T/2], k \in \mathbf{Z}$ , 可以得到:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N(t) = I_N(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(t - kT) \quad (3.14)$$

式(3.12)的冲激串在工程文献[3]中被称为梳函数(comb function, 参阅图 3.3)。

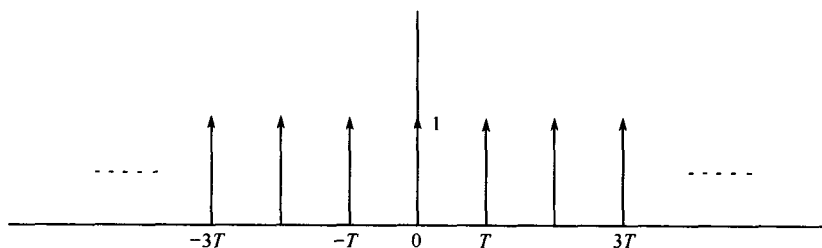


图 3.3 梳函数

利用傅里叶变换能够有效地推导出傅里叶级数的一些重要性质, 比如泊松求和公式、部分求和公式和采样定理等, 本章的后面将讨论这些课题。

### 3.3 傅里叶变换

为了将傅里叶级数扩展到傅里叶变换, 让我们考虑式(3.1)和式(3.2)。

利用式(3.2)和式(3.1)中的时间函数  $p(t)$  可以表示为

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt' \right] e^{jk\omega_0 t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t') e^{-jk\omega_0 t'} dt' \right] e^{jk\omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.15)$$

让周期  $T$  扩展到无穷大, 使得  $\omega_0$  趋向于  $d\omega$  以及  $k\omega_0$  趋向于  $\omega$ , 则式(3.15)中的求和成为一个积分:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p(t') e^{-j\omega t'} dt' \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (3.16)$$

方括号内的积分表示函数  $\hat{p}(\omega)$  为

$$\hat{p}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t') e^{-j\omega t'} dt' \quad (3.17)$$

从而式(3.16)成为

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.18)$$

式(3.17)与式(3.18)称为傅里叶变换对。

从现在开始,我们用  $f(t)$  表示时间域函数,而且约定  $p(t)$  表示周期时间函数。让我们用新的记号改写式(3.17)。

有限能量函数  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$  的傅里叶变换可以用积分表示为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.19)$$

利用第2章介绍的内积记号傅里叶变换也能够被表示为

$$\hat{f}(\omega) = \langle f(t), e^{j\omega t} \rangle \quad (3.20)$$

应该强调  $\hat{f}(\omega)$  是一个复值函数,而且能够通过幅度和相位表示为

$$\hat{f}(\omega) = |\hat{f}(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (3.21)$$

虽然实值函数  $f(t)$  被映射为复值函数  $\hat{f}(\omega)$ ,但是从  $f(t)$  的定义域到  $\hat{f}(\omega)$  的定义域的映射是由  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  的(也就是从  $t$  轴到  $\omega$  轴)。

式(3.20)的解释是非常重要的,这个式子表明对于一个给定的  $\omega_1$ ,  $\hat{f}(\omega_1)$  表示  $f(t)$  在  $\omega_1$  的分量。如果我们能够确定  $f(t)$  在  $\omega$  轴上的全分量,所有这些分量的叠加将重建原函数  $f(t)$ ,即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.22)$$

所以式(3.22)能够被看作是从  $f(t)$  的分量生成  $f(t)$  的叠加积分。这个积分通常被称为  $\hat{f}(\omega)$  的逆傅里叶变换。如果用变量  $t$  表示时间,则  $\hat{f}(\omega)$  称为  $f(t)$  的频谱;如果变量  $t$  表示空间,则  $\hat{f}(\omega)$  被称为空间频谱。

傅里叶变换在小波分析的研究中是非常重要的,而且在随后的章节中时常使用。作为一个例子,我们给出  $\delta$  函数的一些性质。

让我们回顾

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-y) dt = f(y) \quad (3.23)$$

因此  $\delta(t)$  的傅里叶变换为

$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \cdot 0} = 1 \quad (3.24)$$

根据  $\hat{\delta}(\omega)$  的逆变换得到如下的恒等式:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (3.25)$$

在式(3.22)中的逆变换公式证明如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t')} d\omega dt' = \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t-t')dt' = f(t)$$

因为傅里叶变换是唯一的,我们可以写成:

$$f(t) \Leftrightarrow \hat{f}(\omega)$$

这意味着对于每个函数  $f(t)$  存在唯一的傅里叶变换与其对应,反过来也一样。

### 3.4 傅里叶变换的性质

本章的目的不是详细讲解傅里叶分析,只是讨论一些仅仅与小波分析有关的性质。

#### 3.4.1 线性

如果  $f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ , 其中  $\alpha$  和  $\beta$  是常数, 则其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &\alpha \hat{f}_1(\omega) + \beta \hat{f}_2(\omega)\end{aligned}\quad (3.26)$$

式(3.26)对于有限个函数的和仍然成立。

#### 3.4.2 时间位移与时间尺度的变化

设函数  $f(t)$  有一个平移  $t_0$ , 则频谱的变化只是相移。实际上, 时间位移函数  $f_0(t) = f(t - t_0)$  的频谱可以表示为

$$\begin{aligned}\hat{f}_0(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega(u+t_0)} du = \\ &e^{-j\omega t_0} \hat{f}(\omega) = |\hat{f}(\omega)| e^{j\phi(\omega) - j\omega t_0}\end{aligned}\quad (3.27)$$

式中  $\phi(\omega)$  是原函数  $f(t)$  的相位。平移信号频谱的模仍然不变, 平移表现在频谱的相位项中。

设  $a$  是一个非零常数, 则  $f_a(t) = f(at)$  的频谱为

$$\hat{f}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt = \quad (3.28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega(u/a)} d\left(\frac{u}{a}\right) = \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3.30)$$

依据  $a$  是否大于或小于 1 其频谱将分别扩展或压缩。在以后小波分析的研究中, 我们将会随时看到这个重要的性质。

#### 3.4.3 频率位移与频率尺度的变化

用类似的方法可以得到频率位移与尺度变化的结果。如果  $\hat{f}_0(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$ , 则有

$$f_0(t) = f(t)e^{j\omega_0 t} \quad (3.31)$$

如果对于非零的值  $a$ , 定义  $\hat{f}_a(\omega) = f(a\omega)$ , 则

$$f_a(t) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) \quad (3.32)$$

### 3.4.4 矩

函数  $f(t)$  的  $n$  阶矩定义为

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt \quad (3.33)$$

一阶矩为

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = (-j)^{-1} \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \\ &= (-j)^{-1} \frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0} \end{aligned} \quad (3.34)$$

这个公式可以推广到  $n$  阶矩的情形:

$$M_n = (-j)^{-n} \frac{d^n \hat{f}(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=0} \quad (3.35)$$

### 3.4.5 卷积

两个函数  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的卷积定义为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(t-y) dy \quad (3.36)$$

我们用下面的记号表示式(3.36):

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \quad (3.37)$$

如果  $f_2(t)$  是  $\delta(t)$ , 则卷积积分恢复函数  $f_1(t)$ 。在图 3.4 中用框图表示线性系统, 其输入与输出关系为

$$O(t) = h(t) * i(t) \quad (3.38)$$

其中  $h(t)$  是系统响应函数, 因此, 如果  $i(t)$  是一个  $\delta$  函数, 则输出函数  $O(t)$  与  $h(t)$  相同。对于任意的输入函数  $f(t)$  卷积积分

$$O(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) i(t-\tau) d\tau \quad (3.39)$$

表示输出的叠加是输入一连串  $\delta$  函数的结果, 其幅度通过输入信号来进行调制。容易看到式(3.36)的卷积积分在频谱域为

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2(\omega)$$

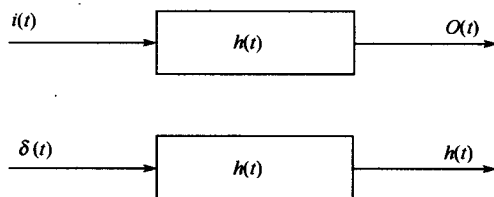


图 3.4 线性系统

### 3.4.6 帕塞瓦尔定理

帕塞瓦尔定理描述如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.40)$$

两个函数  $f(t)$  和  $g(t)$  与它们的傅里叶变换  $\hat{f}(\omega)$  和  $\hat{g}(\omega)$  满足帕塞瓦尔恒等式：

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega) \rangle \quad (3.41)$$

这能够从下式得到：

$$\begin{aligned} \langle f(t), g(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \overline{g(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} e^{-i\omega t} dt \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega) \rangle \end{aligned} \quad (3.42)$$

特别地，取  $g(t) = f(t)$  可以得到式(3.40)中给出的帕塞瓦尔定理。方程(3.40)表明了包含在信号中的能量。帕塞瓦尔定理表明时间域中的总能量  $\left[ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right]$  等于频谱域内的总能量  $\left[ (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right]$ 。根据帕塞瓦尔定理，既可以在频谱域中也可以在时间域中考虑信号的能量，而且为了计算方便，时间域与频谱域能够交替使用。

## 3.5 傅里叶变换的例子

我们计算时常出现在不同应用中的几个函数的傅里叶变换，为了计算傅里叶变换，可以直接利用 3.3 节给出的定义或利用傅里叶变换的性质。

### 3.5.1 矩形脉冲

矩形脉冲(如图 3.5 所示) $r(t)$  定义为

$$r(t) = u(t+T) - u(t-T) = \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.44)$$

可以得到

$$\hat{r}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{2T \sin(\omega T)}{\omega T} \quad (3.45)$$

函数  $\sin(\omega T)/(\omega T)$  称为 sinc 函数,它是矩形脉冲的傅里叶变换。对于  $T = \frac{1}{2}$ , 函数  $r\left(t - \frac{1}{2}\right) = \chi_{[0,1)}(t)$  被称为特征函数或一阶 B 样条。这是一个重要的函数,将在今后小波理论的研究中用到。

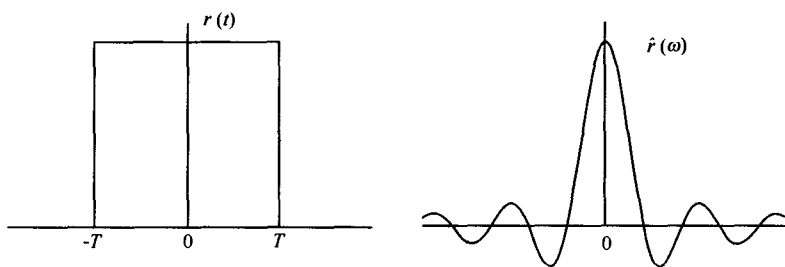


图 3.5 矩形脉冲及其傅里叶变换

### 3.5.2 三角形脉冲

对两个矩形脉冲取卷积,可以得到三角形脉冲(如图 3.6 所示)。三角形脉冲可以表示为

$$T_r(t) = r(t) * r(t) = \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} 2T\left(1 + \frac{t}{2T}\right), & -2T \leq t \leq 0 \\ 2T\left(1 - \frac{t}{2T}\right), & 0 \leq t \leq 2T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.47)$$

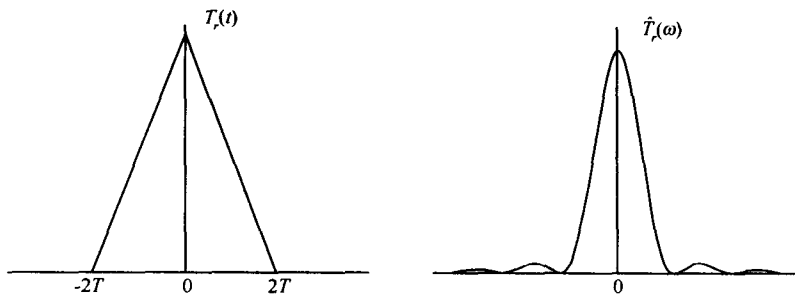


图 3.6 三角形脉冲及其傅里叶变换



根据卷积定理,可以得到:

$$\hat{T}_r(\omega) = \left( \frac{2T \sin \omega T}{\omega T} \right)^2 = \quad (3.48)$$

$$4T^2 \frac{\sin^2(\omega T)}{(\omega T)^2} \quad (3.49)$$

如果  $T = 1/2$ , 则有

$$T_r(t) = \begin{cases} 1+t, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.50)$$

而且  $\hat{T}_r(\omega) = [\sin(\omega/2)/(\omega/2)]^2$ 。  $T = 1/2$  时的三角形脉冲函数被称为二阶 B 样条, 作为样条小波的尺度函数起着重要的作用。

### 3.5.3 高斯函数

高斯函数是概率论和随机信号分析中最重要的函数之一, 在后面研究 Gabor 变换时起着主要作用。单位幅值的高斯函数为

$$g(t) = e^{-at^2} \quad (3.51)$$

$\hat{g}(\omega)$  能够被容易计算:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a[t^2 + j(\omega/a)t - \omega^2/4a^2] - \omega^2/4a} dt = \\ &= e^{-\omega^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a[t + j(\omega/2a)]^2} dt = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \end{aligned} \quad (3.52)$$

高斯函数的傅里叶变换仍然是一个高斯函数。高斯函数的波形及其傅里叶变换如图 3.7 所示。

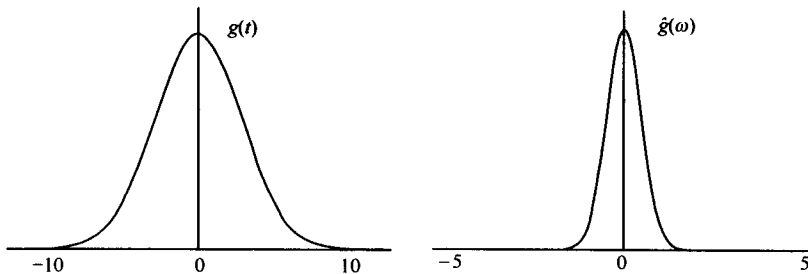


图 3.7 高斯函数及其傅里叶变换

参数  $a$  能够用来控制高斯脉冲的宽度。显然, 由式(3.51) 和式(3.52) 可知大的  $a$  值产生一个窄的脉冲, 但是其频谱在  $\omega$  轴上扩展。

### 3.6 泊松求和公式

现在回到傅里叶级数与泊松求和公式的讨论,利用傅里叶变换的一些性质将使推导变得更加简单。在很多应用中,为了分析的目的必须根据有限能量的非周期函数构造一个周期函数。

泊松求和公式将函数的时间域信息与其频谱紧密地联系在一起。设  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $f(t)$  的周期化函数  $f_p(t)$  按如下方式得到:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi n) \quad (3.53)$$

其中假设  $T = 2\pi$  是  $f_p(t)$  的周期,因此  $\omega_0 = 2\pi/T = 1$ ,而且  $f_p(t)$  的傅里叶级数表示为

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} \quad (3.54)$$

系数  $c_k$  确定如下:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_p(t) e^{-jkt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(t + 2\pi n) e^{-jkt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} f(t + 2\pi n) e^{-jkt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(\xi) e^{-jk(\xi - 2\pi n)} d\xi \end{aligned} \quad (3.55)$$

其中使用了变量代换  $\xi = t + 2\pi n$ 。由于求和与积分限能够有效地扩展到整个实直线  $\mathbf{R}$  上,可以将上式写成:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-jk\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k) \quad (3.56)$$

其中利用了傅里叶变换的定义。结合式(3.53)、式(3.54)和式(3.56),可以得到泊松求和公式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{jkt} \quad (3.57)$$

对于任意的周期  $T$ ,上述公式可以推广到下面的一般情形:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (3.58)$$

如果  $g(t)$  是  $f(t)$  的尺度变换,也就是说

$$g(t) = f(at), \quad a > 0 \quad (3.59)$$

则有

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3.60)$$

对于  $f(at)$  的泊松求和公式为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(at + 2\pi an) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) e^{ikt} \quad (3.61)$$

如果用  $t$  代替  $at$  的话,可以得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi an) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) e^{ikt/a} \quad (3.62)$$

另外两个形式的泊松求和公式将会在随后的章节中用到,这里只是描述它们而没有给出其证明,证明留给读者作为习题。

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-jk\omega} \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{\omega + 2\pi k}{a}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(ak) e^{-jk\omega} \quad (3.64)$$

## 单位分解

泊松求和公式一个直接的推论是可以找到基底,使得单位可以表示为该基底的线性的形式,将这个性质称为单位分解。在式(3.62)中取  $a = 1/2\pi$ ,则泊松求和公式成为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi k) e^{i2\pi kt} \quad (3.65)$$

如果函数  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  的频谱满足下列条件:

$$\hat{f}(2\pi k) = \delta_{0,k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.66)$$

也就是说

$$\hat{f}(0) = 1$$

而且

$$\hat{f}(2\pi k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

根据式(3.65)可以得到:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + n) \equiv 1 \quad (3.67)$$

一阶和二阶  $B$  样条函数是满足该性质的典型例子。

一阶  $B$  样条

$$N_1(t) = \chi_{[0,1)}(t)$$

$$\hat{N}_1(\omega) = \int_0^1 e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega}$$

$$\hat{N}_1(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} = 1$$

$$\hat{N}_1(2\pi k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

所以

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} N_1(t+k) \equiv 1 \quad (3.68)$$

二阶 B 样条

$$N_2(t) = N_1(t) * N_1(t) = \quad (3.69)$$

$$\begin{cases} t, & t \in [1, 0) \\ 2-t, & t \in [1, 2) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3.70)$$

根据卷积的性质可以得到:

$$\hat{N}_2(\omega) = [\hat{N}_1(\omega)]^2 \quad (3.71)$$

$$\hat{N}_2(\omega) = \left( \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \right)^2 \quad (3.72)$$

另一方面,我们有

$$\hat{N}_2(0) = 1 \quad (3.73)$$

$$\hat{N}_2(2\pi k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.74)$$

所以  $N_2(t)$  也满足单位分解的条件。实际上,由 B 样条的迭代关系知道:

$$N_m(t) = N_{m-1}(t) * N_1(t) = \quad (3.75)$$

$$\int_0^1 N_{m-1}(t-\tau) d\tau \quad (3.76)$$

从而可以得到  $\hat{N}_m(\omega) = [(1 - e^{-j\omega})/j\omega]^m$ , 显然满足单位分解的要求, 因此任意阶 B 样条都满足单位分解的性质。单位分解的图形如图 3.8 所示。

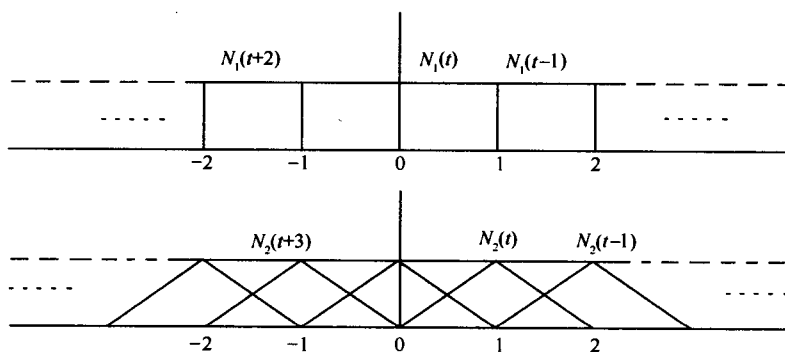


图 3.8 单位分解

### 3.7 采样定理

采样定理对于数字信号分析是十分重要的。采样定理说明, 如果  $f(t)$  是带宽为  $2\Omega$  的带限信号, 信号  $f(t)$  能够由它在等时间间隔点上的样本值精确地重建。相邻样本点之间的距离称为采样周期  $h$ , 采样周期不应超过  $\pi/\Omega$ 。函数  $f(t)$  利用下面的公式来恢复:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(kh) \frac{\sin[\Omega(t - kh)]}{\pi(t - kh)}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (3.77)$$

如果  $h = \pi/\Omega$ , 采样频率  $f_s = 1/h = \Omega/\pi$  被称为 Nyquist 采样率。理论上, 如果  $h < \pi/\Omega$ , 则  $f(t)$  总能够由样本点重构。然而, 由于 sinc 函数的无穷性, 没有误差的话我们不可能恢复  $f(t)$ 。

设  $\hat{f}(\omega)$  是  $f(t)$  的傅里叶变换:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

利用 Simpson 规则, 该积分能够用下式来逼近:

$$\hat{f}(\omega) \cong \hat{F}(\omega) = h \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(kh) e^{-j\omega kh} \quad (3.78)$$

利用式(3.64)中的泊松求和公式, 我们将  $\hat{F}(\omega)$  重新写为

$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &= h \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(kh) e^{-j\omega kh} = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{f}\left(\frac{\omega h + 2\pi k}{h}\right) = \\ &= \hat{f}(\omega) + \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi k}{h}\right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

因此,  $\hat{F}(\omega)$  等于  $\hat{f}(\omega)$  加上  $\hat{f}(\omega)$  在  $\omega$  轴上无穷多个平移的复制品。为了将  $\hat{f}$  与它的复制品分离, 平移量  $2\pi/h$  不小于  $2\Omega$  (如图 3.9 所示), 也就是说

$$\frac{2\pi}{h} \geq 2\Omega, \quad h \leq \frac{\pi}{\Omega} \quad (3.80)$$

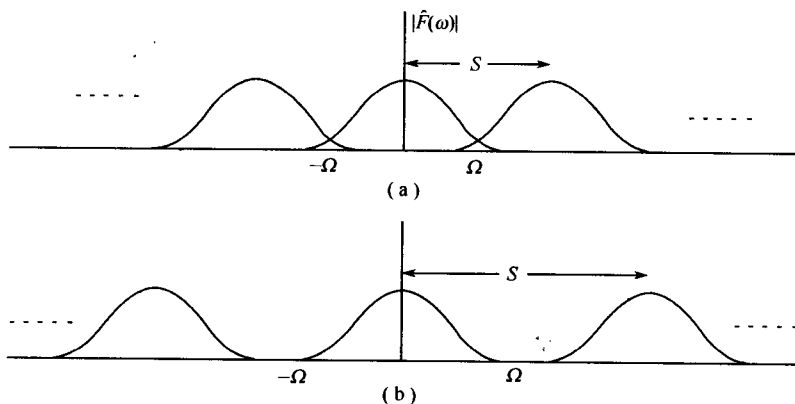


图 3.9

(a) 欠采样 ( $S = 2\pi/h < 2\Omega$ ); (b) 过采样 ( $S = 2\pi/h > 2\Omega$ )。

为了恢复原函数, 我们引入频谱窗:

$$\hat{W}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.81)$$

而且由下式来恢复  $\hat{f}(\omega)$ :

$$f(\omega) = \hat{F}(\omega)\hat{W}(\omega) \quad (3.82)$$

根据卷积定理,可以得到  $f(t)$ :

$$f(t) = F(t) * W(t) \quad (3.83)$$

因为  $W(t) = \sin \Omega t / \pi t$  是熟知的,根据逆傅里叶变换来计算  $F(t)$ :

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) e^{-jkh\omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{h}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-kh)} d\omega = \\ &= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \delta(t-kh) \end{aligned} \quad (3.84)$$

其中我们使用了式(3.25)。利用卷积公式来恢复函数  $f(t)$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-kh) W(t-\tau) d\tau = \\ &= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) W(t-kh) = \\ &= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \frac{\sin[\Omega(t-kh)]}{\pi(t-kh)} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi} \end{aligned} \quad (3.85)$$

其中我们使用了  $\Omega h = \pi$ ,而值得注意的是式(3.85)表示一个插值公式。因为  $\sin[\Omega(t-kh)]/[\Omega(t-kh)]$  在  $t = kh$  的值是1而在所有其他采样点的值均是0,所以其他采样点的值对  $kh$  点的函数值没有影响:

$$f(kh) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \frac{\sin 0}{0} = f(kh) \quad (3.86)$$

因此,利用函数  $f(t)$  的采样值并且以 sinc 函数作为插值函数可以重构函数  $f(t)$ 。

### 3.8 部分和与Gibbs 现象

傅里叶级数的部分和是原周期函数的最小二乘误差逼近。设  $p(t)$  是周期为  $T$  的周期函数,  $p_M(t)$  是其傅里叶级数  $(2M+1)$  项的部分和:

$$p_M(t) = \sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.87)$$

傅里叶系数由下式确定:

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.88)$$

将  $\alpha_k$  代入式(3.87),可以得到部分和:

$$p_M(t) = \sum_{k=-M}^M \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} e^{jk\omega_0 t} d\tau \quad (3.89)$$

交换求和与积分的次序,可以得到:

$$p_M(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(\tau) \sum_{k=-M}^M e^{jk\omega_0(t-\tau)} d\tau =$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(\tau) \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)(t-\tau)\omega_0}{\sin \frac{1}{2}(t-\tau)\omega_0} d\tau \quad (3.90)$$

这正是原周期函数与 3.2.2 小节所讨论的傅里叶级数核之间的卷积,容易看到  $K_N$  的振荡特性影响到部分和。若  $p(t)$  是一个矩形脉冲串或具有跳跃不连续点的周期函数,则部分和级数将围绕不连续点显示出振荡性,这通常称为 Gibbs 现象。如果不考虑逼近中项的数目并且将超过比例部分保持为常数,则当  $M \rightarrow \infty$  时部分和收敛于不连续的中点<sup>[4]</sup>。

### 3.9 离散时间信号的傅里叶分析

由于傅里叶级数的系数和傅里叶变换的计算需要积分,因此人们通常用初等函数比如正弦函数、余弦函数、指数函数给出函数的解析描述,这就是通常的幂级数展开。一般来说,现实生活中遇到的大部分信号不能由初等函数表示,我们必须使用数值算法计算频谱。若信号是采样信号,则离散傅里叶级数和离散时间傅里叶变换可以直接计算,它们将会产生原始模拟信号的近似频谱。

#### 3.9.1 离散傅里叶基与离散傅里叶级数

对于周期为  $N$  的周期序列,我们有:

$$f_p(n+mN) = f_p(n), \quad m \in \mathbf{Z} \quad (3.91)$$

对于这个周期序列的傅里叶基仅有  $N$  个基函数,即

$$e_k(n) = e^{(j2\pi/N)kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.92)$$

由于对于整数  $n$  有:  $e^{j2\pi n} = 1$ , 因此能够容易地证明该基的周期性:

$$e_{k+N} = e^{(j2\pi/N)(k+N)n} = e_k \cdot e^{j2\pi n} = e_k \quad (3.93)$$

所以  $f_p(n)$  可以展开为下面的形式:

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_k e_k(n) = \quad (3.94)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e^{(j2\pi/N)kn} \quad (3.95)$$

而且能够由下式计算系数:

$$\alpha_k = \langle f_p(n), e^{(j2\pi k/N)n} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_p(n) e^{(-j2\pi k/N)n} \quad (3.96)$$

式(3.94)和式(3.96)构成离散周期序列及其离散谱的变换对。从式(3.96)很容易知道傅里叶系数  $\{\alpha_k\}$  也以  $N$  为周期,即

$$\alpha_k = \alpha_{k+mN}, \quad m \in \mathbf{Z}$$

**例 1:** 确定下列序列的傅里叶级数的系数:

$$f(n) = \cos(\sqrt{5}\pi n)$$

**解:** 由于不存在整数  $N$  使得  $f(n+N) = f(n)$ , 因此所给序列不是周期序列, 所以  $f(n)$  没有离散傅里叶表示。

**例 2:** 确定下列序列的傅里叶级数表示:

$$(1) f(n) = \cos(n\pi/5)。$$

$$(2) f(n) = \{1, 1, 0, 0\}。$$

**解:**

(1) 直接利用式(3.96) 计算系数, 可以用指数形式表示余弦函数:

$$f(n) = \frac{1}{2}(e^{j(2\pi/10)n} + e^{-j(2\pi/10)n}) \quad (3.97)$$

这个序列的周期被认为是  $N = 10$ 。由于式(3.97) 与式(3.95) 中指数级数的形式一样, 因此可以得到:

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 1 \\ \frac{1}{2}, & k = 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.98)$$

(2) 利用式(3.96) 来计算傅里叶系数:

$$\alpha_k = \frac{1}{4}(1 + e^{-j(2\pi/4)k}), k = 0, 1, 2, 3$$

我们有

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{4}(1 - j), & k = 1 \\ 0, & k = 2 \\ \frac{1}{4}(1 + j), & k = 3 \end{cases} \quad (3.99)$$

序列及其幅度频谱如图 3.10 所示。

### 3.9.2 离散时间傅里叶变换

若离散信号是非周期的, 我们可以认为它是周期为  $N = \infty$  的周期信号。在这种情况下, 我们将离散傅里叶级数分析推广到离散时间傅里叶变换(DTFT), 类似于模拟域中的推广。对于离散时间傅里叶变换, 时间变量( $n$ ) 是离散的, 而频率变量( $\omega$ ) 是连续的, 这是因为:

$$\Delta\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \rightarrow \omega$$



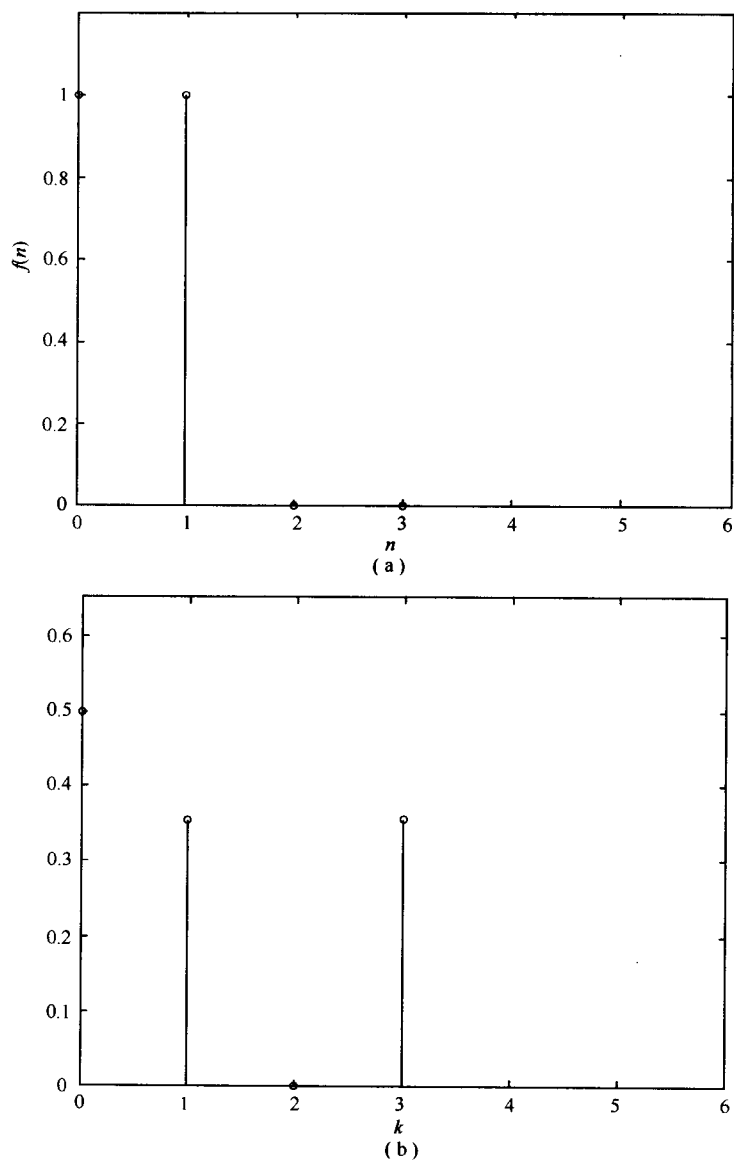


图 3.10

(a) 序列  $f(n)$ ; (b) 序列  $f(n)$  的幅度频谱  $|a_k|$ 。

离散时间傅里叶变换对可以明确表示为

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\omega} \quad (3.100)$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega) e^{jn\omega} d\omega \quad (3.101)$$

例 3: 确定指数序列的频谱

$$f(n) = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \dots\}, \quad |a| < 1$$

解:利用式(3.100)可以得到:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - (ae^{-j\omega})} \quad (3.102)$$

在第2章,我们已经指出用  $e^{j\omega}$  代替变量  $z$ ,根据  $z$  变换能够得到离散时间傅里叶变换。例如,设  $z$  变换为

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - (az^{-1})}$$

从而用  $e^{j\omega}$  代替变量  $z$  可以得到:

$$F(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - (ae^{-j\omega})} = \hat{f}(\omega)$$

$z$  变换  $F(z)$  和离散时间傅里叶变换  $[\hat{f}(\omega) = F(z) \big|_{z=e^{j\omega}}]$  将在小波构造的推导与讨论中交替使用。

### 3.10 离散傅里叶变换

为了恢复原始离散时间信号,我们必须估计在3.9节中讨论过的逆离散时间傅里叶变换中的积分。我们不去估计该积分,通过离散化频率( $\omega$ )轴能够获得一个好的逼近。

因为函数  $f(t)$  是带限的(如果不是带限的,仅需让其通过具有充分带宽的低通滤波器),仅需要离散化区间  $[-\Omega, \Omega]$ ,即

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{Nh}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (3.103)$$

式(3.19)中的积分近似为级数的和,即

$$\hat{f}(\omega_n) \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f(kh) e^{-j\omega_n kh} = h \hat{f}(n) \quad (3.104)$$

其中

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kh) e^{-j(2\pi kn/N)} \quad (3.105)$$

容易证明利用式(3.105)估计离散傅里叶变换需要  $O(N^2)$  次运算。我们能够利用著名的快速傅里叶变换(FFT)算法计算离散傅里叶变换(DFT),此时需要  $O(N \log_2 N)$  次运算。人们普遍使用的FFT算法之一是Danielson和Lanczos给出的算法,该算法中假定  $N$  能够被2连续地整除,长度为  $N$  的离散傅里叶变换数据能够写成两个离散傅里叶变换的和,每个的长度为  $N/2$ ,这个过程能够被重复进行直到我们获得两个点的离散傅里叶变换,这就是著名的基数—2FFT算法。我们没有给出算法的许多细节,有兴趣的读者可以参阅有关优秀的专著。值得指出的是,对长度为  $N$  的数据进行适当排列,我们能够在  $O(N \log_2 N)$  次运算内计算离散傅里叶变换,其中  $N$  是2的整数幂。如果  $N$  不是2的整数幂,通过添加零总能够使得数据序列的长度是2的整数幂。

### 3.11 习 题

1. 证明对函数  $f \in L^2(-\infty, \infty)$  取复共轭和傅里叶变换满足如下关系:

$$\widehat{\bar{f}}(\eta) = \overline{\widehat{f}(-\eta)}$$

对于任意的  $\eta \in \mathbf{R}$ .

2. 证明条件

$$\frac{d^j}{d\omega^j} \widehat{\psi}(\omega) \big|_{\omega=0} = 0$$

等价于矩条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^j \psi(t) dt = 0$$

对于任意的正整数  $j$ .

3. 证明 Dirichlet 核

$$D_n(u) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\pi \sin(u/2)}$$

画出  $n = 6$  时核的图形。

4. 给出  $f(t) = e^{j\pi t}$ ,  $-\pi \leq t < \pi$  且  $T = 2\pi$  的傅里叶级数。

5. 确定高斯函数  $g_a(t) = Ae^{-at^2}$  的能量规范化常数  $A$ , 并且给出傅里叶变换的表达式。

6. 将泊松求和公式推广到任意周期  $T$ 。

7. 在频谱域推导下列泊松求和公式:

$$\sum_k \widehat{f}(\omega + 2\pi k) = \sum_k f(k) e^{-jk\omega}$$

$$\frac{1}{a} \sum_k \widehat{f}\left(\frac{\omega + 2\pi k}{a}\right) = \sum_k f(ak) e^{-jk\omega}$$

### 参 考 文 献

- [1] R. S. Elliott, The Theory of Antenna Arrays. Vol. 2 of Microwave Scanning Antennas, R. C. Hansen (Ed.), San Diego, Calif.: Academic Press, 1966.
- [2] A. Papoulis, The Fourier Integral and Its Applications. New York: McGraw-Hill Book Company, 1962.
- [3] K. Iizuka, Engineering Optics, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [4] W. W. Harman and D. W. Lytle, Electrical and Mechanical Networks, An Introduction to Their Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, 1962.

## 第4章 时频分析

在第3章中我们简单地总结了傅里叶分析以唤起读者的记忆,指出了分析中出现的一些重要概念,它们在时频分析的讨论中是有用的。从傅里叶变换式(3.19)的定义知道,只有知道实直线 $(-\infty, \infty)$ 上的全部波形才能进行积分,这是因为函数 $e^{j\omega t}$ 或 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 是整体函数。根据这一点我们知道,函数在任何点沿 $t$ 轴的扰动都会影响 $\omega$ 轴上的每个点,反过来也是一样的。如果我们将信号 $f(t)$ 想象为对 $e^{j\omega t}$ 的调制函数,则在 $t$ 轴上任何点的扰动将传播到整个 $\omega$ 轴。关于傅里叶变换另一个应注意的问题是每次积分只能在一个频率上进行估计,从信号处理的角度来看,这是很不方便的。尽管计算数字变换存在快速算法,但不能实时进行,而且在计算离散或快速傅里叶变换之前,所有必需的数据必须存储在存储器中。

尽管傅里叶分析无疑是用途最多的方法,但当人们对信号中所有的局部频率成分感兴趣时它并不合适,换句话说,傅里叶频谱不能提供信号在时间域的任何信息。为了说明这一点,让我们考察图4.1(a)中的函数,它表示时间域频率为4Hz且在 $t = 0.7\text{s}$ 和 $t = 1.3\text{s}$ 秒附近具有扰动的截断正弦。我们从第3章知道,时间域中的正弦函数在频域中将表现为 $\delta$ 函数,反过来也一样。由于正弦函数的截断,在图4.1(b)看到在4Hz附近出现了频率扩展。从图4.1(b)的傅里叶频谱知道在4Hz附近尖峰的脉冲主要是由4Hz的正弦函数

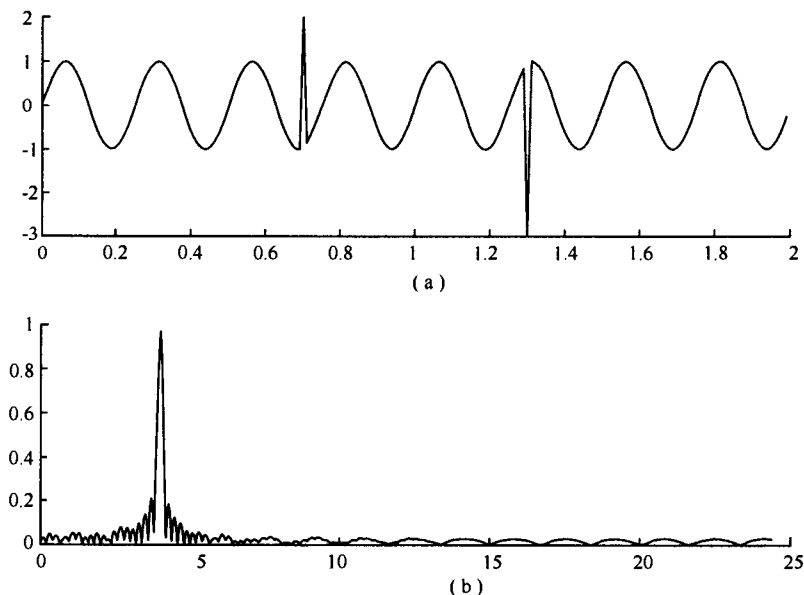


图 4.1

(a) 在  $t = 0.7$  和  $t = 1.3$  具有扰动的正弦信号; (b) 幅度频谱。

所引起的,而出现在整个频率轴上的小波纹主要是由时间域中的某些  $\delta$  函数(尖峰的变化)所造成的,然而,通过观察图 4.1(b) 中的频谱不能指出这些  $\delta$  函数在时间轴上的位置,这能够通过  $\delta$  函数的傅里叶表示式(3.25)给出简单的解释。 $\delta$  函数在  $t=0$  需要无穷多个正弦函数有益地组合在一起,但这与在所有点  $t \neq 0$  导致 0 相互抵触,这表明利用全局函数  $e^{j\omega t}$  表示局部函数是非常麻烦而且是无效的。为了克服这个缺陷,局部分析需要时间域与频率域两方面的组合来达到时频分析的目的,利用时频分析我们可以抽取信号中的局部频率成分。由于在实际中人们可能只是对频谱中某些特殊部分感兴趣,而且我们可能希望知道时间域信号中那些对频谱中某个特征做出主要贡献的部分,这一点是非常重要的。

为了知道信号的局部频率成分,通常的做法是:首先从给定的信号中截取所期望的部分,然后再对所截取的部分进行傅里叶变换,这种时频分析方法称为短时傅里叶变换(STFT)。在讨论短时傅里叶变换之前,让我们先讨论窗函数的概念,利用窗函数人们能够截取信号中感兴趣的部分。

## 4.1 窗函数

信号中人们期望的部分能够由原信号与另外一个函数的乘积来获得,此函数在期望的区间外为零。设  $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$  是一个实值窗函数,则乘积  $f(t)\phi(t-b) = f_b(t)$  将含有  $f(t)$  在  $t=b$  附近的信息。特别地,若  $\phi(t) = \chi_{[-\tau, \tau]}(t)$ , 如图 4.2 所示,则

$$f_b(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [b-\tau, b+\tau] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4.1)$$

通过改变参数  $b$ ,我们能够沿着时间轴移动窗函数来分析函数  $f(t)$  在不同区间的局部特性。

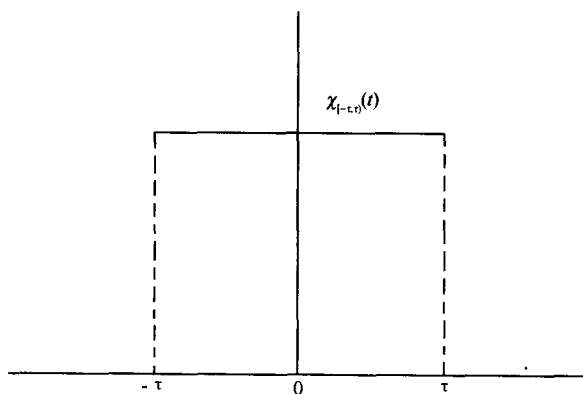


图 4.2 特征函数

窗函数两个最重要的参数是它的中心和窗宽,窗宽通常是半径的两倍。显然,在图 4.2 中窗函数的中心和标准宽度分别是 0 和  $2\tau$ 。对于一般的窗函数  $\phi(t)$ ,我们定义其中心  $t^*$  为

$$t^* = \frac{1}{\|\phi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\phi(t)|^2 dt \quad (4.2)$$

而均方根(RMS)半径定义为

$$\Delta_\phi = \frac{1}{\|\phi\|} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |\phi(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

对于图 4.2 中的特殊窗,容易验证  $t^* = 0$  且  $\Delta_\phi = \tau/\sqrt{3}$ 。因此均方根窗宽小于标准窗宽的  $1/\sqrt{3}$ 。

如上所描述的具有有限窗宽  $\Delta_\phi$  的函数  $\phi(t)$  被称为时间窗。类似地,我们有频率窗  $\hat{\phi}(\omega)$ ,其中心为  $\omega^*$ ,而均方根半径为  $\Delta_{\hat{\phi}}$ ,其定义类似于式(4.2)和式(4.3):

$$\omega^* = \frac{1}{\|\hat{\phi}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \quad (4.4)$$

$$\Delta_{\hat{\phi}} = \frac{1}{\|\hat{\phi}\|} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

正如我们知道的,理论上函数在时间域与频率域不可能同时是有限的,然而存在  $\phi(t)$  使得  $\Delta_\phi$  与  $\Delta_{\hat{\phi}}$  都是有限的,在这种情况下函数  $\phi(t)$  被称为时间频率窗。容易验证,对于图 4.2 中的窗,  $\omega^* = 0$  且  $\Delta_{\hat{\phi}} = \infty$ ,这个窗是最好(理想)的时间窗,但是最差(不可接受)的频率窗。

时间频率窗的特性是其时间频率宽的乘积  $\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}}$ ,根据测不准原理知道它是下有界的,且由下式给出:

$$\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}} \geq \frac{1}{2} \quad (4.6)$$

当且仅当  $\phi$  是高斯型函数时等号成立(参阅 3.5.3 小节)。

## 4.2 短时傅里叶变换

这一章开始时已经指出,我们能够获得信号  $f(t)$  在某个期望时刻  $t=b$  的近似频率成分,利用合适的窗函数  $\phi(t)$  生成窗函数  $f_b(t) = f(t)\phi(t-b)$ ,然后对  $f_b(t)$  取傅里叶变换,这是短时傅里叶变换(STFT)。通常我们能够定义函数  $f(t)$  关于窗函数  $\phi(t)$  的短时傅里叶变换,在时频平面位置  $(b, \xi)$  处的值为

$$G_\phi f(b, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi_{b, \xi}(t)} dt \quad (4.7)$$

其中

$$\phi_{b, \xi}(t) = \phi(t-b) e^{i\xi t} \quad (4.8)$$

在式(4.7)中的窗函数  $\phi(t)$  允许是复值函数并且满足条件:

$$\hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt \neq 0$$

换句话说,  $\hat{\phi}(\omega)$  相当于低通滤波器,即其频谱在  $\omega = 0$  非零。因为短时傅里叶变换加窗的特性,这个变换也被称为窗傅里叶变换或者移动窗傅里叶变换。

计算任何频率点的频谱成分时,在傅里叶变换的情形下必须知道函数  $f(t)$  在整个时间轴上的值,而短时傅里叶变换仅需知道  $f(t)$  在该区间上的值且  $\phi(t-b)$  在此区间上非

零,换句话说, $G_{\delta}f(b, \xi)$  给出了  $f(t)$  在点  $t = b$  邻近的近似频谱。

如果在式(4.7)中的窗函数  $\phi(t-b)$  被看作是正弦函数  $e^{-j\xi t}$  的调制函数,则短时傅里叶变换能够被写成:

$$G_{\delta}f(b, \xi) = \langle f(t), \phi(t-b)e^{j\xi t} \rangle \quad (4.9)$$

函数  $\phi_{b,\xi}(t) = \phi(t-b)e^{j\xi t}$  相当于波包,正弦波在包络函数  $\phi(t)$  内振荡。此外,式(4.8)表明这些波包中的每一个相当于是一个基函数,因此短时傅里叶变换可以被理解为函数  $f(t)$  关于这个基在时间频率平面内的分量。

#### 4.2.1 逆变换公式

通过取  $G_{\delta}f(b, \xi)$  的逆傅里叶变换人们能够恢复时间函数  $f_b(t)$ :

$$f_b(t) = \phi(t-b)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\delta}f(b, \xi) e^{j\xi t} d\xi \quad (4.10)$$

在式(4.10)两端乘以  $\overline{\phi(t-b)}$  然后取关于  $b$  的积分,则可以得到原始信号  $f(t)$ 。最后的恢复公式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \|\phi(t)\|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{j\xi t} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\delta}f(b, \xi) \overline{\phi(t-b)} db \quad (4.11)$$

可以看到式(4.7)与式(4.11)之间的对称性类似于傅里叶变换中式(3.19)与式(3.22)之间的对称性。

#### 4.2.2 Gabor 变换

D. Gabor 在文献[1]中研究了 Gabor 变换,利用高斯函数

$$g_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi\alpha} e^{-t^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (4.12)$$

作为窗函数。式(4.12)的傅里叶变换为

$$\hat{g}_{\alpha}(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}, \quad \alpha > 0 \quad (4.13)$$

$g_{\alpha}(t)$  窗的性质能够利用 4.1 节中的公式来计算。计算可以得到  $t^* = \omega^* = 0$ ,  $\Delta g_{\alpha} = \sqrt{\alpha}$  和  $\Delta \hat{g}_{\alpha} = 1/2\sqrt{\alpha}$ ,从而可以知道  $\Delta g_{\alpha} \Delta \hat{g}_{\alpha} = 0.5$  达到了测不准原理的下界。

#### 4.2.3 时频窗

让我们考虑式(4.7)中的窗函数  $\phi(t)$ 。若  $t^*$  是窗函数的中心和  $\Delta_{\phi}$  是窗的半径,则式(4.7)给出了函数  $f(t)$  在下列时间窗内的信息:

$$[t^* - \Delta_{\phi}, t^* + \Delta_{\phi}] \quad (4.14)$$

为了推导出频域内相应的窗,将帕塞瓦尔恒等式(3.41)应用于式(4.7),我们有

$$\begin{aligned} G_{\delta}f(b, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi(t-b)} e^{-j\xi t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-j\xi b} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega - \xi)} e^{j\omega b} d\omega = \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$e^{-j\xi b} [\hat{f}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega - \xi)}]^V(b) \quad (4.16)$$

式中符号  $V$  表示逆傅里叶变换, 可以看到式(4.15) 有一个类似于式(4.7) 的形式。若  $\omega^*$  是窗函数的中心而  $\Delta_\omega$  是窗函数  $\hat{\phi}(\omega)$  的半径, 则式(4.15) 给出了函数  $\hat{f}(\omega)$  在下列区间内的信息:

$$[\omega^* + \xi - \Delta_\omega, \omega^* + \xi + \Delta_\omega] \quad (4.17)$$

因为在式(4.7) 与式(4.15) 中的表示是类似的, 短时傅里叶变换给出了函数  $f(t)$  在下列时间频率窗内的信息:

$$[t^* + b - \Delta_t, t^* + b + \Delta_t] \times [\omega^* + \xi - \Delta_\omega, \omega^* + \xi + \Delta_\omega] \quad (4.18)$$

图 4.3 说明了由式(4.17) 给出的时间频率窗的概念, 这里我们假设  $t^* = \omega^* = 0$ 。

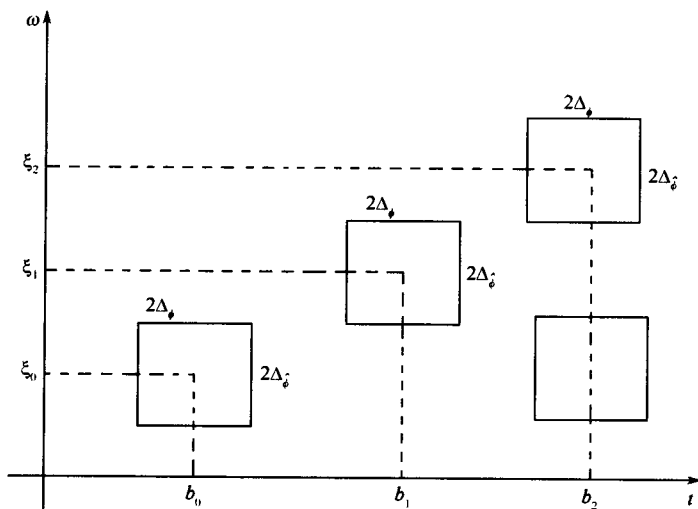


图 4.3 短时傅里叶变换的时间频率窗( $t^* = \omega^* = 0$ )

#### 4.2.4 短时傅里叶变换的性质

##### 1. 线性

设  $f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$  是两个函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的线性组合, 加权值  $\alpha$  和  $\beta$  与  $t$  独立, 则  $f(t)$  的短时傅里叶变换:

$$G_\phi f(b, \xi) = \alpha(G_\phi f_1)(b, \xi) + \beta(G_\phi f_2)(b, \xi) \quad (4.19)$$

是两个函数各自短时傅里叶变换的线性和, 所以短时傅里叶变换是线性变换。

##### 2. 时移性

设  $f_0(t) = f(t - t_0)$ , 则

$$\begin{aligned} G_\phi f_0(b, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \phi(t - b) e^{-j\xi t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(t - (b - t_0)) e^{-j\xi t} e^{-j\xi t_0} dt = \\ &= e^{-j\xi t_0} (G_\phi f)(b - t_0, \xi) \end{aligned} \quad (4.20)$$

方程(4.20) 表明, 如果原函数  $f(t)$  在时间轴上有一个平移量  $t_0$ , 则短时傅里叶变换在时



间频率域的位置将在时间方向移动同样的大小,而在频率方向仍将保持不变,除位置变化外,短时傅里叶变换的相位也存在变化,而且与时间的平移成比例。

### 3. 频移性

设  $f(t)$  是载波信号  $e^{j\omega_0 t}$  的调制函数且满足:

$$f_0(t) = f(t)e^{j\omega_0 t} \quad (4.21)$$

则  $f_0(t)$  的短时傅里叶变换由下式给定:

$$G_{\phi}f_0(b, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}\phi(t-b)e^{-j\xi t} dt = G_{\phi}f(b, \xi - \omega_0) \quad (4.22)$$

方程(4.22)意味着除了在时间频率域的新位置上沿频率轴具有载波频率  $\omega_0$  的移位外,  $f_0(t)$  与  $f(t)$  的短时傅里叶变换具有相同的振幅和相位。

## 4.3 离散短时傅里叶变换

类似于 3.10 节的讨论,利用适当的采样函数  $f(t)$  和窗函数  $\phi(t)$ ,我们能够用级数的和有效地估计式(4.7)的积分。短时傅里叶变换的离散形式能够被表示为

$$G_{\phi}f(b_n, \xi_n) \approx h \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\phi(t_k - b_n)e^{-j\xi_n t_k} \quad (4.23)$$

其中

$$t_k = b_k = kh, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.24)$$

和

$$\xi_n = \frac{2\pi n}{Nh}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.25)$$

特别地,当  $h = 1$  时,我们有:

$$G_{\phi}f(n, \xi_n) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\phi(k-n)e^{-j(2\pi kn/N)} \quad (4.26)$$

### 短时傅里叶变换的例子

我们举例说明短时傅里叶变换的计算以及窗宽对分辨率的影响,此例类似于文献[2]中的例子,信号为

$$f(t) = \sin 2\pi\nu_1 t + \sin 2\pi\nu_2 t + K[\delta(t-t_1) + \delta(t-t_2)] \quad (4.27)$$

其中两个正弦函数的频率分别为  $\nu_1 = 500\text{Hz}$  和  $\nu_2 = 1000\text{Hz}$ ,而两个  $\delta$  函数发生在  $t_1 = 192\text{ms}$  和  $t_2 = 196\text{ms}$  处。我们任意地选取  $K = 3$ ,将矩形窗应用于函数,而且选择了4个大小不同的窗来计算短时傅里叶变换。信号与窗函数都在  $8\text{kHz}$  采样,窗的尺寸从  $16\text{ms}$  变化到  $2\text{ms}$ ,而且窗内对应的样本数分别是  $128, 64, 32$  和  $16$ 。由于  $\delta$  函数被  $32$  个样本所分离,因此当窗的尺寸等于或大于  $32$  个样本时窗就不是足够的窄来分辨  $\delta$  函数。

为了计算短时傅里叶变换,我们将 FFT 算法应用于信号和窗函数的乘积。每次我们计算  $128$  点 FFT 而窗向右移动一个样本。图 4.4 给出了函数  $f(t)$ ,而其短时傅里叶变换的结果如图 4.5 所示。

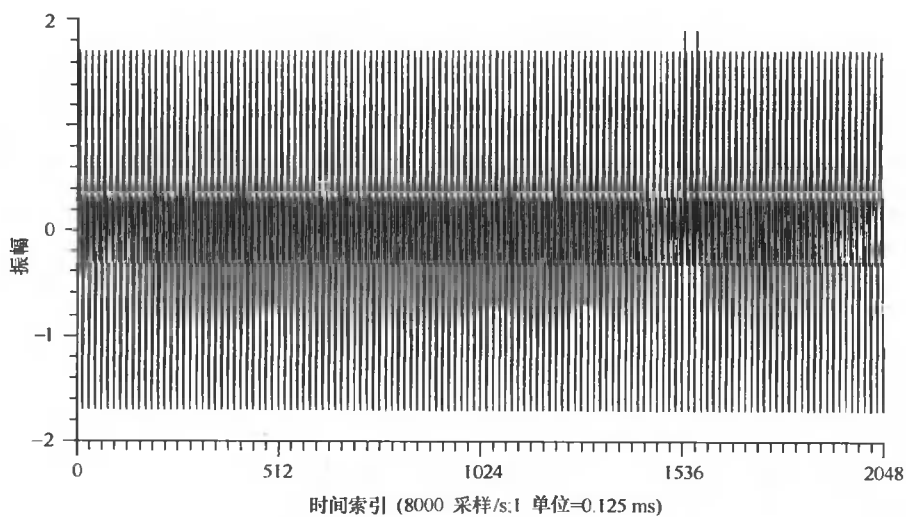


图 4.4 短时傅里叶变换如图 4.5 所示的信号

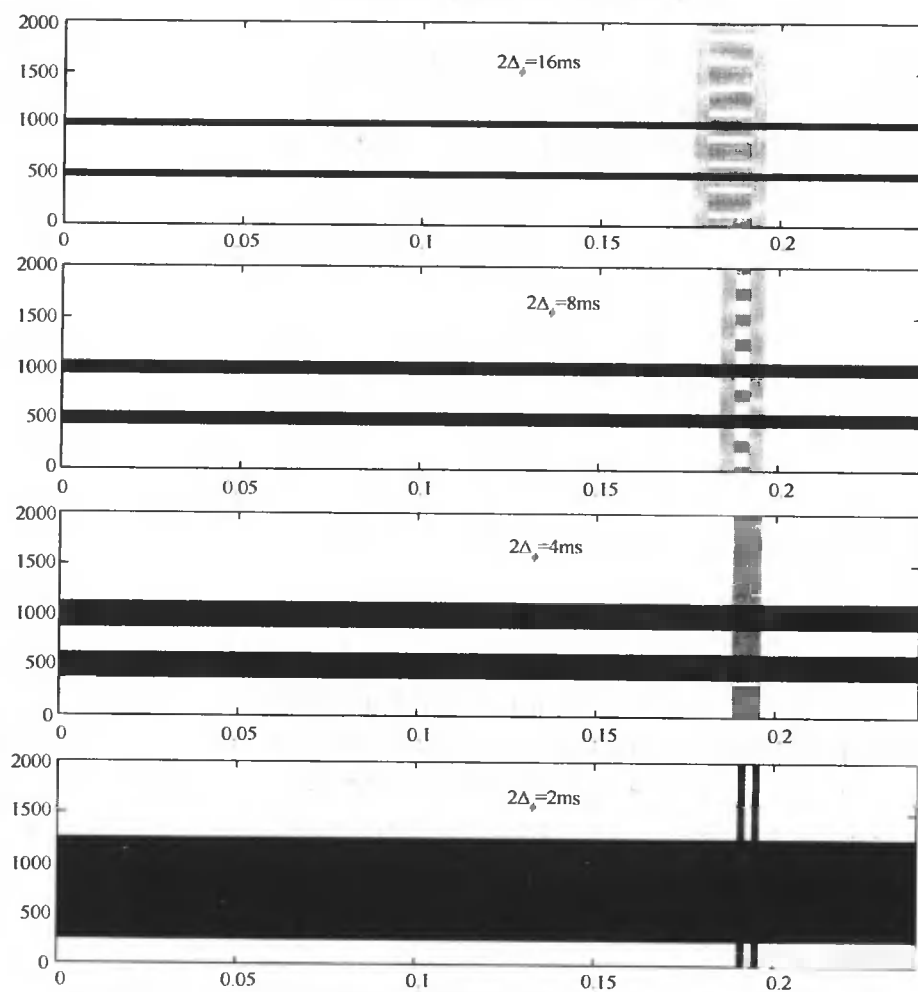


图 4.5 图 4.4 中所示信号在不同窗宽( $2\Delta_\phi$ ) 下的短时傅里叶变换  
(水平轴是时间(s) 而纵轴是频率(Hz))

一开始,当时间窗较宽时  $\delta$  函数根本无法分辨,然而,根据窗在频谱域中有较高的分辨率,两个频率能够被很好地识别。随着窗的尺寸不断变小,我们开始看见两个  $\delta$  函数,而频率分辨率逐渐变差。对于 16 个样本的窗,我们能够很容易识别  $\delta$  函数,但对于两个频率来说则不能精确地分辨。为了识别频率和时间轴中的事情,每次我们改变窗的尺寸都必须计算短时傅里叶变换。利用短时傅里叶变换进行信号处理时,计算负担是一个严重的问题。

## 4.4 离散 Gabor 表示

正式写出 4.2.2 小节中的 Gabor 变换,可以得到:

$$G_{g_a} f(b, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_a(t-b)} e^{-j\xi t} dt = \frac{1}{2\alpha\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(t-b)^2/4\alpha} e^{-j\xi t} dt \quad (4.28)$$

其中  $-\infty \leq b, \xi \leq \infty$ , Gabor 变换在时间频率平面上是稠密的。在式(4.28)中 Gabor 变换的计算负担是一个非常严重的问题,我们可以不去计算式(4.28),而是计算式(4.28)的离散化情形,也就是说,只是在时间频率平面的一个点集上计算式(4.28):

$$G_{g_a} f(b_n, \xi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_a(t-b_n)} e^{-j\xi_k t} dt = \langle f(t), g_a(t-b_n) e^{j\xi_k t} \rangle = \langle f(t), \phi_{n,k}(t) \rangle \quad (4.29)$$

式(4.29)中最后一个表达式是函数  $f(t)$  与函数  $\phi_{n,k}(t) = g_a(t-b_n) e^{j\xi_k t}$  的内积。在约束条件<sup>[3]</sup>下能够恢复函数  $f(t)$ :

$$f(t) = \sum_n \sum_k G_{g_a} f(b_n, \xi_k) g_a(t-b_n) e^{j\xi_k t} \quad (4.30)$$

式(4.30)通常称为 Gabor 展开式,其中  $G_{g_a} f(b_n, \xi_k)$  在恢复公式:

$$f(t) = \sum_n \sum_k G_{g_a} f(b_n, \xi_k) \phi_{n,k}(t) \quad (4.31)$$

中充当系数的作用,函数  $\phi_{n,k}(t)$  是高斯调制正弦函数,用  $\alpha$  控制函数的扩展,而用  $\xi_k$  控制振荡频率,这些时频平面的“原子”构成 Gabor 展开的基函数。由于高斯函数具有最小尺寸的时间频率窗,从而在时频平面内最大程度地将能量集中。对于信号表示来说, Gabor 基  $\phi_{n,k}(t)$  似乎是最有用的基,但是它缺乏基的一些基本性质,比如正交性、完全性和独立性等,这些性质对于实现信号的简单表示和有效计算是必须的。

## 4.5 连续小波变换

4.4 节中讨论的短时傅里叶变换是信号时间频率分析中的一种方法。另一种时间频率分析的线性变换是积分(或连续)小波变换。本书中,术语连续小波变换(CWT)与积分

小波变换(IWT)将交替使用。短时傅里叶变换具有固定的时间频率分辨率,使得它在很多应用中受到极大限制。此外,随着离散小波变换(DWT)和小波级数(WS)的发展,小波分析方法比短时傅里叶变换更适合于信号和图像处理。为了阐明我们的观点,让我们考察短时傅里叶变换中窗函数的半径 $\Delta_t$ 和 $\Delta_f$ ,它们不依赖于时间频率平面上的位置。例如,我们同 Gabor 变换(参见 4.2.2 小节)中一样选择 $\phi(t) = g_\alpha(t)$ ,一旦 $\alpha$ 被选定,则在不考虑窗在时间频率平面中的位置的情况下 $\Delta_{g_\alpha}$ 和 $\Delta_{g_\alpha}$ 也是固定的。在图 4.3 中给出了典型的短时傅里叶变换的时间频率窗。如果窗函数被选定,则整个处理过程中的时间频率分辨率是固定的。为了理解固定分辨率的实现,让我们考虑如图 4.6 所示的线性调频信号,信号的频率随着时间不断地增大。

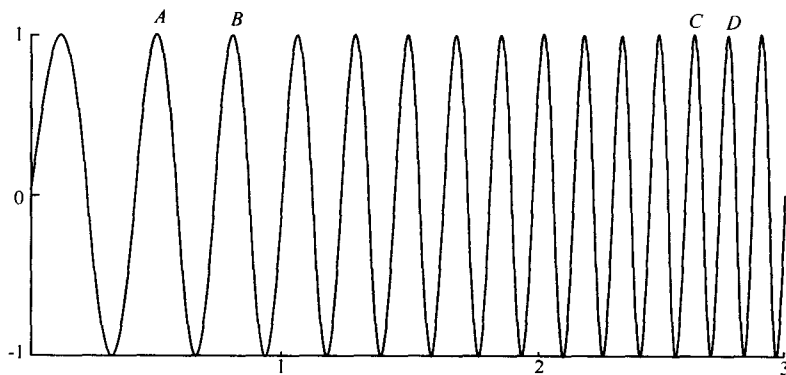


图 4.6 频率随时间变化的线性调频信号

如果选择窗函数 $\phi(t)$ 的参数(对 $g_\alpha(t)$ 来说参数是 $\alpha$ )使得 $\Delta_t$ 近似等于 $AB$ ,利用式(4.7)计算短时傅里叶变换能够更好地分辨信号的低频成分,而对于高频成分将具有较差的分辨率。另一方面,若 $\Delta_t$ 近似等于 $CD$ ,则对于较低的频率不能恰当地进行分析,可以看出,如果 $\Delta_t$ 很小的话,则 $\Delta_f$ 将会适当地大,所以低频部分将会变得模糊。

我们的目标是设计出一种方法,此方法在时间频率平面中的任意位置都能够给出好的时间频率分辨率,换句话说,必须有一个窗函数,当分析一个信号的低频成分时其半径在时间上增加(在频率上减少),而当分析信号的高频成分时其半径在时间上减少(在频率上增加)。基于这样的目标导致了对小波函数 $\psi(t)$ 的研究。

函数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 关于某个分析小波 $\psi(t)$ 的积分小波变换定义为

$$W_\psi f(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{b,a}(t)} dt \quad (4.32)$$

其中

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0 \quad (4.33)$$

参数 $b$ 和 $a$ 分别称为平移参数和膨胀参数,规范化因子 $a^{-1/2}$ 是为了保持 $\|\psi_{b,a}\| = \|\psi\|$ 。

对于窗函数 $\psi(t)$ ,为了从它的积分小波变换恢复 $f(t)$ , $\psi(t)$ 必须满足下面的条件:

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4.34)$$

小波除了满足条件式(4.34)外,还应该具有高阶消失矩。如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt = 0, \quad p = 0, \dots, m-1 \quad (4.35)$$

则称小波具有  $m$  阶消失矩。

严格地说,积分小波变换提供了时间尺度分析,而不是时间频率分析。然而,根据适当的尺度到频率的变换(随后讨论),人们得到了一个非常接近于时间频率分析的分析工具。从式(4.33)可以知道,当  $a$  减小时,  $\psi_{b,a}$  的支撑在时间上减小,因而覆盖了较大的频率区域,反过来也一样。所以  $1/a$  是对频率的测量。另一方面,参数  $b$  表示小波沿时间轴小波窗的位置,因此,通过改变  $(b, a)$  能够在整个时间频率平面上计算  $W_{\psi}f$ 。进一步,根据条件式(4.34)可以知道所有小波都是振荡的,这就给出了较小的波的特性,所以人们经常称其为小波。对于短时傅里叶变换中的窗函数没有振荡性的要求。与式(4.7)中短时傅里叶变换的定义相比较,小波  $\psi_{b,a}(t)$  代替了  $\phi_{b,\xi}(t)$ ,因此小波的作用相当于窗函数。小波窗的性能与度量将在 4.5.2 小节中更详细地讨论。

#### 4.5.1 逆小波变换

由于逆变换的目的是从它的积分小波变换重构原函数,因此涉及到尺度参数  $a$  与平移参数  $b$  的二重积分。逆小波变换的表达式为

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} [W_{\psi}f(b, a)] \psi_{b,a}(t) da \quad (4.36)$$

其中  $C_{\psi}$  是一个依赖于小波的常数且由下式确定:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (4.37)$$

条件式(4.37)通常称为容许性条件,它是函数成为小波的约束条件。特别地,这意味着为了使得式(4.37)的左端是有限的,而所有的小波都必须满足条件  $\hat{\psi}(0) = 0$  (参见式(4.34))。对于式(4.36)的证明,读者可以参考文献[2,第2章]。

等式(4.36)本质上是一个叠加积分,关于  $a$  的积分是位置  $b$  上所有小波分量贡献的和,而关于  $b$  的积分包含了  $b$  轴上的所有位置。逆小波变换的计算是十分繁重的,而且逆小波变换只是用于综合原始信号,因此通常不用积分小波变换对信号进行分析。下一节将引进离散小波变换(DWT)。离散小波变换的逆变换在数据通信和信号处理中是非常有用的。

#### 4.5.2 时间频率窗

在 4.1 节所讨论的频率域中心和半径的定义不能应用于小波窗,这是由于短时傅里叶变换的窗满足  $\hat{\phi}(0) = 1$ ,而小波窗满足  $\hat{\psi}(0) = 0$ ,换句话说,  $\hat{\psi}(\omega)$  具有带通滤波器的特性。因此,对于  $\hat{\psi}(\omega)$  来说有两个中心和两个半径,我们只是对正频率感兴趣,所以在正频率轴上定义中心  $\omega_+^*$  和半径  $\Delta_{\psi}^+$  为

$$\omega_+^* = \frac{\int_0^\infty \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.38)$$

$$\Delta_\psi^+ = \left[ \frac{\int_0^\infty (\omega - \omega_+^*)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2} \quad (4.39)$$

对于  $t^*$  和  $\Delta_\psi$  的定义与在 4.1 节中的定义相同,用  $\psi(t)$  代替  $\phi(t)$ 。对于小波不确定原理为

$$\Delta_\psi \Delta_\psi^+ > \frac{1}{2} \quad (4.40)$$

若  $t^*$  与  $\Delta_\psi$  分别是  $\psi(t)$  的中心和半径,则  $W_\psi f(b, a)$  包含着  $f(t)$  在下面时间窗内的信息:

$$[at^* + b - a\Delta_\psi, at^* + b + a\Delta_\psi] \quad (4.41)$$

为了得到频率窗,将帕塞瓦尔等式应用于式(4.32),得到一个理想的频率窗:

$$W_\psi f(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \quad (4.42)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} e^{ib\omega} d\omega \quad (4.43)$$

根据式(4.43)容易得到频率窗为

$$\left[ \frac{1}{a}(\omega_+^* - \Delta_\psi^+), \frac{1}{a}(\omega_+^* + \Delta_\psi^+) \right] \quad (4.44)$$

时间频率窗的乘积等于  $2a\Delta_\psi \times \frac{2}{a}\Delta_\psi^+ = 4\Delta_\psi \Delta_\psi^+ = \text{常数}$ 。

小波变换时间频率窗的概念如图 4.7 所示。通过比较图 4.7 与短时傅里叶变换所对应的图形 4.3, 可以看到小波变换的窗具有可变的特性; 对于较高的频率 ( $1/a_2$ ), 时间窗会变小; 而对于较低的频率 ( $1/a_0$ ), 时间窗会变大; 对于固定的频率水平 ( $1/a_0$ ), 时间频率窗的大小是固定不变的; 但在短时傅里叶变换中不管频率水平如何, 时间频率窗的大小始终保持不变。

**例子:** 这个函数在计算短时傅里叶变换时使用过, 我们来说明连续小波变换对此函数的作用。选择由下式给定的复 Morlet 小波:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{-j5.336t} \quad (4.45)$$

来计算连续小波变换:

$$W_f(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

结果如图 4.8 所示, 从图可以知道时间轴和频率轴都具有较好的分辨率。如果我们对  $a$  选择一个适当的范围, 则仅需计算一次连续小波变换就会得到时间域与频率域中的大部分结果。

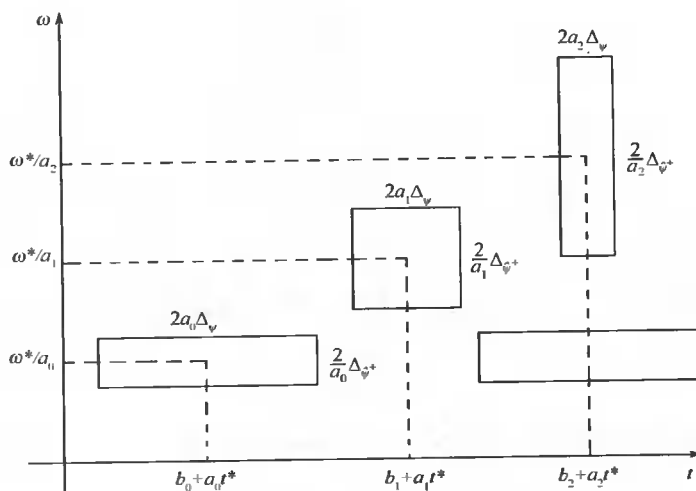


图 4.7 连续小波变换的时间频率窗

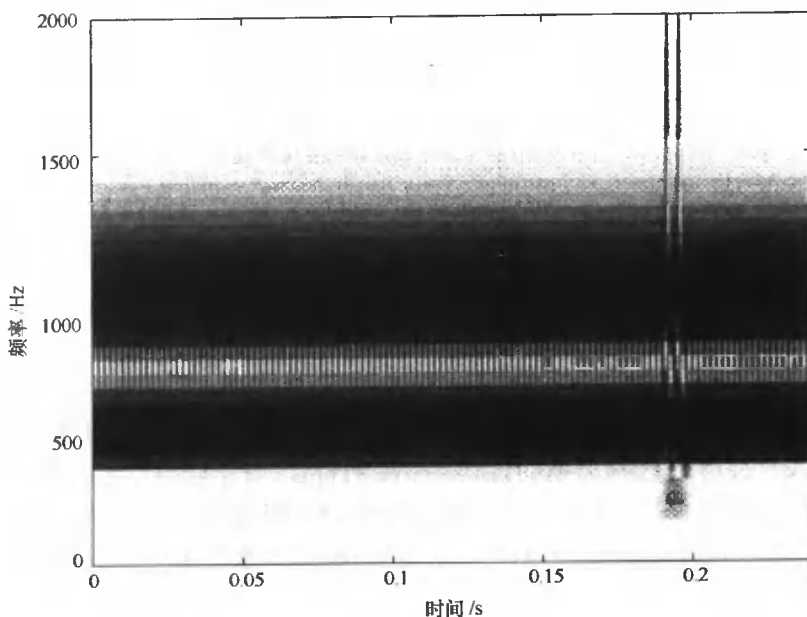


图 4.8 Morlet 小波对如图 4.4 所示信号的连续小波变换

## 4.6 离散小波变换

类似于离散傅里叶和离散短时傅里叶变换,我们有离散小波变换(DWT)。然而,不像过去在傅里叶分析中离散时间和频率轴给出的方法,这里我们用不同的方法给出尺度参数 $a$ 与平移参数 $b$ 的离散值,有趣的是引入离散小波变换并且说明离散小波变换与积分小波变换两者之间的关系。在第7章中将会给出离散小波变换更详细的讨论。这里我们将 $a$ 取为 $2^{-s}$ 的形式而将 $b$ 取为 $k2^{-s}$ 的形式,其中 $k, s \in \mathbf{Z}$ ,对于这种形式的 $a$ 和 $b$ ,式(4.32)的积分成为:

$$W_{\psi}f(k2^{-s}, 2^{-s}) = 2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^s t - k) dt \quad (4.46)$$

现在让我们来看离散化函数  $f(t)$ , 为了简单起见假设采样率为 1, 在这样的假设下, 式 (4.46) 的积分能够写成:

$$W_{\psi}f(k2^{-s}, 2^{-s}) \approx 2^{s/2} \sum_n f(n) \psi(2^s n - k) \quad (4.47)$$

为了计算函数在时间尺度平面上某个点的小波变换, 我们不需要知道函数在整个时间轴上的值, 所需要的只是函数在时间轴上那些使得小波非零的值, 因此几乎能够实时地给出小波变换的估计。在后面的章节中, 我们将会讨论计算小波变换的算法。

式 (4.47) 一个重要的推论是它的时不变特性。时移函数的离散小波变换与原函数的离散小波变换有很大的不同。为了进一步给出解释, 设

$$f_m(t) = f(t - t_m) \quad (4.48)$$

则有

$$\begin{aligned} W_{\psi}f_m(k2^{-s}, 2^{-s}) &= 2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t) \psi(2^s t - k) dt \approx \\ &2^{s/2} \sum_n f(n - m) \psi(2^s n - k) = \\ &2^{s/2} \sum_n f(n) \psi[2^s n - (k - m2^s)] \approx \\ &W_{\psi}f[(k - m2^s)2^{-s}, 2^{-s}] \end{aligned} \quad (4.49)$$

因此, 对于离散小波变换来说, 函数在时间轴上的平移表现得相当复杂。回想一下, 在短时傅里叶变换的情形下, 函数在时间轴上的平移表现为在时间位置上有一个同样大小的平移和一个附加的相位平移, 同样在傅里叶变换中, 时间上的平移仅仅表现为频域中相位的变化。

## 4.7 小波级数

类似于傅里叶级数, 我们有小波级数。当然, 仅仅对于周期函数才存在傅里叶级数。对任意函数  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ , 我们有小波级数表示:

$$f(t) = \sum_s \sum_k w_{k,s} \psi_{k,s}(t) \quad (4.50)$$

其中

$$\psi_{k,s}(t) = 2^{s/2} \psi(2^s t - k) \quad (4.51)$$

在式 (4.50) 中有两次求和是由于小波变换有两个参数: 平移参数和尺度参数。对于周期函数  $p(t)$  来说, 其傅里叶级数如下:

$$p(t) = \sum_k c_k e^{ikt} \quad (4.52)$$

因为  $\{e^{ikt} : k \in \mathbf{Z}\}$  是  $L^2(0, 2\pi)$  的正交基, 我们能够得到:



$$c_k = \frac{1}{2\pi} \langle p(t), e^{ikt} \rangle \quad (4.53)$$

用类似的方法,若  $\{\psi_{k,s}(t); k, s \in \mathbf{Z}\}$  构成  $L^2(\mathbf{R})$  的规范正交基,则可以得到:

$$w_{k,s} = \langle f(t), \psi_{k,s}(t) \rangle = \quad (4.54)$$

$$2^{s/2} W_{\psi} f\left(\frac{k}{2^s}, \frac{1}{2^s}\right) \quad (4.55)$$

因此,函数的小波级数展开式中的系数  $\{w_{k,s}\}$  正是函数的积分小波变换在某个二进制点  $(k/2^s, 1/2^s)$  处的值。但是傅里叶级数与傅里叶变换之间不存在这样的关系,它们适用于不同的函数类。傅里叶级数适用于  $[0, 2\pi]$  上平方可积的函数,而傅里叶变换适用于  $L^2(\mathbf{R})$  中的函数。另一方面,小波级数与小波变换适用于  $L^2(\mathbf{R})$  中的函数。

如果  $\{\psi_{k,s}(t)\}$  不是规范正交基,利用对偶小波  $\{\tilde{\psi}_{k,s}(t)\}$  能够得到  $w_{k,s} = \langle f(t), \tilde{\psi}_{k,s}(t) \rangle$ 。对偶小波的概念将在后面的章节中讨论。

## 4.8 时间频率图的解释

让我们简单地讨论时间频率平面上曲面的意义。通常,曲面上点的高度表示短时傅里叶变换或积分小波变换的幅度。假设所给函数的频率不随时间而变化,则期望时间频率图中平行于时间轴的水平线对应于函数的频率,然而,由于窗函数具有有限支撑和正弦函数的截断得到的不是一条线,看到的将是一条频带。为了理解得更清楚一点,让我们考虑频率为  $\omega_0$  的截断正弦。为了解释时间频率图,即使正弦函数已经被截断,我们仍将其傅里叶变换表示为  $\hat{\delta}(\omega - \omega_0)$ 。

在式(4.16)与式(4.43)中分别做代换  $\hat{f}(\omega) = \hat{\delta}(\omega - \omega_0)$ ,就会得到:

$$|G_{\psi} f(b, \xi)| = \frac{1}{2\pi} |\hat{\phi}(\omega_0 - \xi)| \quad (4.56)$$

$$|W_{\psi} f(b, a)| = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} |\hat{\psi}(a\omega_0)| \quad (4.57)$$

显然,根据式(4.56)和式(4.57)可以知道  $|G_{\psi} f(b, \xi)|$  和  $|W_{\psi} f(b, \xi)|$  不依赖于  $b$ 。在频率轴上,由于  $|\hat{\phi}(0)| = 1$  并且假设  $|\hat{\phi}(\omega)| \leq 1, \omega \neq 0$ ,我们将在  $\xi = \omega_0$  得到短时傅里叶变换的最大幅度,从而在  $\xi = \omega_0$  的周围将有一个频带,而且其宽度依赖于  $\hat{\phi}(\omega)$  的半径  $\Delta_{\hat{\phi}}$ 。

式(4.57)的解释要复杂一些,与短时傅里叶变换不同,小波变换无法直接给出时间频率图。让我们考虑频率轴上的一点  $\omega'$ ,它满足:

$$|\hat{\psi}(\omega')| = \max\{|\hat{\psi}(\omega)| : \omega \in (0, \infty)\} \quad (4.58)$$

为了实践的目的,我们可以取  $\omega' = \omega_+^*$ 。

现在,如果考虑变量  $\xi = \omega_+^* / a$ ,而且根据新的变量重新改写式(4.57),我们有:

$$\left| W_{\psi} f\left(b, \frac{\omega_+^*}{\xi}\right) \right| = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_+^*}{\xi}} \left| \hat{\psi}\left(\frac{\omega_+^*}{\xi} \omega_0\right) \right| \quad (4.59)$$

所以,小波变换式(4.57)的最大值将出现在 $\xi = \omega_0$ 处,而且具有一个围绕 $\xi = \omega_0$ 的频带,其宽度依赖于小波 $\hat{\psi}(\omega)$ 的半径 $\Delta_{\hat{\psi}}^+$ 。

再举一个例子,设 $f(t) = \delta(t - t_0)$ ,由于这个函数具有全部的频率成分,我们期望在时间频率平面中 $t = t_0$ 处有一条铅垂线。将 $f(t) = \delta(t - t_0)$ 代入式(4.7)与式(4.32),可以得到:

$$|G_{\psi}f(b, \xi)| = |\phi(t_0 - b)| \quad (4.60)$$

$$|W_{\psi}f(b, a)| = \frac{1}{\sqrt{a}} \left| \psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right) \right| \quad (4.61)$$

短时傅里叶变换的解释比较容易,正像所期望的那样,它不依赖于 $\xi$ 。在 $b = t_0$ 附近得到一条平行于频率轴的垂线且具有由 $\Delta_{\psi}$ 所确定的时延,但对于小波变换来说,可以知道它依赖于尺度参数 $a$ 。根据新的变量 $\xi$ 重新改写式(4.61)可以得到:

$$\left| W_{\psi}f\left(b, \frac{\omega_+^*}{\xi}\right) \right| = \sqrt{\frac{\xi}{\omega_+^*}} \left| \psi\left(\frac{\xi}{\omega_+^*}(t_0 - b)\right) \right| \quad (4.62)$$

虽然时间轴上所有 $\delta$ 函数的频率成分都由式(4.62)来表示,但是当 $\xi$ 减小时时延增加。另外,最大值的位置依赖于 $\psi(t)$ 的形状。关于时间频率图的进一步说明,读者可以参阅文献[4]。

## 4.9 Wigner-Ville 分布

在4.8节,我们已经考虑了信号的线性时间频率表示。由于短时傅里叶变换和连续小波变换满足线性叠加定理,所以它们都是线性变换,即满足:

$$T[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 T[f_1] + \alpha_2 T[f_2] \quad (4.63)$$

式中 $T$ 表示短时傅里叶变换或者连续小波变换; $f_1(\tau)$ 和 $f_2(\tau)$ 是两个同一类型不同的信号; $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 是系数。这些变换是重要的,它们解释了信号在时间 $t$ 附近的局部频谱。此外,它们的算法容易实现,而且计算效率较高,这也是它们的优势。另一方面,这些线性变换没有提供信号在给定时刻瞬间的能量信息。直观上考虑下面这种类型的变换:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau - t)|^2 e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - t) \overline{f(\tau - t)} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

因为信号在给定时刻的能量不容易确定,因此考虑区间 $(t - \tau/2, t + \tau/2)$ 内的能量会更有意义,它集中在时间位置 $t$ 的周围。为此目的,Wigner-Ville分布(WVD)被定义为

$$W_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.64)$$

常数 $1/2\pi$ 是为了计算简单的规范化因子,应该注意 Wigner-Ville 分布不再是线性的。由于信号作为被积函数超过一次,所以 Wigner-Ville 分布是非线性(双线性)时间频率变换。可以知道,给定时刻 $t$ 的 Wigner-Ville 分布以间隔 $\tau/2$ 对称地考察信号的左右两侧。 $W_f(t, \omega)$ 的计算需要 $t \pm \tau/2$ 处信号的信息而且不能实时实现。

**例 1:** 让我们考虑由高斯包络调制的线性调频信号:

$$f(t) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{at^2}{2} + j\frac{bt^2}{2} + j\omega_0 t\right) \quad (4.65)$$

式中  $\exp(-at^2/2)$  是高斯项;  $\exp(jbt^2/2)$  是线性调频信号;  $e^{j\omega_0 t}$  是频移项。根据式(4.64)得到 Wigner-Ville 分布:

$$\begin{aligned} W_f(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-a(t+\tau/2)^2}{2} + j\frac{b(t+\tau/2)^2}{2} + j\omega_0\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right] \times \\ &\quad \exp\left[\frac{-a(t-\tau/2)^2}{2} - j\frac{b(t-\tau/2)^2}{2} - j\omega_0\left(t-\frac{\tau}{2}\right) - j\omega\tau\right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} e^{-at^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-a\tau^2}{4} + jbt\tau + j\omega_0\tau - j\omega\tau\right) d\tau \end{aligned} \quad (4.66)$$

利用第3章中给出的高斯函数的傅里叶变换, 高斯正弦调制线性调频的 Wigner-Ville 分布是:

$$W_f(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-\frac{at^2}{2} - \frac{(\omega - \omega_0 - bt)^2}{a}\right] \quad (4.67)$$

高斯正弦调制线性调频函数及其 Wigner-Ville 分布如图 4.9 所示。

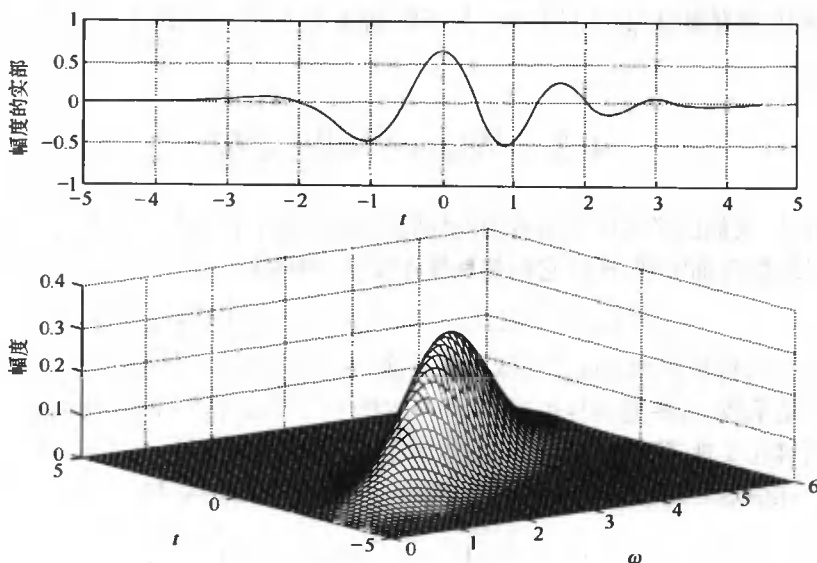


图 4.9 高斯调制线性调频信号的 Wigner-Ville 分布

**例 2:** 正弦调制线性调频信号由下式确定:

$$f(t) = \exp\left(j\frac{bt^2}{2} + j\omega_0 t\right) \quad (4.68)$$

直接计算 Wigner-Ville 分布得到:

$$\begin{aligned} W_f(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\frac{b(t+\tau/2)^2}{2} + j\omega_0\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right] \times \\ &\quad \exp\left[-j\frac{b(t-\tau/2)^2}{2} - j\omega_0\left(t-\frac{\tau}{2}\right) - j\omega\tau\right] d\tau = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(jbt\tau + j\omega_0\tau - j\omega\tau) d\tau = \delta(\omega - \omega_0 - bt) \quad (4.69)$$

例3: 当线性调频参数  $b$  是零时, 我们来计算正弦信号  $e^{j\omega_0 t}$  的 Wigner-Ville 分布, 因此

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0) \quad (4.70)$$

式(4.67)和式(4.69)的 Wigner-Ville 分布在时间频率平面上分别是斜率为  $b$  的直线和平行于时间轴的直线, 如图 4.10 和图 4.11 所示。高斯正弦函数的 Wigner-Ville 分布如图 4.12 所示。

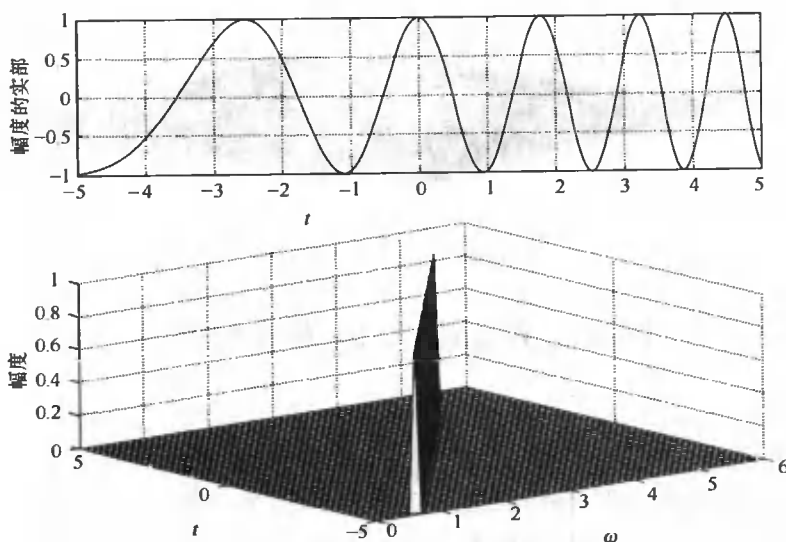


图 4.10 线性调频信号的 Wigner-Ville 分布

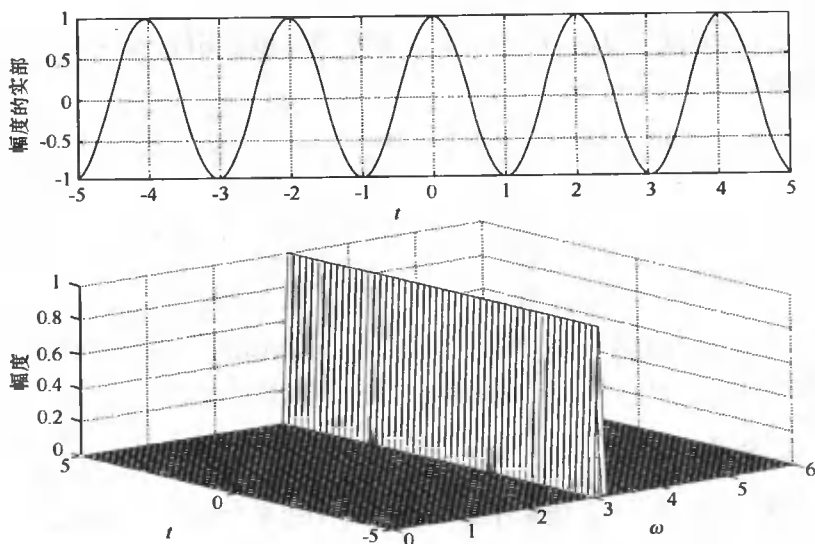


图 4.11 正弦函数的 Wigner-Ville 分布

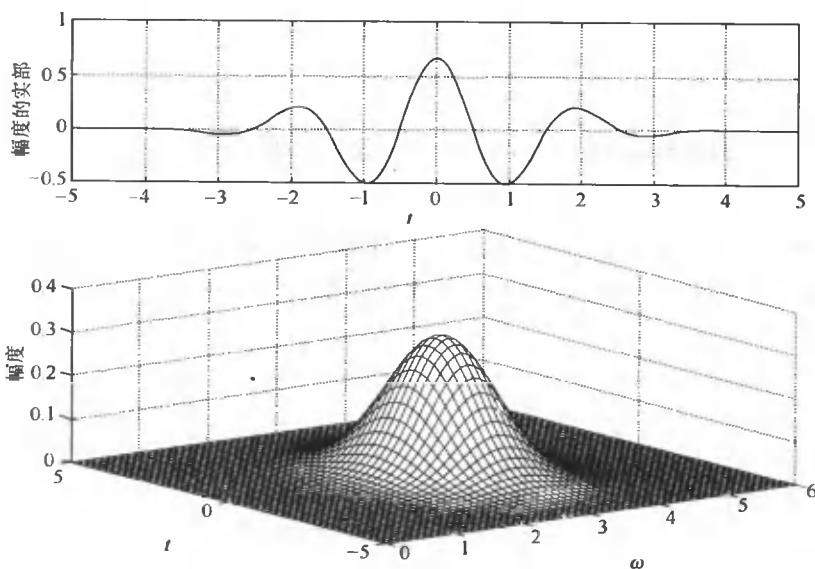


图 4.12 高斯调制正弦函数的 Wigner-Ville 分布

## 4.10 Wigner-Ville 分布的性质

信号处理中 Wigner-Ville 分布有一些一般的性质,它们对于信号的表示是重要的,这一节将讨论其中的一些性质。文献[5]中已经证明时间频率平面上的 Wigner-Ville 分布对信号能量具有高度的集中性,任何其他分布对于能量的集中性都不会超过 Wigner-Ville 分布,否则将会与不确定原理相矛盾,此外还不能满足在本节讨论的边缘性。

### 4.10.1 实性

不论信号是实的还是复的, Wigner-Ville 分布始终都是实的。考察 Wigner-Ville 分布的复共轭能够看到这一点:

$$\begin{aligned}\overline{W_s(t, \omega)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \overline{s\left(t + \frac{\tau}{2}\right)} e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= W_s(t, \omega)\end{aligned}\quad (4.71)$$

Wigner-Ville 分布恒为实的,但不总是正的。图 4.13 说明函数的 Wigner-Ville 分布在中心附近是负的,因此 WVD 不可能作为能量密度或概率密度的度量。

### 4.10.2 边缘性

信号处理中特别关注的是能量守恒,根据分布的边缘性质,这可以被表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(t, \omega) d\omega = |f(t)|^2 \quad (4.72)$$

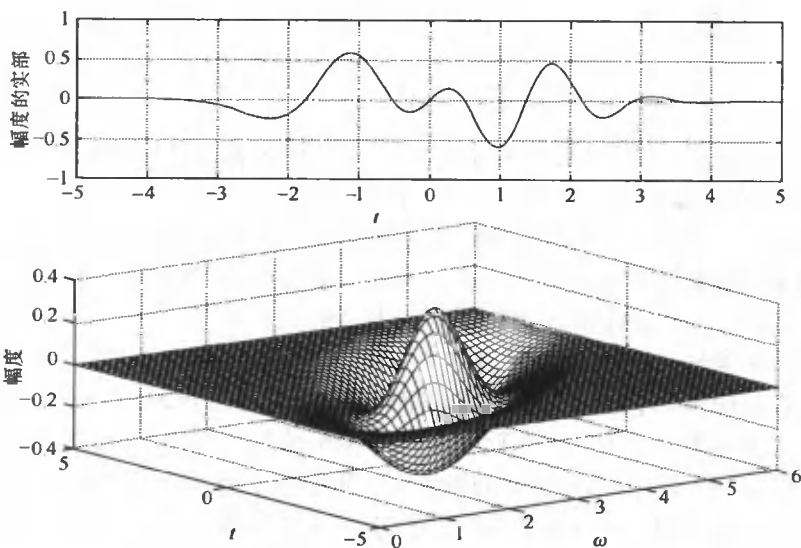


图 4.13 图形显示 Wigner-Ville 分布可能是负的

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_f(t, \omega) dt = |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (4.73)$$

边缘(密度)只能按照两个变量中的一个来表示能量密度。如果我们希望找到关于  $t$  的能量密度,只要关于  $\omega$  简单地积分即可,反过来也一样。信号的总能量能够通过 Wigner-Ville 分布在整个时间频率平面上的二重积分来计算,即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(t, \omega) d\omega dt = 1$$

#### 4.10.3 相关函数

根据边缘我们能够很容易地计算时间域或频率域中的相关函数,即

$$\gamma_t(t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \overline{f(\tau+t')} d\tau = W_f(t', 0) \quad (4.74)$$

$$\gamma_\omega(\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \overline{f(\omega+\omega')} d\omega = W_f(0, \omega') \quad (4.75)$$

### 4.11 二次叠加原理

我们知道 Wigner-Ville 分布是非线性分布,因此线性叠加原理不能使用。例如,设多成分信号是:

$$f(t) = \sum_{k=1}^m f_k(t) \quad (4.76)$$

这个信号的 Wigner-Ville 分布是:

$$W_f(t, \omega) = \sum_{k=1}^m W_{f_k}(t, \omega) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1, l \neq k}^m W_{f_k, f_l}(t, \omega) \quad (4.77)$$

其中  $W_{f_k}(t, \omega)$  被称为 Wigner-Ville 分布的自项, 而  $W_{f_k, f_l}(t, \omega)$  是交叉项, 确定如下:

$$W_{f_k, f_l}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f_l\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.78)$$

Wigner-Ville 分布的交叉项也称为干扰项, 它表示多成分信号中两个成分之间能量的交叉。这些干扰项在大部分信号处理中是不希望存在的, 许多研究人员致力于减弱干扰项, 必须注意这些交叉项对于信号的完全重构是必须的<sup>[6,7]</sup>。在信号探测与识别应用中, 我们的兴趣是揭示有重要能量的那些信号成分, 不必要重构信号, 因此交叉项并不重要。

在雷达信号处理和成像中, 信号被处理成具有时变的频谱, 这一点同线性调频信号或者二次线性调频信号一样。利用短时傅里叶变换或者小波变换来表示一个线性调频信号会损失信号在时间频率平面上的分辨率。然而, 这些信号的 Wigner-Ville 分布在时间频率平面上使得能量更集中, 如图 4.10 所示。对于多成分信号, 如果各个成分的带宽重叠的不是太多, 则 Wigner-Ville 分布所集中的能量在时间频率平面上将是分离的, 如图 4.14 所示。否则的话, 必须应用某些减弱交叉项干扰的技巧, 而且还会导致分辨率的降低。

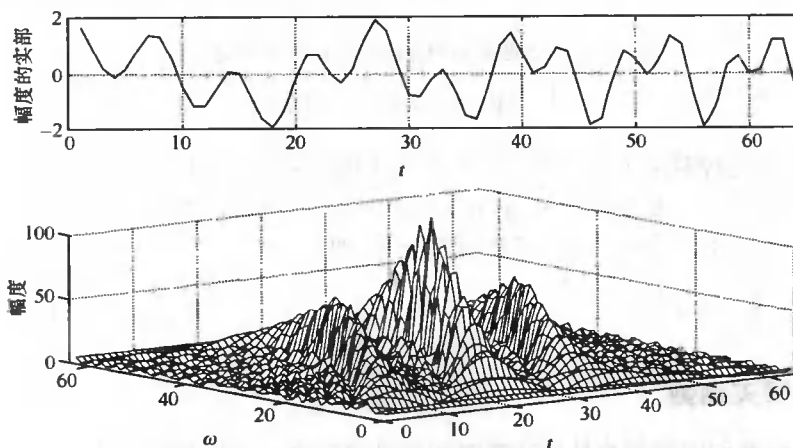


图 4.14 多成分信号的 Wigner-Ville 分布

## 4.12 模糊函数

模糊函数是 Wigner-Ville 分布的特征函数, 在数学上定义为

$$A_f(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j u t + j v \omega} W_f(t, \omega) dt d\omega \quad (4.79)$$

Wigner-Ville 分布是在时间频率平面上度量信号能量密度的时间频率函数, 而模糊函数是在频率移动 (Doppler) 和时间延迟平面上度量能量的一个分布。在雷达信号处理中, 特别是在波形设计领域, 这是一个很重要的函数。在本书的后面我们将会看到模糊函数的一些应用。

除了一个复常数之外, 我们可以将信号的模糊函数表示为

$$A_f(\tau, \zeta) = K \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t + \frac{\tau}{2}\right)} e^{-j\zeta\tau} d\tau \quad (4.80)$$

式中  $K$  是一个复常数, 在文献[8] 中能够看到这个关系的证明。关于模糊函数更多的知识, 读者可以参考文献[9], 线性调频信号的模糊函数如图 4.15 所示。在第 9 章中, 我们还将考察这个信号的时间频率表示, 并将小波包与 Wigner-Ville 分布结合起来应用于雷达信号探测。

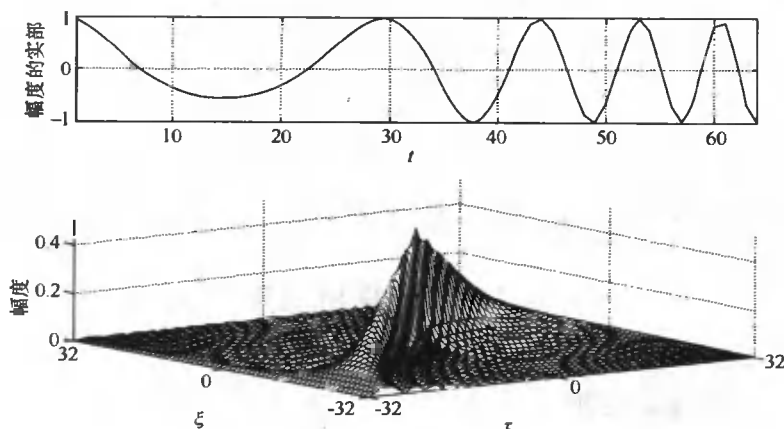


图 4.15 线性调频信号的模糊函数

## 4.13 习 题

1. 对任意的函数  $\psi \in L^2(-\infty, \infty)$ , 证明对于  $k, s \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{R}$ , 规范化函数  $\psi_{k,s}(t) = 2^{s/2} \psi(2^s t - k)$  与  $\psi$  具有相同的  $L^2$  范数:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{k,s}(t)|^2 dt, \quad k, s \in \mathbf{Z}$$

2. 考虑窗函数  $g_\alpha(t) = e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0$ . 计算时间和频率域的窗宽, 并且验证不确定原理。

3. 帽函数  $N_2$  定义为

$$N_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

计算  $N_2(t)$  的时间频率窗。

4. 证明

$$\|f(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi \|\phi\|^2} \iint |G_\phi f(b, \xi)|^2 db d\xi$$

5. 给定  $f(t) = \sin \pi t^2$ , 使用提升余弦函数作为窗函数

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi t), & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

画出窗平移时间函数  $f_3(t) = \overline{\phi(t-3)} f(t)$  和  $f_7(t)$  的图形及其频谱图。

考察时间频率原子或核:



$$\begin{cases} \text{Re}[\phi(t-4)e^{j4\pi t} + \phi(t-6)e^{j8\pi t}] \\ \text{Re}[\phi(t-4)e^{j4\pi t} + \phi(t-6)e^{j6\pi t}] \end{cases}$$

画出两个时间频率原子的频谱能量密度图。解释两个原子的时间频率分辨率。

6. 在连续小波变换中,说明规范化常数  $1/\sqrt{a}$  满足  $\|\psi(t)\| = \|\psi_{b,a}(t)\|$ 。

7. 证明在连续小波变换中的能量守恒原理意味着:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(b, a) \overline{W_{\psi} g(b, a)} db \frac{da}{a^2}$$

8. 说明小波  $\psi$  的频率窗宽是  $[(1/a)(\omega_+^* - \Delta_{\psi}), (1/a)(\omega_+^* + \Delta_{\psi})]$ 。

9. 说明在程序 wvd. m 中频率轴除以 2 的原因。

## 4.14 计算机程序

### 4.14.1 短时傅里叶变换

```
%
%程序 stft. m
%
%利用矩形窗[0,1]生成图 4.5 所示的短时傅里叶变换
%
%信号
v1=500;频率
v2=1000;
r=8000;%采样率
t1=0.192;%δ 函数的位置
t2=0.196;

k=1:2048;
t=(k-1)/r;
f=sin(2*pi*v1*t)+sin(2*pi*v2*t);

k=t1*r;
f(k)=f(k)+3;
k=t2*r;
f(k)=f(k)+3;
plot(t,f)
axis([0 0.24 -2 2])
```

图(2)

%短时傅里叶变换的计算

N=16     %矩形窗宽

bot=0.1;

hi=0.175;

for kk=1:4

    Nb2=N/2;

    for b=1:2048-N+1

        fb=f(b:b+N-1);

        fftfb=abs(fft(fb));

    STFT(b,:)=fftfb(1:Nb2);

end

%画图

NColor=256;

colormap(gray(NColor));

STFT\_min=min(min(STFT));

STFT\_max=max(max(STFT));

STFT=(STFT-STFT\_max) \* NColor / (STFT\_min - STFT\_max);

time=(0:2048-N)/r;

freq=(0:Nb2-1) \* r / N;

axes('position',[0.1 bot 0.8 hi])

image(time,freq,STFT)

axes([0 0.24 0 2000])

YTickmark=[0 500 1000 1500 2000];

set(gca,'YDir','normal','Ytick', YTickmark)

hold on;

N=N\*2

bot=bot+0.225;

clear STFT;clear time;clear freq;

end

set(gcf,'paperposition',[0.5 0.5 7.5 10])

#### 4.14.2 Wigner-Ville 分布

%

```

%程序 wvd. m
%
%计算 Wigner-Ville 分布
%

%信号

r=4000; %采样率
t=(0:255)/r;
omegal=2.0 * pi * 500.0;
f=exp(i * omegal * t);

% WVD 计算

N=length(f);

if(mod(N,2)~= 1);
f=[f 0];
N=N+1;
end

N2m1=2 * N-1;
Nb2=N/2;

for m=1:N
    s=zeros(1,N2m1);
    s(N-(m-1):N2m1-(m-1))=f;
    s=conj(fliplr(s)). * s;
    s=s(Nb2:N2m1-Nb2);
    shat = abs(fft(s));
%
%重叠项数字的规范化
%
if m<=Nb2
    shat=shat/(2 * m-1);
else
    shat=shat/(2 * N-2 * m+1);
end

```

```

wvd(m,:)= shat(1:Nb2);
end

%画图

time=(0:N-1)/r;
freq=(0:Nb2-1)*r/N/2;

NColor=256;
colormap(gray(NColor));
wvd_min=min(min(wvd));
wvd_max=max(max(wvd));
wvd=(wvd-wvd_max)*NColor/(wvd_min-wvd_max);

image('time,freq,wvd');

%因为信号的有限支撑将没有影响
xlabel('Time(seconds)');
ylabel('Frequency(Hz)');
set(gca,'YDir','normal')

```

## 参 考 文 献

- [1] D. Gabor. Theory of communication. J. IEE(London), 93, pp. 429—457, 1946.
- [2] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Ser. Appl. Math. #61. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [3] J. B. Allan and L. R. Rabiner. A Unified Approach to STFT Analysis and Synthesis. Proc. of IEEE, 65, pp. 1558—1564, November 1977.
- [4] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, and J. Morlet. Reading and Understanding Continuous Wavelet Transform, in Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space. J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian (Eds). Berlin: Springer-Verlag, pp. 2—20, 1989.
- [5] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbrauker. The Wigner-Ville Distribution; a Tool for Time-Frequency Signal Analysis: I. Continuous Time Signals. Phillips J. Res. , 35, pp. 217—250, 1980.
- [6] A. Moghaddar and E. K. Walton. Time-Frequency Distribution Analysis of Scattering from Waveguide Cavities. IEEE Trans. Antennas Propag. 41, pp. 677—680, May 1993.
- [7] L. Cohen. Time-frequency Distributions; A Review. Proc. IEEE, 77, pp. 941—981, 1989.
- [8] Boualem Boshash. Time-Frequency Signal Analysis, in Advances in Spectral Estimation and Array Processing. Vol. 1, S. Haykin, (Ed.). Upper Saddle River, N. J. ; Prentice Hall, 1991, Chap. 9.
- [9] C. E. Cook and M. Bernfeld. Radar Signals. San Diego, Calif. ; Academic Press, 1967.

## 第 5 章 多分辨分析

对于尺度函数与小波(第 6 章)的构造以及对算法的研究(第 7 章和第 8 章)来说,多分辨分析(MRA)成为最重要的工具。正像其名字一样,在多分辨分析中函数被看作不同水平的逼近或分辨率。这种思想由 Meyer 在文献 [1] 和 Mallat 在文献 [2,3] 中提出并研究。利用多分辨分析,我们能够将一个复杂信号分解成一些简单的信号,然后对简单信号分别进行研究。为了理解多分辨分析的概念,让我们考虑函数由缓慢变化和快速变化两部分组成的情形,如图 5.1 所示。如果我们想在单一水平下逼近该函数,则必须利用步长( $h$ )离散化此函数,该步长由快速变化部分来确定,这将导致大量的数据点。利用几个离散化步长(分辨率),我们能够大大减少精确表示所需数据点的数目。函数最粗糙的逼近与每一个水平上的细节一起完全表示原来的信号。注意到每一水平(尺度)步长是加倍的,这对应于音乐中的倍频程表示,在音频信号处理中是常见的。除了这个特别的例子外,在信号处理和电磁计算中还存在很多这样的情形,多分辨分析也是非常有用的。

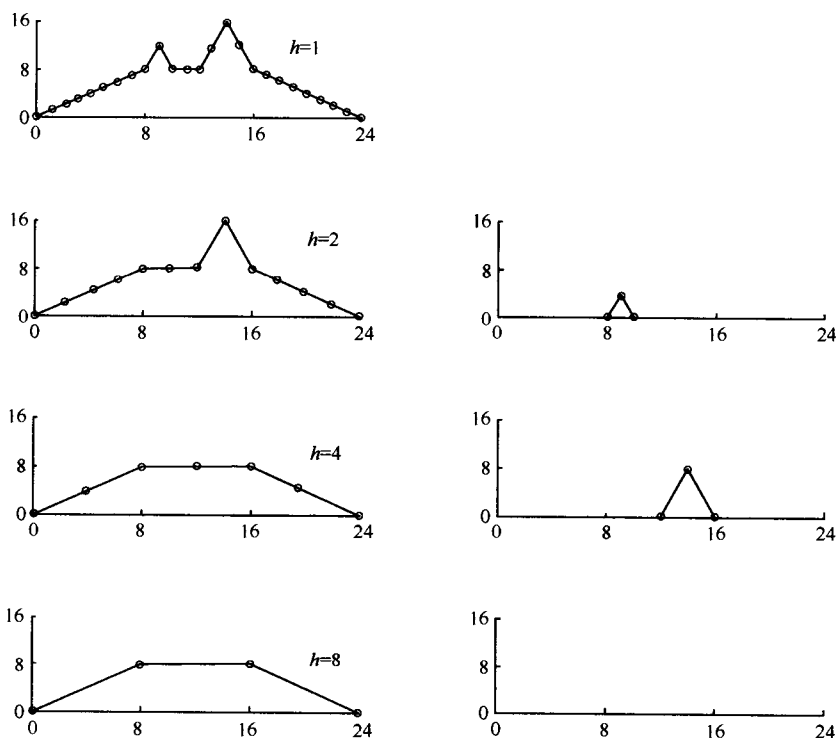


图 5.1 函数的多水平表示

在这一章,我们从理解多分辨分析必要的知识开始解释二尺度关系和分解关系。在 5.5 节讨论基数  $B$  样条,它能生成一个多分辨分析并且构成本书或其他地方所讨论的大

部分小波的基底。在 5.6 节我们将讨论在开始多分辨分析之前如何将给定的函数映射到适当子空间的问题。

## 5.1 多分辨空间

让我们返回到图 5.1, 每次通过加倍步长下降一个水平, 我们移动函数的某些部分显示在图形的右边, 然后对剩下的部分进一步分解。在图 5.1 中, 我们用  $A_s$  表示所有位于左边的函数, 而用  $W_s$  表示那些位于右边的函数, 其中  $s$  表示尺度。设  $A_s$  是由基  $\{\phi_{k,s} : 2^{s/2}\phi(2^s t - k); k \in \mathbb{Z}\}$  所生成的空间, 而  $W_s$  是由基  $\{\psi_{k,s} : 2^{s/2}\psi(2^s t - k); k \in \mathbb{Z}\}$  所生成的空间, 换句话说, 任何函数  $x_s(t) \in A_s$  和  $y_s(t) \in W_s$  能够被分别表示为  $\phi_{k,s}(t)$  和  $\psi_{k,s}(t)$  的线性组合。

注意到从  $x_s \in A_s$  可以推出函数  $x_{s-1}(t) \in A_{s-1}$  和  $y_{s-1}(t) \in W_{s-1}$ , 因此我们期望  $A_{s-1}$  的基  $\phi_{k,s-1}$  和  $W_{s-1}$  的基  $\psi_{k,s-1}$  应该以某种方式与  $A_s$  的基  $\phi_{k,s}$  联系起来, 这种关系有助于设计从函数  $x_s$  获得函数  $x_{s-1}$  和  $y_{s-1}$  的有效算法。

为了得到如图 5.1 所示函数的多分辨分析, 我们必须有一个能量有限的函数  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\phi(t)$  被称为尺度函数, 它生成嵌套序列  $\{A_j\}$ , 即

$$\{0\} \leftarrow \cdots \subset A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset \cdots \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

并且满足膨胀(加细)方程:

$$\phi(t) = \sum_k g_0[k] \phi(at - k)$$

对于某个  $a > 0$  和系数  $\{g_0[k]\} \in l^2$ 。我们将考虑  $a = 2$  的情形, 它对应于倍频程尺度。注意到函数  $\phi(t)$  可以表示为尺度及其平移的叠加, 这正是称为尺度函数的原因。更精确地,  $A_0$  是由  $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  所生成的闭子空间, 一般来说,  $A_s$  是由  $\{\phi_{k,s} : k, s \in \mathbb{Z}\}$  所生成的闭子空间, 所以我们有下面两个明显的结果:

$$x(t) \in A_s \Leftrightarrow x(2t) \in A_{s+1} \quad (5.1)$$

$$x(t) \in A_s \Leftrightarrow x(t + 2^{-s}) \in A_s \quad (5.2)$$

有许多函数都可以生成子空间的嵌套序列, 但是性质式(5.1)和式(5.2)以及膨胀方程对于多分辨分析来说是唯一的。

对于每个  $s$ , 由于  $A_s$  是  $A_{s+1}$  的真闭子空间, 所以存在  $A_s$  的余子空间, 称为  $W_s$ , 当它与  $A_s$  结合在一起时给出  $A_{s+1}$ ; 空间  $\{W_s\}$  被称为小波子空间, 它是  $A_s$  在  $A_{s+1}$  中的余子空间, 这意味着:

$$A_s \cap W_s = \{0\}, \quad s \in \mathbb{Z} \quad (5.3)$$

$$A_s \oplus W_s = A_{s+1} \quad (5.4)$$

由于满足条件式(5.3), 因而式(5.4)中的求和被称为直和, 并且称式(5.4)中的分解为直和分解。

像  $\{A_s\}$  由  $\phi(t)$  生成一样, 以同样的方式子空间  $\{W_s\}$  由函数  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  所生成, 此函数被称为小波函数。换句话说, 任何函数  $x_s(t) \in A_s$  能够写成:

$$x_s(t) = \sum_k a_{k,s} \phi(2^s t - k) \quad (5.5)$$

而且任何函数  $y_s(t) \in W_s$  能够写成:

$$y_s(t) = \sum_k w_{k,s} \psi(2^s t - k) \quad (5.6)$$

对于某些系数  $\{a_{k,s}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{w_{k,s}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$ 。

由于

$$A_{s+1} = W_s \oplus A_s = W_s \oplus W_{s-1} \oplus A_{s-1} = W_s \oplus W_{s-1} \oplus W_{s-2} \oplus \cdots \quad (5.7)$$

我们有:

$$A_s = \bigoplus_{l=-\infty}^{s-1} W_l$$

注意到  $\{A_s\}$  是嵌套的而且  $\{W_s\}$  是两两正交的, 因此我们有:

$$\begin{cases} A_l \cap A_m = A_l, & m > l \\ W_l \cap W_m = \{0\}, & l \neq m \\ A_l \cap W_m = \{0\}, & l \leq m \end{cases}$$

$A_s$  与  $W_s$  的层次特性的图解表示如图 5.2 所示。

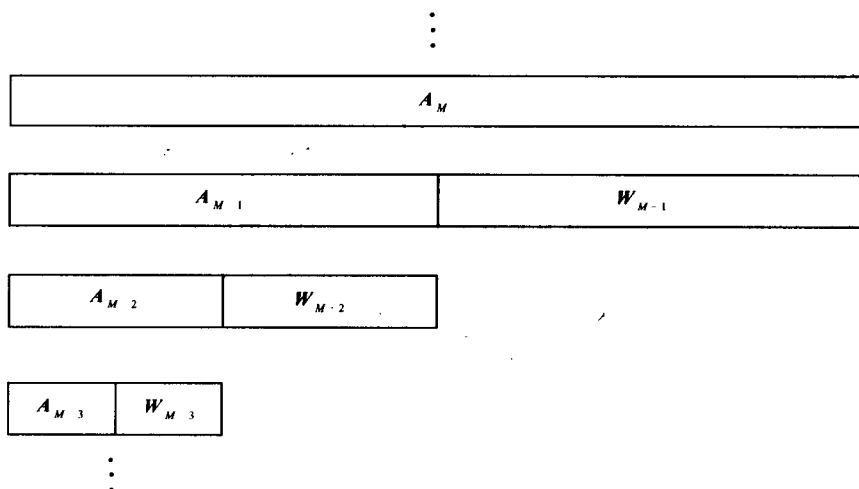


图 5.2 多分辨率分析子空间的分解

## 5.2 正交、双正交及半正交分解

在 5.1 节中, 我们仅仅要求小波子空间  $W_s$  是  $A_s$  在  $A_{s+1}$  中的余子空间。此外, 如果要求  $W_s \perp A_s$ , 则这个分解被称为正交分解。让我们对  $A_s$  与  $W_s$  的正交性给出进一步的解释。为了简单起见, 令  $s = 0$ , 此时,  $\{\phi(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  生成  $A_0$ 。类似地,  $\{\psi(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  生成  $W_0$ , 从而  $A_0 \perp W_0$  意味着:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \psi(t-l) dt = 0, \quad \text{对所有 } l \in \mathbb{Z} \quad (5.8)$$

一般来说,  $\{\phi(t-k) : k \in \mathbf{Z}\}$  与  $\{\psi(t-k) : k \in \mathbf{Z}\}$  它们本身不必是正交的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\phi(t-l)dt \neq 0 \quad (5.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\psi(t-l)dt \neq 0 \quad (5.10)$$

让我们放宽  $A_s$  与  $W_s$  互相正交的条件, 假定小波  $\phi_{k,s} \in W_s$  具有对偶  $\tilde{\psi}_{k,s} \in \tilde{W}_s$ 。对偶性是指满足双正交条件, 即

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, j, k, l, m \in \mathbf{Z} \quad (5.11)$$

尽管不要求  $W_s \perp A_s$ , 但确实要求  $\tilde{W}_s \perp A_s$ , 它们的重要性在后面将变得很清楚。类似于对偶小波  $\tilde{\psi}_{k,s}$ , 我们也考虑对偶尺度函数  $\tilde{\phi}_{k,s}$ , 它生成  $L^2(\mathbf{R})$  的另一个多分辨率分析  $\{\tilde{A}_s\}$ 。换句话说,  $\phi_{k,s}$  和  $\psi_{k,s}$  与多分辨率分析  $\{A_s\}$  联系在一起, 而  $\tilde{\phi}_{k,s}$  和  $\tilde{\psi}_{k,s}$  与多分辨率分析  $\{\tilde{A}_s\}$  联系在一起。

在着手解释它们的重要性之前, 让我们总结一下到目前为止的一些结果。

多分辨率分析  $\{A_s\}$ :

$$\begin{aligned} A_{s+1} &= A_s + W_s, & s \in \mathbf{Z} \\ A_l \cap A_m &= A_l, & m > l \\ W_l \cap W_m &= \{0\}, & l \neq m \\ A_l \cap W_m &= \{0\}, & l \leq m \end{aligned}$$

多分辨率分析  $\{\tilde{A}_s\}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{s+1} &= \tilde{A}_s + \tilde{W}_s, & s \in \mathbf{Z} \\ \tilde{A}_l \cap \tilde{A}_m &= \tilde{A}_l, & m > l \\ \tilde{W}_l \cap \tilde{W}_m &= \{0\}, & l \neq m \\ \tilde{A}_l \cap \tilde{W}_m &= \{0\}, & l \leq m \\ W_s \perp \tilde{A}_s &\Rightarrow \tilde{A}_l \cap W_m = \{0\} \text{ 对于 } l \leq m \\ \tilde{W}_s \perp A_s &\Rightarrow A_l \cap \tilde{W}_m = \{0\} \text{ 对于 } l \leq m \end{aligned}$$

到目前为止所讨论的分解过程称为双正交分解。为了解其重要性, 让我们简单地指出一个函数在不同尺度下分解的过程, 如图 5.1 所示。有关细节留到第 7 章再讨论。

给定函数  $x(t) \in L^2(\mathbf{R})$ , 要将函数在不同的尺度下分解, 首先将函数映射到具有充分高分辨率的子空间  $A_M$ , 即

$$L^2(\mathbf{R}) \ni x(t) \rightarrow x_M(t) = \sum_k a_{k,M} \phi(2^M t - k) \in A_M \quad (5.12)$$

现在, 由于

$$A_M = W_{M-1} + A_{M-1} = W_{M-1} + W_{M-2} + A_{M-2} = \sum_{n=1}^N W_{M-n} + A_{M-N} \quad (5.13)$$

我们能够写成:

$$x_M(t) = \sum_{n=1}^N y_{M-n} + x_{M-N} \quad (5.14)$$



其中  $x_{M-N}(t)$  是  $x_M(t)$  最粗糙的逼近, 而且

$$x_s(t) = \sum_k a_{k,s} \phi(2^s t - k) \in A_s \quad (5.15)$$

$$y_s(t) = \sum_k w_{k,s} \psi(2^s t - k) \in W_s \quad (5.16)$$

现在对偶小波的重要性变得显然。利用双正交性条件式(5.11), 我们能够得到系数  $\{w_{k,s}\}$

$$w_{k,s} = 2^s \int_{-\infty}^{\infty} y_s(t) \tilde{\psi}(2^s t - k) dt \quad (5.17)$$

回想起  $\tilde{\psi}(2^s t - k) \in \tilde{W}_s$  以及对于  $l \leq s$  有  $A_l \perp \tilde{W}_s$ , 因此用  $\tilde{\psi}_{k,s}(t)$  与式(5.14) 两端做内积, 并且利用条件式(5.11), 可以得到:

$$w_{k,s} = 2^s \int_{-\infty}^{\infty} x_M(t) \tilde{\psi}(2^s t - k) dt = 2^{s/2} W_{\tilde{\psi}} x_M\left(\frac{k}{2^s}, \frac{1}{2^s}\right) \quad (5.18)$$

通过计算对偶小波  $\tilde{\psi}$  的积分小波变换, 在任何时间尺度位置能够使用对偶小波  $\tilde{\psi}$  来分析函数  $x_M$ , 从而利用  $\psi$  能够获得任意尺度下函数的表示, 因此我们称  $\tilde{\psi}$  为分析小波(analyzing wavelet), 而  $\psi$  被称为综合(合成)小波(synthesis wavelet)。

当然, 如果关于规范正交基  $\{\phi, \psi\}$ , 我们有正交分解  $A_s \perp W_s$ , 则分析小波与综合小波是相同的。应当注意, 我们所说的规范正交小波是指小波关于尺度是规范正交的, 而且关于给定尺度的平移也是规范正交的。但是规范正交尺度函数是指尺度函数仅仅关于给定尺度的平移是规范正交的, 而关于尺度并不是规范正交的, 这是因为多分辨分析的嵌套性质。

问题是为什么我们需要双正交小波? 有吸引力的特征之一是在双正交情形下用两个不同的函数进行分析与综合, 而与此相反, 在规范正交的情况下仅使用一个函数来进行分析与综合。在双正交情形下, 我们能够有紧支撑对称的分析与综合小波和尺度函数, 但对于连续规范正交基来说不可能具有紧支撑对称的小波和尺度函数。此外, 规范正交尺度函数和小波具有较差的时间—尺度局部化。

在后面几章一些应用的讨论中, 我们需要分别交换分析对  $\{\phi, \psi\}$  与综合对  $\{\tilde{\phi}, \tilde{\psi}\}$  的作用。在双正交分解中, 由于  $\phi$  与  $\tilde{\phi}$  分别生成不同的多分辨分析  $A$  与  $\tilde{A}$ , 我们做起来不是很容易。对于这种交换, 我们需要映射  $x \rightarrow \tilde{x}_M \in \tilde{A}_M$ , 而且我们能够用  $\psi$  作为分析小波, 而用  $\tilde{\psi}$  作为综合小波。

除了双正交和正交分解外还存在另一种分解, 称为半正交分解(semiorthogonal decomposition), 此时,  $A_s \perp W_s$ 。在这种体系中尺度函数与小波不是正交的, 因此我们仍然需要它们的对偶  $\tilde{\phi}$  与  $\tilde{\psi}$ 。然而同双正交不一样, 此时不存在对偶空间, 即对于某个适当的尺度  $s$ ,  $\phi, \tilde{\phi} \in A_s$  和  $\psi, \tilde{\psi} \in W_s$ 。在这样的体系中很容易交换  $\phi, \psi$  与  $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$  的作用。

对于半正交尺度函数和小波, 我们有:

$$\langle \phi(t-k), \tilde{\phi}(t-l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad k, l \in \mathbf{Z} \quad (5.19)$$

和

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = 0 \quad \text{对 } j \neq l \text{ 且 } j, k, l, m \in \mathbf{Z} \quad (5.20)$$

小波  $\{\phi, \psi\}$  与  $\{\tilde{\phi}, \tilde{\psi}\}$  的关系为

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{E_{\phi}(e^{j\omega})} \quad (5.21)$$

和

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{E_{\psi}(e^{j\omega})} \quad (5.22)$$

其中

$$E_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{x}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_x(k) e^{jk\omega} \quad (5.23)$$

式中  $A_x(t)$  是  $x(t)$  的自相关函数。对于式(5.23)的证明可以参见 7.6.1 小节。上面的关系与规范正交化关系式(2.35)稍微不同,这里分母中没有平方根。在第6章中我们将讨论尺度函数与小波的构造。

### 5.3 二尺度关系

二尺度关系给出了尺度函数与小波以及邻近较高阶尺度的尺度函数之间的联系。由于

$$\phi(t) \in A_0 \subset A_1 \quad (5.24)$$

$$\psi(t) \in W_0 \subset A_1 \quad (5.25)$$

所以我们能够用  $A_1$  的基表示  $\phi(t)$  与  $\psi(t)$ , 换句话说存在两个序列  $\{g_0[k]\}, \{g_1[k]\} \in l^2$ , 使得

$$\phi(t) = \sum_k g_0[k] \phi(2t - k) \quad (5.26)$$

$$\psi(t) = \sum_k g_1[k] \phi(2t - k) \quad (5.27)$$

式(5.26)和式(5.27)被称为二尺度关系(two-scale relations)。一般来说,对任何  $j \in \mathbf{Z}$ ,  $A_j$  与  $W_j$  以及  $A_{j+1}$  之间的关系由下式确定:

$$\phi(2^j t) = \sum_k g_0[k] \phi(2^{j+1} t - k)$$

$$\psi(2^j t) = \sum_k g_1[k] \phi(2^{j+1} t - k)$$

对二尺度关系取傅里叶变换,可以得到:

$$\hat{\phi}(\omega) = G_0(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.28)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = G_1(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.29)$$

其中

$$G_0(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_0[k] z^k \quad (5.30)$$

$$G_1(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_1[k] z^k \quad (5.31)$$

其中  $z = e^{-j\omega/2}$ 。应该注意在式(5.30)和式(5.31)中的定义与第2章中使用的  $z$  变换稍微有点不同。对于 Haar 小波的情形,二尺度关系的例子如图 5.3 所示。式(5.26)和式(5.27)的展开导致如下的关系:

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{l=1}^{\infty} G_0 \exp\left(-j \frac{\omega}{2^l}\right) \quad (5.32)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = G_1 \exp\left(-j \frac{\omega}{2}\right) \prod_{l=2}^{\infty} G_0 \exp\left(-j \frac{\omega}{2^l}\right) \quad (5.33)$$

由于尺度函数具有低通滤波器的特性( $\hat{\phi}(0) = 1$ ),从而所有系数的 $\{g_0[k]\}$ 的总和为2。另一方面,因为小波具有带通滤波器的特性( $\hat{\psi}(0) = 0$ ),因此系数 $\{g_1[k]\}$ 的总和为0。

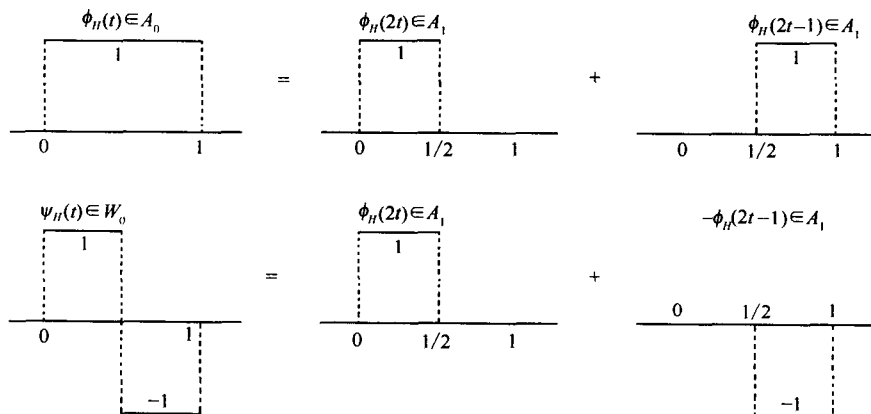


图 5.3 Haar 情形的二尺度关系( $g_0[0] = g_0[1] = 1; g_1[0] = -g_1[1] = 1$ ;  
 $g_0[k] = g_1[k] = 0$  对所有其他的  $k$ )

## 5.4 分解关系

分解关系用较低阶尺度的尺度函数和小波给出了尺度函数的表示。由于  $A_1 = A_0 + W_0$  且  $\phi(2t), \phi(2t-1) \in A_1$ , 所以在  $l^2$  中存在两个序列 $\{h_0[k]\}$ 和 $\{h_1[k]\}$ 使得:

$$\phi(2t) = \sum_k \{h_0[2k]\phi(t-k) + h_1[2k]\psi(t-k)\}$$

$$\phi(2t-1) = \sum_k \{h_0[2k-1]\phi(t-k) + h_1[2k-1]\psi(t-k)\}$$

结合这两个关系,对于所有  $l \in \mathbf{Z}$ ,可以得到:

$$\phi(2t-l) = \sum_k \{h_0[2k-l]\phi(t-k) + h_1[2k-l]\psi(t-k)\} \quad (5.34)$$

一般地,我们有:

$$\phi(2^{j+1}t-l) = \sum_k \{h_0[2k-l]\phi(2^j t-k) + h_1[2k-l]\psi(2^j t-k)\} \quad (5.35)$$

Haar 情形的一个分解关系如图 5.4 所示。

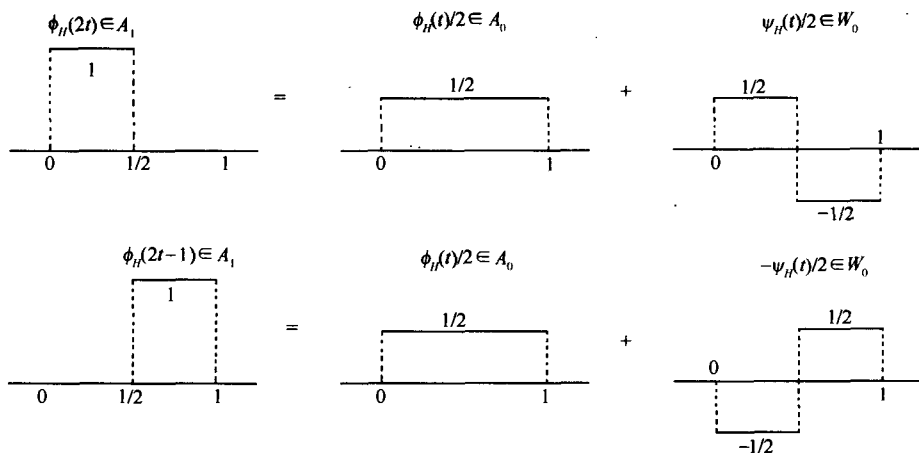


图 5.4 Haar 情形的分解关系 ( $g_0[0] = g_0[1] = 1; g_1[0] = -g_1[1] = 1$ ;  
 $g_0[k] = g_1[k] = 0$  对所有其他的  $k$ )

## 5.5 样条函数

小波构造中最基本的组成部分之一涉及到基数  $B$  样条, 完整的样条理论已经超出本书范围。在这一节, 我们简单描述样条函数及其基本性质, 而对于理解本书所讨论的课题需要这些知识。更多的细节, 读者可以参考许多优秀的书刊(比如, 文献[4 ~ 8])。

样条函数由分段多项式构成(参见图 5.5) 并且在断点(结点:  $t_0, t_1, \dots$ ) 处光滑地连结起来, 光滑度依赖于样条的阶数。对于基数  $B$  样条, 结点是等距的。与多项式不同, 它们构成局部基, 而且具有许多有用的性质, 能够应用于函数逼近。

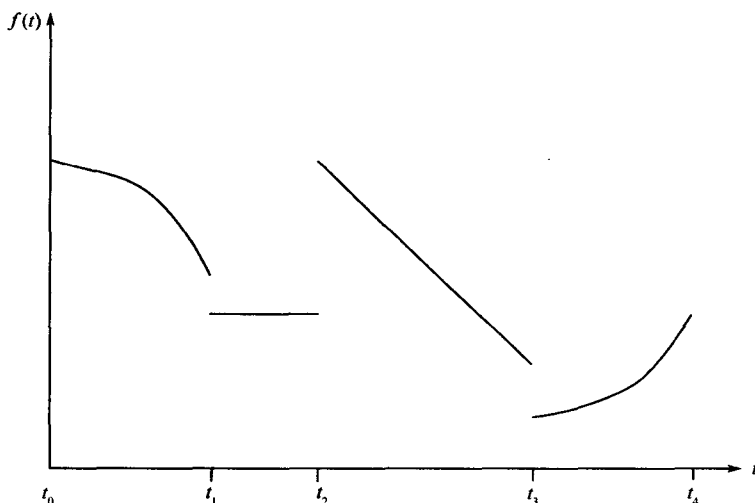


图 5.5 分段多项式函数

$m$  阶基数  $B$  样条  $N_m(t)$  具有结点序列  $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ , 且在两个结点之间由  $m$  阶

(光滑度为  $m-1$ ) 多项式构成。设  $N_1(t) = \chi_{[0,1)}(t)$  是  $[0,1)$  的特征函数, 则对每个整数  $m \geq 2$ ,  $m$  阶基数  $B$  样条被归纳地定义为

$$N_m(t) = (N_{m-1} * N_1)(t) = \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} N_{m-1}(t-x)N_1(x)dx = \\ & \int_0^1 N_{m-1}(t-x)dx \end{aligned} \quad (5.37)$$

对于  $m \geq 2$ , 利用公式(文献[7, pp. 131]) 能够实现  $N_m(t)$  的快速计算:

$$N_m(t) = \frac{t}{m-1}N_{m-1}(t) + \frac{m-t}{m-1}N_{m-1}(t-1)$$

一直迭代到 1 阶  $B$  样条  $N_1$  (参见图 5.6)。2 阶到 6 阶的样条函数及其振幅谱如图 5.7 所示。通常使用最多的是线性 ( $m=2$ ) 和三次 ( $m=4$ ) 样条, 其表达式为

$$N_2(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 2-t, & t \in [1,2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.38)$$

$$N_4(t) = \begin{cases} t^3, & t \in [0,1] \\ 4-12t+12t^2-3t^3, & t \in [1,2] \\ -44+60t-24t^2+3t^3, & t \in [2,3] \\ 64-48t+12t^2-t^3, & t \in [3,4] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.39)$$

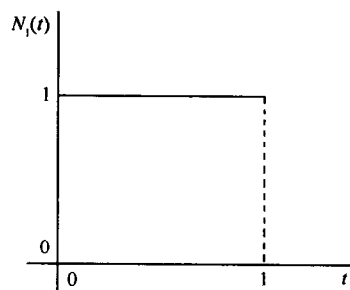


图 5.6 1 阶样条  $N_1$

在很多应用中我们需要计算整数点的样条值, 表 5.1 给出了整数位置的样条值, 利用对称性能够得到其他点上的值。

表 5.1 整数点基数  $B$  样条的值

$k$	$(m-1)!N_m(k)$	$k$	$(m-1)!N_m(k)$	$k$	$(m-1)!N_m(k)$
$m=3$		$m=8$		$m=11$	
1	1	1	1	1	1
	$m=4$	2	120	2	1 013
1	1	3	1 191	3	47 840
2	4	4	2 416	4	455 192

(续)

$k$	$(m-1)!N_m(k)$	$k$	$(m-1)!N_m(k)$	$k$	$(m-1)!N_m(k)$
$m=5$		$m=9$		$m=12$	
1	1	1	1	1	1
2	11	2	247	2	2 036
$m=6$		3	4 293	3	152 637
1	1	4	15 619	4	2 203 488
2	26	$m=10$		5	9 738 114
3	66	1	1	6	15 724 248
$m=7$		2	502		
1	1	3	14 608		
2	57	4	88 234		
3	302	5	156 190		

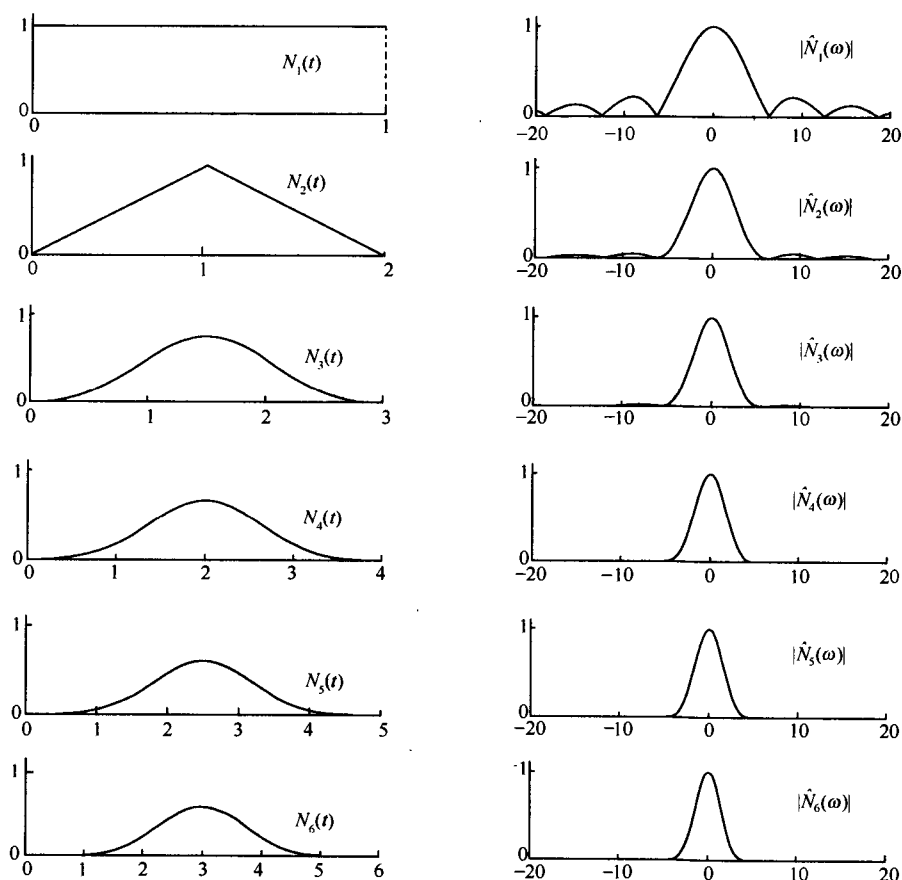


图 5.7 样条函数及其幅度频谱

为了得到  $N_m(t)$  的傅里叶变换,注意到式(5.36)能够写成:

$$N_m(t) = \underbrace{(N * \cdots * N_1)}_m(t) \quad (5.40)$$

所以

$$\hat{N}_m(\omega) = \left( \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \right)^m \quad (5.41)$$

这是由于

$$\hat{N}_1(\omega) = \int_0^1 e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \quad (5.42)$$

样条函数的重要性在于它们是尺度函数,也就是说,存在序列  $\{g_0[m, k]\} \in l^2$  使得:

$$N_m(t) = \sum_k g_0[m, k] N_m(2t - k) \quad (5.43)$$

在第6章我们将给出  $g_0[m, k]$  的表示。

### 样条函数的性质

下面讨论样条函数的一些重要性质,它们与本书所讨论的课题有关,没有给出任何证明,有关证明留作习题。

- (1)  $\text{Supp} N_m = [0, m]$ , 而且  $N_m(0) = N_m(m) = 0$ 。
- (2)  $N_m(t) \in \mathcal{C}^{m-2}, \mathcal{C}^k$  是  $k$  次连续可微函数空间。
- (3)  $N_m|_{[k-1, k]} \in \pi_{m-1}, k \in \mathbf{Z}, \pi_k$  是光滑度为  $k(k+1)$  阶) 多项式空间。
- (4)  $\int_{-\infty}^{\infty} N_m(t) dt = 1$ 。
- (5)  $N'_m(t) = N_{m-1}(t) - N_{m-1}(t-1)$ 。
- (6)  $N_m(t)$  关于中心  $t^* = m/2$  是对称的,即满足

$$N_m\left(\frac{m}{2} + t\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - t\right), t \in \mathbf{R} \quad (5.44)$$

- (7)  $N_m(t)$  相当于低通滤波器( $\hat{N}_m(0) = 1$ , 参见图 5.7)。

- (8) 在  $\hat{N}_m(\omega)$  满足如下 Strang-Fix 条件的意义下,  $N_m(t)$  具有  $m$  阶逼近:

$$\begin{cases} \hat{N}_m(0) = 1 \\ D^j \hat{N}_m(2\pi k) = 0, & k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \text{ 且 } j = 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (5.45)$$

其中  $D^j$  表示第  $j$  阶导数, 因此,  $N_m(t)$  局部重现了所有  $m$  阶多项式(参见文献[8, pp. 114-121])。

- (9) 对所有的  $t \in [0, m]$  有:  $\sum_k N_m(t-k) \equiv 1$ 。这条性质通常称为单位分解性质(partition of unity property)。

- (10) 全正性(total positivity): 对于  $t \in [0, m]$  有:  $N_m(t) \geq 0$ 。根据  $B$  样条的全正性(文献[6, pp. 7])知道,  $B$  样条级数的系数与数据的性态一致。比如, 若  $g(t) = \sum_j \alpha_j N_m(t-j)$ , 则

$$\begin{array}{lll} \alpha_j \geq 0 & \forall j & \Rightarrow g(t) \geq 0 \\ \alpha_j \uparrow (\text{单调增加}) & & \Rightarrow g(t) \uparrow \\ \alpha_j (\text{凸的}) & & \Rightarrow g(t) \text{ 是凸的} \end{array}$$

此外,  $g(t)$  符号变化的数目不会超过系数序列  $\{\alpha_j\}$  符号变化的数目, 后面的性质时常用于识别信号的零交叉。

(11) 随着阶数  $m$  的增加,  $N_m(t)$  接近于高斯函数 ( $\Delta_{N_m} \Delta_{\hat{N}_m} \rightarrow 0.5$ )。比如, 对于三次样条 ( $m = 4$ ), 时间频率窗的乘积是 0.501。

## 5.6 映射函数到多分辨分析空间

正如在 5.2 节所讨论过的, 在分解信号  $x(t)$  之前信号必须映射到多分辨分析中某个适当尺度  $M$  的子空间  $A_M$ , 即

$$x(t) \rightarrow x_M(t) = \sum_k a_{k,M} \phi(2^M t - k) \quad (5.46)$$

一旦我们知道  $\{a_{k,M}\}$ , 对于  $s < M$  就能够利用快速算法计算  $\{a_{k,s}\}$ 。快速算法将在后面的章节中讨论, 这里我们涉及到系数  $\{a_{k,M}\}$  的估计。

如果  $x(t)$  在每一点  $t$  处的值给定, 利用信号的正交投影 ( $L^2$  投影), 我们就能够得到  $\{a_{k,M}\}$ , 即

$$a_{k,M} = 2^M \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \tilde{\phi}(2^M t - k) dt \quad (5.47)$$

然而, 实际上知道信号  $x(t)$  在某些离散点上的值。给定的时间步长可以确定尺度  $M$ , 以便函数能够被映射。对于式 (5.46) 的表示, 我们期望它满足两个重要条件: ① 插值性; ② 多项式再生性。插值表示 (interpolatory representation) 是指级数应该是精确的, 至少在给定函数值的点上是正确的, 这意味着  $x(k/2^M) = x_M(k/2^M)$ 。与前面指出的一样, 多项式再生性 (polynomial reproducibility) 是指如果基底  $\phi(t)$  具有  $m$  阶逼近, 则表示对于  $m$  阶多项式在每个点上是精确的。换句话说, 对于  $x(t) \in \pi_{m-1}$  有  $x(t) \equiv x_M(t)$ 。基数  $B$  样条具有  $m$  阶逼近。另外, 由于它们是局部基, 表示式 (5.46) 也是局部的。局部性是指对于  $k$ , 为了得到系数  $a_{k,M}$ , 我们不需要所有的函数值, 只需要知道由样条的支撑所确定的一些值, 它们将是充分的。下面将推导出当  $\phi(t) = N_2(t)$  和  $\phi(t) = N_4(t)$  时的系数。

线性样条 ( $m = 2$ ) 假设给定一个函数在  $t = l/2^M$ ,  $l \in \mathbf{Z}$  的值, 则为了得到表示:

$$x(t) \rightarrow x_M(t) = \sum_k a_{k,M} N_2(2^M t - k) \quad (5.48)$$

的样条系数  $\{a_{k,M}\}$ , 我们应用插值条件, 即

$$x\left(\frac{l}{2^M}\right) = x_M\left(\frac{l}{2^M}\right) \quad (5.49)$$

利用式 (5.49) 和事实:

$$N_2(1) = 1 \text{ 和 } N_2(k) = 0, \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \quad (5.50)$$

可以得到

$$a_{k,M} = x\left(\frac{k+1}{2^M}\right) \quad (5.51)$$

表示式 (5.48) 保持所有多项式的次数至多为 1。

三次样条 ( $m = 4$ ) 在这种情况下:

$$x(t) \rightarrow x_M(t) = \sum_k a_{k,M} N_4(2^M t - k) \quad (5.52)$$



其中(见文献[4, pp. 117])

$$a_{k,M} = \sum_{n=k-2}^{k+6} \nu_{k+2-2n} x\left(\frac{n}{2^{M-1}}\right)$$

而且

$$\nu_n = \begin{cases} \frac{29}{24}, & n=0 \\ \frac{7}{12}, & n=\pm 1 \\ -\frac{1}{8}, & n=\pm 2 \\ -\frac{1}{12}, & n=\pm 3 \\ \frac{1}{48}, & n=\pm 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

表示式(5.52)保持所有多项式的次数至多为3。

## 5.7 习 题

1. 对于给定的  $j \in \mathbf{Z}$ , 任何给定函数  $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$  到如下帽函数空间

$$V_j = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k N_2(2^j t - k) : \{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}} \in l^2 \right\}$$

上的投影  $P_{2,j}f(t)$  能够由插值条件  $P_{2,j}f(k/2^j) = f(k/2^j)$  (对于所有的  $k \in \mathbf{Z}$ ) 来确定。若  $P_{2,j}f(t)$  被写成:

$$P_{2,j}f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n N_2(2^j t - n)$$

试给出系数  $\{a_n\}$  的公式。

2. 对于 Haar 小波

$$\psi_H(t) = N_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定义

$$\psi_{H,k,s}(t) = 2^{s/2} \psi_H(2^s t - k), \quad k, s \in \mathbf{Z}$$

证明正交关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{H,k,s}(t) \psi_{H,m,p}(t) dt = \delta_{m,k} \delta_{s,p}, \quad m, k, p, s \in \mathbf{Z}$$

由于这些关系, 我们说集合  $\{\psi_{H,k,s}\}_{k,s \in \mathbf{Z}}$  构成  $L^2(-\infty, \infty)$  的规范正交系。

3. 证明高斯函数  $\phi(t) = e^{-t^2}$  不能是多分辨分析的尺度函数。

(提示: 假设在  $l^2$  中存在序列  $\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  使得  $e^{-t^2}$  能够被写成  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-(2t-k)^2}$ , 如果  $e^{-t^2}$

$\in V_0 \subset V_1$ , 这也必定是正确的。通过在等式两边取傅里叶变换并且比较结果, 则将导致矛盾。)

4. 证明  $m$  阶  $B$  样条  $N_m(t)$  和它的积分变换构成单位分解, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_m(t-k) = 1 \quad \text{对所有 } x \in \mathbf{R}$$

(提示: 利用 Poisson 求和公式。)

5. 证明  $N_m(t)$  的对称性:

$$N_m\left(\frac{m}{2} + t\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - t\right), x \in \mathbf{R}$$

6. 利用习题 5 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(t+k) N_m(t) dt = N_{2m}(m+k), \text{ 对任意 } k \in \mathbf{Z}$$

7. 证明帽函数

$$N_2(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ 2-t, & t \in [1, 2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

和函数  $N_1(t)$  通过卷积联系在一起:  $N_2(t) = N_1(t) * N_1(t)$ 。给出下列函数的定义方程 (多项式表达式):

$$\begin{aligned} N_3(t) &= N_2(t) * N_1(t), \\ N_4(t) &= N_3(t) * N_1(t), \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

## 5.8 计算机程序

$B$  样条

%

% 程序 Bspline.m

%

% 计算一致  $B$  样条

函数  $y = \text{Bspline}(m, x)$

$y = 0$ ;

% 特征函数

if  $m == 1$

if  $x \geq 0.0$  &  $x < 1.0$

$y = 1.0$ ;

else

$y = 0.0$ ;

end

end

% 高阶

```

a = zeros(1,500);

if m >= 2 & m < 100
    for k = 1:m-1
        a(k) = 0.0;
        x1 = x - k + 1;
        if x1 >= 0.0 & x1 < 1.0
            a(k) = x1;
        end
        if x1 >= 1.0 & x1 < 2.0
            a(k) = 2 - x1;
        end
    end
end

for p = 1:m-2
    for q = 1:m-1-p
        a(q) = ((x-q+1) * a(q) + (p+q+1-x) * a(q+1))/(p+1);
    end
end

y = a(1);
end

```

## 参 考 文 献

- [1] Y. Meyer. Wavelets; Algorithms and Applications. Philadelphia; SIAM, 1993.
- [2] S. Mallat. A theory of Multiresolution Signal Decomposition; the Wavelet Representation. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. ,11, pp. 674-693, 1989.
- [3] S. Mallat. Multiresolution Representation and Wavelets. Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1988.
- [4] C. K. Chui. An Introduction to Wavelets. San Diego, Calif. ; Academic Press, 1992.
- [5] I. J. Schoenberg. Cardinal Spline Interpolation. CBMS Ser. 12. Philadelphia; SIAM, 1973.
- [6] L. L. Schumaker. Spline Functions; Basic Theory. New York; Wiley-Interscience, 1981.
- [7] C. de Boor. A Practical Guide to Splines. New York; Springer-Verlag, 1978.
- [8] C. K. Chui. Multivariate Splines. CBMS-NSF Ser. Appl. Math. 54. Philadelphia; SIAM, 1988.

## 第 6 章 小波的构造

这一章我们将讨论正交小波、半正交小波和双正交小波的构造。构造问题等价于找到适当的二尺度序列和分解序列,这已经在第 5 章介绍过。可以证明正交小波的系数能够容易从半正交小波的系数推出。因此,我们首先讨论半正交小波,随后讨论正交小波和双正交小波。

对于半正交小波,  $\phi(t)$  和  $\tilde{\phi}(t)$  都在  $A_0$  中,而  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$  都在  $W_0$  中,因此,我们能够用  $\tilde{\phi}(t)$  来表示  $\phi(t)$ ,类似地可以用  $\tilde{\psi}(t)$  表示  $\psi(t)$ ,由式(5.21)与式(5.22)给出的这些关系是:

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{E_{\phi}(e^{j\omega})} \quad (6.1)$$

和

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{E_{\psi}(e^{j\omega})} \quad (6.2)$$

而且 Euler-Frobenius-Laurent 多项式  $E_f(e^{j\omega})$  确定如下:

$$E_f(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_f(e^{j\omega k}) \quad (6.3)$$

因此我们仅仅致力于  $\phi$  和  $\psi$  的构造。

首先是关于构造小波,我们能够用  $\{g_0[k]\}$  表示  $\{h_0[k]\}$ 、 $\{h_1[k]\}$  和  $\{g_1[k]\}$ ,因此仅仅需要  $\{g_0[k]\}$  来构造尺度函数。在半正交的情况下,所有这些序列一般具有不同的长度。后面我们将要说明在规范正交的情况下,所有这些序列都具有同样的长度,而且它们之间存在很简单的关系,这些关系作为半正交的特殊情形能够很容易得到。根据一些著名的正交小波:Shannon 小波、Meyer 小波、Battle-Lemarié 小波以及 Daubechies 小波得到半正交小波的构造。最后,我们构造双正交小波。

### 6.1 小波构造的必要条件

正像前面指出的,为了能够构造小波,我们必须得到系数序列  $\{g_0[k]\}$  和  $\{g_1[k]\}$ 。本节的目的是找出不同序列之间的关系,这将有助于简化我们的工作。这里我们考虑多分辨空间半正交分解的情形。

#### 6.1.1 二尺度序列之间的关系

作为多分辨性质的结果,从第 5 章可以知道,二尺度关系为

$$\phi(t) = \sum_k g_0[k] \phi(2t - k) \quad (6.4)$$

$$\psi(t) = \sum_k g_1[k] \phi(2t - k) \quad (6.5)$$

对上面的二尺度关系取傅里叶变换,可以得到:

$$\hat{\phi}(\omega) = G_0(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.6)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = G_1(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.7)$$

其中  $z = e^{-j\omega/2}$ , 而且

$$G_0(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_0[k] z^k \quad (6.8)$$

$$G_1(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_1[k] z^k \quad (6.9)$$

注意到  $\phi(t) \in A_0$ ,  $\phi(2t) \in A_1$  和  $\psi(t) \in W_0$ , 根据多分辨分析的嵌套性质, 我们知道:  $A_0 \subset A_1$ ,  $A_0 \perp W_0$  且满足  $A_0 \oplus W_0 = A_1$ . 子空间  $A_0$  与  $W_0$  的正交性是指对于任何  $l \in \mathbf{Z}$ :

$$\langle \phi(t-l), \psi(t) \rangle = 0 \quad (6.10)$$

利用帕塞瓦尔恒等式, 等式(6.10) 能够被重新写成:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{-j\omega} \overline{\hat{\psi}(\omega)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(z) \overline{G_1(z)} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 e^{-j\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{4\pi k}^{4\pi(k+1)} G_0(z) \overline{G_1(z)} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 e^{-j\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_0^{4\pi} G_0(z) \overline{G_1(z)} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 e^{-j\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} G_0(z) \overline{G_1(z)} E_{\phi}(z) e^{-j\omega} d\omega \end{aligned} \quad (6.11)$$

其中  $z = e^{-j\omega/2}$ . 将积分区间  $[0, 4\pi]$  划分为  $[0, 2\pi]$  和  $[2\pi, 4\pi]$  两段, 使用简单的变量代换容易证明式(6.11) 与下式相同:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [G_0(z) \overline{G_1(z)} E_{\phi}(z) + G_0(-z) \overline{G_1(-z)} E_{\phi}(-z)] e^{-j\omega} d\omega = 0 \quad (6.12)$$

式(6.12) 对所有  $l \in \mathbf{Z}$  恒成立, 这意味着什么呢? 为了解这一点, 让我们回顾以  $2\pi$  为周期的可积函数  $f(t)$  所具有的傅里叶级数表示:

$$f(\omega) = \sum_l c_l e^{j\omega} \quad (6.13)$$

其中

$$c_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) e^{-j l \omega} d\omega \quad (6.14)$$

根据上面的式子显然可以知道式(6.12)中左边的量表示周期函数  $G_0(z) \overline{G_1(z)} E_\phi(z) + G_0(-z) \overline{G_1(-z)} E_\phi(-z)$  的第  $l$  个傅里叶系数。由于所有这些系数都是零,这意味着对于所有的  $|z| = 1$  有:

$$G_0(z) \overline{G_1(z)} E_\phi(z) + G_0(-z) \overline{G_1(-z)} E_\phi(-z) \equiv 0 \quad (6.15)$$

方程(6.15)的解给出了  $G_1(z)$  与  $G_0(z)$  之间的关系。直接代换我们能够证明,对于任何整数  $m$  和常数  $c > 0$

$$G_1(z) = -c z^{2m+1} \overline{G_0(-z)} E_\phi(-z) \quad (6.16)$$

是方程(6.15)的解,不失一般性,我们能够取  $c = 1$ 。 $m$  的作用是移动序列  $\{g_1[k]\}$  的指标,通常选择  $m$  使得  $\{g_1[k]\}$  的指标从 0 开始。

### 6.1.2 重构序列与分解序列之间的关系

从第 5 章可以知道,在某一个尺度(加细的)下的尺度函数能够由邻近较低(粗糙的)尺度下的尺度函数和小波得到。用数学语言表述,这意味着存在有限能量的序列  $\{h_0[k]\}$  和  $\{h_1[k]\}$  使得:

$$\phi(2t-l) = \sum_k \{h_0[2k-l]\phi(t-k) + h_1[2k-l]\psi(t-k)\} \quad (6.17)$$

其中  $\{h_0[k]\}$  和  $\{h_1[k]\}$  是第 5 章中讨论过的分解序列。

对分解关系取傅里叶变换,可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\omega l/2} &= \sum_k h_0[2k-l] e^{-jk\omega} \hat{\phi}(\omega) + \sum_k h_1[2k-l] e^{-jk\omega} \hat{\psi}(\omega) = \\ &\{G_0(z) \sum_k h_0[2k-l] e^{-jk\omega} + G_1(z) \sum_k h_1[2k-l] e^{-jk\omega}\} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

上面的方程可以简化为

$$\begin{aligned} \left(\sum_k h_0[2k-l] e^{-j(2k-l)\omega/2}\right) G_0(z) + \left(\sum_k h_1[2k-l] e^{-j(2k-l)\omega/2}\right) G_1(z) &\equiv \\ \frac{1}{2} \quad \forall l \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (6.18)$$

结合分解关系与二尺度关系的傅里叶变换,我们得到:

$$[H_0(z) + H_0(-z)] G_0(z) + [H_1(z) + H_1(-z)] G_1(z) = \frac{1}{2} \quad \text{对偶数 } l \quad (6.19)$$

$$[H_0(z) - H_0(-z)] G_0(z) + [H_1(z) - H_1(-z)] G_1(z) = 0 \quad \text{对奇数 } l \quad (6.20)$$

其中  $z = e^{-j\omega/2}$ , 而且

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \sum_k h_0[k] z^k$$

$$H_1(z) = \frac{1}{2} \sum_k h_1[k] z^k$$

这些方程将会导致:

$$H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) = \frac{1}{2}$$

$$H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z) = 0$$

最后一个方程也能够被写成:

$$H_0(z)G_0(-z) + H_1(z)G_1(-z) = 0 \quad (6.21)$$

在矩阵形式下,我们有:

$$\begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

其解为

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \times \frac{G_1(-z)}{\Delta_{G_0G_1}(z)} \quad (6.23)$$

$$H_1(z) = -\frac{1}{2} \times \frac{G_0(-z)}{\Delta_{G_0G_1}(z)} \quad (6.24)$$

其中

$$\Delta_{G_0G_1}(z) = G_0(z)G_1(-z) - G_0(-z)G_1(z) \quad (6.25)$$

能够证明

$$\Delta_{G_0G_1}(z) = cz^m E_\phi(z^2) \quad (6.26)$$

式中  $c > 0$  和  $m$  是一个整数。由于  $\phi$  生成 Riesz 基或稳定基,从而  $E_\phi(z) \neq 0$ , 故  $\Delta_{G_0G_1}(z) \neq 0$ 。

## 6.2 半正交样条小波的构造

6.1 节所得结果的意义在于仅需构造尺度函数(即我们仅需找到序列  $\{g_0[k]\}$ )。在这一节我们得到了由 Chui 和 Wang 在文献[1]中所引进的半正交样条小波所对应的这些序列。这里基数  $B$  样条  $N_m$  被选做尺度函数,我们将证明存在有限能量序列  $\{g_0[m, k]\}$  使得下面的二尺度关系成立:

$$N_m(t) = \sum_k g_0[m, k] N_m(2t - k) \quad (6.27)$$

因此  $N_m(t)$  是一个尺度函数。对于  $m=1$ ,  $\{N_1(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  构成  $A_0$  的规范正交基,对于这种情形,已经证明了  $g_0[0] = g_0[1] = 1$  (参见图 5.3)。在这一节我们将考虑  $m \geq 2$  的情形。

对于  $m \geq 2$ , 尺度函数  $\{N_m(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  不再是正交的,也就是说,对于所有  $l \in \mathbb{Z}$  和  $m \geq 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(t) N_m(t-l) dt \neq \delta_{0,l} \quad (6.28)$$

$N_2(t)$  非正交性的一个例子如图 6.1 所示,积分  $\int_{-\infty}^{\infty} N_2(t) N_2(t-l) dt$  由阴影部分的面积

来表示,它不是零。

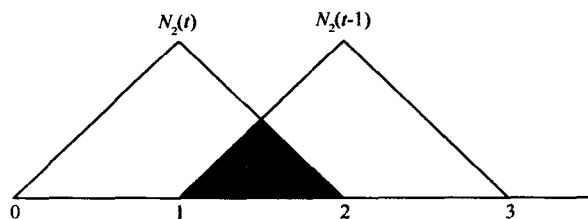


图 6.1 阴影区域表示线性样条的非正交性

$\{g_0[k]\}$  的表示

回忆第 5 章中  $N_m(t)$  的定义:

$$N_m(t) = \underbrace{(N * \cdots * N_1)}_m(t)$$

而且

$$\hat{N}_m(\omega) = \left( \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \right)^m \quad (6.29)$$

根据二尺度关系的傅里叶变换,我们有:

$$G_0(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_0[m, k] z^k = \frac{\hat{N}_m(\omega)}{\hat{N}_m(\omega/2)} = \quad (6.30)$$

$$\left( \frac{1 + e^{-j(\omega/2)}}{2} \right)^m = 2^{-m} (1 + z)^m =$$

$$2^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k \quad (6.31)$$

其中

$$z = e^{-j\omega/2}$$

通过比较  $z$  的同次幂的系数,我们可以得到:

$$g_0[k] = g_0[m, k] = \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m}{k}, & 0 \leq k \leq m \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6.32)$$

一旦有了  $\{g_0[k]\}$ , 利用在 6.1 节推导出的关系可以得到其余序列  $\{g_1[k]\}$ 、 $\{h_0[k]\}$  和  $\{h_1[k]\}$ 。 $\{g_1[k]\}$  的表达式推导如下。

对于  $N_m(t)$ , Euler-Frobenius-Laurent 多项式  $E_{N_m}(z)$  取如下的形式:

$$\begin{aligned} E_{N_m}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{N}_m\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{N_m}(k) z^k = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_{2m}(m+k) z^k \end{aligned} \quad (6.33)$$

这里  $z = e^{-j\omega/2}$  而自相关函数为:



$$A_{N_m}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} N_m(x) N_m(k+x) dx = N_{2m}(m+k) \quad (6.34)$$

最后,利用关系式(6.16),我们有:

$$g_1[k] = g_1[m, k] = (-1)^k \cdot 2^{-m+1} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k+1-l) \quad (6.35)$$

$$0 \leq k \leq 3m-2 \quad (6.36)$$

注:  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  的表达式中涉及到  $G_0(z)$  和  $G_1(z)$ , 在分母中的项是  $\Delta_{G_0 G_1}(z) = z^m E_{N_m}(z)$ , 因此  $\{h_0[k]\}$  与  $\{h_1[k]\}$  是无限长的, 尽管它们的幅度以指数衰减。在第7章和第8章中研究分解算法与重构算法时这些序列将会被使用。显然, 当  $G_0$  与  $G_1$  构成 FIR 滤波器时,  $H_0$  与  $H_1$  总是 IIR 滤波器。然而, 在第7章中我们将证明, 利用  $G_0$  与  $G_1$  能够达到重构与分解的目的, 这是第5章中提到过的对偶原理的推论。

通常使用的三次样条和对应的半正交小波及其对偶和幅度频谱如图6.2和图6.3所示。对于通常使用的半正交尺度函数和小波的表示参见第10章。表6.1给出从  $m=2$  到  $m=6$  的系数  $\{g_1[m, k]\}$ 。

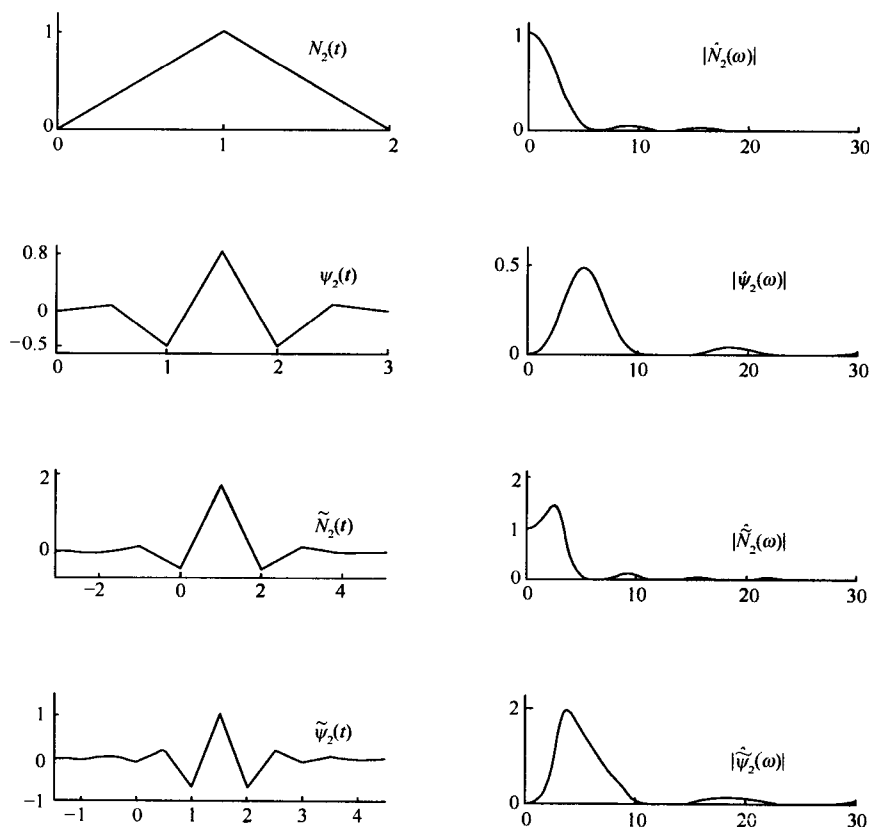


图 6.2 线性样条、对偶线性样条、对应的小波及其幅度频谱

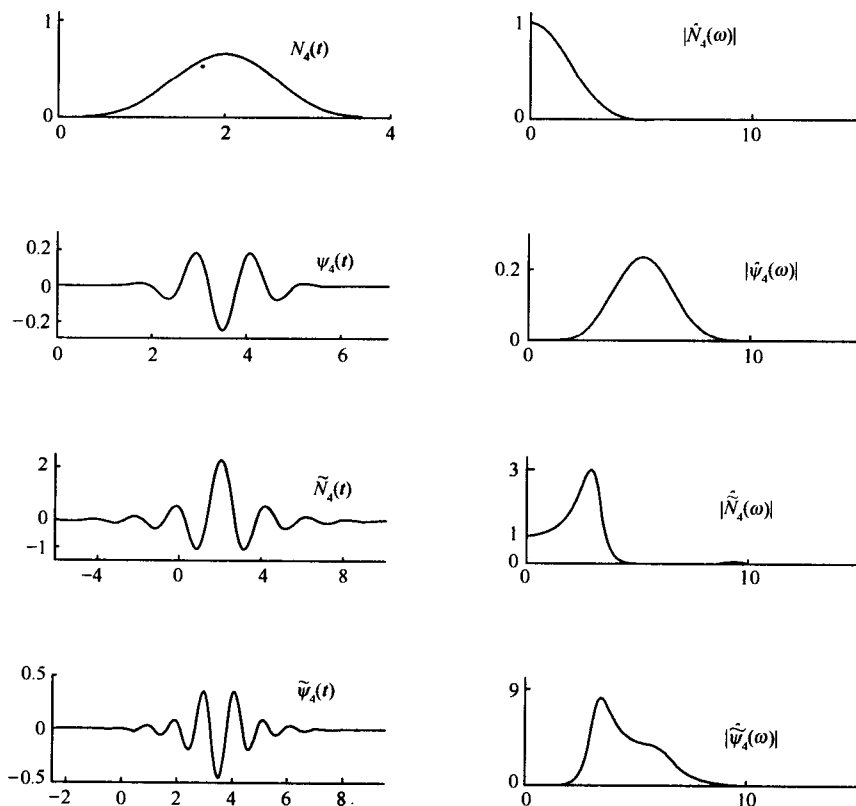


图 6.3 三次样条、对偶三次样条、对应的小波及其幅度频谱

表 6.1 半正交小波的系数  $u_{m,k} = 2^{m-1}(2m-1)!g_1[m,k]$

$$(g_1[m,k] = (-1)^m g_1[m, 3m-2-k])$$

$k$	$u_{m,k}$	$k$	$u_{m,k}$	$k$	$u_{m,k}$
$m = 2$		$m = 5$		$m = 6$	
0	1	0	1	0	1
1	-6	1	-507	1	-2 042
2	10	2	17 128	2	164 868
$m = 3$		3	-166 304	3	-3 149 870
0	1	4	748 465	4	25 289 334
1	-29	5	-1 900 115	5	-110 288 536
2	147	6	2 973 560	6	296 526 880
3	-303			7	-525 228 384
$m = 4$				8	633 375 552
0	1				
1	-124				
2	1 677				
3	-7 904				
4	18 482				
5	-24 264				

### 6.3 规范正交小波的构造

从第2章知道规范正交基的 Riesz 界是1,从而对于规范正交的尺度函数  $\phi$  及其对应的小波  $\psi$ ,我们有:

$$E_{\phi}(e^{j\omega}) = \sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \equiv 1$$

$$E_{\psi}(e^{j\omega}) = \sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 \equiv 1$$

对于几乎所有的  $\omega$ .因此

$$\tilde{\phi}(t) = \phi(t) \text{ 和 } \tilde{\psi}(t) = \psi(t)$$

也就是说它们是自对偶的.回忆我们在第5章所讨论的内容,由于多分辨分析子空间的嵌套特性,尺度函数关于尺度不是正交的.规范正交尺度函数是指尺度函数关于给定尺度的平移是正交的.另一方面,规范正交小波关于尺度及其平移都是正交的.

从

$$\langle \phi(t-l), \phi(t) \rangle = \delta_{0,l} \quad (6.37)$$

开始,根据式(6.12)的推导,我们得到下面的结果:

$$|G_0(z)|^2 + |G_0(-z)|^2 \equiv 1, |z| = 1 \quad (6.38)$$

对于规范正交尺度函数和小波,令  $m=0$ ,根据6.1节的结果能够得到不同序列  $\{g_0[k]\}$ 、 $\{g_1[k]\}$ 、 $\{h_0[k]\}$  和  $\{h_1[k]\}$  之间的关系,这些结果总结如下:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= -z \overline{G_0(-z)} \\ \Rightarrow g_1[k] &= (-1)^k g_0[1-k] \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\Delta_{G_0 G_1}(z) = G_0(z)G_1(-z) - G_0(-z)G_1(z) = z \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \frac{1}{2} \times \frac{G_1(-z)}{z} = \frac{1}{2} \times \overline{G_0(z)} \\ \Rightarrow h_0[k] &= \frac{1}{2} g_0[-k] \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} H_1(z) &= -\frac{1}{2} \times \frac{G_0(-z)}{z} = \frac{1}{2} \times \overline{G_1(z)} \\ \Rightarrow h_1[k] &= \frac{1}{2} (-1)^k g_0[k+1] \end{aligned} \quad (6.42)$$

作为一个例子,对于 Haar 尺度函数和小波(参见图 5.3 和图 5.4):

$$\begin{aligned} g_0[0] &= g_0[1] = 1 \\ g_1[0] &= 1, g_1[1] = -1 \\ h_0[0] &= h_0[1] = \frac{1}{2} \\ h_1[0] &= \frac{1}{2}, h_1[1] = -\frac{1}{2} \\ g_0[k] &= g_1[k] = h_0[k] = h_1[k] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\} \end{aligned}$$

注：规范正交基最重要的特征之一是所有的分解与重构滤波器都是 FIR 而且具有同样的长度，这非常有助于第 7 章中分解算法与重构算法的讨论。正交小波的不足之处是它们一般没有闭型表达式，而且紧支集正交小波也不具有线性相位（不对称），线性相位在信号处理中的重要性将在第 7 章中讨论。在文献[2] 中已经证明了高阶规范正交尺度函数和小波具有较差的时间频率局部化。

## 6.4 规范正交尺度函数

在这一节，我们讨论通常使用的正交小波，比如，Shannon 小波、Meyer 小波、Battle-Lemarié 小波和 Daubechies 小波。我们仅仅推导序列  $\{g_0[k]\}$  的表达式，其他序列的表达式能够根据 6.1 节的关系得到。

### 6.4.1 Shannon 尺度函数

Shannon 采样函数

$$\phi_{\text{SH}}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (6.43)$$

是一个满足条件  $\hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega) = \chi_{(-\pi, \pi)}(\omega)$  的规范正交尺度函数。利用关系

$$\langle \phi_{\text{SH}}(t-l), \phi_{\text{SH}}(t) \rangle = \delta_{0,l} \quad (6.44)$$

在时域中证明式(6.43)的正交性将是很麻烦的，在这里很容易说明 Riesz 界是 1，即

$$\sum_k |\hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega + 2\pi k)|^2 \equiv 1 \quad (6.45)$$

根据二尺度关系能够得到序列  $\{g_0[k]\}$ ：

$$\frac{1}{2} \sum_k g_0[k] e^{-jk\omega/2} = \frac{\hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega)}{\hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega/2)} \quad (6.46)$$

上述表达式的左端是以  $4\pi$  为周期的周期函数，因此我们必须对右端进行  $4\pi$  周期的延拓，换句话说， $G_0(z)$  正是  $\hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega)$  的  $4\pi$  周期延拓（参见图 6.4）：

$$G_0(z) = \frac{1}{2} \sum_l g_0[l] \exp\left(-j \frac{\omega l}{2}\right) = \sum_l \hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega + 4\pi l) \quad (6.47)$$

根据式(6.47)，能够得到系数  $\{g_0[k]\}$  的表示：

$$\begin{aligned} g_0[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} \sum_l \hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega + 4\pi l) \exp\left(j \frac{\omega k}{2}\right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{4\pi l}^{4\pi(l+1)} \hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega) \exp\left(j \frac{\omega k}{2}\right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{\text{SH}}(\omega) \exp\left(j \frac{\omega k}{2}\right) d\omega = \\ &= \phi_{\text{SH}}\left(\frac{k}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.48)$$

利用式(6.43)，我们得到：

$$g_0[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ (-1)^{(k-1)/2} \frac{2}{k\pi}, & k \text{ 是奇数} \\ 0, & k \neq 0 \text{ 是偶数} \end{cases}$$

Shannon 尺度函数和小波如图 6.5 所示。

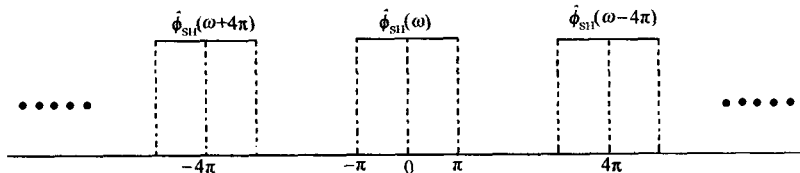


图 6.4  $\hat{\phi}_{SH}(\omega)$  的  $4\pi$  周期延拓

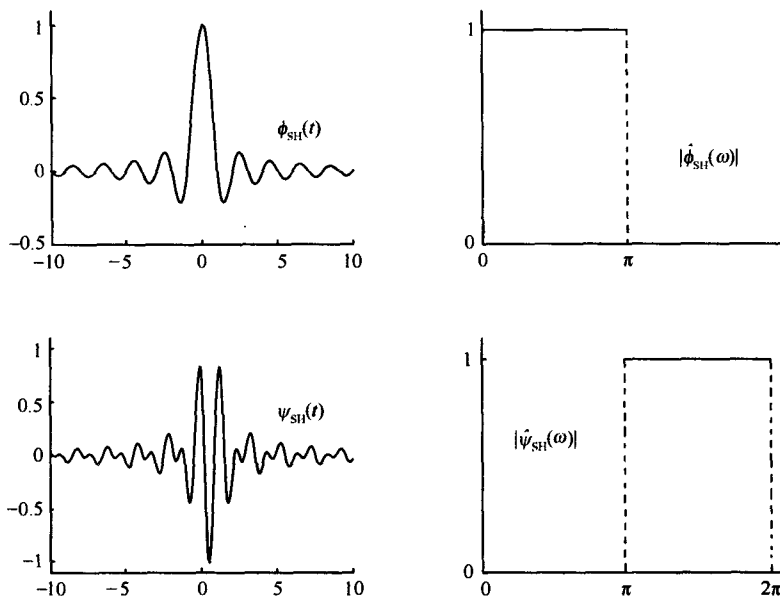


图 6.5 Shannon 尺度函数、小波及其幅度频谱

### 6.4.2 Meyer 尺度函数

Shannon 尺度函数  $\phi_{SH}(t)$  具有较差的时间局部化 ( $\Delta t_{SH} = \infty$ ), 其主要原因是在频率域中  $\hat{\phi}_{SH}(\omega)$  有不连续点  $-\pi$  和  $\pi$ , 因此, 由式 (6.43) 给定的函数在时间域与  $1/t$  的衰减性相同, 其 RMS (均方根) 时间窗宽式 (4.3) 是  $\infty$ 。为了使其得到改善, Meyer<sup>[3,4]</sup> 在  $\hat{\phi}_{SH}(\omega)$  的不连续点附近使用光滑函数, 用这种方法正交性条件:

$$\sum_k |\hat{\phi}_{M,m}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (6.49)$$

得到满足, 从而获得尺度函数  $\hat{\phi}_{M,m}(\omega)$ , 式 (6.49) 中的  $m$  表示光滑度 (即第  $m$  阶角光滑函数  $S_m(\omega)$  是  $m$  次连续可微的)。为了满足正交性要求式 (6.38), 这些角光滑函数应该具有下面的性质:

$$S_m(y) + S_m(1-y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\begin{aligned} S_m(y) &= 0, & y < 0 \\ S_m(y) &= 1, & y > 1 \end{aligned}$$

角光滑函数的例子是:

$$S_0(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$S_1(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2y^2, & 0 \leq y < 0.5 \\ -2y^2 + 4y - 1, & 0.5 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

设  $S_m(y)$  是期望的角光滑函数, 则

$$\hat{\phi}_{M,m}(\omega) = \begin{cases} \cos\left[\frac{\pi}{2} S_m\left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1\right)\right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & |\omega| \geq \frac{4\pi}{3} \\ 1, & |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

在时间域的尺度函数则成为

$$\phi_{M,m}(t) = \frac{2}{3} \frac{\sin(2\pi t/3)}{2\pi t/3} + \frac{2}{3} \int_0^1 \cos\left[\frac{\pi}{2} S_m(\xi)\right] \cos\left[\frac{2\pi}{3}(1+\xi)t\right] d\xi \quad (6.50)$$

对于线性光滑函数  $m=0$ , 容易计算上面的积分是:

$$\phi_{M,0}(t) = \frac{2}{3} \frac{\sin(2\pi t/3)}{2\pi t/3} + \frac{4}{\pi} \frac{4t \sin(2\pi t/3) + \cos(4\pi t/3)}{9 - 16t^2} \quad (6.51)$$

对于  $m$  的高阶值, 式(6.50)的积分必须用数值方法进行估计。在图 6.6 中说明了  $m=0$  与  $m=1$  时的 Meyer 尺度函数和小波。正如前面所讨论的一样, 二尺度系数  $\{g_0[k]\}$  能够通过  $\hat{\phi}_{M,m}(\omega)$  的  $4\pi$  周期延拓得到, 这种延拓的例子如图 6.7 所示。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_k g_0[k] e^{-jk\omega/2} &= \frac{\hat{\phi}_{M,m}(\omega)}{\hat{\phi}_{M,m}(\omega/2)} = \\ &= \sum_k \hat{\phi}_{M,m}(\omega + 4\pi k) \end{aligned}$$

类似于 Shannon 尺度函数的情形, 同样可以得到:

$$g_0[k] = \phi_{M,m}\left(\frac{k}{2}\right) \quad (6.52)$$

所以, 对于  $m=0$ , 在式(6.51)中用  $k/2$  代换  $t$  能够得到  $g_0[k]$ , 表 6.2 给出了  $m=1$  时的二尺度系数。

利用二尺度关系能够得到 Meyer 小波。由于尺度函数在频域中具有紧支撑, 所以

Meyer 小波与尺度函数以更直接的方式联系在一起,也就是说

$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}_{M,m}(\omega) &= G_1(z) \hat{\phi}_{M,m}\left(\frac{\omega}{2}\right) = & z &= \exp\left(-j\frac{\omega}{2}\right) \\
 & -z \overline{G_0(-z)} \hat{\phi}_{M,m}\left(\frac{\omega}{2}\right) = & & (6.53) \\
 & -z \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{M,m}(\omega + 2\pi + 4\pi k) \right] \hat{\phi}_{M,m}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \\
 & -z \left[ \hat{\phi}_{M,m}(\omega + 2\pi) + \hat{\phi}_{M,m}(\omega - 2\pi) \right] \hat{\phi}_{M,m}\left(\frac{\omega}{2}\right)
 \end{aligned}$$

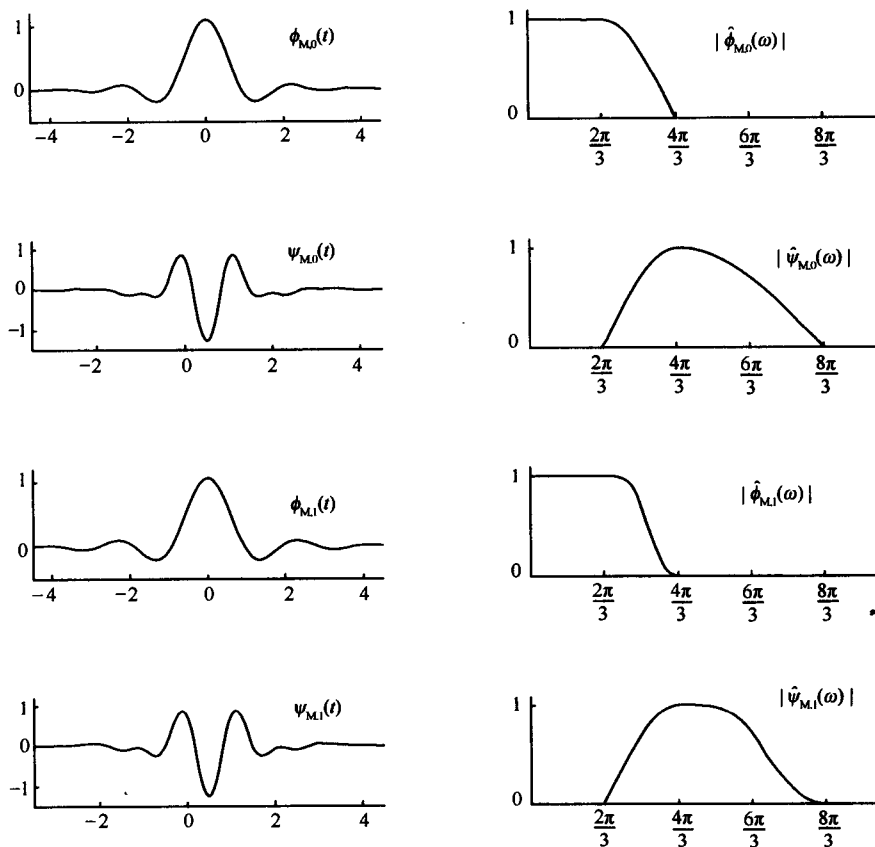


图 6.6 Meyer 尺度函数、对应的小波及其幅度频谱

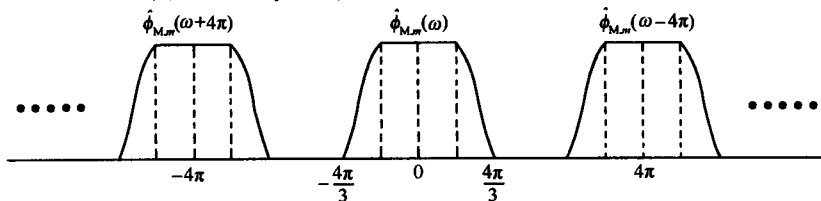


图 6.7  $\hat{\phi}_{M,m}(\omega)$  的  $4\pi$  周期延拓

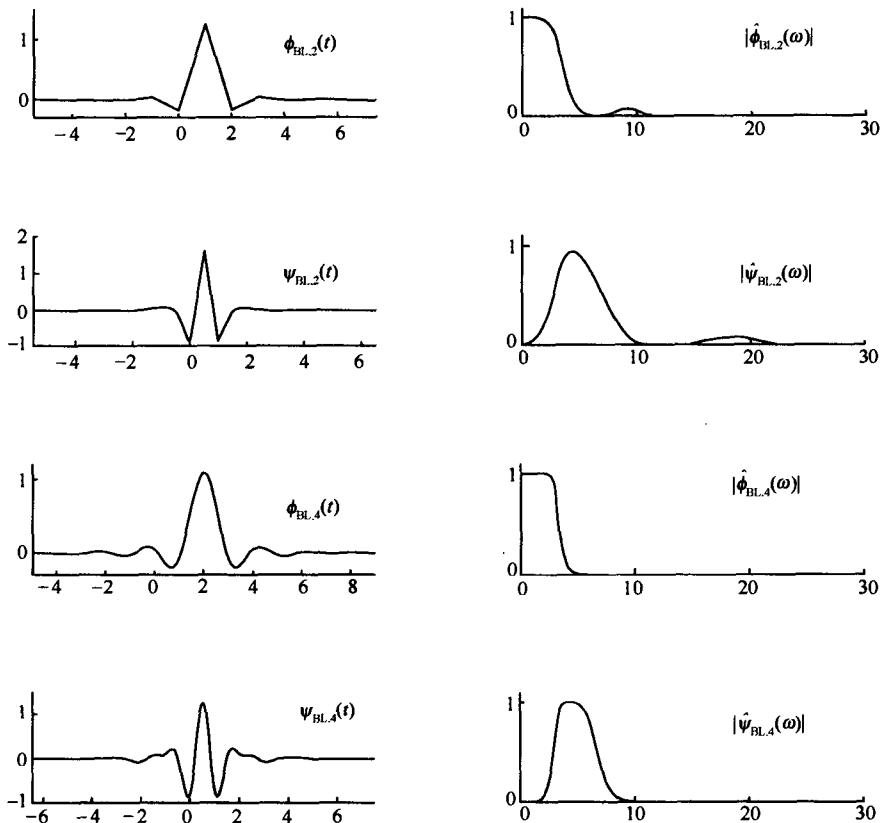


图 6.8 Battle-Lemarié 尺度函数、对应的小波及其幅度频谱

表 6.2 一阶 Meyer 尺度函数  $\phi_{M,1}$  的二尺度序列

$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$
0	1.0635133307325022	13	0.0018225696961070	26	0.0000781583234904
1	0.6237929148320031	14	-0.0001225788843060	27	-0.0002817686403039
2	-0.0594319217681172	15	-0.0019003177368828	28	-0.0000686017777485
3	-0.1762971983704155	16	-0.0000361315305005	29	0.0003520515347881
4	0.0484777578300750	17	0.0018514320187282	30	-0.0000591760677635
5	0.0751184531725782	18	-0.0004792529715153	31	-0.0002870818672708
6	-0.0339527984193033	19	-0.0013039128005108	32	0.0001435155716864
7	-0.0311015336438103	20	0.0007208498373768	33	0.0001507339706291
8	0.0197659340813598	21	0.0006265171401084	34	-0.0001171599560112
9	0.0110906323385240	22	-0.0005163028169833	35	-0.0000530482980227
10	-0.0089132072379117	23	-0.0002172396357380	36	0.0000282695514764
11	-0.0035390831203475	24	0.0001468883466883	37	0.0000443263271494
12	0.0025690718118815	25	0.0001627491841323	38	0.0000355188445237



### 6.4.3 Battle-Lemarié 尺度函数

对于  $m \geq 2$ , Battle-Lemarié 在文献 [5, 6] 中根据规范正交的  $m$  阶基函数  $N_m(t)$  构造了尺度函数。正如前面所指出过的, 对于  $m \geq 2$ , 基函数的集合  $\{N_m(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$  不是正交的。对应的规范正交尺度函数  $N_m^\perp(t)$  能够按照下面的方法得到:

$$\hat{N}_m^\perp(\omega) = \frac{\hat{N}_m(\omega)}{[E_{N_m}(e^{-j\omega})]^{1/2}} \quad (6.54)$$

从而 Battle-Lemarié 尺度函数  $\phi_{BL,m}(t)$  是:

$$\phi_{BL,m}(t) = N_m^\perp(t)$$

而且根据下式可以得到系数  $\{g_0[k]\}$ :

$$\frac{1}{2} \sum_k g_0[k] z^k = G_0(z) e^{-j(\omega/2)} = \frac{\hat{N}_m^\perp(\omega)}{\hat{N}_m^\perp(\omega/2)} \quad (6.55)$$

其中  $z = e^{-j(\omega/2)}$ 。结合式(6.54)与式(6.55), 可以得到:

$$G_0(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^m \left[ \frac{\sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) z^k}{\sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) z^{2k}} \right]^{1/2} \quad (6.56)$$

作为一个例子, 考虑线性 Battle-Lemarié 尺度函数, 此时  $m = 2$ 。在这种情况下我们有:

$$\frac{1}{2} \sum_k g_0[k] z^k = G_0(z) = \frac{(1+z)^2}{4} \times \frac{z^2 + 4z + 1}{z^4 + 4z^2 + 1} \quad (6.57)$$

将式(6.57)右端展开为  $z$  的多项式, 然后比较  $z$  的同次幂的系数, 则能够得到系数  $\{g_0[k]\}$ 。通过计算右端表达式的傅里叶系数也能得到这些系数。注意到  $G_0(1) = 1$ , 因此所有  $\{g_0[k]\}$  的和是 2。在表 6.3 与表 6.4 中我们给出了线性与三次 Battle-Lemarié 尺度函数的系数, 线性 Battle-Lemarié 尺度函数和小波如图 6.8 所示。

表 6.3 线性 Battle-Lemarié 尺度函数  $\phi_{BL,2}$  的二尺度序列

$n$	$g_0[n] = g_0[2-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[2-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[2-n]$
1	1.1563266304457929	14	0.0000424422257478	27	-0.000000053986543
2	0.5618629285876487	15	-0.0000195427343909	28	-0.0000000028565276
3	-0.0977235484799832	16	0.	29	-0.0000000013958989
4	-0.0734618133554703	17	0.0000049211790530	30	0.0000000007374693
5	0.0240006843916324	18	0.0000026383701627	31	-0.0000000003617852
6	0.0141288346913845	19	-0.0000012477015924	32	-0.0000000001908819
7	-0.0054917615831284	20	0.000000666407922	33	0.0000000000939609
8	0.0031140290154640	21	0.0000003180755856	34	0.0000000000495170
9	0.0013058436261069	22	0.0000001693729269	35	-0.000000000244478
10	0.0007235625130098	23	-0.000000081459590	36	-0.000000000128703
11	-0.0003172028555467	24	-0.0000000432645262	37	0.000000000063709
12	-0.0001735046359701	25	0.0000000209364375	38	0.000000000033504
13	0.0000782856648652	26	0.0000000110975272	39	-0.000000000016637

表 6.4 三次 Battle-Lemarié 尺度函数  $\phi_{BL,4}$  的二尺度序列

$n$	$g_0[n] = g_0[4-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[4-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[4-n]$
2	1.0834715125686560	15	0.0026617387556783	28	-0.0000282171646500
3	0.6136592734426418	16	-0.0015609238233188	29	-0.0000222283943141
4	-0.0709959598848591	17	-0.0013112570210398	30	0.0000146073867894
5	-0.1556158437675466	18	0.0007918699951128	31	0.0000114467590896
6	0.0453692402954247	19	0.0006535296221413	32	-0.0000075774407788
7	0.0594936331541212	20	-0.0004035935254263	33	-0.0000059109049365
8	-0.0242909783203567	21	-0.0003285886943928	34	0.0000039378865616
9	-0.0254308422142201	22	0.0002065343929212	35	0.0000030595965005
10	0.0122828617178522	23	0.0001663505502899	36	-0.0000020497919302
11	0.0115986402962103	24	-0.0001060637892378	37	-0.0000015870262674
12	-0.0061572588095633	25	-0.0000846821755363	38	0.0000010685382577
13	-0.0054905784655009	26	0.0000546341264354	39	0.0000008247217560
14	0.0030924782908629	27	0.0000433039957782	40	-0.0000005577533684

#### 6.4.4 Daubechies 尺度函数

Battle-Lemarié 通过规范正交化  $m$  阶基数  $B$  样条  $N_m(t)$  ( $m \geq 2$ ) 得到规范正交的尺度函数,但是,由于在规范正交化过程中分母含有函数  $E_{N_m}(z)$ ,因此序列  $\{g_0[k]\}$  是无限长序列。

为了得到规范正交但保持有限次的 Laurent 多项式, Daubechies 在文献 [7,8] 中考虑了尺度函数  $\phi_{D,m}$  的二尺度符号:

$$G_0(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^m S(z) \quad (6.58)$$

其中  $S(z) \in \pi_{m-1}$ , 因此我们的目标是找到  $S(z)$ 。首先,注意到  $G_0(1) = 1$ , 我们必定有  $S(1) = 1$ 。此外,我们期望  $S(-1) \neq 0$ ; 否则,若  $S(-1) = 0$ , 则  $z+1$  是  $S(z)$  的一个因式,因此这个因式能够被去掉。现在,由式(6.58)确定的  $G_0(z)$  必然满足正交性条件,即

$$|G_0(z)|^2 + |G_0(-z)|^2 = 1, \quad z = e^{-j\omega/2} \quad (6.59)$$

$$\Rightarrow \cos^{2m} \frac{\omega}{4} |S(z)|^2 + \sin^{2m} \frac{\omega}{4} |S(-z)|^2 = 1 \quad (6.60)$$

通过定义

$$x = \sin^2 \frac{\omega}{4}$$

和

$$f(x) = |S(z)|^2$$

则式(6.60)能够被重新写成(习题 11):

$$\begin{aligned} (1-x)^m f(x) + x^m f(1-x) &= 1 \\ \Rightarrow f(x) &= (1-x)^{-m} [1 - x^m f(1-x)] = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{k} x^k + R_m(x) \end{aligned} \quad (6.61)$$

其中余项  $R_m(x)$  是:

$$R_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{k} x^k + (-x)^m f(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k \quad (6.62)$$

由于  $f(x)$  是  $m$  阶多项式, 从而  $R_m(x) \equiv 0$ , 因此, 我们有:

$$|S(z)|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{k} \sin^{2k} \frac{\omega}{4}, \quad z = e^{-i\omega/2} \quad (6.63)$$

上面的多项式能够转化为

$$|S(z)|^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \cos \frac{k\omega}{2} \quad (6.64)$$

其中(文献[9])

$$a_k = (-1)^k \sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{1}{2^{2(k+n)-1}} \binom{2(k+n)}{n} \binom{m+k+n-1}{k+n} \quad (6.65)$$

下面的任务是从  $|S(z)|^2$  得到  $S(z)$ 。

根据 Riesz 引理(文献[10]), 对于具有  $a_0, \dots, a_N \in \mathbf{R}$  和  $a_N \neq 0$  的余弦级数

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \quad (6.66)$$

存在一个多项式

$$g(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^k \quad (6.67)$$

以及  $b_0, \dots, b_N \in \mathbf{R}$ , 使得

$$|g(z)|^2 = \hat{f}(\omega), \quad z = e^{-i\omega} \quad (6.68)$$

将 Riesz 引理应用于式(6.64), 容易证明<sup>[9]</sup>  $S(z)$  具有下面的形式:

$$S(z) = C \prod_{k=1}^K (z - r_k) \prod_{l=1}^L (z - z_l)(z - \bar{z}_l), \quad K + 2L = m - 1 \quad (6.69)$$

式中  $\{r_k\}$  与  $\{z_l\}$  分别是  $z^{m-1} |S(z)|^2$  在单位圆内的非零实根和复数根;  $C$  是一个使得  $S(1) = 1$  的常数。

一旦我们有了  $S(z)$ , 将它代入式(6.58), 然后比较  $z$  的同次幂的系数就会得到序列  $\{g_0[k]\}$ 。我们将用一个例子来说明得到序列  $\{g_0[k]\}$  的步骤。

考虑  $m = 2$ , 这时有  $a_0 = 4$  和  $a_1 = -1$ , 从而得到:

$$\begin{aligned} |S(z)|^2 &= 2 - \cos \frac{\omega}{2} = \\ &= 2 - \frac{1}{2}(z + z^{-1}) \\ \Rightarrow z |S(z)|^2 &= \frac{1}{2}(-1 + 4z - z^2) = -\frac{1}{2}(z - r_1)\left(z - \frac{1}{r_1}\right) \end{aligned} \quad (6.70)$$

其中  $r_1 = 2 - \sqrt{3}$ 。根据式(6.69), 我们有:

$$S(z) = \frac{1}{1 - r_1}(z - r_1) = \frac{1}{-1 + \sqrt{3}}(z - 2 + \sqrt{3}) \quad (6.71)$$

因此,对于  $m = 2$ ,可以得到:

$$G_0(z) = \frac{1}{2}(g_0[0] + g_0[1]z + g_0[2]z^2 + g_0[3]z^3) =$$

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}[(1+\sqrt{3})z + (1-\sqrt{3})] = \quad (6.72)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}z + \frac{3+\sqrt{3}}{4}z^2 + \frac{1+\sqrt{3}}{4}z^3\right)$$

由于  $S(z)$  是  $m$  阶多项式,从而  $\phi_{D,m}$  的二尺度序列的长度是  $2m$ 。

对于  $m = 2$  和  $m = 7$  的尺度函数与小波及其幅度频谱如图 6.9 所示。在表 6.5 中给出

表 6.5 Daubechies 尺度函数的二尺度序列

$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$
$m = 2$		$m = 5$		$m = 7$	
0	0.6830127018922193	0	0.2264189825835584	0	0.31100994307456160
1	1.1830127018922192	1	0.8539435427050283	1	0.5607912836254882
2	0.3169872981077807	2	1.0243269442591967	2	1.0311484916361315
3	-0.1830127018922192	3	0.1957669613478078	3	0.6643724822110735
$m = 3$		4	-0.3426567153829353	4	-0.2035138224626306
0	0.4704672077841636	5	-0.0456011318835469	5	-0.3168350112806179
1	1.1411169158314436	6	0.1097026586421339	6	0.1008464650093839
2	0.6503650005262323	7	-0.0088268001083583	7	0.1140034451597351
3	-0.1909344155683274	8	-0.0177918701019542	8	-0.0537824525896852
4	-0.1208322083103963	9	0.0047174279390679	9	-0.0234399415642046
5	0.0498174997368837	$m = 6$		10	0.0177497923793598
$m = 4$		0	0.15774243200274466	11	0.0006075149954022
0	0.3258034280512982	1	0.6995038140774233	12	-0.0025479047181871
1	1.0109457150918286	2	1.0622637598801890	13	0.0005002268531225
2	0.8922001382609015	3	0.4458313229311702		
3	-0.0395750262356447	4	-0.3199865989409983		
4	-0.2645071673690398	5	-0.1835180641065938		
5	0.0436163004741772	6	0.1378880929785304		
6	0.0465036010709818	7	0.0389232097078970		
7	-0.0149869893303614	8	-0.0446637483054601		
		9	0.0007832511506546		
		10	0.0067560623615907		
		11	-0.0015235338263795		

了一些 Daubechies 尺度函数的二尺度序列。读者应该记住在有些书中(比如文献 [8]), 在二尺度序列中多了一个因子 $\sqrt{2}$ 。

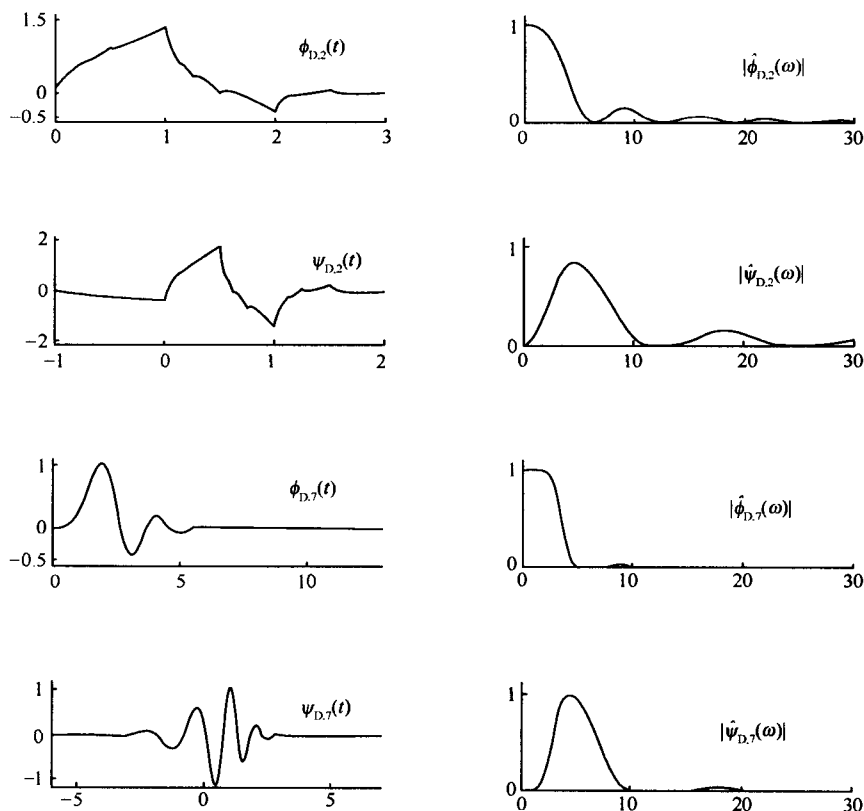


图 6.9 Daubechies 尺度函数、对应的小波及其幅度频谱

## 6.5 双正交小波的构造

在前面几节中, 我们讨论了半正交小波和正交小波。利用

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= \phi \\ \tilde{\psi} &= \psi\end{aligned}\tag{6.73}$$

我们研究了正交小波, 将其看作半正交小波的特殊情况。具有紧支撑的规范正交小波的主要缺陷之一是它们缺乏空间对称性, 这意味着处理滤波器不是对称的而且不具有线性相位性质, 缺乏这个性质时在信号处理中将会导致不理想的相位畸变, 有关此课题更详细的讨论将在第 7 章中进行。另一方面, 半正交小波是对称的, 但它们的对偶不具有紧支撑, 这将是一大缺陷。为了实时处理, 必须截短滤波器系数, 因此, 半正交小波也不够理想。双正交小波可能具有对称性和紧支撑。

Cohen 等人在文献[11] 中通过改进逼近空间的结构, 将正交小波的理论框架推广到双正交的情况。让我们回顾半正交小波和正交小波的情形, 此时仅存在一系列嵌套逼近子

空间:

$$\{0\} \leftarrow \cdots \subset A_{-2} \subset A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \rightarrow L^2(\mathbf{R}) \quad (6.74)$$

小波子空间  $W_s$  是  $A_s$  在  $A_{s+1}$  中的正交补,使得

$$A_s \cap W_s = \{0\}, s \in \mathbf{Z}$$

而且

$$A_s + W_s = A_{s+1} \quad (6.75)$$

这意味着在任何给定的尺度  $s$  下,逼近空间正交于小波空间且对于不同尺度小波空间是正交的:

$$W_s \perp W_p \quad \text{对于 } s \neq p \quad (6.76)$$

在正交的情形下,尺度函数与小波函数正交于任何给定尺度  $s$  下它们的平移:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{k,s}(t), \phi_{m,s}(t) \rangle &= \delta_{k,m} \\ \langle \psi_{k,s}(t), \psi_{m,s}(t) \rangle &= \delta_{k,m} \end{aligned} \quad (6.77)$$

在半正交的情形下,式(6.77)对于  $\phi$  和  $\psi$  不再成立。它们将正交于各自的对偶:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{k,s}(t), \tilde{\phi}_{m,s}(t) \rangle &= \delta_{k,m} \\ \langle \psi_{k,s}(t), \tilde{\psi}_{m,s}(t) \rangle &= \delta_{k,m} \end{aligned} \quad (6.78)$$

而且其对偶生成对偶空间,其意义为  $\tilde{A}_s = \text{span}\{\tilde{\phi}(2^s t - m); m \in \mathbf{Z}\}, \tilde{W}_s = \text{span}\{\tilde{\psi}(2^s t - m); m \in \mathbf{Z}\}, s \in \mathbf{Z}$ 。如同在第5章描述的一样,半正交性蕴涵着  $\tilde{A}_s = A_s$  且  $\tilde{W}_s = W_s$ 。

在双正交系中,存在另外一个对偶嵌套空间:

$$\{0\} \leftarrow \cdots \subset \tilde{A}_{-2} \subset \tilde{A}_{-1} \subset \tilde{A}_0 \subset \tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \cdots \rightarrow L^2(\mathbf{R}) \quad (6.79)$$

与这个嵌套空间序列相联系的是对偶小波子空间(非嵌套)  $\tilde{W}_s (s \in \mathbf{Z})$ ,它是嵌套子空间  $A_s (s \in \mathbf{Z})$  的补空间,更精确地说,这些子空间的关系是:

$$A_s + \tilde{W}_s = A_{s+1} \quad (6.80)$$

$$\tilde{A}_s + W_s = \tilde{A}_{s+1} \quad (6.81)$$

正交性条件成为

$$A_s \perp \tilde{W}_s \quad (6.82)$$

$$\tilde{A}_s \perp W_s \quad (6.83)$$

从而我们有:

$$\langle \phi_{k,s}(t), \tilde{\psi}_{m,s}(t) \rangle = 0 \quad (6.84)$$

$$\langle \tilde{\phi}_{k,s}(t), \psi_{m,s}(t) \rangle = 0 \quad (6.85)$$

此外,式(6.78)中尺度函数与小波之间的双正交性仍然成立。对于这些基的二尺度关系是:

$$\phi(t) = \sum_k g_0[k] \phi(2t - k) \quad (6.86)$$

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_k \tilde{h}_0[k] \tilde{\phi}(2t-k) \quad (6.87)$$

$$\phi(t) = \sum_k g_1[k] \phi(2t-k) \quad (6.88)$$

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_k \tilde{h}_1[k] \tilde{\psi}(2t-k) \quad (6.89)$$

关于滤波器序列,这些基之间的正交性与双正交性给出了下面 4 个条件:

$$\langle g_0[k-2m], \tilde{h}_1[k-2n] \rangle = 0 \quad (6.90)$$

$$\langle g_1[k-2m], \tilde{h}_0[k-2n] \rangle = 0 \quad (6.91)$$

$$\langle g_0[k-2m], \tilde{h}_0[k] \rangle = \delta_{m,0} \quad (6.92)$$

$$\langle g_1[k-2m], \tilde{h}_1[k] \rangle = \delta_{m,0} \quad (6.93)$$

双正交小波由满足式(6.90)到式(6.93)的滤波器序列构成。由于双正交小波设计中有很大的自由度,设计过程中没有固定的步骤,比如,我们可以从  $B$  样条的二尺度序列  $g_0[k]$  开始得到其余的序列。另一种方法是设计双正交滤波器组,然后迭代序列得到尺度函数和小波(将在 6.6 节讨论)。与正交小波中分析滤波器与综合滤波器只是在时间上相反不同,为了得到两个小波和两个尺度函数,我们不但要迭代综合滤波器,而且还要迭代分析滤波器。通过例子来讨论双正交小波的构造将在第 7 章中介绍。

## 6.6 小波的图解显示

许多小波可能是数学上没有解析表达式的函数,比如由二尺度序列得到的 Daubechies 紧支集小波以及由无限多项式刻画的样条小波,使用者要想象基于参数和间接表示的尺度函数与小波函数是困难的。我们给出三种显示尺度函数与小波函数图形的方法。

### 6.6.1 迭代法

这种方法实现最简单,为了便于实践,书中包含了 Matlab 程序。记

$$\phi_{m+1}(t) = \sum g_0[k] \phi_m(2t-k), m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.94)$$

而且计算  $t$  的所有值。实际上,我们可以初始化程序,取

$$\phi_0(t) = \delta(t) \quad (6.95)$$

而且令  $\phi_0(n) = \delta(n) = 1$ 。对序列 2 抽取后与  $g_0[k]$  序列卷积给出  $\phi_1(n)$ , 对  $\phi_1(n)$  序列 2 抽取后再与  $g_0[k]$  序列卷积给出  $\phi_2(n)$ , 依此类推。大多数情况下此过程在 10 次迭代内收敛,对于双正交小波收敛时间可能会长一些。一旦得到了尺度函数,利用小波的二尺度关系能够计算和显示相应的小波:

$$\psi(t) = \sum g_1[k] \phi(2t-k)$$

显示的迭代过程如图 6.10 所示,图上标明了每次迭代中点的数目。为了得到时间轴上所对应的位置,每次迭代  $m$  的横坐标必须被  $2^m$  所整除。

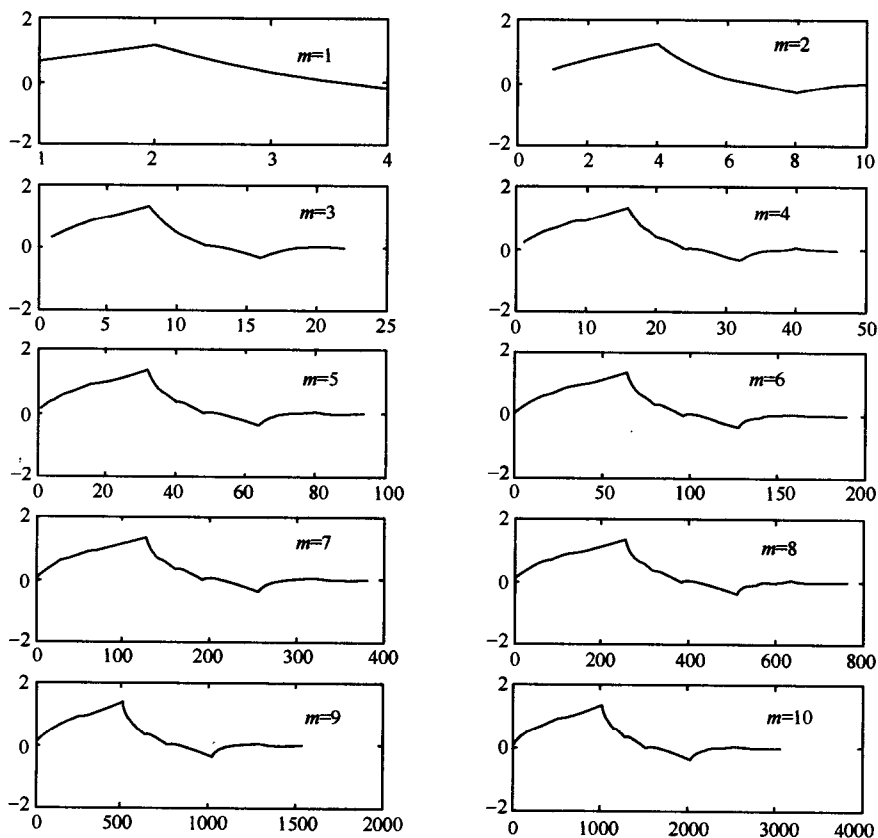


图 6.10  $R$  度函数的迭代过程

### 6.6.2 频谱法

在这种方法中,尺度函数的二尺度关系在频谱域中被表示为

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= G_0(e^{j\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \\ &G_0(e^{j\omega/2}) G_0(e^{j\omega/4}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right) =\end{aligned}\quad (6.96)$$

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^N G_0(e^{j\omega/2^k}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^N}\right) = \\ &\prod_{k=1}^{N \rightarrow \infty} G_0(e^{j\omega/2^k}) \hat{\phi}(0)\end{aligned}\quad (6.97)$$

由于  $\hat{\phi}(0) = 1$ , 对式(6.97)取逆傅里叶变换可以得到:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{k=1}^{N \rightarrow \infty} G_0(e^{j\omega/2^k}) \right) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.98)$$

为了计算式(6.98), 必须计算截断无穷乘积, 然后取快速傅里叶变换。



### 6.6.3 特征值法

这种方法将二尺度关系转换为特征方程。让我们考虑二尺度关系,令  $x = n$ , 可以得到下列矩阵方程:

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \sum_k g_0[k] \phi(2n-k) = \\ &= \sum_m g_0[2n-m] \phi(m) = \\ &= [g_0(n, m)] \phi(m)\end{aligned}\quad (6.99)$$

其中矩阵元素  $g_0(n, m) = g_0(2n-m)$ 。将式(6.99)写成下列矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & g_0[0] & g_0[-1] & g_0[-2] & \cdot \\ \cdot & g_0[2] & g_0[1] & g_0[0] & \cdot \\ \cdot & g_0[4] & g_0[3] & g_0[2] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \phi(0) \\ \phi(1) \\ \phi(2) \\ \cdot \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \cdot \\ \phi(0) \\ \phi(1) \\ \phi(2) \\ \cdot \end{bmatrix}$$

这个特征矩阵的特征值是 1, 所以, 对所有的整数  $n$  我们能够计算  $\phi(n)$ 。这个过程对于分解的 2 倍增长能够重复进行。令  $x = n/2$ , 二尺度关系成为

$$\phi\left(\frac{n}{2}\right) = \sum_k g_0[k] \phi(n-k) \quad (6.100)$$

对于  $x = n/4, n/8, \dots$  重复这个过程能够对任意精细分解计算离散化的  $\phi(t)$ 。

## 6.7 习 题

1. 说明半正交小波  $\psi_m(t)$  的支撑集为  $[0, 2m-1]$ 。
2. 说明 Shannon 小波的整数平移  $\phi_s(t-k)$  构成规范正交基。
3. 确定三次多项式使其满足条件  $S_4(0) = S'_4(0) = 0, S_4(1) = 1, S'_4(1) = 0$ , 而且  $S_4(x) + S_4(1-x) \equiv 1$ 。利用此多项式作为 Meyer 尺度函数的光滑函数计算二尺度系数。
4. 证明如果  $\{\phi(t-k) : k \in \mathbf{Z}\}$  是  $V_0 = \text{span}\{\phi(t-k) : k \in \mathbf{Z}\}$  的 Riesz 基, 则对于固定的  $s, \{\phi_{k,s} : k \in \mathbf{Z}\}$  是  $V_s = \text{span}\{\phi_{k,s}(t) : k \in \mathbf{Z}\}$  的 Riesz 基, 即就是说

$$A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi(t-k) \right\|_2^2 \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

蕴涵着

$$A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_{k,s}(t) \right\|_2^2 \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

具有相同的常数  $A$  和  $B$ 。

5. 说明下面的结论等价: (1)  $\{\phi(\cdot-k) : k \in \mathbf{Z}\}$  是一个规范正交系; (2)  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$  几乎处处成立。

6. 利用习题 5 的结论证明  $\{N_1(\cdot-k) : k \in \mathbf{Z}\}$  是一个规范正交系, 即说明

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_1(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

7. 给出对应于 Euler-Frobenius-Laurent 多项式  $E_{N_1}(z)$  的代数多项式, 并且求其根

$\lambda_1 > \cdots > \lambda_6$ 。验证这些零点是单的、实的且互为倒数对,即

$$\lambda_1 \lambda_6 = \lambda_2 \lambda_5 = \lambda_3 \lambda_4 = 1$$

8. 设函数  $f \in L^2(-\infty, \infty)$  的自相关函数  $F$  定义为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \overline{f(t)} dt, x \in \mathbf{R}$$

计算帽函数  $N_2$  的自相关函数,并且把它与习题 7 中引入的函数  $N_4$  进行比较。

9. 构造一个线性 Battle-Lemarié 尺度函数。设  $z = e^{-j(\omega/2)}$ , 说明帽函数  $N_2(t)$  满足:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_2(\omega + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{6}(z^{-2} + 4 + z^2)$$

和

$$\hat{N}_2(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}(1 - z^2)^2$$

规范正交尺度函数  $N_2^\perp(t)$  的傅里叶变换为

$$\hat{N}_2^\perp(\omega) = \frac{(-1/\omega^2)(1 - z^2)^2}{[(1/6)(z^{-2} + 4 + z^2)]^{1/2}}$$

我们已经证明了符号

$$G_0(z) = \frac{\hat{N}_2^\perp(\omega)}{\hat{N}_2^\perp(\omega/2)}$$

计算比率说明结果是:

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 (1+\eta)^{1/2}$$

其中

$$\eta = \frac{[(z^{-1} + z)/4] - [(z^{-2} + z^2)/4]}{1 + (z^{-2} + z^2)/4}$$

利用幂级数展开

$$(1+\eta)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\eta + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} 1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \eta^n$$

和

$$(1+x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n-1+j}{j} x^j$$

以及二项式定理将  $[(1+z)/2]^2 (1+\eta)^{1/2}$  展开为  $z$  的幂级数,并且通过比较  $G_0(z)$  与  $[(1+z)/2]^2 (1+\eta)^{1/2}$  中对应项  $z^{-5}, \dots, z^5$  的系数,确定系数  $g[k], k = -5, \dots, 5$ 。应该使用符号软件包,比如 Mathematica 或 Maple 完成这些计算。

10. 线性  $B$  样条小波的构造:给定帽函数的二尺度关系

$$N_2(t) = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{2} \binom{2}{k} N_2(2t-k)$$

我们想确定具有最小支撑线性小波的二尺度关系

$$\psi_2(t) = \sum_k g_1[k] N_2(2t-k)$$

利用对应的 Euler-Frobenius-Laurent 多项式  $E(z) = z^{-1} + 4 + z$ 。能够说明对应的符号

$$G_0(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_0[k] z^k \text{ 和 } G_1(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_1[k] z^k, z = e^{-j(\omega/2)}$$

正交性条件等价于:

$$G_0(z) \overline{G_1(z)} E(z) + G_0(-z) \overline{G_1(-z)} E(-z) = 0$$

其中  $|z|=1$ 。我们需要从上述方程确定多项式  $G_1(z)$ , 这个方程没有唯一解。

(1) 说明  $G_1(z) = (-1/3!)z^3 G_0(-z)E(-z)$  是上述方程的解;

(2) 说明  $G_0(z) = [(1+z)/2]^2$ ;

(3) 将  $G_1(z) = (-1/3!)z^3 G_0(-z)E(-z)$  展开为  $z$  的幂级数, 然后通过比较下式中的系数确定函数  $\psi_{N_2}$  的二尺度关系:

$$G_1(z) = \frac{1}{2} \sum_k g_1[k] z^k = -\frac{1}{3!} z^3 G_0(-z) E(-z)$$

(4) 画出  $\psi_2$  的图形。

11. 完成 6.4.4 小节中 Daubechies 小波推导中缺少的步骤。注意:  $|S(z)|^2$  是  $\cos\omega/2$  的一个多项式。

12. 利用序列  $\{-0.102859456942, 0.477859456942, 1.205718913884, 0.544281086116, -0.102859945694, -0.022140543058\}$  作为程序 `iterate.m` 中的二尺度序列  $\{g_0[n]\}$ , 并观测结果, 所得结果的尺度函数是 Coifman 小波系或者 Coiflets<sup>[8]</sup>, 这个小波系的主要特征是尺度函数具有消失矩性质。对于  $m$  阶 Coiflets, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \phi(t) dt = 0, \quad p = 0, \dots, m-1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \phi(t) dt = 0, \quad p = 1, \dots, m-1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$$

13. 利用二尺度序列  $\{g_0[n]\}$  作为线性样条的起始值构造双正交小波。

## 6.8 计算机程序

### 6.8.1 Daubechies 小波

```
%
%程序 wavelet.m
%
%生成 Daubechies 尺度函数与小波

g0 = [0.68301;1.18301;0.31699;-0.18301];
k = [0;1;2;3];
g1 = flipud(g0).*(-1).^k;

ng1 = length(g1);

%首先计算尺度函数
```

```

NIter = 10; %时间间隔
phi_new = 1; %起始值

for i = 1:NIter
    unit = 2^(i-1);
    phi = conv(g0, phi_new);
    n = length(phi);
    phi_new(1:2:2 * n) = phi;
    length(phi_new);
    if(i == (NIter-1))
        phi2 = phi;
    end
end
%
dt = 1.0 / (2 * unit);
t = [1:length(phi)] * dt;
subplot(2,1,1), plot(t, phi)
title('尺度函数')

%利用二尺度关系计算小波

for i = 1:ngl
    a = (i-1) * unit + 1;
    b = a + length(phi2) - 1;
    psi2s(i, a:b) = phi2 * g1(i);
    psi2s(1, n) = 0;
end

psi = sum(psi2s);
dt = 1.0 / (2 * unit);
t = [0:length(phi)-1] * dt - (ngl - 2) / 2;
subplot(2,1,2), plot(t, psi)
title('小波')

```

### 6.8.2 迭代法

```

%
%程序 iterate.m
%得到尺度函数的迭代过程

```

```

%生成图 6.10
%

g0 = [0.68301  1.18301  0.31699  -0.18301];

Niter = 10; %迭代次数
phi_new = 1; %起始值

for i = 1:Niter
    unit = 2^(i-1)
    phi = conv(g0,phi_new);
    n = length(phi);
    phi_new(1:2:2*n) = phi;
    subplot(5,2,i),plot(phi);hold on;
    heading = sprintf('Iteration = %.4g',i)
    title(heading);
end
%
```

## 参 考 文 献

- [1] C. K. Chui and J. Z. Wang. On Compactly Supported Spline Waveles and a Duality Principle. Trans. Am. Math. Soc. , 330, pp. 903-915, 1992.
- [2] C. K. Chui and J. Z. Wang. High-order Orthonormal Scaling Functions and Wavelets Give Poor Time-Frequency Localization. Fourier Anal. Appl. , 2, pp. 415-426, 1996.
- [3] Y. Meyer. Principe D'incertitude, Bases Hilbertiennes et Algebras d'opérateurs. Semin. Bourbaki, 662, 1985-1986.
- [4] Y. Meyer. Wavelets: Algorithms and Applications. Philadelphia; SIAM, 1993.
- [5] G. Battle. A Block Spline Construction of Ondelettes; I. Lemaré Functions. Commun. Math. Phys. , 110, pp. 601-615, 1987.
- [6] P. G. Lemarié. Une Nouvelle Base d'ondelettes de  $L^2(\mathbf{R}^n)$ . J. Math. Pures Appl. , 67, pp. 227-236, 1988.
- [7] I. Daubechies. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. Commun. Pure Appl. Math. , 41. pp. 909-996, 1988.
- [8] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NFC Ser. App. Math. 61. Philadelphia; SIAM, 1992.
- [9] C. K. Chui. Wavelets; A Mathematical Tool for Signal Analysis. Philadelphia; SIAM, 1997.
- [10] C. K. Chui. An Introduction to Wavelets. San Diego, Calif. ; Academic Press, 1992.
- [11] A. Cohen. I. Daubechies. and J. C. Feauveau. Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets. Commun. Pure Appl. Math. , 45, pp. 485-500, 1992.

## 第 7 章 离散小波变换与滤波器组算法

在第 5 章中讨论了多分辨分析,这为读者理解小波构造和连续小波变换(CWT)的快速计算算法做好了准备。二尺度关系和分解关系对于研究快速算法是必要的。由于直接估计积分式(4.32)解决问题会带来计算负担,因此快速算法是需要的。连续小波变换在时间频率平面具有冗余信息,为了克服这些不足,连续小波变换被离散化,而且算法等价于信号表示和处理中的二通道滤波器组,完全重构(PR)限制了这些算法的发展。在这一章中,我们详细研究这些算法。由于半正交样条函数和紧支撑样条小波需要其对偶空间中的对偶,在这种情况下,信号的表示与完全重构条件将与基的变换算法一起进行研究。在研究这些算法之前,我们通过抽取与插值来讨论采样率变化的基本概念。

### 7.1 抽取与插值

在信号处理中,我们时常遇到信号的频谱随时间变化。线性调频信号是一个好的例子,为了避免混叠,线性调频信号至少要以它的最高频率的两倍被采样。对于具有较大带宽的线性调频信号,Nyquist 比率相对于线性调频信号的低频部分可能太高,因此,如果对整个线性调频信号使用固定的采样率,大量的冗余信息会携带到周围。在多采样率信号处理中,利用多个采样率处理信号的表示。可变化采样率的机理是抽取与插值,在时间和频率域中,我们讨论其基本特征。

#### 7.1.1 抽取

一个  $M$  点抽取是对给定信号每间隔  $M$  个样本点抽取一个样本点。在时间域,输入序列  $\{x(n)\}$  的  $M$  点抽取为

$$y(n) = x(nM) \quad \text{对于 } n \in \mathbf{Z} \quad (7.1)$$

$M$  点抽取时的系统图如图 7.1 所示,抽取时的输出可以写成  $x(n)$  与间隔为  $M$  的单位脉冲序列  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(n - kM)$  的乘积。令

$$u(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} x(n) \delta(n - kM) \quad \text{对于 } k \in \mathbf{Z} \quad (7.2)$$

仅仅选择  $x(n)$  的第  $kM$  位置上的样本值。 $M$  点周期脉冲序列的傅里叶级数表示为

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(n - kM) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j2\pi kn/M} \quad (7.3)$$

基于几何求和公式

$$\sum_{k=0}^{M-1} e^{-j2\pi kn/M} = \begin{cases} M, k = lM, l \in \mathbf{Z} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

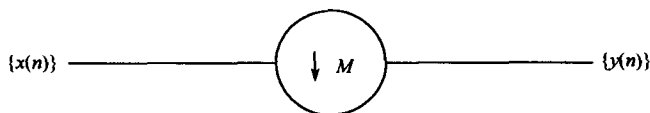


图 7.1  $M$  点抽取

能够证明式(7.3)中的恒等式。记  $y(n) = u(nM)$ ,  $y(n)$  的  $z$  变换具有如下形式:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} e^{-j2\pi k/M}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^k) \quad (7.4)$$

其中使用了  $M$  点指数基函数  $W_M^k = e^{-j2\pi k/M}$ 。在频谱域中,简单地取  $z = e^{j\omega}$ ,我们得到  $y(n)$  的离散傅里叶变换(DFT):

$$\hat{y}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}(e^{j(\omega - 2\pi k)/M}) \quad (7.5)$$

抽取输出的频谱包含着输入频谱的  $M$  个复制品,复制品的振幅缩减至  $1/M$ ,此外,复制品的带宽扩大  $M$  倍,因此,若输入信号的带宽大于  $\pi/M$ (即,  $|\omega| > \pi/M$ ),则  $M$  点抽取在输出信号中引起混叠。后面我们将看到在小波分解树和二通道滤波器分解算法中确实出现了混叠,然而,通过设计重构算法能够消除混叠恢复原始信号。

对于  $M = 2$ ,我们每隔一个数据点来抽取序列。根据式(7.4)可以得到:

$$Y(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 X(z^{1/2} W_2^k) = \frac{1}{2} [X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})] \quad (7.6)$$

而且

$$\hat{y}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [\hat{x}(e^{j(\omega/2)}) + \hat{x}(-e^{j(\omega/2)})] \quad (7.7)$$

$\hat{y}(e^{j\omega})$  的频谱如图 7.2 所示。

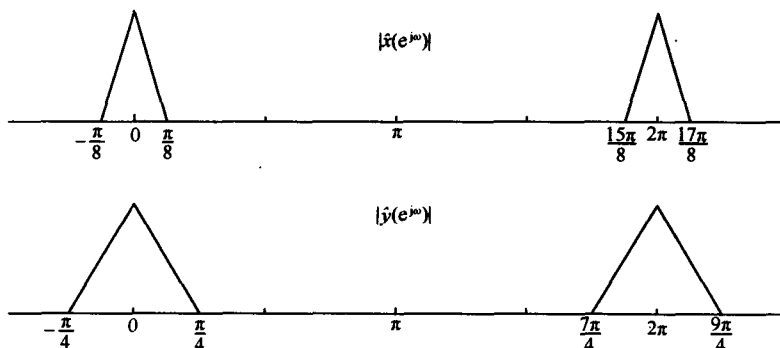


图 7.2 二抽取的频谱特性

在矩阵形式中,为了简单起见,我们仅仅考虑  $M = 2$  的情形。我们利用下标符号  $\downarrow 2$  表示 2 抽取,将

$$[y] = [x]_{\downarrow 2} \quad (7.8)$$

写成

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-2) \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x(-4) \\ x(-2) \\ x(0) \\ x(2) \\ x(4) \\ x(6) \\ x(8) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

用矩阵算子,我们将式(7.9)写成:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-2) \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x(-2) \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

或

$$[y] = [\text{DEC}_{\downarrow 2}][x]$$

当我们给定位置数向上或向下移动输入列时,容易验证抽取具有平移不变性。此外,抽取矩阵是一个正交矩阵,这是由于

$$[\text{DEC}_{\downarrow 2}]^{-1} = [\text{DEC}_{\downarrow 2}]^t$$

因此,抽取是一个正交变换。



## 7.1.2 插值

数据的插值是指插入一些另外的数据点到序列中以增加采样率。设  $y(n)$  是插值的输入,如果我们期望增加  $M$  个采样数,则在任意两个相邻的样本点之间插入  $M-1$  个零,因此插值输出的结果为

$$x'(n) = \begin{cases} y\left(\frac{n}{M}\right), & \text{对于 } n = kM, k \in \mathbf{Z} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7.11)$$

$M$  点插值器的系统图如图 7.3 所示。我们也能将插值公式写成卷积和的标准形式:

$$x'(n) = \sum_k y(k) \delta(n - kM) \quad (7.12)$$

插值输出的频谱为

$$\begin{aligned} \hat{x}'(e^{j\omega}) &= \sum_n \sum_k y(k) \delta(n - kM) e^{-jn\omega} = \\ &= \sum_k y(k) e^{-jkM\omega} = \\ &= \hat{y}(e^{-jM\omega}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

插值输出的  $z$  变换是:

$$X'(z) = Y(z^M) \quad (7.14)$$

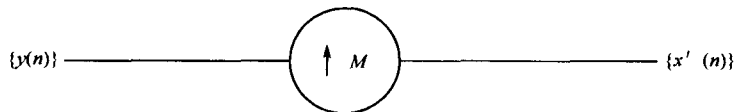


图 7.3  $M$  点插值器

通过在采样点之间添加零提高采样率,输出序列的间隔是输入序列间隔的  $M$  倍,而且频带在  $\omega$  轴压缩至  $1/M$ 。与抽取不同的是不可能产生插值混叠,这是由于输出频谱比输入频谱的带宽窄,二插值的频谱如图 7.4 所示。利用  $M=2$  作为一个例子,我们记

$$x'(n) = y(n) \uparrow_2 = \begin{cases} y(n/2), & \text{当 } n \text{ 是偶数时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7.15)$$

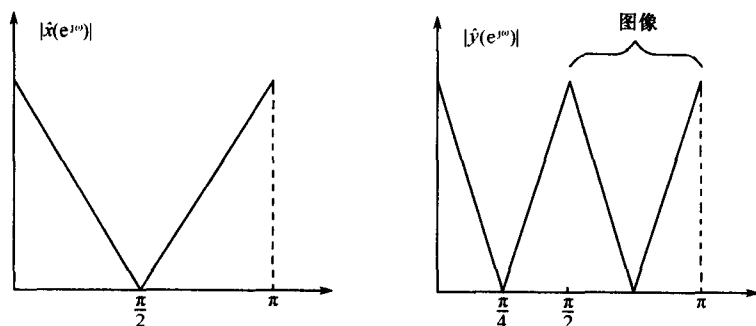


图 7.4 二插值的频谱特征

写成矩阵形式,我们得到:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x'(-2) \\ x'(-1) \\ x'(0) \\ x'(1) \\ x'(2) \\ x'(3) \\ x'(4) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-1) \\ 0 \\ y(0) \\ 0 \\ y(1) \\ 0 \\ y(2) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

同前面一样,我们用线性矩阵算子表示插值,可以证明插值矩阵是抽取矩阵的转置

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x'(-2) \\ x'(-1) \\ x'(0) \\ x'(1) \\ x'(2) \\ x'(3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-2) \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

或者写成

$$[y] = [INT_{\downarrow 2}][x] \quad (7.18)$$

先卷积后抽取和先插值后卷积运算是最重要的两个算法模块,它们将用来建立小波和小波包树形算法,也用在二维和三维信号处理中。在下一节我们仅说明它们的时间域恒等式。

### 7.1.3 先卷积后抽取

在数学上,此运算可以表示为

$$y(n) = \{h(n) * x(n)\}_{\downarrow 2} \quad (7.19)$$

此过程的方框图如图 7.5 所示。如果我们标出中间的输出为  $u(n)$ ,则它是  $x(n)$  与  $h(n)$  的

卷积,由下列确定:

$$u(n) = \sum_k x(k)h(n-k)$$

两点抽取为

$$y(n) = u(2n) = \sum_k x(k)h(2n-k) \quad (7.20)$$

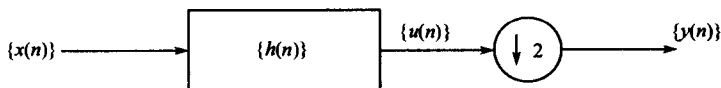


图 7.5 先卷积后抽取

#### 7.1.4 先插值后卷积

此运算在时间域可以被表示为

$$y(n) = \{g(n) * [x(n)]_{\uparrow 2}\} \quad (7.21)$$

用  $v(n)$  表示中间输出,可以得到:

$$y(n) = \sum_k v(k)g(n-k)$$

对于偶数  $k$  有:  $v(k) = x(k/2)$ ,从而可以得到:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k \text{ 是偶数}} x\left(\frac{k}{2}\right)g(n-k) = \\ &= \sum_l x(l)g(n-2l) \end{aligned} \quad (7.22)$$

此过程如图 7.6 所示。

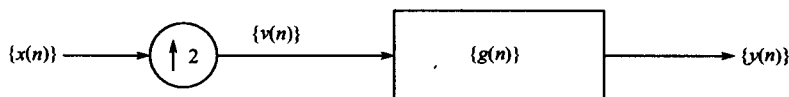


图 7.6 先插值后卷积

## 7.2 逼近子空间中信号的表示

在第 5 章中我们已经证明,逼近子空间  $A_n$  是嵌套的并且满足子空间  $A_\infty = L^2(\mathbf{R})$ ,  $A_\infty = \{0\}$  以及对于任何  $n \in \mathbf{Z}$  恒有:  $A_n \subset A_{n+1}$ 。对于任意能量有限的信号  $x(t)$ ,无法保证此信号在某个逼近子空间中,也就是说,可能无法确定系数  $a_{k,s}$ ,使得:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{k,s} \phi(2^s t - k) \quad \text{对于某个 } s \quad (7.23)$$

在处理中为了利用二尺度关系,信号必须位于某个嵌套逼近子空间中。实现这种要求的一个方法是对某个  $s$ ,将信号投影到  $A_s$  中。若对某个大的  $s$  值,人们仅知道信号在  $x(t = k/2^s, k \in \mathbf{Z})$  处的样本值,这显得特别重要。

假定信号  $x(t)$  不在逼近空间  $A_s$  中, 我们期望确定  $x_s(t) \in A_s$  满足:

$$x(t) \cong x_s(t) = \sum_k a_{k,s} \phi_{k,s}(t) = \sum_k a_{k,s} \phi(2^s t - k) \quad (7.24)$$

式中  $a_{k,s}$  是尺度函数系数, 从信号的样本值来计算。我们将说明如何利用  $x(t)$  到  $A_s$  空间上的投影从样本数据  $x(t = k/2^s)$  确定  $a_{k,s}$ 。

由于  $A_s$  是  $L^2(\mathbf{R})$  的子空间而且  $x(t) \in L^2(\mathbf{R})$ , 因此可以将  $x_s(t)$  看作  $x(t)$  到  $A_s$  子空间上的正交投影, 从而  $x(t) - x_s(t)$  正交于  $A_s$ , 所以正交于基函数  $\phi_{l,s}$ :

$$\langle x(t) - x_s(t), \phi_{l,s} \rangle = 0 \quad \forall l \in \mathbf{Z} \quad (7.25)$$

因此, 系数由下列方程确定:

$$\langle x_s(t), \phi_{l,s} \rangle = \langle x(t), \phi_{l,s} \rangle = \left\langle \sum_k a_{k,s} \phi_{k,s}(t), \phi_{l,s} \right\rangle \quad (7.26)$$

我们将最后的不等式展开, 可以得到:

$$2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\phi(2^s t - l)} dt = 2^s \sum_k a_{k,s} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^s t - k) \overline{\phi(2^s t - l)} dt \right] = \sum_m a_{m,s} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(t - m)} dt \right] \quad (7.27)$$

其中进行了指标代换  $m = l - k$ 。式(7.27)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ a_{m,s} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \langle x(t), \phi_{m,s} \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

其中

$$\alpha_m = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(t - m)} dt = \overline{\alpha_{-m}}$$

是尺度函数  $\phi(t)$  的自相关系数。若尺度函数具有紧支撑, 则自相关矩阵是有限对角带宽的带状矩阵。如果尺度函数和它的平移构成规范正交基, 则

$$\alpha_m = \delta_{m,0}$$

根据假设一个规范正交基, 自相关矩阵是单位矩阵而且由计算内积得到系数:

$$a_{m,s} = \langle x(t), \phi_{m,s} \rangle \quad (7.29)$$

如果仅仅给出信号  $x(t)$  在点  $x(t = k/2^s)$  的样本值, 那么我们能够用求和来逼近积分, 也就是说

$$a_{m,s} = 2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\phi(2^s t - m)} dt \cong 2^{-s/2} \sum_k x\left(\frac{k}{2^s}\right) \overline{\phi(k - m)} \quad (7.30)$$

此等式说明了尺度函数系数与信号在样本点的值之间的区别, 前者是模拟信号的展开系数, 而后者是离散信号的样本。在 5.6 节中我们已经给出了用 2 阶和 4 阶样条级数表示离

散信号的公式。

### 7.3 小波分解算法

再次写出信号  $x(t)$  的连续小波变换的表达式：

$$W_{\psi}x(b,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (7.31)$$

令尺度  $a = 1/2^s$  和平移  $b = k/2^s$ , 其中  $s$  和  $k$  属于整数集  $\mathbf{Z}$ 。在时间—尺度平面上,  $x(t)$  的连续小波变换在点  $(k/2^s, 1/2^s)$  的值是一个数, 它表示了  $x(t)$  与  $\bar{\psi}(t)$  之间在时间—尺度点的关系, 称其为离散小波变换(DWT), 它生成时间—尺度平面上的一个稀疏集。用

$$w_{k,s} = W_{\psi}x\left(\frac{k}{2^s}, \frac{1}{2^s}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t - k/2^s}{1/2^s}\right)} dt \quad (7.32)$$

表示在点  $(b = k/2^s, a = 1/2^s)$  的小波系数, 离散时间—尺度变换表示信号如图 7.7 所示。

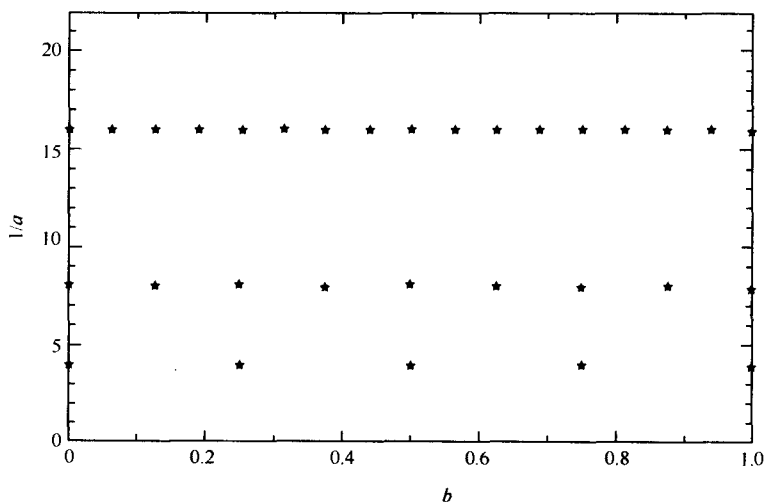


图 7.7 分解算法的典型时间—尺度网格(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[1]重印)

众所周知, 在时间—尺度平面上连续小波变换对于信号生成冗余信息。通过选择  $(b = k/2^s, a = 1/2^s)$ , 利用离散小波变换处理信号更加方便。已经证明离散小波变换保持信号充分的信息, 人们根据小波系数能够完全重构信号。实际上, 完全重构所需系数的数目与数据样本的数目相同, 熟知的临界频率使得冗余信息减小到最低程度。

分解(分析)算法时常使用在小波信号处理中, 它被用于信号压缩和信号识别中, 当然在信号识别中一般并不需要重构原始信号。算法将信号分解为不同尺度下的各种成分, 不同的尺度对应于音乐上的八音节, 每个成分能够用不同的算法单独处理。例如, 在回声消除中为了改善收敛性对每个成分的处理采用不同的滤波器, 而且滤波器的长度不同。这个算法的重要问题是保留所有本质信息, 以便人们恢复原始信号(如果需要的话), 该算法基于在第 5 章中讨论过的多分辨分析的分解关系。为了方便参考, 我们写出其中的一些

关系。

设

$$x_{s+1}(t) \in A_{s+1} \Rightarrow x_{s+1}(t) = \sum_k a_{k,s+1} \phi_{k,s+1}(t)$$

$$x_s(t) \in A_s \Rightarrow x_s(t) = \sum_k a_{k,s} \phi_{k,s}(t)$$

$$y_s(t) \in W_s \Rightarrow y_s(t) = \sum_k w_{k,s} \psi_{k,s}(t)$$

由于多分辨分析要求满足条件:

$$A_{s+1} = A_s + W_s \quad (7.33)$$

从而可以得到:

$$\begin{aligned} x_{s+1}(t) &= x_s(t) + y_s(t) \\ \sum_k a_{k,s+1} \phi_{k,s+1}(t) &= \sum_k a_{k,s} \phi_{k,s}(t) + \sum_k w_{k,s} \psi_{k,s}(t) \end{aligned} \quad (7.34)$$

将分解关系:

$$\phi(2^{s+1}t - l) = \sum_k \{h_0[2k - l] \phi(2^s t - k) + h_1[2k - l] \psi(2^s t - k)\} \quad (7.35)$$

代入式(7.34)得到在分辨率  $s$  下所有基的方程。通过交换求和次序,然后比较方程两边  $\phi_{k,s}(t)$  与  $\psi_{k,s}(t)$  的系数,可以得到:

$$a_{k,s} = \sum_l h_0[2k - l] a_{l,s+1}$$

$$w_{k,s} = \sum_l h_1[2k - l] a_{l,s+1}$$

其中方程右端相当于卷积后 2 抽取(参见 7.1.3 小节)。这些公式建立了任何尺度下尺度函数和小波函数系数与相邻高阶尺度系数之间的关系。重复这个算法,可以得到不同尺度下的信号成分。此算法如图 7.8 所示,其中使用了矢量记号:

$$\mathbf{a}_s = \{a_{k,s}\}, \mathbf{w}_s = \{w_{k,s}\}, \mathbf{h}_0 = \{h_0[k]\}, \mathbf{h}_1 = \{h_1[k]\}, k \in \mathbf{Z} \quad (7.36)$$

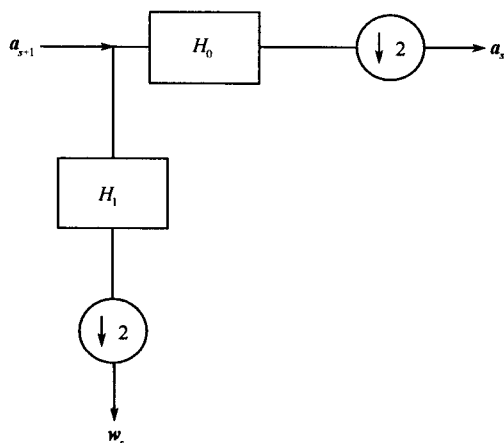


图 7.8 单水平小波分解过程

这种分解框图能够重复应用于低分辨率尺度函数系数,建立如图 7.9 所示的小波分解树。

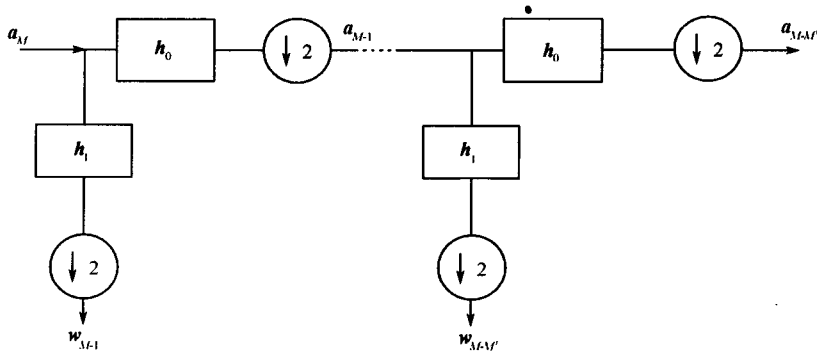


图 7.9 小波分解树

读者应该注意,小波分解树不是对称的,这是因为仅仅对尺度函数系数进一步分解获得信号在低分辨率下的成分。通过对小波系数也进行分解可以构成对称树,这是在第 8 章中将要讨论的小波包树。

## 7.4 重构算法

任何变换有唯一的逆使得原始数据能够被完全恢复是重要的。对于随机信号,某些变换在理论上有唯一的逆,但在实际中无法实现。存在唯一的逆离散小波变换(或综合变换)使得原始函数能够根据不同尺度的分量完全恢复。重构算法是基于尺度函数和小波函数的二尺度关系。考虑第  $s$  个分辨率下这些分量的和:

$$x_s(t) + y_s(t) = \sum_k a_{k,s} \phi_{k,s}(t) + \sum_k w_{k,s} \psi_{k,s}(t) = x_{s+1}(t) \quad (7.37)$$

将二尺度关系代入式(7.37)得到:

$$\sum_k a_{k,s} \sum_l g_0[l] \phi(2^{s+1}t - 2k - l) + \sum_k w_{k,s} \sum_l g_1[l] \phi(2^{s+1}t - 2k - l) = \sum_l a_{l,s+1} \phi(2^{s+1}t - l) \quad (7.38)$$

比较式(7.38)中两端  $\phi(2^{s+1}t - l)$  的系数,得到:

$$a_{l,s+1} = \sum_k \{g_0[l - 2k]a_{k,s} + g_1[l - 2k]w_{k,s}\} \quad (7.39)$$

其中等式右端对应于先插值后卷积,这已经在 7.1.4 小节讨论过。式(7.39)的重构算法如图 7.10 所示。

在这里应该强调,尽管在数字信号处理中计算机能够实现,但分解算法与重构算法实际处理的是模拟信号。为了对信号进行有效处理,基本的想法是用其在不同尺度下的分量表示模拟信号。

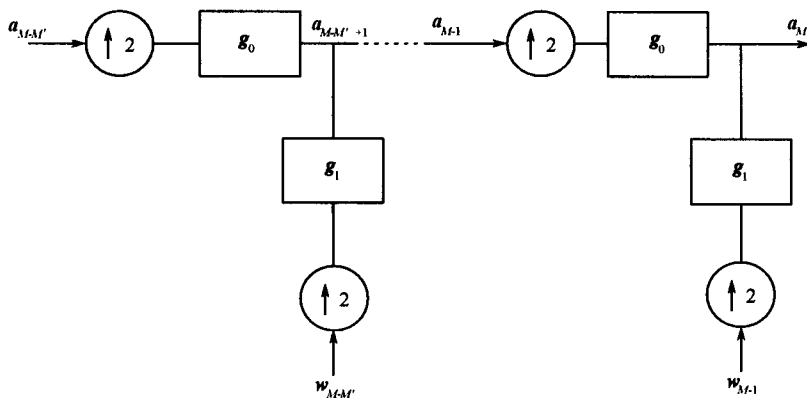


图 7.10 由尺度函数和小波系数重构信号

## 7.5 基变换

7.4 节讨论的算法可以应用于所有类型的尺度函数和小波,包括正交、半正交和双正交系。在第6章中已经看到,对于紧支撑正交小波序列 $\{g_0[k], g_1[k]\}$ 和 $\{h_0[k], h_1[k]\}$ 是有限的等长序列。在半正交小波的情形下,比如紧支撑B样条小波,序列 $\{h_0[k], h_1[k]\}$ 是无限长序列。为了有效处理序列必须被截断。为了避免使用无限序列,最好是将输入函数映入到对偶样条空间对对偶样条系数进行处理,此时 $g_0[k]$ 与 $g_1[k]$ 具有有限长度。这一节和下两节通过基变换致力于研究算法的改善。

在第6章已经证明, $m$ 阶样条 $\phi_m = N_m$ 及其对应的紧支撑样条小波 $\psi_m$ 是半正交基。为了计算样条级数或者样条小波的展开系数,必须利用对偶样条 $\tilde{\phi}_m$ 或者对偶样条小波 $\tilde{\psi}_m$ 。在半正交空间,所有这些基生成同样的样条空间 $S_m$ 。在小波信号处理中,为了某些实时应用,同时也为了有效性和精确性,人们更希望使用有限长度的分解序列,所以,在对信号分解之前,必须用同样阶数的对偶样条去表示输入信号。

让我们回顾多分辨分析中的公式,将逼近子空间看作小波子空间的正交和。对于任意的正整数 $M'$ 有:

$$A_M = \bigoplus_{s=M-M'}^{M-1} W_s \oplus A_{M-M'} = W_{M-1} \oplus W_{M-2} \oplus \cdots \oplus W_{M-M'} \oplus A_{M-M'} \quad (7.40)$$

因此,给定函数 $x \in L^2(\mathbf{R})$ 的任何好的逼近 $x_M \in A_M$ (对于充分大的 $M$ )都有唯一的正交分解:

$$x_M = \sum_{n=1}^{M'} y_{M-n} + x_{M-M'} \quad (7.41)$$

其中 $x_s \in A_s$ 且 $y_s \in W_s$ 。由于当 $\psi_m$ 与 $\tilde{\psi}_m$ 生成同样的小波子空间时, $\phi_m$ 与 $\tilde{\phi}_m$ 生成同样的多分辨分析(注:双正交尺度函数与小波不具有的性质,半正交尺度函数与小波也不具有),对每个 $s \in \mathbf{Z}$ ,可以得到:



$$\begin{aligned}
x_s(t) &= \sum_k a_{k,s} \phi(2^s t - k) = \sum_k \tilde{a}_{k,s} \tilde{\phi}(2^s t - k) \\
y_s(t) &= \sum_k w_{k,s} \psi(2^s t - k) = \sum_k \tilde{w}_{k,s} \tilde{\psi}(2^s t - k)
\end{aligned} \tag{7.42}$$

为了实现简单,没有包含正归化因子  $2^{s/2}$ 。

如果将分解公式(7.36)应用于尺度函数系数,则可以得到:

$$\begin{aligned}
a_{k,s} &= \sum_l h_0[2k-l] a_{l,s+1} \\
w_{k,s} &= \sum_l h_1[2k-l] a_{l,s+1}
\end{aligned} \tag{7.43}$$

由于对半正交情形序列  $\{h_0[k]\}$  与  $\{h_1[k]\}$  是无限长序列,因此,使用序列  $\{g_0[k]\}$  与  $\{g_1[k]\}$  将会更加有效。根据对偶性原理知道序列的这种变换是有效的,当用  $\tilde{\phi}_m$  与  $\tilde{\psi}_m$  代替  $\phi_m$  与  $\psi_m$  时,按如下意义:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} g_0[k] &\leftrightarrow h_0[-k] \\
\frac{1}{2} g_1[k] &\leftrightarrow h_1[-k]
\end{aligned} \tag{7.44}$$

$\{g_0[k], g_1[k]\}$  与  $\{h_0[k], h_1[k]\}$  能够互相交换。根据对偶性原理,可得:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{k,s} &= \sum_l g_0[l-2k] \tilde{a}_{l,s+1} \\
\tilde{w}_{k,s} &= \sum_l g_1[l-2k] \tilde{a}_{l,s+1}
\end{aligned} \tag{7.45}$$

然而,为了方便地利用对偶性原理,必须将系数  $\{a_{k,s}\}$  转换为  $\{\tilde{a}_{k,s}\}$ 。因为  $\phi$  与  $\tilde{\phi}$  生成同一个空间  $A_s$ , 所以对于某个序列  $\{r_k\}$ ,  $\phi$  能够用  $\tilde{\phi}$  的级数来表示:

$$\phi(t) = \sum_k r_k \tilde{\phi}(t-k) \tag{7.46}$$

如果尺度函数具有紧支撑,则基变换序列是有限长序列。事实上,根据对偶的定义,可以得到:

$$r_k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(t-k) dt \tag{7.47}$$

所以在原始逼近尺度  $s = M$  下,应用式(7.46)可得:

$$\tilde{a}_{k,M} = \sum_l r_{k-l} a_{l,M} \tag{7.48}$$

它是一个 FIR 运算。如果取样条作为尺度函数[即  $\phi(t) = N_m(t)$ ], 则  $r_k = N_{2m}(m-k)$ ;  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm m-1$  (参见文献 [1])。正如前面所讨论过的,分解算法中的序列  $\{g_0[k]\}$  与  $\{g_1[k]\}$  都是有限序列。

我们的计算策略如图 7.11 所示。对于  $\tilde{w}_{k,s}, s = M-1, \dots, M-M'$  的计算,利用  $a_M$  作为输入序列需要  $2M'$  个 FIR 滤波器,系数  $\tilde{w}_{k,s}$  的重要性是关于分析小波  $\psi_m$ , 它们构成  $x_M$  在某些二进制点上的连续小波变换,即

$$\tilde{w}_{k,s} = 2^{s/2} (W_{\psi} x_M) \left( \frac{k}{2^s}, \frac{1}{2^s} \right), M - M' \leq s < M, k \in \mathbb{Z} \quad (7.49)$$

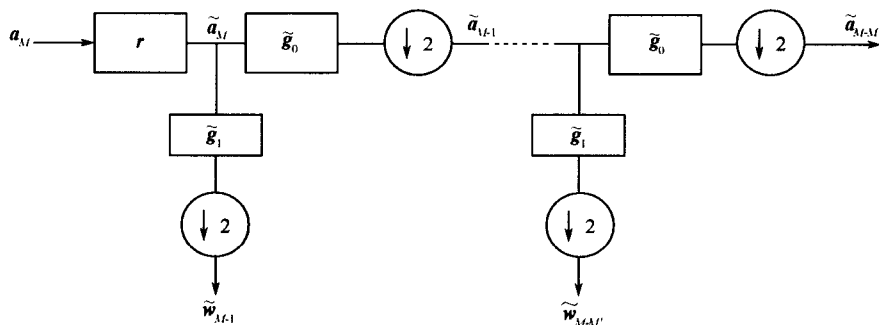


图 7.11 利用基的变换实现标准小波分解的过程(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[1] 重印)

## 7.6 半正交子空间中信号的重构

在 7.4 节描述的算法涉及到原始数据的恢复,在那样的情况下,原始数据是最高分辨率下尺度函数系数的集合。由于原始输入信号是一个模拟函数  $x(t) \approx x_M(t) = \sum_l a_{l,M} \phi(2^M t - l)$ , 因此必须利用求和去恢复信号。根据 7.5 节讨论的分解算法生成对偶空间中样条和小波系数, 即  $(\{\tilde{a}_{k,s}\}, \{\tilde{w}_{k,s}\})$ 。为了在重构中使用有限长度二尺度序列, 我们必须根据样条和小波空间中的  $(\{a_{k,s}\}, \{w_{k,s}\})$  表示对偶空间中的系数。此外, 如果使用者需要看到分解过程的信号分量, 就必须使用对偶样条和对偶小波级数。在这两种情况下人们能够利用基的变换将对偶序列映回到原始空间<sup>[2]</sup>, 从而使问题简化。由于序列不依赖于尺度, 因此系数中的第二个下标可以是任意的, 这种序列适用于任何两个不同尺度之间的映射。

### 7.6.1 样条函数的基变换

我们的目标是写出:

$$s(t) = \sum_k \tilde{a}_k N_m(t-k) = \sum_k a_k N_m(t-k) \quad (7.50)$$

对式(7.50)取傅里叶变换, 可以得到:

$$\tilde{A}(e^{j\omega}) \hat{N}_m(\omega) = A(e^{j\omega}) \hat{N}_m(\omega) \quad (7.51)$$

像通常一样, 函数上的尖角是指它的傅里叶变换,  $A(e^{j\omega})$  和  $\tilde{A}(e^{j\omega})$  分别表示  $\{a_k\}$  与  $\{\tilde{a}_k\}$  的符号, 其定义为

$$\tilde{A}(e^{j\omega}) = \sum_k \tilde{a}_k e^{jk\omega}, A(e^{j\omega}) = \sum_k a_k e^{jk\omega} \quad (7.52)$$

对偶尺度函数  $\tilde{N}_m$  确定如下:

$$\tilde{N}_m(\omega) = \frac{\hat{N}_m(\omega)}{E_{N_m}(z^2)}, z = e^{j\omega/2} \quad (7.53)$$

其中对几乎所有的  $\omega$  都有  $E_{N_m}(z^2) = |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 \neq 0$ , 这是因为  $\{N_m(\cdot - k)\}$  是  $A_0$  的稳定基或 Riesz 基。正如在第 6 章所讨论过的,  $E_{N_m}(\omega)$  是如下确定的 Euler-Frobenius-Laurent 级数:

$$E_{N_m}(z^2) = |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) z^{2k} \quad (7.54)$$

显然, 给式 (7.54) 两端乘以  $z^{2m-2}$  能够得到  $z^2$  的  $2m-1$  次多项式。在式 (7.54) 中最后一个等式是下列关系的推论:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t+k) \overline{f(t)} dt \right] e^{j\omega k} \quad (7.55)$$

式 (7.55) 的证明: 利用 Parseval 恒等式, 可以得到:

$$\begin{aligned} F(l) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+l) \overline{f(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-j\omega l} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2\pi(k+1)} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-j\omega l} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega + 2k\pi)|^2 e^{-j\omega l} d\omega \end{aligned} \quad (7.56)$$

显然,  $F(l)$  是  $2\pi$  周期函数  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega + 2k\pi)|^2$  的第  $l$  个傅里叶系数, 用此关系直接推出式 (7.55)。容易证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(t+k) \overline{N_m(t)} dt = N_{2m}(m+k) \quad (7.57)$$

且具有支撑  $\text{supp} N_{2m}(t) = [0, 2m]$ 。

结合式 (7.51)、式 (7.53) 和式 (7.54) 并且取逆傅里叶变换, 可以得到:

$$a_k = (\{\tilde{a}_n\} * p[n])(k) \quad (7.58)$$

其中

$$\frac{1}{E_{N_m}(z)} = \sum_k p[k] z^k, \quad |z| = 1 \quad (7.59)$$

能够证明

$$p[k] = u_m \sum_{i=1}^{p_m} \Lambda_i \lambda_i^{k+p_m}, \quad k \geq 0 \quad (7.60)$$

其中

$$\Lambda_i = \frac{1}{\lambda_i \prod_{j=1, j \neq i}^{p_m} (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (7.61)$$

$\lambda_i, i = 1, \dots, 2p_m$  是式(7.54)的根而且满足  $|\lambda_i| < 1$  和  $\lambda_i \lambda_{2p_m+1-i} = 1, i = 1, \dots, p_m$ 。这里  $u_m = (2m-1)!$  且  $p_m = m-1$ 。根据式(7.54)和式(7.59)可以得到:

$$\sum_k p[k] = \frac{1}{E_{N_m}(1)} = \frac{1}{\sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k)} = 1 \quad (7.62)$$

其中最后一个等式是基数  $B$  样条单位分解的推论,它已经在第 5 章叙述过。

下面给出线性样条和三次样条的根  $\lambda_i$ 。在表 7.1 和表 7.2 中给出系数  $\{p[k]\}$ , 系数  $\{p[k]\}$  比系数  $\{h_0[k]\}$  具有好的衰减性(参见图 7.12)。

表 7.1 线性样条情形( $p[k] = p[-k]$ )的系数  $\{p[k]\}$

$k$	$p[k]$	$k$	$p[k]$
0	1.7320510	8	$0.46023608 \times 10^{-4}$
1	$-0.46410170$	9	$-0.12331990 \times 10^{-4}$
2	0.12435570	10	$0.33043470 \times 10^{-5}$
3	$-0.33321008 \times 10^{-1}$	11	$-0.88539724 \times 10^{-6}$
4	$0.89283381 \times 10^{-2}$	12	$0.23724151 \times 10^{-6}$
5	$-0.23923414 \times 10^{-2}$	13	$-0.63568670 \times 10^{-7}$
6	$0.64102601 \times 10^{-3}$	14	$0.17033177 \times 10^{-7}$
7	$-0.17176243 \times 10^{-3}$	15	$-0.45640265 \times 10^{-8}$

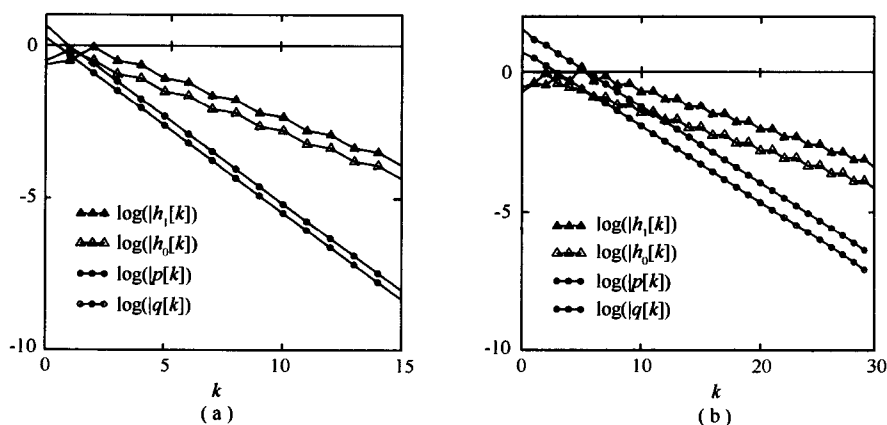


图 7.12  $h_0[k], h_1[k], p[k]$  和  $q[k]$  关于  $k$  的图形(a) 线性样条; (b) 三次样条  
线性样条( $m = 2$ ):

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{3} = \frac{1}{\lambda_2} \quad (7.63)$$

$$p[k] = (-1)^{|k|} \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^{|k|} \quad (7.64)$$

三次样条( $m = 4$ ):

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -9.1486946 \times 10^{-3} = \frac{1}{\lambda_6} \\ \lambda_2 &= -0.1225546 = \frac{1}{\lambda_5} \\ \lambda_3 &= -0.5352805 = \frac{1}{\lambda_4}\end{aligned}\quad (7.65)$$

表 7.2 三次样条情形( $p[k] = p[-k]$ )的系数 $\{p[k]\}$

$k$	$p[k]$	$k$	$p[k]$
0	0.49647341	15	$-0.51056378 \times 10^{-3}$
1	$-0.30910430$	16	$0.27329483 \times 10^{-3}$
2	0.17079600	17	$-0.14628941 \times 10^{-3}$
3	$-0.92078239$	18	$0.78305879 \times 10^{-4}$
4	0.49367899	19	$-0.41915609 \times 10^{-4}$
5	$-0.26435509$	20	$0.22436609 \times 10^{-4}$
6	0.14151619	21	$-0.12009880 \times 10^{-4}$
7	$-0.75752318 \times 10^{-1}$	22	$0.64286551 \times 10^{-5}$
8	$0.40548921 \times 10^{-1}$	23	$-0.34411337 \times 10^{-5}$
9	$-0.21705071 \times 10^{-1}$	24	$0.18419720 \times 10^{-5}$
10	$0.11618304 \times 10^{-1}$	25	$-0.98597172 \times 10^{-6}$
11	$-0.62190532 \times 10^{-2}$	26	$0.52777142 \times 10^{-6}$
12	$0.33289378 \times 10^{-2}$	27	$-0.28250579 \times 10^{-6}$
13	$-0.17819155 \times 10^{-2}$	28	$0.15121984 \times 10^{-6}$
14	$0.95382473 \times 10^{-3}$	29	$-0.80945043 \times 10^{-7}$

## 7.6.2 样条小波的基变换

这里我们的目标是写出:

$$r(t) = \sum_k \tilde{w}_k \tilde{\psi}_m(t-k) = \sum_k w_k \psi_m(t-k) \quad (7.66)$$

在式(7.53)中用 $\psi_m$ 代替 $N_m$ ,可以得到 $\psi_m$ 与 $\tilde{\psi}_m$ 之间的关系。用前面类似的方法可以得到:

$$w_k = (\{\tilde{w}_n\} * q[n])(k) \quad (7.67)$$

其中

$$\frac{1}{\sum_k |\hat{\psi}_m(\omega + 2\pi k)|^2} = \sum_k q[k] e^{-j\omega k} \quad (7.68)$$

此外,还有:

$$\sum_k |\hat{\psi}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = E_{N_m}(z^2)E_{N_m}(z)E_{N_m}(-z), \quad |z| = 1 \quad (7.69)$$

式(7.69)的证明:根据二尺度关系,能够得到:

$$\sum_k |\hat{\psi}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_k \left| G_1 \left[ \exp \left( j \frac{\omega + 2\pi k}{2} \right) \right] \hat{N}_m \left( \frac{\omega + 2\pi k}{2} \right) \right|^2 \quad (7.70)$$

满足

$$G_1 e^{j\omega/2} = \frac{1}{2} \sum_k g_1[k] e^{jk\omega/2} \quad (7.71)$$

现在按照  $k$  是奇数与偶数将式(7.70)的右端分成两部分,利用关系式(7.54),能够得到:

$$\sum_k |\hat{\psi}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = |G_1(z)|^2 E_{N_m}(z) + |G_1(-z)|^2 E_{N_m}(-z) \quad (7.72)$$

根据关系  $|G_1(z)| = |G_0(-z)E_{N_m}(-z)|$ , 其中  $G_0(z)$  的定义类似于式(7.71), 只需用  $g_0[k]$  代替  $g_1[k]$ , 能够得到:

$$\sum_k |\hat{\psi}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = \{ |G_0(-z)|^2 \overline{E_{N_m}(-z)} + |G_0(z)|^2 \overline{E_{N_m}(z)} \} \times E_{N_m}(z)E_{N_m}(-z) \quad (7.73)$$

根据式(7.72)的证明过程,能够证明:

$$|G_0(-z)|^2 \overline{E_{N_m}(-z)} + |G_0(z)|^2 \overline{E_{N_m}(z)} = E_{N_m}(z^2) \quad (7.74)$$

结合式(7.72),即可得到关系式(7.69)。

$q[k]$  与  $p[k]$  具有同样的表达式,使得  $u_m = -[(2m-1)!]^3$ ,  $p_m = 2m-2$ ,  $\lambda_i$  是式(7.69)的根。由于  $E_{N_m}(1) = 1$ , 根据式(7.68)和式(7.69)得到:

$$\sum_k q[k] = \frac{1}{E_{N_m}(-1)} \quad (7.75)$$

下面给出线性样条和三次样条的根  $\lambda_i$  和  $\sum_k q[k]$ 。在表 7.3 和表 7.4 中给出了系数,系数  $q[k]$  比  $\{h_1[k]\}$  有更好的衰减性(参见图 7.12)。

表 7.3 线性样条( $q[k] = q[-k]$ )的系数  $\{q[k]\}$

$k$	$q[k]$	$k$	$q[k]$
0	4.3301268	8	$0.92047740 \times 10^{-4}$
1	-0.86602539	9	$-0.24663908 \times 10^{-4}$
2	0.25317550	10	$0.66086895 \times 10^{-5}$
3	$-0.66321477 \times 10^{-1}$	11	$-0.17707921 \times 10^{-5}$
4	$0.17879680 \times 10^{-1}$	12	$0.47448233 \times 10^{-6}$
5	$-0.47830273 \times 10^{-2}$	13	$-0.12713716 \times 10^{-6}$
6	$0.12821698 \times 10^{-2}$	14	$0.34066300 \times 10^{-7}$
7	$-0.34351606 \times 10^{-3}$	15	$-0.91280379 \times 10^{-8}$

表 7.4 三次样条( $q[k] = q[-k]$ )的系数 $\{q[k]\}$

$k$	$q_k$	$k$	$q_k$
0	33.823959	18	$0.39035085 \times 10^{-3}$
1	$-13.938340$	19	$-0.20894629 \times 10^{-3}$
2	9.0746698	20	$0.11184511 \times 10^{-3}$
3	$-4.4465132$	21	$-0.59868424 \times 10^{-4}$
4	2.5041881	22	$0.32046413 \times 10^{-4}$
5	$-1.3056690$	23	$-0.17153812 \times 10^{-4}$
6	0.70895731	24	$0.91821012 \times 10^{-5}$
7	$-0.37662071$	25	$-0.49149990 \times 10^{-5}$
8	0.20242150	26	$0.26309024 \times 10^{-5}$
9	$-0.10811640$	27	$-0.14082705 \times 10^{-5}$
10	$0.57940185 \times 10^{-1}$	28	$0.78381962 \times 10^{-6}$
11	$-0.30994879 \times 10^{-1}$	29	$-0.40350486 \times 10^{-6}$
12	$0.16596500 \times 10^{-1}$	30	$0.21598825 \times 10^{-6}$
13	$-0.88821910 \times 10^{-2}$	31	$-0.11561428 \times 10^{-6}$
14	$0.47549186 \times 10^{-2}$	32	$0.61886055 \times 10^{-7}$
15	$-0.25450843 \times 10^{-2}$	33	$-0.33126394 \times 10^{-7}$
16	$0.13623710 \times 10^{-2}$	34	$0.17731910 \times 10^{-7}$
17	$-0.72923984 \times 10^{-3}$	35	$-0.94915444 \times 10^{-8}$

线性样条( $m = 2$ ):

$$\lambda_1 = 7.1796767 \times 10^{-2} = \frac{1}{\lambda_1} \quad (7.76)$$

$$\lambda_2 = -0.2679492 = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$\sum_k q[k] = 3.0 \quad (7.77)$$

三次样条( $m = 4$ ):

$$\lambda_1 = 8.3698615 \times 10^{-5} = \frac{1}{\lambda_4}$$

$$\lambda_2 = -9.1486955 \times 10^{-3} = \frac{1}{\lambda_{11}}$$

$$\lambda_3 = 1.5019634 \times 10^{-2} = \frac{1}{\lambda_{10}}$$

$$\lambda_4 = -0.1225546 = \frac{1}{\lambda_9} \quad (7.78)$$

$$\lambda_5 = 0.2865251 = \frac{1}{\lambda_8}$$

$$\lambda_6 = -0.5352804 = \frac{1}{\lambda_7}$$

$$\sum_k q[k] = 18.5294121$$

## 7.7 例 子

图 7.13 显示了带有加性噪声音乐信号的分解,把音乐数据看作在整数点上取值。借助本章推导出的系数  $p[k]$  与  $q[k]$ ,将对偶样条和小波系数映入原始空间中,绘制了中间逼近函数  $s_j$  和细节函数  $r_j$  的图形。为了说明样条与小波的低通与带通滤波器的特性,在图 7.14 中显示了不同尺度下分解信号的振幅频谱。利用分解中使用的同样序列  $(\{g_0[k]\}, \{g_1[k]\})$ ,重构过程显示在图 7.15 中。为了进行比较,原始信号  $s(t)$  也绘制在重构信号  $s_0(t)$  的后边。同时,为了进一步详细说明借助小波技巧将一个复杂函数分解成若干个简单函数的过程,考虑了 3 个具有不同频率的正弦函数所构成的函数,选择频率使得它们对应于倍频程尺度,从图 7.16 和图 7.17 可以看出,标准小波分解能够相当好地分离频率成分。

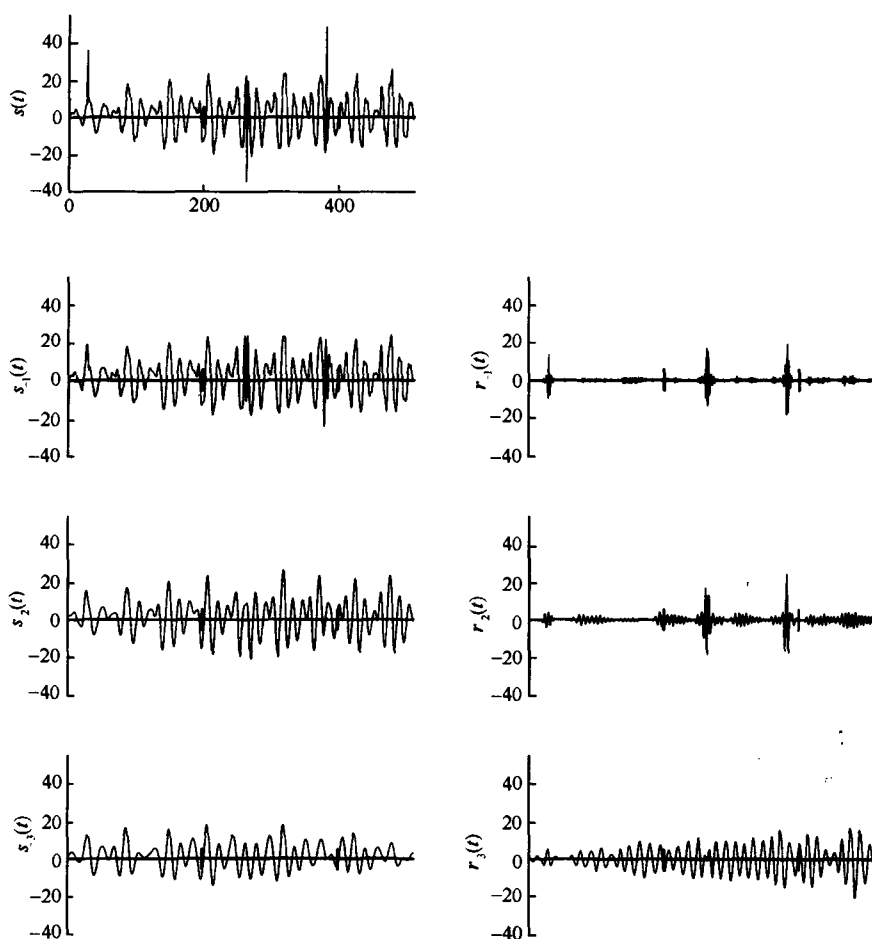


图 7.13 带噪声音乐信号的分解



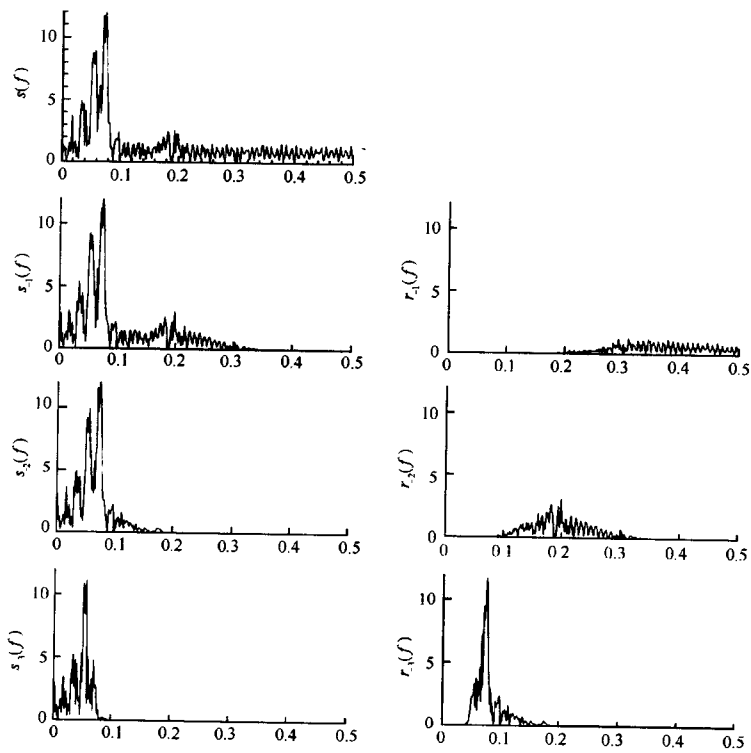


图 7.14 分解音乐信号的振幅频谱,分别表明尺度函数与小波的低通与带通滤波器特性

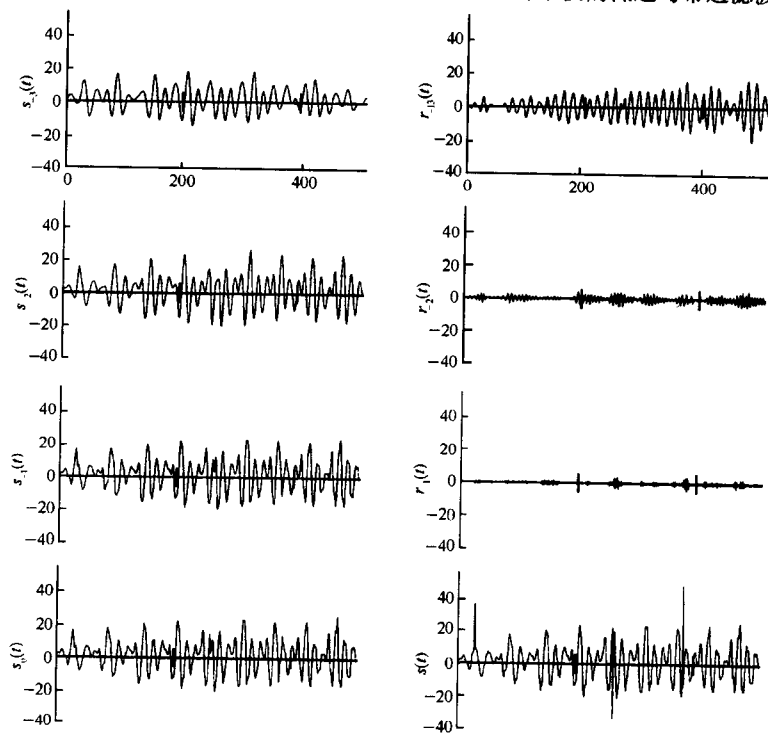


图 7.15 去噪后音乐信号的重构

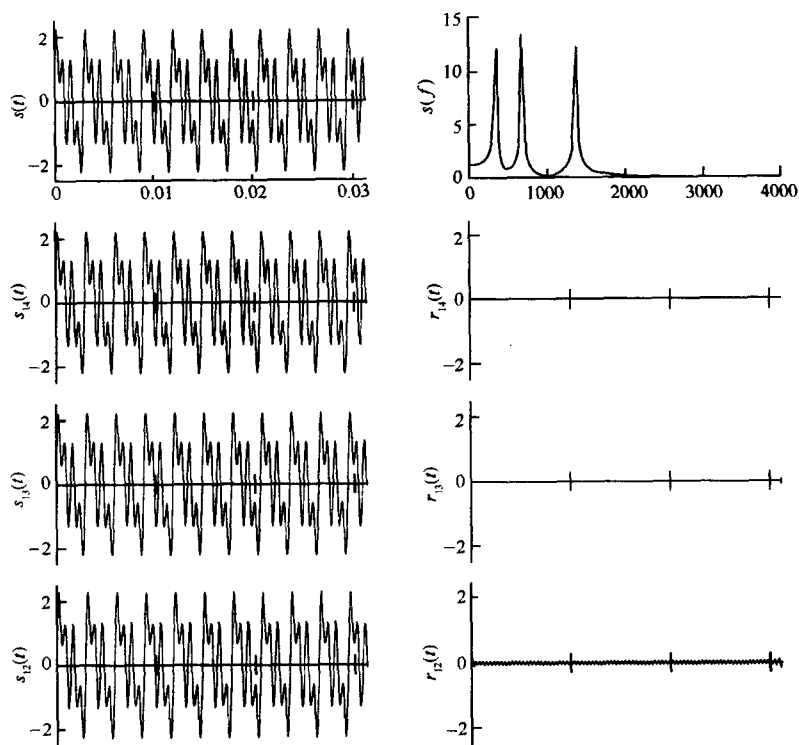


图 7.16 对应于倍频程尺度的三个不同频率正弦函数所成信号的分解

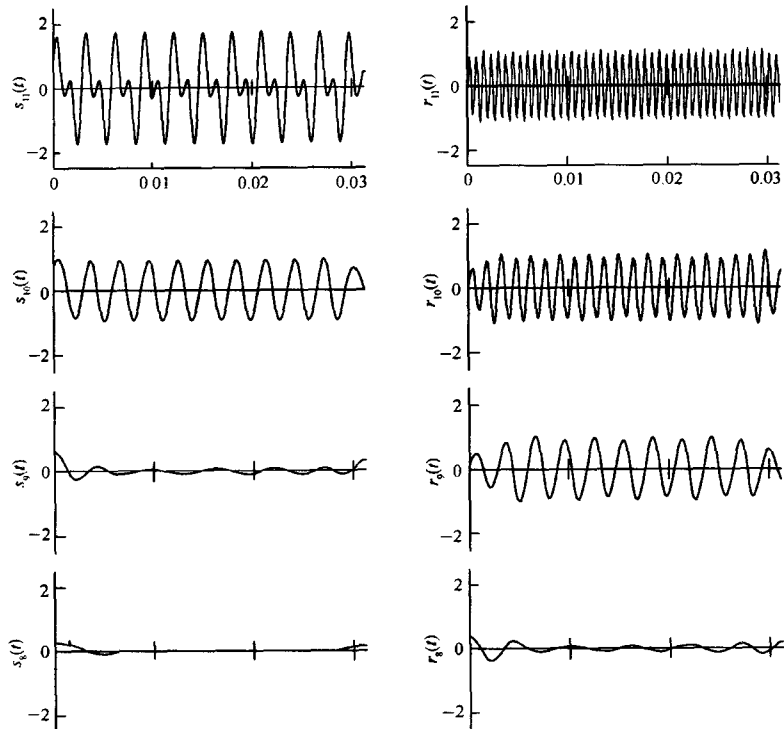


图 7.17 具有三个频率成分信号的分解(接上图 7.16)

## 7.8 二通道完全重构滤波器组

在数字信号处理的很多应用中要求多带通滤波器将信号分离为各种成分,它们的频谱占据频率轴不同的频率段。这些应用的例子包括雷达信号处理中对于 Doppler 频率的滤波器和音乐信号处理中的音调均衡器。图 7.18 说明了多带滤波的概念,在此多带滤波的模型中,根据期望达到的效果,对相应信号分量的频谱带可以用不同的算法进行处理。对于 Doppler 处理器和音调均衡器,不必要从分量处理中重构原始信号,然而,存在另一种滤波器形式要求从信号分量恢复原始信号:子带滤波器组。子带滤波的主要应用是信号压缩,为了存储与传输的目的,对子带成分进行编码,按照不同的精确度从编码成分能够恢复原始信号。

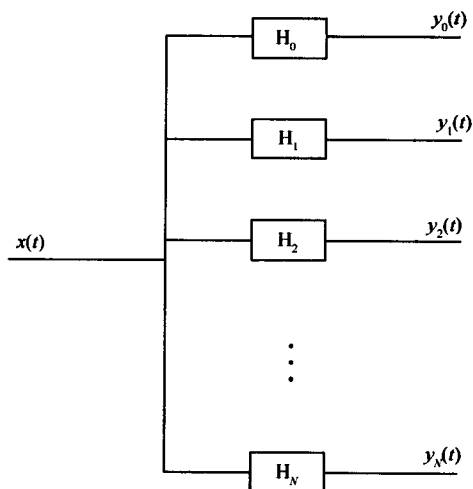


图 7.18 多带滤波器组

我们将利用基本的二通道完全重构(PR)滤波器组说明此算法的主要特征。滤波器组的树形结构能够利用基本的二通道滤波器组来构造。一个二通道滤波器组由分析部分和综合部分组成,每一部分由两个滤波器构成。分析部分包含着一个高通滤波器和一个低通滤波器,而且它们相互补充,输入信号的信息由两个滤波器中的一个来处理。二通道完全重构滤波器的框图如图 7.19 所示。

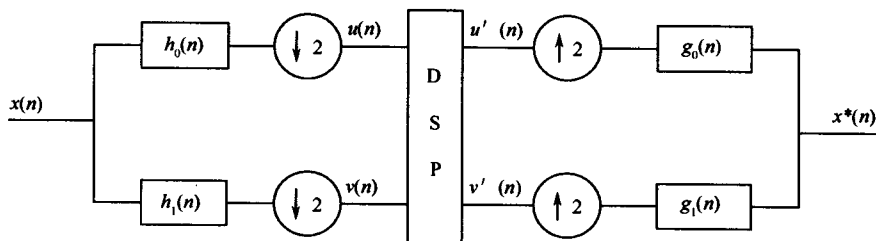


图 7.19 二通道完全重构滤波器组

完全重构条件在滤波器组理论中是一个重要条件,它建立了分析部分低通滤波器与高通滤波器之间唯一的关系。消除抽取所造成的混叠决定了分析滤波器与综合滤波器之间的关系,下面详细描述这些条件的细节。

二通道完全重构滤波器组中的滤波器应该特别设计使得分量信号可以被完全重构而没有信息丢失,滤波器组的输出仅仅是输入信号的延迟。对于二通道滤波器组,滤波运算确实与小波算法相同。因为完全重构条件而且必须消除输出信号中的混叠成分,仅需设计 4 个滤波器中的 1 个。关于滤波器组更多的细节及其与小波理论的关系读者可以参阅文献 [3 ~ 7]。

### 7.8.1 二通道完全重构滤波器组的频谱域分析

设离散信号  $X(z)$  是二通道完全重构滤波器组的输入,用  $z$  变换表示中间输出信号,如图 7.19 所示。滤波器组的分析部分由低通滤波器  $H_0(z)$  和高通滤波器  $H_1(z)$  组成。对于低通滤波器  $H_0(z)$  的卷积输出再进行二抽取( $\downarrow 2$ )为

$$U(z) = \frac{1}{2}[X(z^{1/2})H_0(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})H_0(-z^{1/2})] \quad (7.79)$$

而对于高通滤波器  $H_1(z)$  的卷积输出再进行二抽取则为

$$V(z) = \frac{1}{2}[X(z^{1/2})H_1(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})H_1(-z^{1/2})] \quad (7.80)$$

为了分析,假定对分析滤波器组的输出不进行处理,从而处理器标明的输出  $U'(z)$  与  $V'(z)$  是

$$U'(z) = U(z)$$

$$V'(z) = V(z)$$

插值( $\uparrow 2$ )后再进行综合滤波器组  $G_0(z)$  与  $G_1(z)$ ,滤波器的输出是

$$U''(z) = \frac{1}{2}[X(z)H_0(z)G_0(z) + X(-z)H_0(-z)G_0(z)] \quad (7.81)$$

和

$$V''(z) = \frac{1}{2}[X(z)H_1(z)G_1(z) + X(-z)H_1(-z)G_1(z)] \quad (7.82)$$

这些输出同时结合在一起使得处理过的输出  $X^*(z)$  是

$$\begin{aligned} X^*(z) &= U''(z) + V''(z) = \\ &= \frac{1}{2}X(z)[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)] + \\ &= \frac{1}{2}X(-z)[H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)] \end{aligned} \quad (7.83)$$

表达式(7.83)中的第二项包含着输入信号的混叠成分[包含  $X(-z)$  的项]。为了完全重构,可以选择滤波器  $G_0(z)$  和  $G_1(z)$  来消除混叠成分,得到滤波器组无混叠的条件:

$$G_0(z) = \pm H_1(-z) \quad (7.84)$$

$$G_1(z) = \mp H_0(-z)$$

一旦设计好分析滤波器组,则综合滤波器自动确定。选择式(7.84)中上面的符号,则滤波器组的输出为

$$X^*(z) = \frac{1}{2}X(z)[H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)] \quad (7.85)$$

完全重构条件要求  $X^*(z)$  只能是输入  $X(z)$  的延迟[即  $X^*(z) = X(z)z^{-m}$  对于某个整数  $m$ ], 从而得到下面的关系:

$$\begin{aligned} H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) &= \\ H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z) &= \end{aligned} \quad (7.86)$$

$$H_0(z)G_0(z) - H_0(-z)G_0(-z) = \quad (7.87)$$

$$2z^{-m} \quad (7.88)$$

滤波器组的传递函数定义为

$$T(z) = \frac{X^*(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)] = z^{-m}$$

为了简化分析, 定义合成滤波器  $C_0(z)$  和  $C_1(z)$  为两个滤波通道的乘积滤波器:

$$\begin{aligned} C_0(z) &= H_0(z)G_0(z) = -H_0(z)H_1(-z) \\ C_1(z) &= H_1(z)G_1(z) = H_1(z)H_0(-z) = \\ &= -H_0(-z)G_0(-z) = -G_0(-z) \end{aligned} \quad (7.89)$$

这里利用了无混叠条件。对于合成滤波器组, 完全重构条件成为

$$C_0(z) - C_0(-z) = 2z^{-m} \quad (7.90)$$

和

$$T(z) = \frac{1}{2}[C_0(z) - C_0(-z)] \quad (7.91)$$

如果设计一个合成滤波器  $C_0(z)$  满足条件式(7.90), 通过谱因式分解能够得到分析滤波器  $H_0(z)$  和  $G_0(z)$ , 以后将用数值例子说明这个过程。

由于

$$T(-z) = \frac{1}{2}[C_0(-z) - C_0(z)] = -T(z) \quad (7.92)$$

所以传递函数  $T(z)$  是一个奇函数, 在式(7.90)中的整数  $m$  一定是奇数, 这意味着除了当  $m$  是奇数时  $c_m = 1$  以外,  $C_0(z)$  中仅含有偶数项系数。设计滤波器组的目的是找到  $H_0(z)$  与  $H_1(z)$  [或  $H_0(z)$  与  $G_0(z)$ ] 使其满足完全重构条件。在完全重构滤波器组理论的早期研究中出现了两个基本方法: (1) 正交镜像滤波器(QMF)方法; (2) 半带滤波器(HBF)方法。在这一节, 我们讨论这两种方法的基本思想。

### 1. 正交镜像滤波器方法

让我们选择  $H_1(z) = H_0(-z)$ , 在频谱域中可以得到:

$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(-e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega+\pi)}) \quad (7.93)$$

高通滤波器  $H_1(e^{j\omega})$  的频谱是低通滤波器关于频谱交点  $\omega = \pi/2$  的镜像对称, 如图 7.20 所示, 则传递函数为

$$T(z) = \frac{1}{2}[H_0^2(z) - H_1^2(z)] = \frac{1}{2}[H_0^2(z) - H_0^2(-z)] = z^{-m} \quad (7.94)$$

一个函数  $f \in L^2(\mathbf{R})$  具有线性相位是指:

$$\hat{f}(\omega) = \pm |\hat{f}(\omega)| e^{-ja\omega}$$

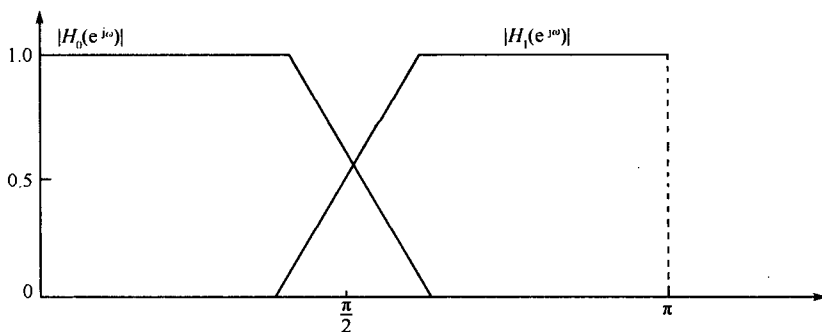


图 7.20 正交镜像滤波器的频谱特征

式中  $a$  是某个实常数。函数  $f$  具有广义线性相位是指：

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)e^{-ja\omega+b}$$

式中  $\hat{g}(\omega)$  是实值函数且  $a$  和  $b$  都是实常数。在信号重构中为了避免失真，滤波器必须具有线性或广义线性相位。假设  $H_0(z)$  是一个具有  $N$  阶线性相位的 FIR 滤波器，满足条件：

$$\begin{aligned} H_0(e^{j\omega}) &= e^{-j(\omega/2)(N-1)} |H_0(e^{j\omega})| \\ H_1(e^{j\omega}) &= e^{-j[(\omega+\pi)/2](N-1)} |H_0(e^{j(\omega+\pi)})| \end{aligned}$$

传递函数的频谱响应为

$$T(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} e^{-j(\omega/2)(N-1)} \left[ |H_0(e^{j\omega})|^2 - (-1)^{N-1} |H_1(e^{j\omega})|^2 \right] \quad (7.95)$$

如果  $N-1$  是偶数，则在交叉点  $\omega = \pi/2$  有  $T(e^{j\omega}) = 0$ 。在该点传递函数导致了严重的幅度失真，这将与完全重构条件矛盾，因此  $N$  一定是偶数。如果对于偶数  $N$ ，我们希望忽略所有幅度失真，则  $H_0(z)$  与  $H_1(z)$  的频谱幅度必须满足：

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j\omega})|^2 = 2 \quad (7.96)$$

条件式(7.96)不同于在右边除以因子 2 的规范形式，这是因为前面在二尺度和分解序列  $z$  变换的定义中使用了规范化因子。

式(7.96)中  $H_0(e^{j\omega})$  与  $H_1(e^{j\omega})$  的平凡解是正弦函数与余弦函数，这与开始时对 FIR 滤波器的假设相矛盾，任何非平凡的线性相位 FIR 滤波器  $H_0$  都会导致幅度失真。如果将式(7.96)的右端规范化为 1，则满足归一化条件的滤波器是功率互补滤波器，一个 IIR 滤波器能够用于 IIR 完全重构滤波器组。

重新回到式(7.94)，如果假定滤波器是 FIR，则  $H_0(z)$  至多有两个系数，因此  $H_0^2(z)$  仅有  $z^{-1}$  的奇数次幂一项，容易知道这个解导致 Haar 滤波器。讨论正交滤波器组时，我们将进一步讨论这些滤波器。

## 2. 半带滤波器方法

根据式(7.89)知道，如果仅仅允许因果 FIR 滤波器作为分析滤波器组，则合成滤波器  $C_0$  也是因果 FIR，而且仅有一项奇数项系数。为了克服这个限制，能够设计反因果或非因果滤波器，然后通过增加一个延迟使得它们成为因果的。首先通过给合成滤波器增加提前量来简化分析，再利用下面所定义的半带滤波器的性质。合成滤波器  $C_0$  的提前量由  $m$  来控制，满足：

$$S(z) = z^m C_0(z) \quad (7.97)$$

式中  $S(z)$  是一个关于原点对称的非因果滤波器。因为对于奇数  $m$  有  $S(-z) = (-z)^m C_0(-z) = -z^m C_0(-z)$ , 所以完全重构条件成为

$$S(z) + S(-z) = 2 \quad (7.98)$$

除了  $S(0) = 1$  之外, 在  $S(z)$  中的所有偶数项系数都是零。 $S(z)$  是一个满足下列条件的半带滤波器:

- (1)  $S(n) = 0$ , 对于偶数  $n$  且  $n \neq 0$ ;
- (2)  $S(0) = \text{常数}$ ;
- (3)  $S(n) = S(-n)$ ;
- (4)  $S(e^{j\omega}) + S(-e^{j\omega}) = \text{常数}$ 。

这个半带滤波器可以被分解为两个滤波器的乘积, 下面用一个例子来讨论半带滤波器。

为了得到方程(7.98)的解, 令  $H_1(z) = -z^{-m}H_0(-z^{-1})$ , 传递函数成为

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2}[H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)] = \\ &= \frac{1}{2}z^{-m}[-H_0(z)H_0(z^{-1})(-1)^{-m} + H_0(-z)H_0(-z^{-1})] \end{aligned} \quad (7.99)$$

根据式(7.90),  $m$  必须是奇数, 从而有下面的表示:

$$T(z) = \frac{1}{2}z^{-m}[H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1})] \quad (7.100)$$

一旦设计了半带滤波器也就设计好滤波器组, 下面给出合成滤波器:

$$\begin{aligned} S(z) &= H_0(z)H_0(z^{-1}) \\ C_0(z) &= H_0(z)H_0(z^{-1})z^{-m} \\ C_1(z) &= -H_0(z)H_0(z^{-1})z^{-m} \\ H_1(z) &= -z^{-m}H_0(-z^{-1}) \\ G_0(z) &= H_1(-z) \\ G_1(z) &= -H_0(-z) \\ T(z) &= \frac{1}{2}[S(z) + S(-z)] \end{aligned} \quad (7.101)$$

根据  $S(z)$  的频谱因子分解得到低通滤波器  $H_0(z)$ 。

例 1: 用 Daubechies<sup>[5]</sup> 中推导出的尺度函数的系数作为一个例子。回忆半带滤波器的条件:

$$S(z) + S(-z) = 2$$

不同于 Haar 滤波器,  $S(z)$  最简单的形式为

$$S(z) = (1+z)^2(1+z^{-1})^2R(z) \quad (7.102)$$

除了在 0 点  $S(0) = 1$  之外,  $S(z)$  的所有偶数项系数必定是零。设

$$R(z) = az + b + az^{-1}$$

是一个非因果对称滤波器, 使得  $S(z)$  仍然是对称的。对式(7.102)进行代数运算并且利用  $S(z)$  满足的条件, 可得:

$$\begin{aligned} S(0) &= 1 & \Rightarrow & 8a + 6b = 1 \\ S(2) &= S(-2) = 0 & \Rightarrow & 4a + b = 0 \end{aligned}$$

解之得  $a = -\frac{1}{16}$  和  $b = \frac{1}{4}$ , 则对称滤波器  $R(z)$  为

$$R(z) = -\frac{1}{16}z + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}z^{-1} = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 [1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})z^{-1}][1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})z]$$

将此表达式代入式(7.102), 以便将  $S(z)$  分解为两个滤波器  $H_0(z)$  与  $H_0(z^{-1})$  的乘积, 此频谱的因式分解给出因果滤波器:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + z^{-1})^2 [1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})z^{-1}] = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})z^{-1} + (3 - \sqrt{3})z^{-2} + (1 - \sqrt{3})z^{-3}] = \\ &= 0.4929 + 0.8365z^{-1} + 0.2241z^{-2} - 0.1294z^{-3} \end{aligned}$$

注意, 为了得到第 6 章中给出的值, 必须给这些系数乘以  $\sqrt{2}$ 。

### 3. 双正交滤波器组

在信号处理中, 线性相位 FIR 滤波器组是所期望的, 因为它将相位失真减至最小。另一方面, 由于正交 FIR 滤波器组的简单性, 它也是人们所希望的。人们仅需设计一个滤波器, 即  $H_0(z)$ , 则整个滤波器组所有其他的滤波器就会被确定, 能够设计双正交滤波器组使其满足线性相位条件。

综合与分析滤波器的完全重构条件与抗混叠条件是:

$$H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) = 2z^{-m}$$

$$G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z) = 0$$

根据分析滤波器  $H_0(z)$  与  $H_1(z)$  能够求解出综合滤波器  $G_0(z)$  与  $G_1(z)$ , 其结果为

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \frac{2z^{-m}}{\det[\text{Tr}]} \begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z) \end{bmatrix} \quad (7.103)$$

其中的转置矩阵为

$$[\text{Tr}] = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix}$$

如果考虑对称滤波器:

$$H_0(z) = H_0(z^{-1}) \Leftrightarrow h_0(n) = h_0(-n)$$

此时与因果性无关, 则可以忽略延迟  $z^{-m}$ , 这等价于设计的所有滤波器都关于原点对称或反对称。我们也回顾合成滤波器的定义:

$$C_0(z) = H_0(z)G_0(z)$$

$$C_1(z) = H_1(z)G_1(z)$$

利用式(7.103)的结果, 可以得到:

$$\begin{aligned} C_0(z) &= H_0(z)G_0(z) = \frac{2H_0(z)H_1(-z)}{\det[\text{Tr}]} \\ C_1(z) &= H_1(z)G_1(z) = \frac{-2H_1(z)H_0(-z)}{\det[\text{Tr}]} \end{aligned} \quad (7.104)$$

如果在第二个方程中用  $-z$  代替  $z$  并且注意到:



$$\det[\text{Tr}(-z)] = -\det[\text{Tr}(z)]$$

则可以得到:

$$C_1(z) = C_0(-z) \quad (7.105)$$

最后的結果是:

$$C_0(z) + C_0(-z) = 2 \quad (7.106)$$

现在已经得到  $C_0(z)$  的半带滤波器, 利用频谱因式分解能够得到  $H_0(z)$  与  $G_0(z)$ 。对于频谱因式分解有许多选择, 相应可以得到不同的滤波器。综合滤波器组与分析滤波器组可能具有不同的滤波器长度。所得到的滤波器具有线性相位, 使用者能够作出明智的选择, 以便设计分析滤波器组或综合滤波器组使其满足所处理问题的条件。我们利用文献 [3] 中的例子来说明根据频谱因式分解得到  $H_0(z)$  与  $G_0(z)$  的不同方法。

设乘积滤波器为

$$\begin{aligned} C_0(z) = H_0(z)G_0(z) &= (1+z^{-1})^4 Q(z) = \\ &= \frac{1}{16}(-1+9z^{-2}+16z^{-3}+9z^{-4}-z^{-6}) \end{aligned} \quad (7.107)$$

由于二项式  $(1+z^{-1})^n$  是对称的, 因此为了使  $C_0(z)$  是对称的  $Q(z)$  必须是对称的, 提前量  $z^3$  使得  $S(z)$  成为半带滤波器。频谱因式分解的选择包括:

$$\begin{aligned} (1) \quad H_0(z) &= (1+z^{-1})^0 & G_0(z) &= (1+z^{-1})^4 Q(z) \\ (2) \quad H_0(z) &= (1+z^{-1})^1 & G_0(z) &= (1+z^{-1})^3 Q(z) \\ (3) \quad H_0(z) &= (1+z^{-1})^2 & G_0(z) &= (1+z^{-1})^2 Q(z) \\ &\text{或 } (1+z^{-1})(2-\sqrt{3}-z^{-1}) & &\text{或 } (1+z^{-1})^3(2+\sqrt{3}-z^{-1}) \\ (4) \quad H_0(z) &= (1+z^{-1})^3 & G_0(z) &= (1+z^{-1})Q(z) \\ (5) \quad H_0(z) &= (1+z^{-1})^2(2-\sqrt{3}-z^{-1}) & G_0(z) &= (1+z^{-1})^2(2+\sqrt{3}-z^{-1}) \end{aligned} \quad (7.108)$$

最后的选择对应于 Daubechies 正交滤波器, 它不具有线性相位。因式分解的选择中前三行给出了线性相位滤波器, 而其余三行选择无法给出线性相位。

## 7.8.2 时间域分析

滤波器组理论的发展主要基于频谱分析。为了增强理解, 我们讨论滤波器组理论在时间域的等价描述, 还将讨论算法的数字实现。因此, 我们将根据时间域变量充分说明术语的意思、滤波器条件和滤波器系统。

### 1. 因果性

如果脉冲响应:

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0$$

则称 FIR 滤波器是因果的。 $h(n)$  的  $z$  变换是  $z^{-1}$  的右侧多项式:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots + h(m)z^{-m}$$

如果  $H(z)$  是因果滤波器, 则  $H(z^{-1})$  是非因果的, 这是由于

$$H(z^{-1}) = h(0) + h(1)z + h(2)z^2 + \cdots + h(m)z^m$$

是  $z$  的左侧多项式。除了奇数项系数的符号有变化以外,  $H(-z^{-1})$  与  $H(z^{-1})$  的多项式

相同:

$$H(-z^{-1}) = h(0) - h(1)z + h(2)z^2 - \cdots - h(m)z^m$$

所以  $H(-z^{-1})$  也是非因果的。如果假设  $m$  是奇数, 则最后一项取负号。为了实现非因果 FIR 滤波器, 必须用滤波器的长度延迟滤波器使其成为因果的, 所以

$$-z^{-m}H(-z^{-1}) = h(m) - h(m-1)z^{-1} + \cdots + h(1)z^{-m+1} - h(0)z^{-m}$$

是一个因果滤波器。如果我们选择:

$$H_0(z) = H(z)$$

$$H_1(z) = -z^{-m}H_0(-z^{-1})$$

$$G_0(z) = H_1(-z)$$

$$G_1(z) = -H_0(-z)$$

则可以得到由因果滤波器构成的滤波器组。

## 2. 完全重构的必要条件

完全重构要求:

$$S(z) + S(-z) = 2$$

关于低通滤波器  $H_0(z)$ , 方程成为

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = 2 \quad (7.109)$$

考虑式(7.109)中的完全重构条件, 在时间域中可以得到:

$$\begin{aligned} S(z) + S(-z) &= \sum_n h_0(n)z^{-n} \sum_m h_0(m)z^{m^*} + \\ &\sum_n h_0(n)z^{-n} \sum_m (-1)^{-(n+m)} h_0(m)z^m = \\ &\sum_{n,m} h_0(n)h_0(m)z^{-n}z^m + \sum_{n,m} (-1)^{-(n+m)} h_0(n)h_0(m)z^{-n}z^m = 2 \end{aligned} \quad (7.110)$$

要使式(7.110)成立, 必须要求  $m+n$  是偶数, 从而可以得到:

$$\sum_{n,m} h_0(n)h_0(m)z^{-n}z^m = 1 \quad (7.111)$$

式(7.111)的左端是序列  $h_0(n)$  的自相关函数的  $z$  变换。为了说明这个关系, 我们称

$$\kappa(n) = \sum_k h_0(k)h_0(k+n) = \kappa(-n) \quad (7.112)$$

为自相关函数, 其  $z$  变换为

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_n \sum_k h_0(k)h_0(k+n)z^{-n} = \\ &\sum_k h_0(k) \sum_k h_0(k+n)z^{-n} = \\ &\sum_k h_0(k) \sum_m h_0(m)z^{-(m-k)} \end{aligned} \quad (7.113)$$

这意味着:

$$\kappa(n) = h_0(n) * h_0(-n) \quad (7.114)$$

比较式(7.113)与式(7.110)并且进行代换:

$$K(z) \rightarrow S(z)$$

$$\kappa(n) \rightarrow S(z)$$

可以得到:

$$S(z) = \sum_n \sum_k h_0(k) h_0(k+n) z^{-n}$$

根据式(7.98)以及对于所有整数  $n$  恒有  $S(2n) = 0$  的事实,可以得到完全重构的规范正交性条件:

$$\sum_k h_0(k) h_0(k+2n) = \delta_{n,0} \quad (7.115)$$

这意味着滤波器关于其所有偶数平移的正交性。对高通滤波器  $h_1(n)$  进行类似的分析,可以得到  $h_1(n)$  满足同样的条件:

$$\sum_k h_1(k) h_1(k+2n) = \delta_{n,0} \quad (7.116)$$

$$\sum_k h_0(k) h_1(k+2n) = 0 \quad (7.117)$$

关于小波与逼近函数基,上面给出的规范正交性条件可以表示为内积的形式:

$$\begin{aligned} \langle h_0(k), h_0(k+2n) \rangle &= \delta_{n,0} \\ \langle h_1(k), h_1(k+2n) \rangle &= \delta_{n,0} \\ \langle h_0(k), h_1(k+2n) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (7.118)$$

其中逼近基  $h_0(k)$  与小波基  $h_1(k)$  关于其偶数平移是规范正交的,而且相互之间也是正交的。利用 FIR 序列  $h_0(n)$  构造无穷矩阵  $[H_0]$ :

$$[H_0] = \begin{bmatrix} h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) & h_0(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) & h_0(3) & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & h_0(0) & h_0(1) & h_0(2) \\ & & & 0 & 0 & 0 & h_0(0) \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (7.119)$$

根据式(7.118)中的规范正交性条件容易得到:

$$[H_0][H_0]^T = I \quad (7.120)$$

所以  $[H_0]$  是一个正交矩阵。利用 FIR 序列  $h_1(n)$  可以类似地定义  $[H_1]$  并且还可以证明:

$$[H_1][H_1]^T = I \quad (7.121)$$

此外,读者也能够证明:

$$[H_1][H_0]^T = [H_0][H_1]^T = [0] \quad (7.122)$$

式(7.118)中的等式构成 FIR 滤波器的正交条件,这种类型的滤波器组称为正交滤波器组。Haar 尺度函数和 Haar 小波是最简单的线性相位正交滤波器组。实际上,若令

$$h_0^H(n) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

和

$$h_1^H(n) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

则这两个序列满足式(7.118)中的正交条件。由于线性相位 FIR 滤波器必须是对称的或者反对称的,因此正交滤波器通常不能满足这些条件,Haar 滤波器集合是唯一具有线性相位的正交集。

### 3. 时间域中的二通道双正交滤波器组

已经证明了分析与综合滤波器的双正交条件为

$$C_0(z) + C_0(-z) = H_0(z)G_0(z) + H_0(-z)G_0(-z) = 2$$

在时间域写出这个方程并且利用卷积公式得到时间域的双正交条件:

$$\sum_k h_0(k)g_0(l-k) + (-1)^l \sum_k h_0(k)g_0(l-k) = 2\delta_{l,0} \quad (7.123)$$

对于非平凡解,仅仅当  $l$  是偶数时等式成立,这导致了分析滤波器与综合滤波器之间的双正交关系:

$$\sum_k h_0(k)g_0(2n-k) = \langle h_0(k), g_0(2n-k) \rangle = \delta_{n,0} \quad (7.124)$$

双正交条件也能够用  $H_1(z)$  表示为

$$\sum_k h_1(k)g_1(2n-k) = \langle h_1(k), g_1(2n-k) \rangle = \delta_{n,0} \quad (7.125)$$

另外的双正交关系是:

$$\begin{aligned} \langle h_1(k), g_0(2n-k) \rangle &= 0 \\ \langle h_0(k), g_1(2n-k) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (7.126)$$

如果将滤波器看作离散基,则可以得到:

$$\tilde{g}_m(k) = g_m(-k) \quad (7.127)$$

双正交关系成为

$$\begin{aligned} \langle h_0(k), \tilde{g}_0(k-2n) \rangle &= \delta_{n,0} \\ \langle h_1(k), \tilde{g}_1(k-2n) \rangle &= \delta_{n,0} \\ \langle h_1(k), \tilde{g}_0(k-2n) \rangle &= 0 \\ \langle h_0(k), \tilde{g}_1(k-2n) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (7.128)$$

## 7.9 滤波器组的多相位表示

除了在频谱域和时间域对离散信号进行表示外,信号的多相位表示是一个值得选择的方法,对于计算来说它是一个有效的表示。在卷积和二抽取过程中需要计算全部系数,然后舍去其中的一半。但在多相位方法中仅仅对输入信号进行抽取,再与滤波器系数的一半进行卷积,这种方法通过减少冗余性来提高计算效率。

### 7.9.1 多相位域的信号表示

将离散因果信号的  $z$  变换划分成  $M$  个点的段,可以得到:

$$\begin{aligned}
X(z) = & x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots + x(M-1)z^{-(M-1)} + \\
& x(M)z^{-M} + x(M+1)z^{-(M+1)} + x(M+2)z^{-(M+2)} + \cdots + \\
& x(2M)z^{-2M} + x(2M+1)z^{-(2M+1)} + x(2M+2)z^{-(2M+2)} + \cdots + \\
& x(3M)z^{-3M} + x(3M+1)z^{-(3M+1)} + \cdots =
\end{aligned} \quad (7.129)$$

$$\sum_{l=0}^M z^{-l} X_l(z^M) \quad (7.130)$$

式中  $X_l(z^M)$  是对  $x(n)$  进行  $M(\downarrow M)$  抽取的  $z$  变换, 指标  $l$  表示样本平移的数目。当  $M=2$  时, 可以得到:

$$X(z) = X_0(z^2) + z^{-1} X_1(z^2) \quad (7.131)$$

### 7.9.2 多相位域的滤波器组

对于二通道情形的滤波器  $H(z)$ , 多相位表示确实与式(7.131)中的表示相同, 即

$$H(z) = H_e(z^2) + z^{-1} H_o(z^2) \quad (7.132)$$

式中  $H_e(z^2)$  由  $h(n)$  的偶数样本所构成;  $H_o(z^2)$  是由  $h(n)$  的所有奇数样本所构成。滤波器的奇数与偶数部分分别用来处理信号的奇数与偶数系数。为了明确地表达多相位域中的二通道滤波器组, 需要借助两个恒等式:

$$\begin{aligned}
(1) (\downarrow M)G(z) &= G(z^M)(\downarrow M) \\
(2) (\uparrow M)G(z^M) &= G(z)(\uparrow M)
\end{aligned} \quad (7.133)$$

第一个等式说明先进行滤波  $G(z^2)$ , 随后进行两点抽取, 等价于先进行两点抽取然后进行滤波  $G(z)$ ; 第二个等式对于综合滤波器组是有用的。

让我们首先考虑分析滤波器低通分支的时间域表达式, 假设因果输入序列和因果滤波器, 则输出  $y(n) = [x(n) * f(n)]_{\downarrow 2}$  用矩阵形式可以表示为

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ y(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f(1) & f(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f(2) & f(1) & f(0) & 0 & 0 & 0 \\ f(3) & f(2) & f(1) & f(0) & 0 & 0 \\ f(4) & f(3) & f(2) & f(1) & f(0) & 0 \\ f(5) & f(4) & f(3) & f(2) & f(1) & f(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \end{bmatrix} \quad (7.134)$$

用奇数部分与偶数部分可以将输出系数表示为

$$[y(n)] = [y_e(n)] + (\text{delay})[y_o(n)]$$

其中

$$[y(n)]_{\downarrow 2} = [y_e(n)] = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(2) \\ y(4) \\ y(6) \end{bmatrix} \quad (7.135)$$

$y(n)$  的偶数部分由  $f_e(n)$  与  $x_e(n)$  的乘积及  $x_e(n)$  与  $f_o(n)$  延迟的乘积所构成。信号  $x(n)$  被划分为偶数部分与奇数部分并且分别由滤波器的偶数部分与奇数部分来处理。用同样的方法,分析部分的高通分支能够与上面一样明确表示。在多相位域中,由分析滤波器得到的中间输出为

$$\begin{bmatrix} U_0(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(z) \\ z^{-1}X_1(z) \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} X_0(z) \\ z^{-1}X_1(z) \end{bmatrix} \quad (7.136)$$

式中  $[H]$  是多相位域中的分析滤波器。用同样的方法,根据综合滤波器可以得到重构序列  $X'(z)$ :

$$X'(z) = [z^{-1}1] \begin{bmatrix} G_{00}(z^2) & G_{01}(z^2) \\ G_{10}(z^2) & G_{11}(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0(z^2) \\ U_1(z^2) \end{bmatrix} = [z^{-1}1][G] \begin{bmatrix} U_0(z^2) \\ U_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (7.137)$$

多相位处理矩阵的完全重构条件是  $[H][G] = I$ 。

## 7.10 离散小波变换和完全重构滤波器组的注记

我们已经说明了离散小波变换算法与二通道滤波器组之间的平行关系。关于数值计算,两种算法确实是相同的,我们希望指出这两种方法几个基本的不同点。

### 1. 处理域

让我们用正交小波级数表示模拟信号  $f(t) \in L^2$ , 即

$$f(t) = \sum_k \sum_s w_{k,s} \psi_{k,s}(t) \quad (7.138)$$

系数  $w_{k,s}$  由内积来计算:

$$w_{k,s} = \langle f(t), \psi_{k,s}(t) \rangle \quad (7.139)$$

与傅里叶级数系数一样,小波级数的系数是时间(或模拟)域成分。根据这个观点,可以知道离散小波变换是时间—尺度平面上稀疏集中计算连续小波变换的快速算法,这一点很像 FFT 是计算离散傅里叶变换的快速算法。离散小波变换是模拟信号处理的时间域变换。另一方面,根据频谱域(即高通与低通设计)对信号的处理来设计滤波器组算法。

### 2. 处理的目标

已经说明小波级数系数本质上是信号沿小波在尺度  $a = 2^{-s}$  和时间点  $b = k2^{-s}$  方向的分量(投影)。分量的概念类似于傅里叶成分的概念,小波级数系数的大小描述了信号与小波在特定尺度和时间点的相关程度。滤波器组的处理目标是分离信号的高频与低频成分,以便它们可以由不同的 DSP 算法进行处理或细化。尽管离散小波变换算法具有同样的功能,但离散小波变换的目的是找到信号与小波在给定尺度下的相似性。

### 3. 设计的起源

主要通过二尺度关系满足的 MRA 条件来设计小波。一旦得到了二尺度序列,将会获

得离散小波变换处理序列,从而能够构造出小波并且能够计算其时间窗宽与尺度窗宽。一般通过频谱因式分解获得处理滤波器,进而在频谱域中设计滤波器组。这些序列可能是也可能不是逼近函数与小波的二尺度序列,这些滤波器的时间—尺度或者时间—频率特性可能无法度量。

#### 4. 应用领域

在大多数信号和图像处理中都能够通过离散小波变换或者滤波器组算法来实现。但是在某些应用领域,比如在非傅里叶磁共振成像中要求在模拟域中处理脉冲,小波将更适合这样的工作,这是因为直接通过投影得到数据集。

#### 5. 灵活性

因为在频谱域中利用频谱因式分解可以设计滤波器组,从而给定一个半带滤波器可以得到一系列滤波器,而且每个滤波器对于给定的信号都有其自身的优点。根据这个观点,滤波器组比小波更适合于处理的需要。

究竟如何选择小波或者滤波器组?人们应该基于处理的问题、效率、精度等进行选择。

## 7.11 习 题

1. 对于正整数  $M \geq 2$ , 设  $w_M^k = \exp(j \frac{2\pi k}{M})$ ,  $k = 1, \dots, M$ , 证明

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M w_M^{kl} = \begin{cases} 0, & \text{若 } M \text{ 不整除 } l \\ 1, & \text{若 } M \text{ 整除 } l \end{cases} \quad (7.140)$$

利用此关系证明:

$$Y(e^{-j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X(w_M^k \exp(-j \frac{\omega}{M})) \quad (7.141)$$

其中  $X(z) = \sum_k x[k]z^k$  与  $Y(z) = \sum_k y[k]z^k$  是序列  $\{x[k]\}$  与  $\{y[k]\}$  的  $z$  变换。

2. 若序列  $\{y[k]\}$  是序列  $\{x[k]\}$  的  $M$  上采样, 即

$$y[k] = \begin{cases} x[\frac{k}{M}], & \text{若 } k \in M\mathbb{Z} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7.142)$$

证明对于其  $z$  变换有:

$$(Y(e^{-j\omega}) = X(e^{-jM\omega})) \quad (7.143)$$

3. 对于完全重构条件的 QMF 解, 能够满足该条件的唯一解是 Haar 滤波器。为什么其他滤波器不能满足完全重构条件?

4. 若  $g_0(n)$  是这一章所讨论的例子中的  $D_2$  序列, 利用抗混叠条件和完全重构条件确定滤波器序列  $h_0(n)$ ,  $h_1(n)$  和  $g_1(n)$ 。

5. 说明在 7.9.2 小节中给出的恒等式是正确的。

## 7.12 计算机程序

```
算法
%
% 程序 algorithm.m
%
% 利用 Daubechies 小波( $m = 2$ ) 分解与重构一个函数。初始系数取为函数值本
% 身。
%

% 信号
v1 = 100; % 频率
v2 = 200;
v3 = 400;
r = 1000; % 采样率
k = 1:100;
t = (k - 1) / r;
s = sin(2 * pi * v1 * t) + sin(2 * pi * v2 * t) + sin(2 * pi * v3 * t);

% 分解与重构滤波器

g0 = [0.68301; 1.18301; 0.31699; -0.18301];
k = [0; 1; 2; 3];
g1 = flipud(g0) * (-1) ^ k;
h0 = flipud(g0) / 2;
h1 = flipud(g1) / 2;

% 分解过程
% 第一层分解

x = conv(s, h0);
a0 = x(1:2:length(x)); % 向下采样
x = conv(s, h1);
w0 = x(1:2:length(x)); % 向下采样

% 第二层分解

x = conv(a0, h0);
```



```

a1 = x(1:2:length(x));
x = conv(a0,h1);
w1 = x(1:2:length(x));

% 绘图

subplot(3,2,1),plot(s)
ylabel('Signal')
subplot(3,2,3),plot(a0)
ylabel('a_0')
subplot(3,2,4),plot(w0)
ylabel('w_0')
subplot(3,2,5),plot(a1)
ylabel('a_{-1}')
subplot(3,2,6),plot(w1)
ylabel('w_{-1}')
set(gcf,'paperposition',[0.5 0.5 7.5 10])

```

```

% 重构过程
% 第二层重构

```

```

x = zeros(2 * length(a1),1);
x(1:2:2 * length(a1)) = a1(1:length(a1));
y = zeros(2 * length(w1),1);
y(1:2:2 * length(w1)) = w1(1:length(w1));
x = conv(x,g0) + conv(y,g1);
a0_rec = x(4:length(x) - 4);

```

```

% 第一层重构

```

```

y = zeros(2 * length(w0),1);
y(1:2:2 * length(w0)) = w0(1:length(w0));
x = zeros(2 * length(a0_rec),1);
x(1:2:2 * length(a0_rec)) = a0_rec;

x = conv(x,g0);
y = conv(y,g1);
y = x(1:length(y)) + y;
s_rec = y(4:length(y) - 4);

```

```

% 绘图
figure(2)
subplot(3,2,1),plot(a1)
ylabel('a_{-1}')
subplot(3,2,2),plot(w1)
ylabel('w_{-1}')
```

```

subplot(3,2,3),plot(a0_rec)
ylabel('Reconstructed a_0')
```

```

subplot(3,2,4),plot(w0)
ylabel('w_0')
```

```

subplot(3,2,5),plot(s_rec)
ylabel('Reconstructed Signal')
```

```

set(gcf,'paperposition',[0.5 0.5 7.5 10])
```

## 参 考 文 献

- [1] C. K. Chui, J. C. Goswami, and A. K. Chan. Fast Integral Wavelet Transform on a Dense set of Time-Scale Domain, Numer. Math. , 70, pp. 283-302, 1995.
- [2] J. C. Goswami, A. K. Chan, and C. K. Chui. On a Spline-Based Integral Wavelet Transform Algorithm, in Ultra-Wideband Short Pulse Electromagnetics 2, L. Carin and L. B. Felsen(Eds. ). New York: Plenum Press, 1995, pp. 455-463.
- [3] G. Strang and T. Nguyen. Wavelets and Filter Banks. Wellesley, Mass. : Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [4] P. P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks. Upper Saddle River, N. J. : Prentice Hall, 1993.
- [5] M. Vetterli and J. Kovacevic. Wavelets and Subband Coding. Upper Saddle River, N. J. : Prentice Hall, 1995.
- [6] A. N. Akansu and R. A. Haddad. Multiresolution Signal Decomposition. San Diego, Calif. : Academic Press, 1992.
- [7] A. N. Akansu and M. J. Smith(Eds. ). Subband and Wavelet Transform. Boston: Kluwer Academic, 1995.

## 第 8 章 快速积分变换及其应用

在第 7 章中讨论了标准的小波分解与重构算法,利用 5.6 节讨论的最优阶局部样条插值策略得到所期望的  $B$  样条级数表示的系数序列  $a^M$ 。然后,基于选择线性样条插值或者三次样条插值,利用基的变换序列(第 7.5 节)得到 FIR 小波分解中对偶级数表示的系数序列  $\tilde{a}^M$ 。

根据第 7 章中所描述的实现策略得到一个典型的时间—尺度网格,如图 7.7 所示。换句话说,图 7.7 中所给信号在时间—尺度位置上积分小波变换(IWT)的值能够根据这个策略(实时)得到。然而,在许多信号分析的应用中,比如雷达和声纳应用中的宽带相关处理<sup>[1]</sup>, $f$  的积分小波变换在二进制稀疏点(如图 7.7 所示)上的信息对于信号的时间—频率分析是不够的,因此必须计算积分小波变换在非二进制点上的值。通过在所有二进制尺度上保持同样的时间分辨率,则能够防止与标准小波分解算法有关的混叠和时间方差的困难。此外,这一章还将说明仅仅在二进制尺度上计算可能无法分离一个函数的所有频率成分。

计算积分小波变换具有较细时间分辨率的算法已由 Rioul 和 Duhamel 在文献[2]中以及 Shensa 在文献[3]中引入并进行了研究。此外,具有更细频率分辨率的积分小波变换的快速计算也已经取得了一些进展,比如在文献[4]中首次引入(也可以参见文献[5, pp. 71-72])MVPO(multivoice per octave)策略,随后 Rioul 和 Duhamel 在文献[2]中借助 FFT 对其进行了改进,然而, MVPO 策略的计算复杂性随着尺度参数  $a$  的数目而增加。例如,基于 FFT 的计算策略,信号和分析小波都必须以同样的速率采样,采样率由信号的最高频率成分(或者最小尺度参数)来确定,而且对于任何固定信号的离散化这个采样率对大尺度值不能改变。此外,即使在最高频率水平(此时小波在时间域中的宽度是最窄的),小波需要样本数据的数目也远远大于金字塔算法中分解系数的数目。

为了计算时间—尺度域中稠密点集上的积分(连续)小波变换,这一章将讨论快速积分小波变换(FIWT)算法<sup>[6~8]</sup>。

### 8.1 较细的时间分辨率

在这一节,通过填充时间轴每个尺度的“洞”,使得在每个尺度上保持同样的时间分辨率,即我们想计算  $W_\psi x_M(n/2^s, 1/2^s)$ ,  $n \in \mathbf{Z}, s < M$ 。第 7 章中讨论的标准算法只是给出了积分小波变换在二进制点  $\{n/2^s, 1/2^s; n \in \mathbf{Z}, s < M\}$  上的值。为了得到较细的时间分辨率,我们首先对于每个固定的  $n$  引进记号:

$$x_{M,n}(t) = x_M\left(t + \frac{n}{2^M}\right) \quad (8.1)$$

则可以得到:

$$\begin{aligned}
W_{\psi} x_M\left(\frac{n}{2^M}, \frac{1}{2^s}\right) &= 2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} x_M(t) \overline{\psi\left[2^s\left(t - \frac{n}{2^M}\right)\right]} dt = \\
&2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} x_M\left(t + \frac{n}{2^M}\right) \overline{\psi(2^s t)} dt = \\
&W_{\psi} x_{M,n}\left(0, \frac{1}{2^s}\right)
\end{aligned} \quad (8.2)$$

现在, 因为

$$x_M(t) = \sum_k \tilde{a}_{k,M} \tilde{\phi}(2^M t - k) \quad (8.3)$$

从而得到:

$$\begin{aligned}
x_{M,n}(t) &= \sum_k \tilde{a}_{k,M} \tilde{\phi}(2^M t + n - k) = \\
&\sum_k \tilde{a}_{n+k,M} \tilde{\phi}(2^M t - k)
\end{aligned} \quad (8.4)$$

所以从式(8.2)知道在点  $(n/2^M, 1/2^s)$  处  $x_M$  的积分小波变换与  $x_{M,n}$  在  $(0, 1/2^s)$  处的值相同。一般地, 对于每个  $k \in \mathbb{Z}$  可以得到:

$$\begin{aligned}
W_{\psi} x_{M,n}\left(\frac{k}{2^s}, \frac{1}{2^s}\right) &= 2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} x_{M,n}(t) \overline{\psi(2^s t - k)} dt = \\
&2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} x_M\left(t + \frac{n}{2^M}\right) \overline{\psi(2^s t - k)} dt = \\
&2^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} x_M(t) \overline{\psi\left(2^s t - k - \frac{n2^s}{2^M}\right)} dt = \\
&W_{\psi} x_M\left(\frac{k2^{M-s} + n}{2^M}, \frac{1}{2^s}\right)
\end{aligned} \quad (8.5)$$

其中  $s < M$ , 因此对于任何固定的  $s$  和  $M$  使得  $s < M$ 。由于每个整数  $l$  能够被表示为  $k2^{M-s} + n$ , 其中  $n = 0, \dots, 2^{M-s} - 1$  且  $k \in \mathbb{Z}$ , 将第 7 章中标准的小波分解算法应用于函数  $x_{M,n}$ , 对于  $l \in \mathbb{Z}$  和  $s < M$ , 可以得到  $x_M$  在  $(l/2^M, 1/2^s)$  上所有的积分小波变换值:

$$W_{\psi} f_M\left(\frac{l}{2^M}, \frac{1}{2^s}\right) = 2^{-s/2} \tilde{w}_{l2^{s-M}, s} \quad (8.6)$$

对于  $s = M-1, M-2$  和  $M-3$ , 但仅仅当  $l = 0, \dots, 3$  时的时间—尺度网格如图 8.1 所示。

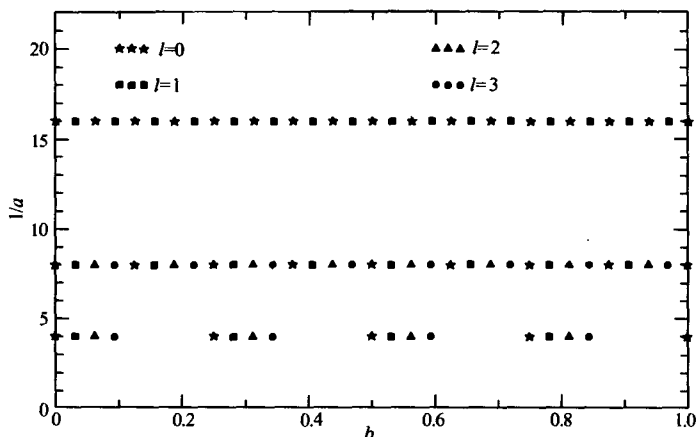


图 8.1 时间轴上“洞”的填充(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6]重印)

为了实现,我们需要记号:

$$\tilde{w}_s = \{\tilde{w}_{k2^{s-M},s}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \tilde{a}_s = \{\tilde{a}_{k2^{s-M},s}\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (8.7)$$

及向上采样运算记号:

$$\sigma^p = \begin{cases} \text{恒等算子,} & \text{当 } p = 0 \text{ 时.} \\ \sigma^{p-1}\sigma, & \text{当 } p \geq 1 \text{ 时} \end{cases} \quad (8.8)$$

其中

$$\sigma\{x_n\} = \{y_n\}, \quad y_n = \begin{cases} x_n/2, & \text{当 } n \text{ 是偶数时} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 是奇数时} \end{cases} \quad (8.9)$$

对于  $s = M-1$ , 结合式(8.2) 与式(7.45) 可以得到:

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_1 * \tilde{a}_M)_n &= \sum_k \tilde{g}_1[k] \tilde{a}_{n-k,M} = \sum_k \tilde{g}_1[-k] \tilde{a}_{n+k}^M = \\ &= 2^{(M-1)/2} W_\psi x_{M,n} \left(0, \frac{1}{2^{M-1}}\right) = \\ &= \tilde{a}_{n/2, M-1} \end{aligned} \quad (8.10)$$

用类似的方法可以证明:

$$\tilde{a}_{n/2, M-1} = (\tilde{g}_0 * \tilde{a}_M)_n \quad (8.11)$$

换句话说,利用式(8.7) 和式(8.8) 中的记号,可以得到:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{M-1} &= (\sigma^0 \tilde{g}_0) * \tilde{a}_M \\ \tilde{w}_{M-1} &= (\sigma^0 \tilde{g}_1) * \tilde{a}_M \end{aligned} \quad (8.12)$$

为了将其推广到其他较低水平,根据文献[3] 中给出的方法得到算法:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{s-1} &= (\sigma^{M-s} \tilde{g}_0) * \tilde{a}_s \\ \tilde{w}_{s-1} &= (\sigma^{M-s} \tilde{g}_1) * \tilde{w}_s \end{aligned} \quad (8.13)$$

其中  $s = M, M-1, \dots, M-M'+1$ . 实现该算法的原理图如图 8.2 所示.

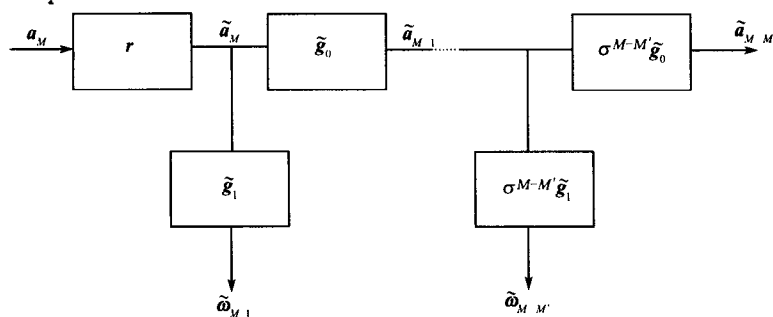


图 8.2 较细时间分辨率的小波分解过程(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6] 重印)

## 8.2 较细的尺度分辨率

为了计算某些倍频程间尺度的积分小波变换,我们定义一个倍频程间参数:

$$\alpha_n = \alpha_{n,N} = \frac{2^N}{n + 2^N}, \quad N > 0 \text{ 且 } n = 1, \dots, 2^N - 1 \quad (8.14)$$

在任何两个连续不断的倍频程水平之间给出了另外  $2^N - 1$  个水平, 具体如下:

对每个  $k \in \mathbf{Z}$  和  $s < M$ , 在倍频程  $(s-1)$  与倍频程  $s$  之间增加  $2^N - 1$  个水平, 引进记号:

$$\begin{aligned} \phi_{k,s}^n(t) &= (2^s \alpha_n)^{1/2} \phi(2^s \alpha_n t - k) \\ \psi_{k,s}^n(t) &= (2^s \alpha_n)^{1/2} \psi(2^s \alpha_n t - k) \end{aligned} \quad (8.15)$$

由于  $1/2 < \alpha_n < 1$ , 从而可以得到:

$$\begin{cases} \text{supp } \phi_{k,s} \subset \text{supp } \phi_{k,s}^n \subset \text{supp } \phi_{k,s-1}^n \\ \text{supp } \psi_{k,s} \subset \text{supp } \psi_{k,s}^n \subset \text{supp } \psi_{k,s-1}^n \end{cases} \quad (8.16)$$

作为式(8.16)的推论,  $\hat{\phi}_{0,0}^n$  和  $\hat{\psi}_{0,0}^n$  的均方根带宽分别比  $\hat{\phi}$  和  $\hat{\psi}$  的带宽窄, 但是比  $\hat{\phi}(2 \cdot)$  和  $\hat{\psi}(2 \cdot)$  的带宽宽。

倍频程间尺度由下列子空间来描述:

$$V_s^n = \text{clos}_{L^2} \{ \phi_{k,s}^n : k \in \mathbf{Z} \} \quad (8.17)$$

显然, 对于每个  $n$ , 这些子空间也构成  $L^2(\mathbf{R})$  的一个多分辨率分析。实际上, 二尺度关系仍然与原尺度函数  $\phi$  的二尺度关系相同, 具有二尺度序列  $\{g_0[k]\}$ , 即

$$\phi_{0,s}^n(t) = \sum_k g_0[k] \phi_{k,s}^n\left(2t - \frac{k}{\alpha_n}\right) \quad (8.18)$$

也容易知道  $\psi_{k,s}^n$  正交于  $V_s^n$ , 对于  $s \in \mathbf{Z}$  确实有:

$$\langle \phi_{l,s}^n, \psi_{k,s}^n \rangle = \langle \phi_{l,s}, \psi_{k,s} \rangle = 0, \quad l, k \in \mathbf{Z} \quad (8.19)$$

因此, 空间

$$W_s^n = \text{clos}_{L^2} \{ \psi_{k,s}^n : k \in \mathbf{Z} \} \quad (8.20)$$

是多分辨率分析空间  $V_{s,n}$  的正交补子空间。此外, 类似于式(8.18),  $\psi_{0,s}^n$  和  $\phi_0^{s,n}$  的二尺度关系仍然与  $\psi$  和  $\phi$  的二尺度关系相同, 即

$$\psi_{0,s}^n(t) = \sum_k g_1[k] \psi_{k,s}^n\left(2t - \frac{k}{\alpha_n}\right) \quad (8.21)$$

因为  $(\{g_0[k]\}, \{g_1[k]\})$  对于任何倍频程间尺度保持不变, 所以计算积分小波变换在  $(k/2^s \alpha_n, 1/2^s \alpha_n)$  处的值能够使用同样的实现策略, 如图 7.11 所示。然而, 仍存在两个问题。首先, 我们需要将  $x_M$  映入  $V_{M,n}$ ; 其次, 我们必须计算积分小波变换在  $(k/2^M \alpha_n, 1/2^s \alpha_n)$  处的值, 用  $(k/2^M \alpha_n, 1/2^s \alpha_n)$  去代替较粗网格  $(k/2^s \alpha_n, 1/2^s \alpha_n)$ 。

让我们首先考虑第二个问题。假设  $x_M^n \in V_M^n$  已经被确定, 则对某些序列  $\{a_{k,M}^n\}$  和  $\{\tilde{a}_{k,M}^n\} \in l^2$  可以得到:

$$x_M^n = \sum_k a_{k,M}^n \phi(2^M \alpha_n t - k) = \sum_k \tilde{a}_{k,M}^n \tilde{\phi}(2^M \alpha_n t - k) \quad (8.22)$$

根据图 7.11 描述的分解算法得到:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{k,s}^n &= (2^s \alpha_n)^{1/2} \langle x_M^n, \psi_{k,s}^n \rangle = \\ &= 2^s \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} x_M^n(t) \overline{\psi(2^s \alpha_n t - k)} dt = \end{aligned}$$

$$(2^s \alpha_n)^{1/2} W_\psi x_M^n \left( \frac{k}{2^s \alpha_n}, \frac{1}{2^s \alpha_n} \right) \quad (8.23)$$

现在,根据式(8.13)中的算法,对于任意固定的 $n$ ,关于每个倍频程间尺度沿时间轴也能够保持同样的时间分辨率,更确切地,通过引进记号:

$$\tilde{w}_s^n = \{\tilde{w}_{k2^{s-M},s}^n\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ 和 } \tilde{a}_s^n = \{\tilde{a}_{k2^{s-M},s}^n\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (8.24)$$

我们可以得到在倍频程间尺度水平计算积分小波变换的算法:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{s-1}^n &= (\sigma^{M-s} \tilde{g}_0) * \tilde{a}_s^n \\ \tilde{w}_{s-1}^n &= (\sigma^{M-s} \tilde{g}_1) * \tilde{a}_s^n \end{aligned} \quad (8.25)$$

其中 $s = M, M-1, \dots, M-M'+1$ 。然而,根据式(8.23)容易知道,对每个固定的 $n$ 时间分辨率是 $1/2^M \alpha_n$ ,它比原倍频程尺度时间分辨率 $1/2^M$ 低。正如在第7章所讨论过的标准(金字塔)分解算法达到的最高时间分辨率是 $1/2^{M-1}$ ,应该指出倍频程间尺度沿时间轴的位置不同于原倍频程水平(即不能得到矩形时间—尺度网格)(参见图8.4)。式(8.25)的原理图如图8.3所示。如果式(8.14)中的指标 $n$ 从0开始,则 $n=0$ 对应于原始倍频程水平。对于 $s = M-1, M-2, M-3$ ,和 $N=2$ 以及 $n=0, \dots, 3$ ,图8.4给出了典型的时间—尺度网格。

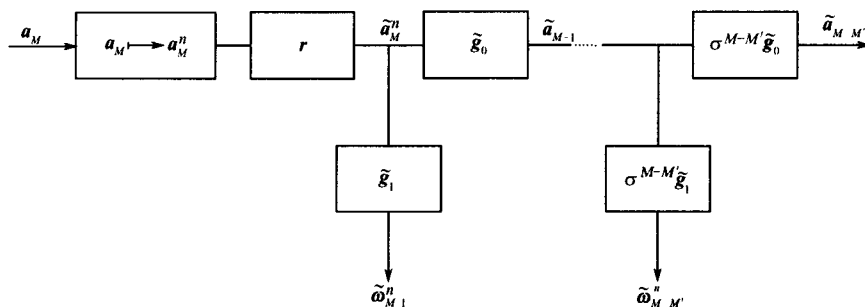


图 8.3 较细时间—尺度分辨率的小波分解过程(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6]重印)

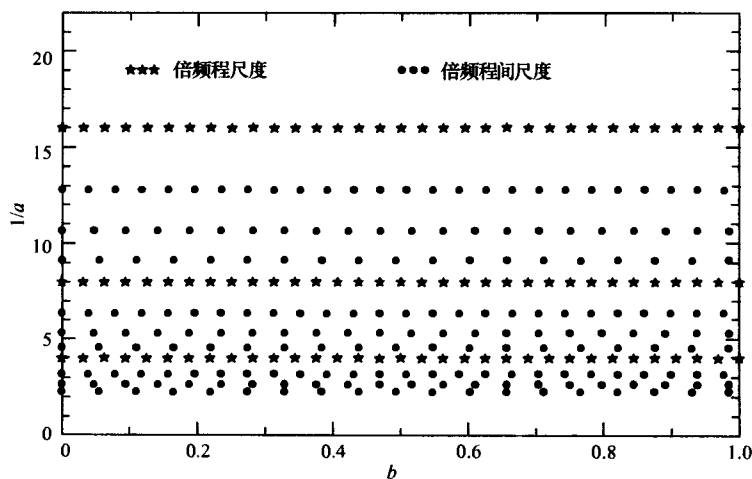


图 8.4 利用图 8.3 所述方案得到的时间—尺度网格(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6]重印)

### 8.3 函数映射到倍频程间的逼近子空间

现在,让我们回到将  $x_M$  映射为  $x_M^n$  的第一个问题,因为  $V_M \neq V_M^n$ ,一般情况下不能期望有  $x_M^n = x_M$ 。但是,如果多分辨分析空间  $\{V_s\}$  局部包含最高阶为  $m$  的所有多项式,这是指对于每个  $l, 0 \leq l \leq m-1$ :

$$t^l = \sum_k a_{l,k} \phi(t-k) \quad (8.26)$$

上式对某个序列  $\{a_{l,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  点态收敛,显然  $\{V_s^n\}$  具有同样的性质,所以倍频程间尺度小波  $\psi_{l,s}^n$  的消失矩性质与原来的  $\psi$  是相同的。因此构造映射  $x_M$  到  $x_M^n$  时必须保证这个变换保持最高阶  $m$  的所有多项式。对线性样条的情形,由于函数在线性样条表示中的系数是适当位置的函数值,此时这个映射容易得到。

根据  $N_2(2^M t)$  和  $N_2(2^M \alpha_n t)$  的对称点可以得到中心平移  $\xi$  的大小(参见图 8.5):

$$\xi = \frac{1}{2^M} \left( \frac{1}{\alpha_n} - 1 \right) = \frac{n}{2^{M+N}} \quad (8.27)$$

所以  $a_{0,M}^n$  为

$$a_{0,M}^n = (1 - 2^M \xi) a_{0,M} + 2^M \xi a_{1,M} \quad (8.28)$$

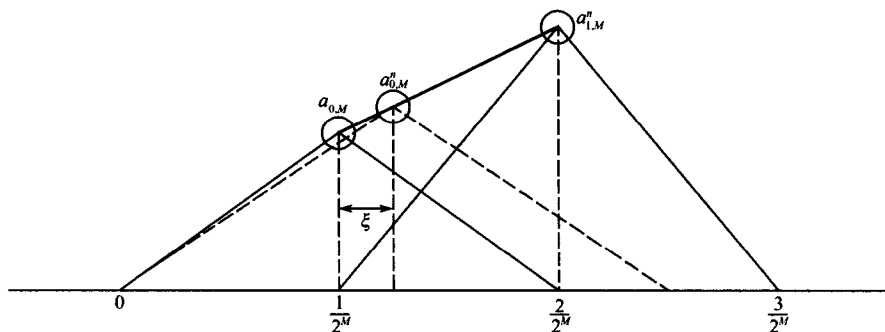


图 8.5  $\{a_{k,M}\}$  映射到  $\{a_{k,M}^n\}$  (经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6] 重印)

但是,如果  $a_M$  最低的指标不是 0,则  $a_M^n$  与  $a_M$  将会以不同的指标开始。为了说明这种情况,假设  $x(t)$  已经被离散化,从  $t = 4.25$  开始并且以 0.25 作为步长(映射到  $V_2$  空间),则对于  $n = 1$  和  $N = 2\alpha_n = 4/5$ ,可以得到:

$$x_2(t) = \sum_k a_{k,2} N_2(2^2 t - k) = \sum_k a_{k,2}^1 N_2\left(\frac{16}{5} t - k\right) \quad (8.29)$$

从图 8.6 容易知道  $a_2^1$  与  $a_2$  以不同的指标开始,并且  $a_{k,2}^1$  中的一些系数将与  $c_{l,2}$  重合,下一个指标  $c_{k+1,2}^1$  则位于  $c_{k+1,2}$  与  $c_{k+2,2}$  之间。

考虑上面所有的点,按照下面的步骤能够从  $a_M$  得到  $a_M^n$ :

- (1) 基于给出的离散化函数数据确定  $a_M^n$  的开始指标,设其为  $a_{i,M}^n$ ;
- (2) 设  $a_{i,M}^n$  位于  $a_{s,M}$  与  $a_{s+1,M}$  之间;



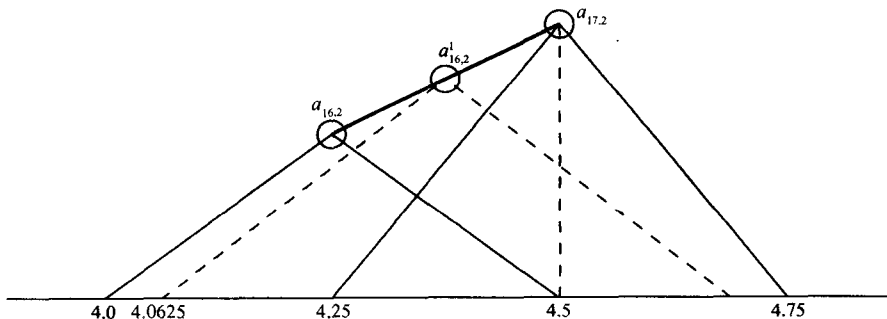


图 8.6 当  $\{a_{k,M}\}$  从  $k \neq 0$  开始时  $\{a_{k,M}^n\}$  的首项 (经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6] 重印)

(3) 设  $a_{i,M}^n$  是  $a_{s,M}$  向右平移  $\xi$ , 则从  $r = 0$  开始计算:

$$a_{i,M}^n = (1 - 2^M \xi) a_{s+r,M} + 2^M \xi a_{s+1+r,M} \quad (8.30)$$

(4) 给  $i$  和  $s$  增加 1 而给  $\xi$  增加  $n/2^{M+N}$ ;

(5) 重复第 3 步和第 4 步直到  $1 - 2^M \xi < 0$ . 当  $1 - 2^M \xi < 0$  时, 给  $r$  增加 1 并重新设  $\xi$  为  $n/2^{M+N}$ . 给  $i$  和  $s$  增加 1;

(6) 重复第 3 步和第 5 步直到  $a_{s+1+r,M}$  取到  $a_M$  的最后指标。

对于一般情形,  $x_M$  到  $x_M^n$  的映射能够根据 5.6 节和 7.2 节描述的方法得到。例如, 为了应用线性样条插值算法或三次样条插值算法, 我们必须计算函数值  $x_M(k/2^M \alpha_n)$  或  $x_M(k/2^{M-1} \alpha_n)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 利用任何样条估计策略很容易确定这些值, 更精确地我们有下列结果:

(1) 对于  $m = 2$  (线性样条), 显然有:

$$x_M^n(t) = \sum_k a_{k,M}^n N_2(2^M \alpha_n t - k) \quad (8.31)$$

其中

$$a_{k,M}^n = x_M\left(\frac{k+1}{2^M \alpha_n}\right)$$

(2) 对于  $m = 4$  (三次样条), 可以得到:

$$x_M^n(t) = \sum_k a_{k,M}^n N_4(2^M \alpha_n t - k) \quad (8.32)$$

其中

$$a_{k,M}^n = \sum_{n=k-2}^{k+6} v_{k+2-2n} x_M\left(\frac{n}{2^{M-1} \alpha_n}\right) \quad (8.33)$$

加权序列  $\{v_n\}$  已经在 5.6 节中给出。最后, 对于倍频程间尺度算法式 (8.19), 为了从  $\{a_{k,M}^n\}$  得到输入系数序列  $\{\tilde{a}_{k,M}^n\}$ , 我们使用了与式 (7.47) 相同的基变换序列  $r$ 。

## 8.4 例子

在这一节我们将给出一些例子来说明本章讨论的快速积分小波变换算法, 用图形说明中心积分小波变换 (CIWT)。关于样条小波  $\psi_m$  其定义为

$$W_{\psi_m} f(b, a) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_m\left(\frac{t-b}{a} + t^*\right)} dt \quad (8.34)$$

其中

$$t^* = \frac{2m-1}{2} \quad (8.35)$$

由于样条小波关于原点不是对称的,从而由式(4.32)定义的积分小波变换无法指出函数不连续的确切位置,而中心积分小波变换将积分小波变换在时间轴的位置向右平移  $at^*$  解决了这个问题。

函数的积分小波变换给出了局部时间—尺度信息,为了得到时间—频率信息我们必须将尺度参数映射为频率,这没有一般的方法。但是,作为最初的近似可以考虑下列映射:

$$a \rightarrow f = \frac{c}{a} \quad (8.36)$$

式中  $c > 0$  是调节常数。本书中基于第4章所定义的小波  $\hat{\psi}(\omega)$  的单边中心( $\omega_+^*$ )和单边半径( $\Delta_{\psi_+}^*$ ),常数  $c$  已经被确定。

对于三次样条小波,可以得到  $\omega_+^* = 5.164$  和  $\Delta_{\psi_+}^* = 0.931$ ,线性样条小波所对应的值分别为 5.332 和 2.360。基于这些参数,对于三次样条选择  $c$  的值为 1.1,而对于线性样条选择  $c$  的值为 1.5。重要的是应该指出  $c$  的这些值并不适合于所有情形,在这个方向做进一步的研究是需要的,我们通过选取  $\hat{\psi}(\omega)$  较低的截断频率来选择  $c$ 。

#### 8.4.1 线性函数的积分小波变换

为了对本章方法得到的结果与计算式(8.34)中的积分所得结果进行比较,首先取线性函数而其斜率的变化如图 8.7 所示。以步长 0.25 对函数进行采样,因此,对线性样条而言,这意味着将函数映入到  $V_2$  中,而对于三次样条来说,函数被映入到  $V_3$  中。我们选择  $N = 1$ ,在两个连续的倍频程之间给出了另外一个尺度。从图 8.8 和图 8.9 容易知道,对于倍频程水平来说,从快速积分小波变换算法得到的小波系数与直接求积分所得的小波系数是相同的,但对于倍频程间水平来说,所得结果有一定的误差。

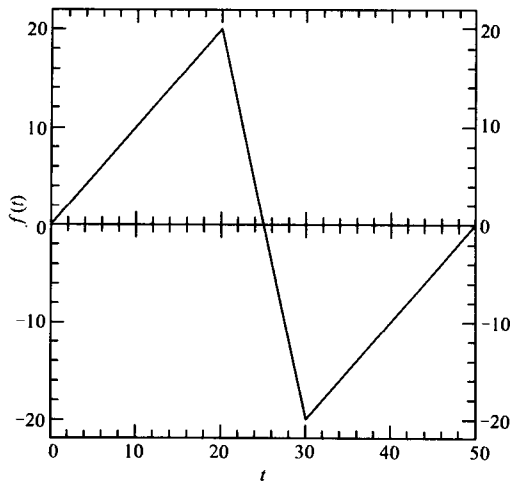


图 8.7 小波变换如图 8.8 ~ 图 8.10 所示的线性函数(经 IEEE 同意允许从文献[8]重印)

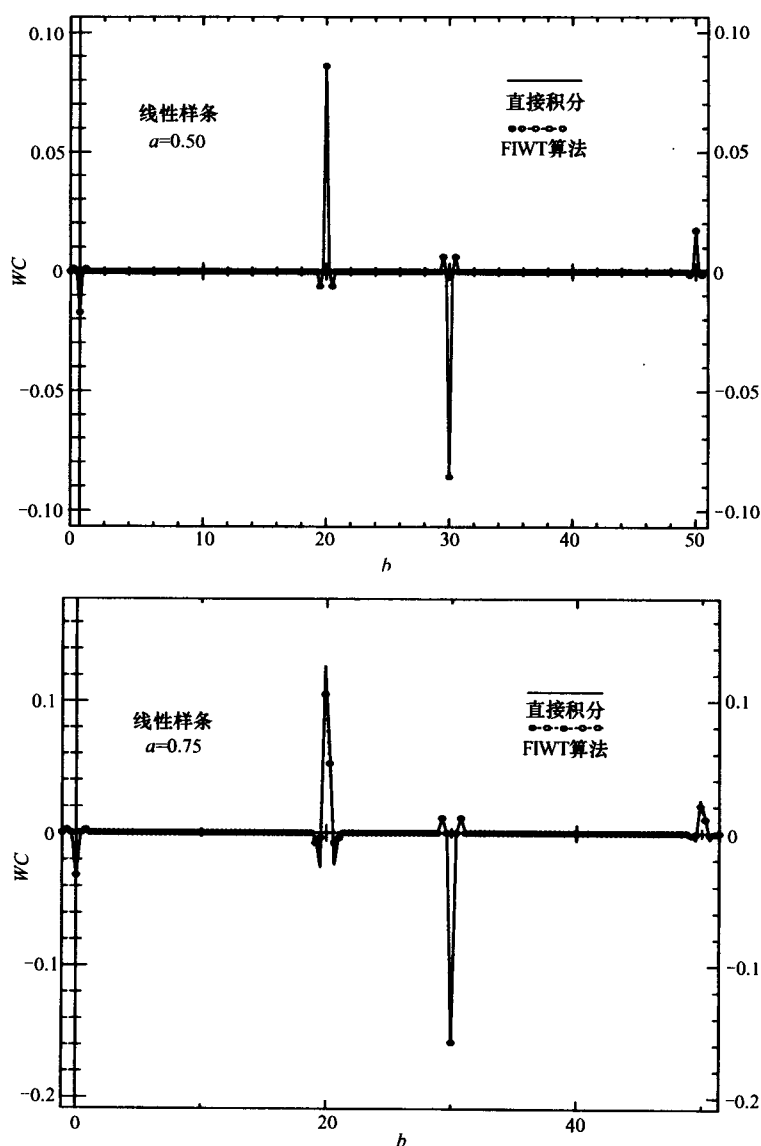


图 8.8 图 8.7 所示函数的积分小波变换,所用小波为  $a = 0.50$  和  $a = 0.75$  时的线性样条小波,以及对  $f_2(t)$  直接计算积分的结果(经 IEEE 同意允许从文献[8]重印)

根据图 8.8 和图 8.9 容易看出矩性质的重要性。在线性和三次样条的情形下,当小波完全位于函数的光滑域区域内时,函数的线性导致小波系数接近于 0;当函数斜率变化时小波系数具有较大的幅度;在  $t = 0$  与  $t = 50$  附近产生边界效应,在边界附近利用特殊小波能够避免边界效应,这种边界小波将在第 10 章中讨论。如果用积分小波变换代替中心积分小波变换,则整个图形将向左移动而且对于较低水平移动将连续变大。图 8.8 和图

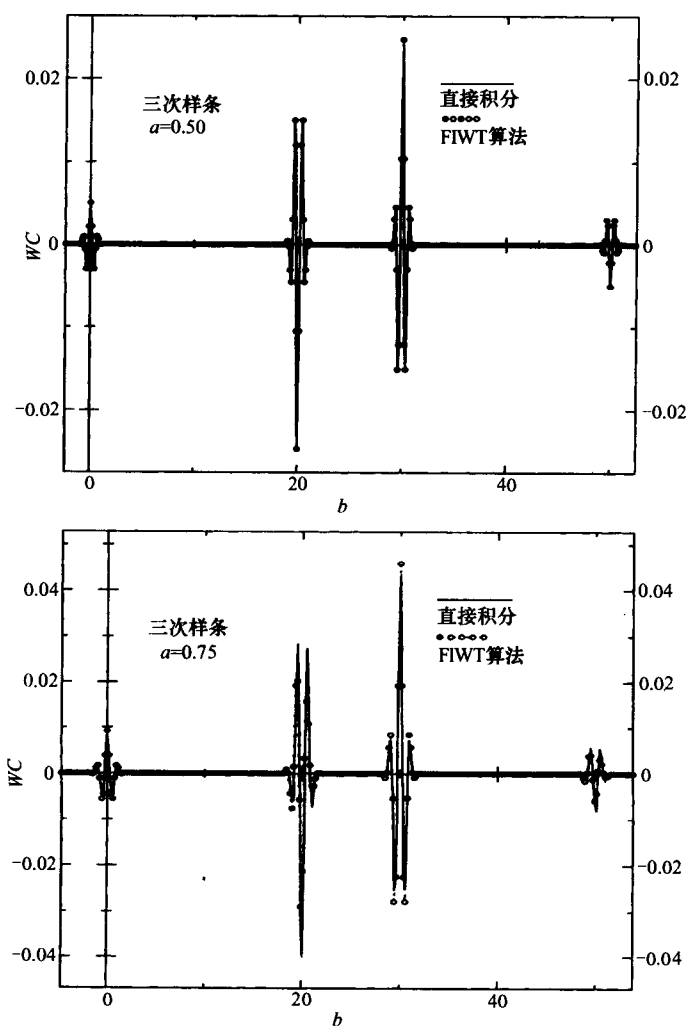


图 8.9 图 8.7 所示函数的积分小波变换,所用小波为  $a = 0.50$  和  $a = 0.75$  时的三次样条小波,以及对  $f_3(t)$  直接计算积分的结果(经 IEEE 同意允许从文献[8]重印)

8.9 是对  $f_2(t)$  和  $f_3(t)$  直接计算式(8.34)的积分结果,图 8.10 是对  $f_{3,1}(t)$  直接计算式(8.34)的积分结果,这些表明在倍频程间水平快速积分小波变换算法给出的结果与相应近似函数所给结果相同。

在图 8.9 中计算了 440 个小波系数,直接积分占用 CPU 的时间大约是快速积分小波变换算法的 300 倍。由于随着尺度参数  $a$  的增大,直接积分法的复杂性将会指数增长,但对于快速积分小波变换来说计算复杂性几乎保持不变,因此 300 : 1 的比率是最小的。此外,在基于 FFT 的算法中,随着  $a$  的增大复杂性也会增加。

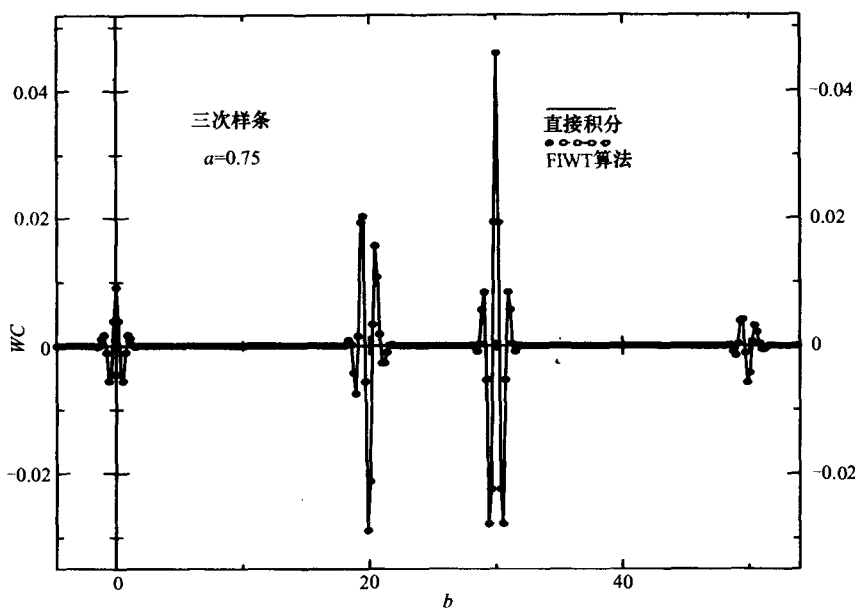


图 8.10 图 8.7 所示函数的积分小波变换,所用小波为  $a = 0.75$  时的三次样条小波。对  $f_{3,1}(t)$  直接计算积分的结果,图 8.7 所示函数在  $s = 3, n = N = 1$  的近似(经 IEEE 同意允许从文献[8]重印)

#### 8.4.2 裂缝检测

积分小波变换在识别函数的奇异性中是非常重要的,作为进一步的例子,我们考虑下面的函数。对于  $y = 2t - 1$

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{3}{117}y(4y^2 + 16y + 13), & t \in [0, 1/2] \\ -\frac{1}{6}y(y-1)(y-2), & t \in (1/2, 1] \end{cases} \quad (8.37)$$

函数及其对于线性和三次样条情形的小波系数如图 8.11 所示,图中没有显示边界效应。在这里我们再次看到:对于三次样条,在函数光滑的区域内小波系数接近于 0;但对于线性样条,在该区域内小波系数非 0,这是因为函数在这两个区间内是三次的。这个例子说明即使物理上未引起注意的不连续性,使用小波变换也能够被检测到。

#### 8.4.3 非倍频程频率成分信号的分解

为了进一步强调快速积分小波变换算法的重要性,考虑类似于在第 7 章中使用过的组合函数,但具有稍微不同的频率,这些频率没有与倍频程尺度形成对应。图 8.12 和图 8.13 说明第 7 章中介绍的标准算法无法分离这些频率;另一方面,图 8.14 和图 8.15 说明通过适当选择  $n$  和  $N$  的值,我们能够分离任何所期望的频率带。

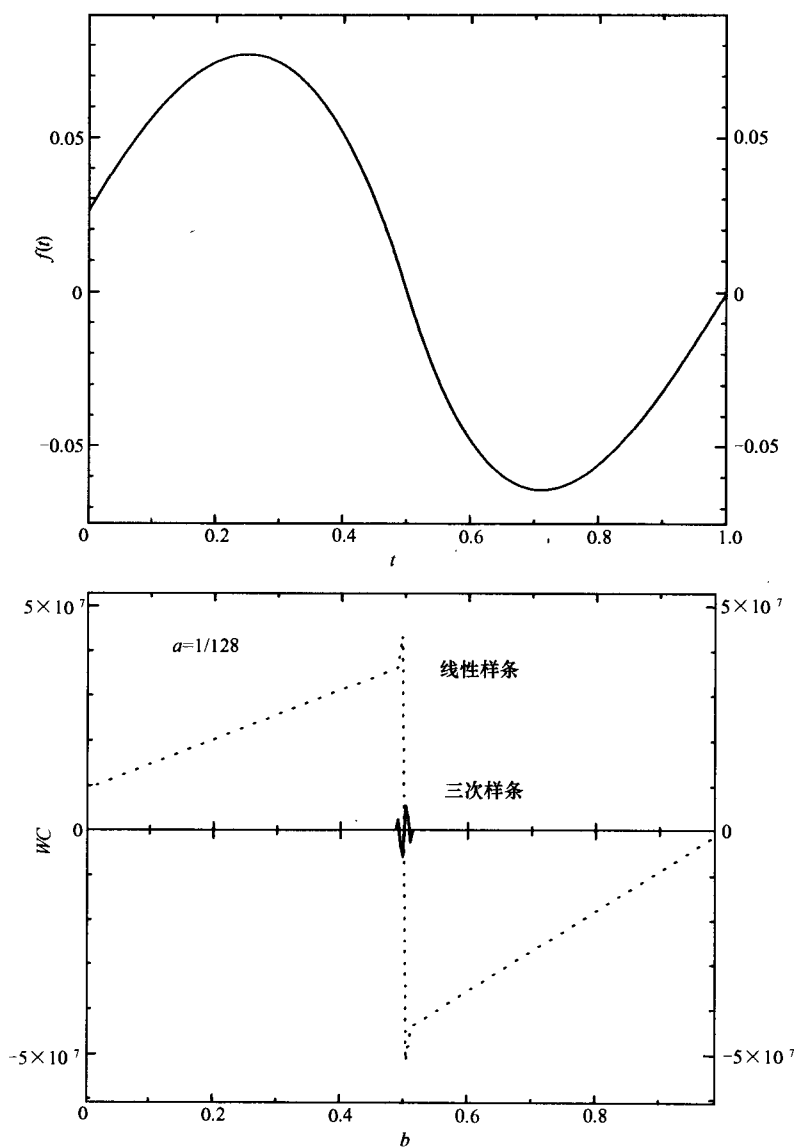


图 8.11 式(8.37) 所给函数及其积分小波变换,所用小波为  $a = 1/128$  时的线性与三次样条小波(经 IEEE 同意允许从文献[8] 重印)

#### 8.4.4 扰动正弦信号

图 8.16 给出了函数的时间—频率表示,该函数由两个正弦函数和两个  $\delta$  函数构成, $\delta$  函数表示某些数据中峰值的变化。从图中可以看到,两个正弦曲线表现为平行于时间轴的两个频带,而  $\delta$  函数表现为平行于频率轴的两个垂直频带,如同在第 4 章所讨论的一样,小波的有限窗宽造成频率展开。

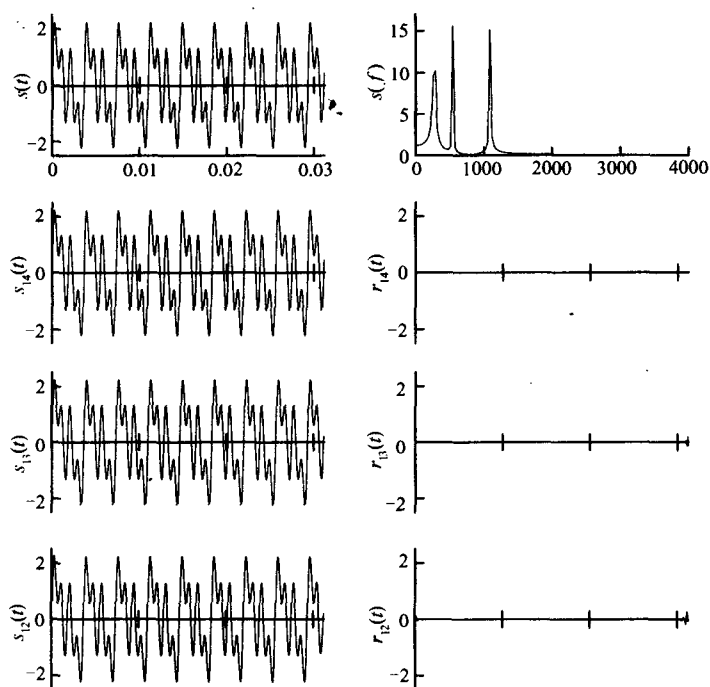


图 8.12 利用第 6 章的标准算法对信号所进行的分解,信号由对应于非倍频程尺度的 3 个不同频率的正弦曲线构成(经 Plenum Press 同意允许从文献[7] 重印)

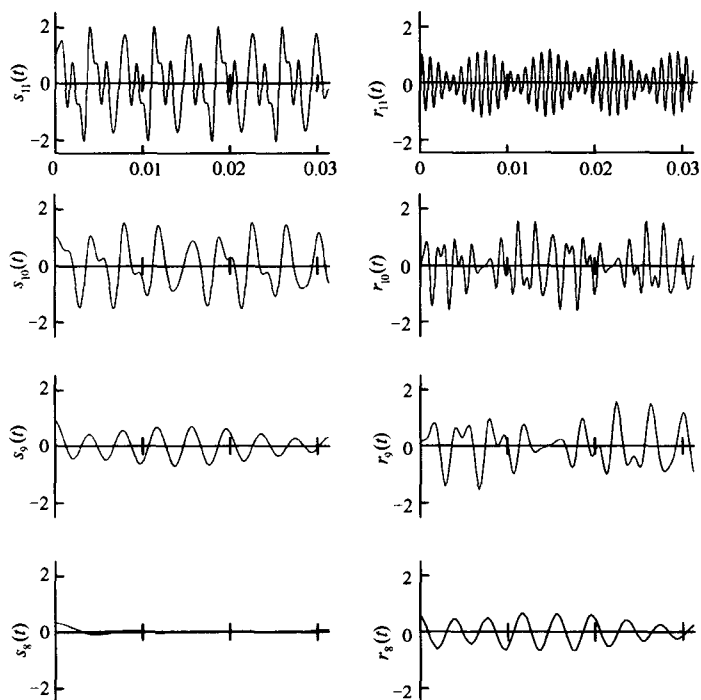


图 8.13 3 个频率成分信号的分解(上接图 8.12)(经 Plenum Press 同意允许从文献[7] 重印)

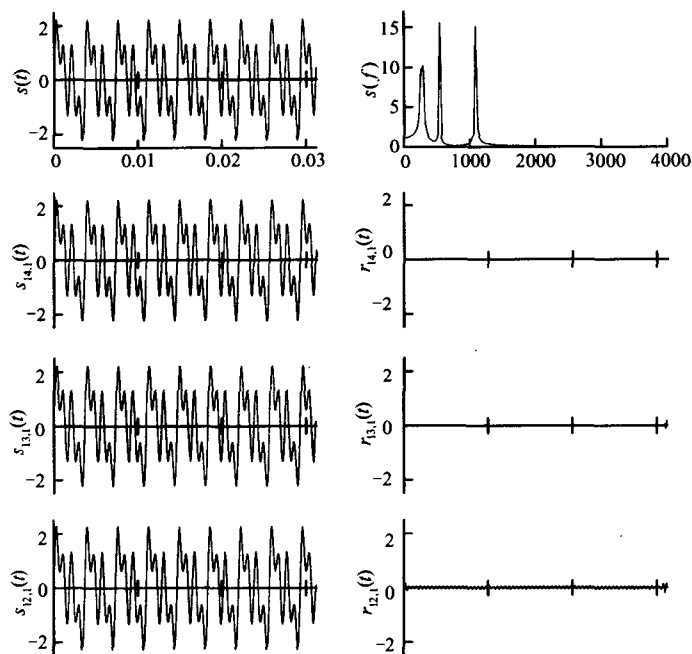


图 8.14 用  $n = 1$  和  $N = 2$  的快速积分小波变换算法对信号的分解, 信号由对应于非倍频程尺度的 3 个不同频率的正弦曲线构成 (经 Plenum Press 同意允许从文献[7] 重印)

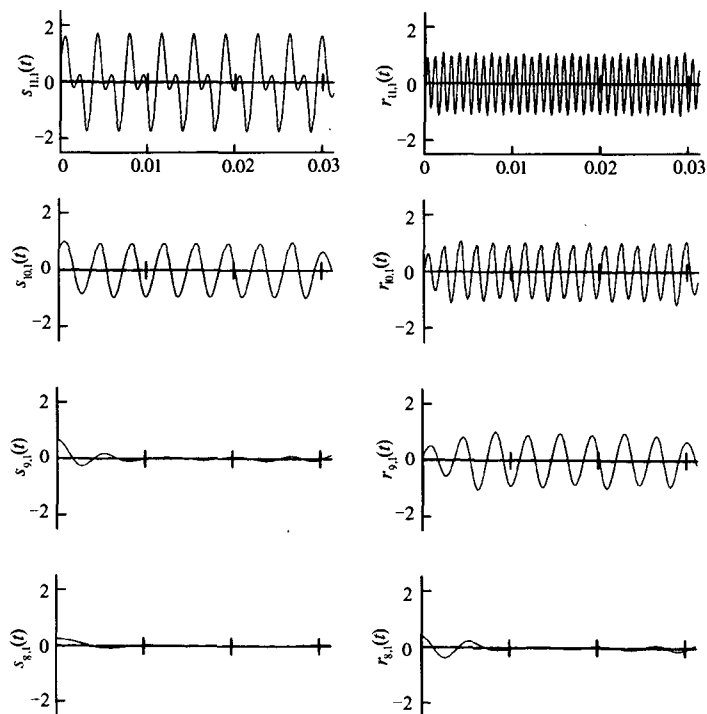


图 8.15 3 个频率成分信号的分解 (上接图 8.14) (经 Plenum Press 同意允许从文献[7] 重印)



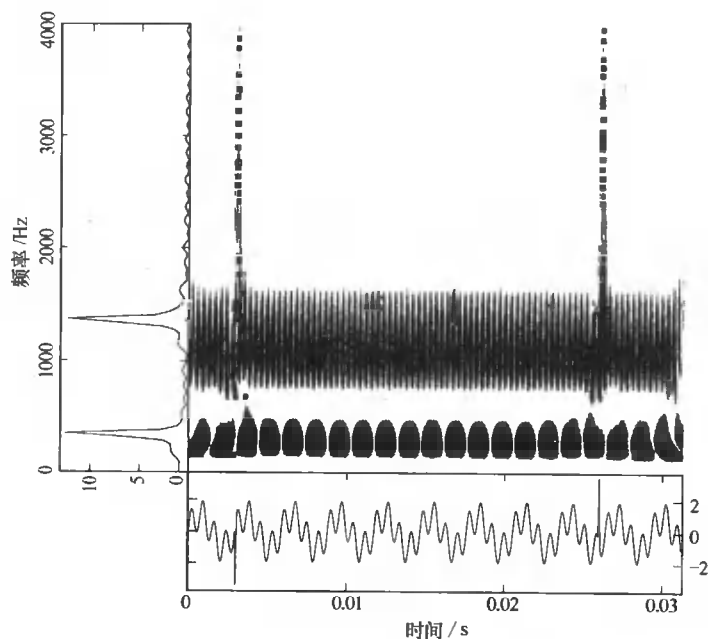


图 8.16 带有一些扰动数据(三次样条)组合信号的中心积分小波变换

#### 8.4.5 线性调频信号

关于线性与三次样条小波,线性调频信号的中心积分小波变换分别如图 8.17 和图 8.18 所示。图 8.19 显示了用标准小波分解算法对线性调频信号所进行的中心积分小波变换,其中倍频程间尺度已经被先前倍频程尺度上的值所充满,类似地时间轴上的“洞”也被先前位置上的值所充满。

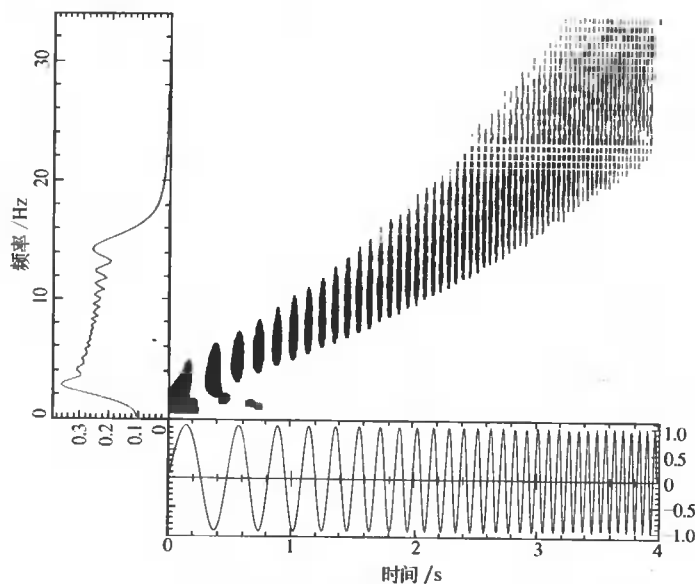


图 8.17 线性调频信号(线性样条)的中心积分小波变换(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6]重印)

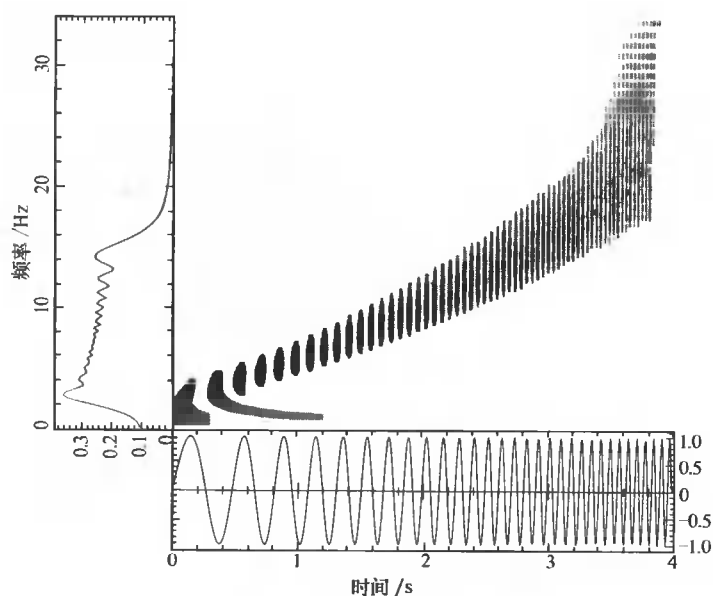


图 8.18 线性调频信号(三次样条)的中心积分小波变换  
(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6] 重印)

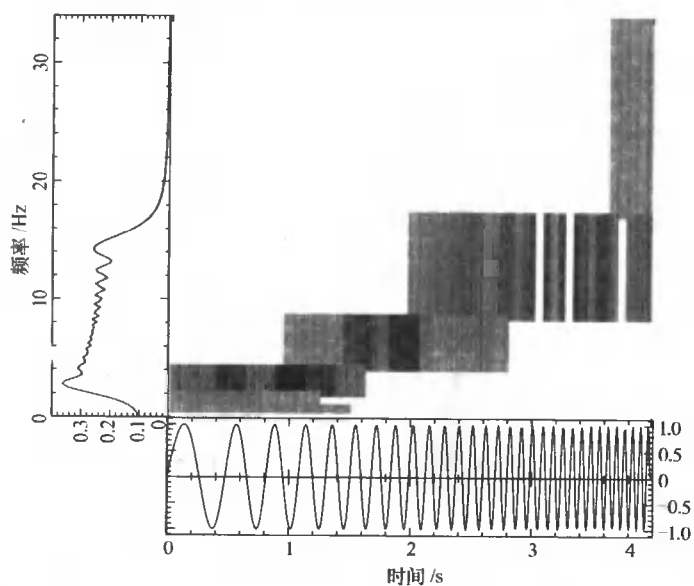


图 8.19 用标准小波分析算法(三次样条)对线性调频信号的中心积分小波变换

#### 8.4.6 带噪声音乐信号

假设音乐数据位于整数点上,利用三次样条小波作为分析小波,在图 8.20 中说明了部分带有加性噪声音乐信号的中心积分小波变换。

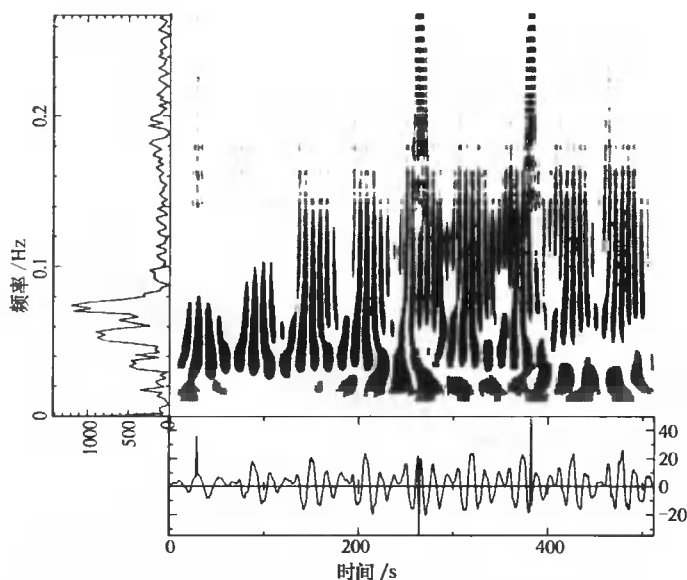


图 8.20 带有加性噪声(三次样条) 音乐信号的中心积分小波变换  
(经 Springer-Verlag 同意允许从文献[6] 重印)

#### 8.4.7 波导模式的扩散性

作为最后一个例子,我们给出 X 频带矩形波导传输系数实验数据的小波变换。通过波导宽边中心插入的同轴线探针激发波导,输入频率从 2GHz 到 17GHz,利用 HP-8510 网络分析仪测量波导的扩散参数  $S_{21}$ ,时间域波形通过对频率域数据进行逆傅里叶变换来得到,时间响应(最多相差一个常数倍)和频率响应的幅值(dB) 如图 8.21 所示。值得注意

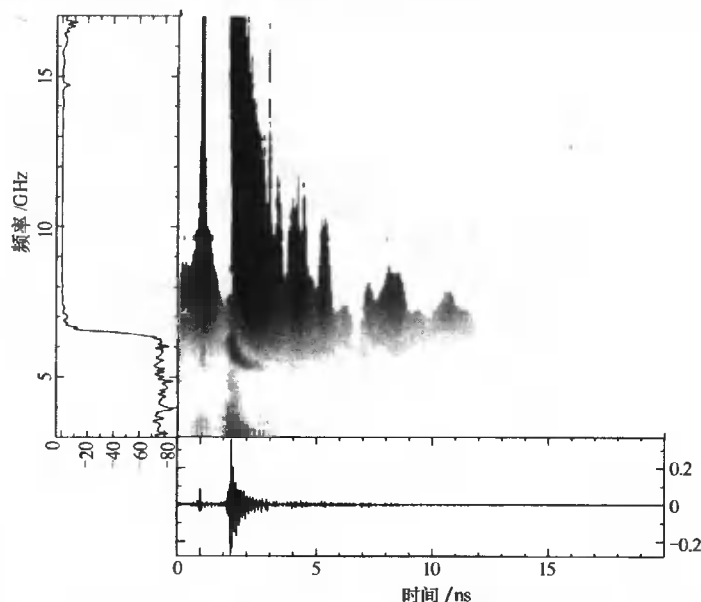


图 8.21 X 频带矩形波导(三次样条) 传输系数实验数据的中心积分小波变换  
(经 IEEE 同意允许从文献[8] 重印)

的是有几个低幅值脉冲出现在负的时间轴,但说明小波分解时没有考虑它们,这是由于它们代表了一些不希望的信号而且通过取适当的阈值能够从图形中将其消除。此外,小波分析的局部化特性使得这样的删除对于图 8. 21 中小波系数的图形没有任何明显的影响。

根据其时间 — 频率图形能够更好地观察主峰  $TE_{10}$  的截断频率和扩散特性。因为波导的尺寸与激励,邻近较高阶的退化模式是  $TE_{11}$  和  $TM_{11}$ ,具有截断频率 16. 156GHz,这些在图形中没有出现。图形表明某些传输发生在低频运算下,在  $t = 0$  有一个包含所有频率成分的短脉冲而且几乎没有扩散,这些被认为是由系统噪声所造成的,没有进一步去尝试分离实验中不同变换的影响。图 8. 21 中的阈值由每个频率的局部最大值与整体最大值的相对幅值(dB) 来确定。最后,小波系数的幅值已经被映射为 8bit 灰度级水平,连续小波变换对电磁扩散数据进一步的应用,读者可以参考文献[9,10]。

### 参 考 文 献

- [1] L. G. Weiss. Wavelets and Wideband Correlation Processing, IEEE Signal Process. Magazine, pp. 13-32, January 1994.
- [2] O. Rioul and P. Duhamel. Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms, IEEE Trans. Inform. Theory, 38, pp. 569-586, March 1992.
- [3] M. J. Shensa. The Discrete Wavelet Transform; Wedding the À Trous and Mallat Algorithms, IEEE Trans. Signal Process. , 40, pp. 2464-2482, October 1992.
- [4] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, and J. Morlet. Reading and Understanding Continuous Wavelet Transform, in Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space, J. N. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian (Eds.), Berlin: Springer-Verlag, 1989, pp. 2-20.
- [5] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Ser. Appl. Math. 61. Philadelphia; SIAM, 1992.
- [6] C. K. Chui, J. C. Goswami, and A. K. Chan. Fast Integral Wavelet Transform on a Dense Set of Time-Scale Domain, Numer. Math. , 70, pp. 283-302, 1995.
- [7] J. C. Goswami, A. K. Chan, and C. K. Chui. On a Spline-Based Fast Integral Wavelet Transform Algorithm, in Ultra-Wideband Short Pulse Electromagnetics 2, H. L. Bertoni, L. Carin, L. B. Felsen, and S. U. Pillai (Eds.). New York: Plenum Press, 1995, pp. 455-463.
- [8] J. C. Goswami, A. K. Chan, and C. K. Chui. An Application of Fast Integral Wavelet Transform to Waveguide Mode Identification, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. , 43, pp. 655-663, March 1995.
- [9] H. Kim and H. Ling. Wavelet analysis of Radar Echo from Finite-Size Target, IEEE Antennas Propag. Magazine, 41, pp. 200-207, February 1993.
- [10] L. Carin and L. B. Felsen. Wave-Oriented Data Processing for Frequency- and Time -Domain Scattering by Nonuniform Truncated Arrays, IEEE Trans. Antennas Propag. Magazine, pp. 29-43, June 1994.

## 第9章 小波在数字信号处理中的应用

将小波引入信号与图像处理为工程师更好地利用以及用创新性的技巧来解决不同的工程问题提供了很灵活的工具。近来,文献所涉及到的的小波信号处理主要集中在利用小波算法处理一维(1-D)和二维(2-D)信号。1-D小波信号处理中通常涉及声学信号、语音信号、音乐信号和瞬变电流信号等,2-D小波信号处理主要涉及图像压缩和目标识别等。研究的问题包括降噪、特征识别、目标探测、信号与图像压缩和抑制干扰等。对于这些领域我们打算给出详细的技巧,也不准备在研究层次上给读者提供处理技巧。这一章主要是给出一些例子来说明信号和图像处理中使用小波的好处和灵活性。

在这些例子中,小波算法与其他处理技巧结合起来对问题产生了满意的解。在应用其他 DSP 技巧之前,利用小波分解将信号的各种成分进行分离是非常重要的。算法包括小波树、小波包树分解、2-D 小波或 2-D 小波包树分解、金字塔或直接分解等。在特征识别和目标探测中,经过处理的信号成分将遭到破坏或者不再使用,相应的重构算法是不必要。在最后两个例子中,小波包之间的正交性被应用于多载波通信系统,并且为了 3-D 医学图像的可视化将小波算法推广到三维情形。在讨论不同的应用举例之前,我们将讨论小波算法到小波包算法的推广及其 2-D 情形。

### 9.1 小波包

因为二尺度关系和尺度参数  $a=2^s$  的选择,小波分解产生了由其频谱构成的连续倍频程频带的信号分量,图 9.1 用图形描述了这个概念。但在某些应用中,小波分解不可能生成充分精细的频谱分辨率以满足问题的要求。一个方法是对尺度  $a$  取很小的增加量,然后利用连续小波变换得到较精细的分辨率,就幅值的阶来说,该方法增加了计算负担。另一种方法在第 8 章中已经讨论过。小波包的使用也有助于避免这个问题,小波包是小波的一般化。重复利用二尺度关系将小波频谱的每个倍频程频带进一步分解为更加精细的频带,换句话说,小波包的发展是频率域中小波的加细并且基于 Daubechies<sup>[1]</sup>(分裂法)所证明的数学定理,该定理叙述如下。

如果  $f(\cdot - k)|_{k \in \mathbf{Z}}$  构成规范正交基,而且

$$F_1(x) = \sum_k g_0[k]f(x-k) \quad (9.1)$$

$$F_2(x) = \sum_k g_1[k]f(x-k) \quad (9.2)$$

则  $\{F_1(\cdot - 2k), F_2(\cdot - 2k); k \in \mathbf{Z}\}$  是  $E = \text{span}\{f(\cdot - n); n \in \mathbf{Z}\}$  的规范正交基。

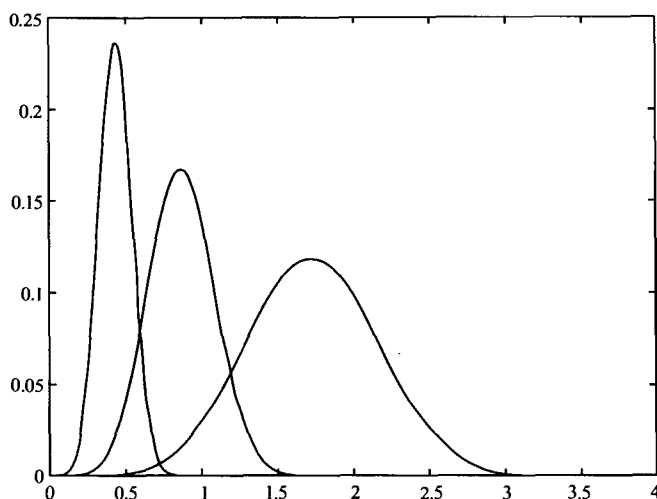


图 9.1 不同分辨率下小波的等 Q 频谱

当  $f$  是尺度函数  $\phi$  时, 因为尺度函数  $\phi$  与小波  $\psi$  的二尺度关系给出:

$$A_j \ni \phi(2^j t) = \sum_k g_0[k] \phi(2^{j+1} t - k)$$

$$W_j \ni \psi(2^j t) = \sum_k g_1[k] \psi(2^{j+1} t - k)$$

这个定理明显是正确的。如果将这个定理应用于  $W_j$  空间, 我们将生成小波包子空间, 生成小波包的一般迭代公式为

$$\mu_{2l}(t) = \sum_k g_0[k] \mu_l(2t - k) \quad (9.3)$$

$$\mu_{2l+1}(t) = \sum_k g_1[k] \mu_l(2t - k), k \in \mathbf{Z} \quad (9.4)$$

式中  $\mu_0 = \phi$  和  $\mu_1 = \psi$  分别是尺度函数与小波。对于  $l = 1$ , 可以得到由小波  $\mu_1 = \psi$  生成的小波包  $\mu_2$  和  $\mu_3$ , 这个过程被重复进行使得很多小波包能够从二尺度关系生成。Haar 函数和  $\phi_{D,3}$  (也表示为  $D_3$ ) 的前 8 个小波包及其频谱如图 9.2 到图 9.5 所示。小波包中每一个的平移构成一个正交基, 而且小波包正交于由一个规范正交尺度函数所生成的同一族内的另外一个。我们能够将信号分解为许多小波包分量。这里应该注意, 对于给定的分辨率水平信号可以由小波包中挑选出来的集合进行表示而不是利用每一个小波包。工程技术人员能够通过优化某个度量 (比如能量、熵、变差等) 来构造选择小波包的算法。最佳基和最佳水平是信号表示的两个通用算法, 读者在文献[2] 中能够找到这些算法。

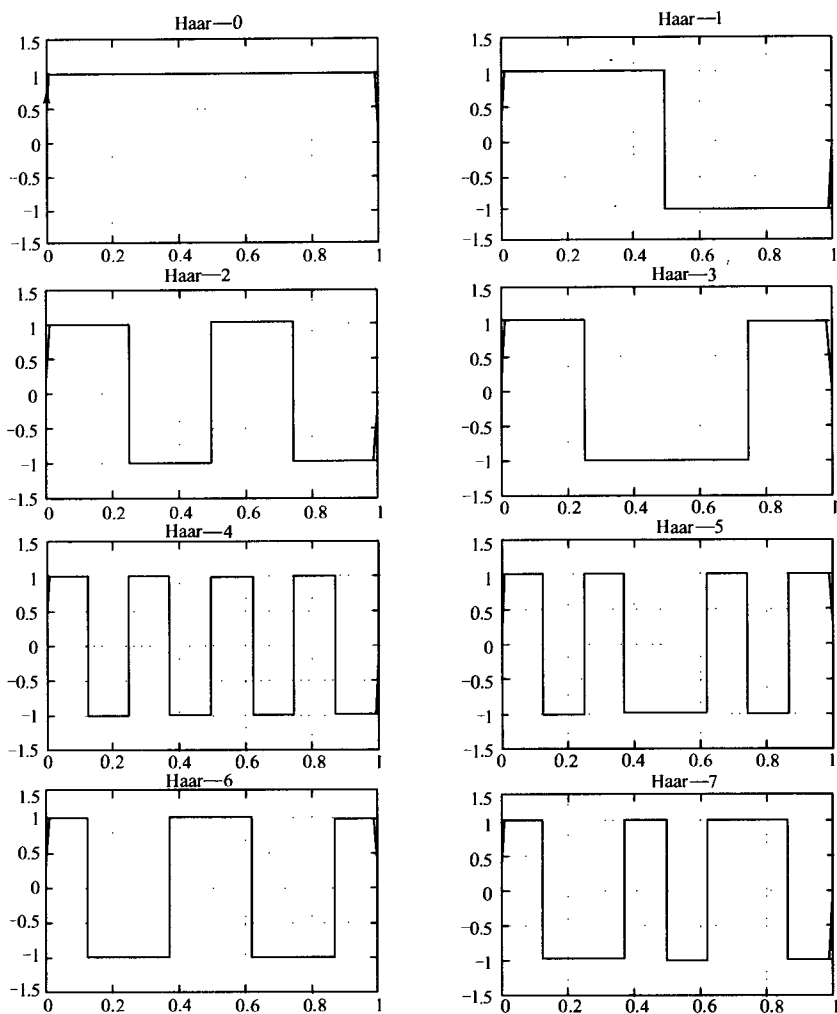


图 9.2 Haar 尺度函数的小波包

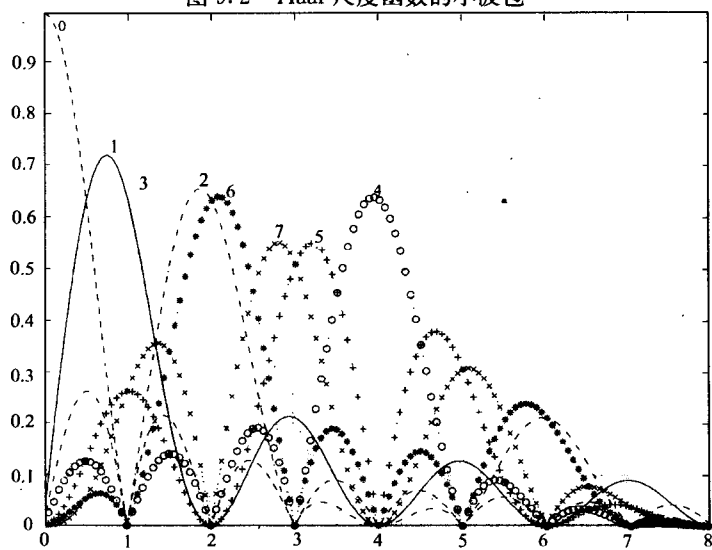


图 9.3 Haar 小波包的幅度频谱

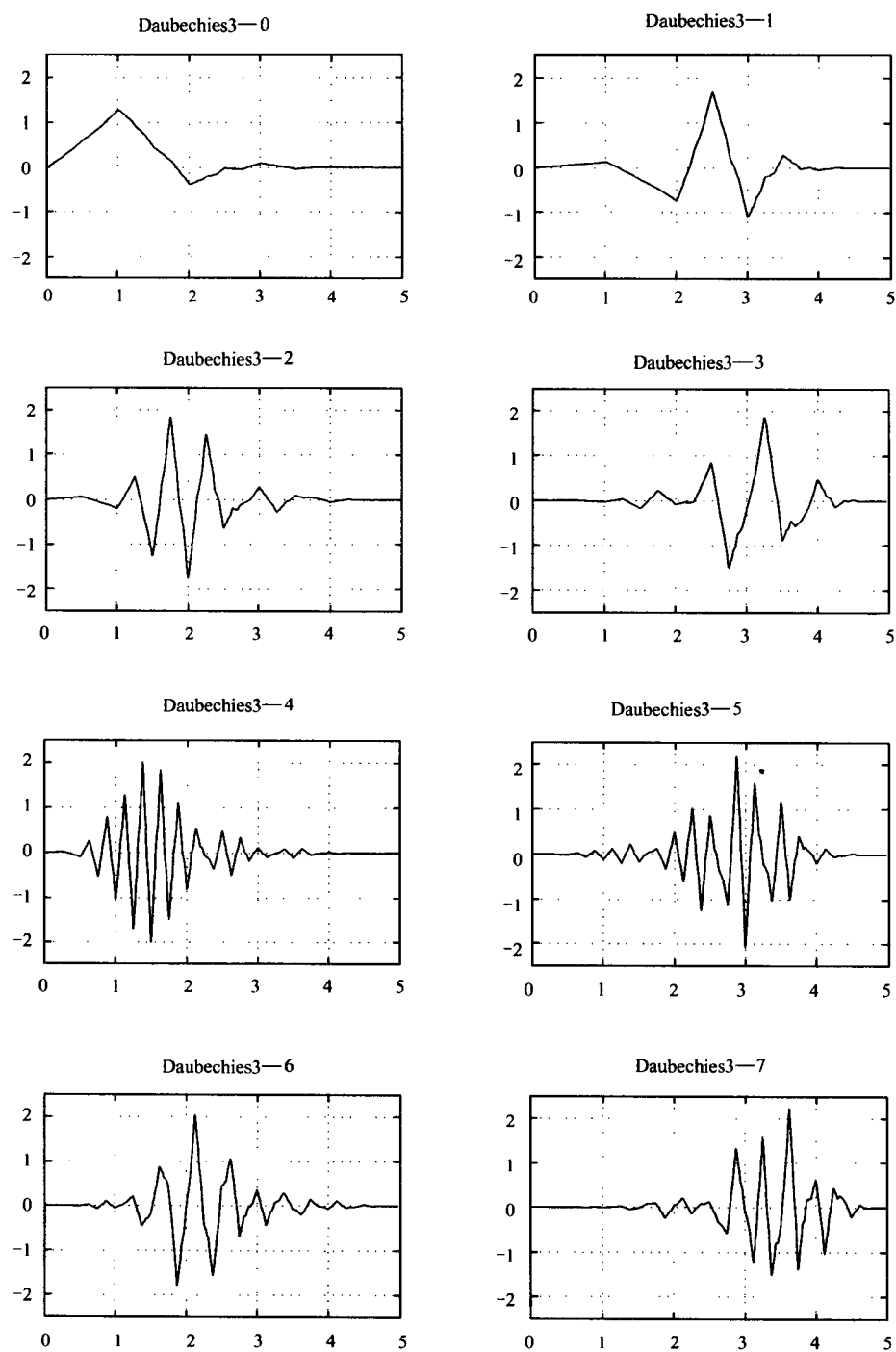


图 9.4 Daubechies3 尺度函数的小波包



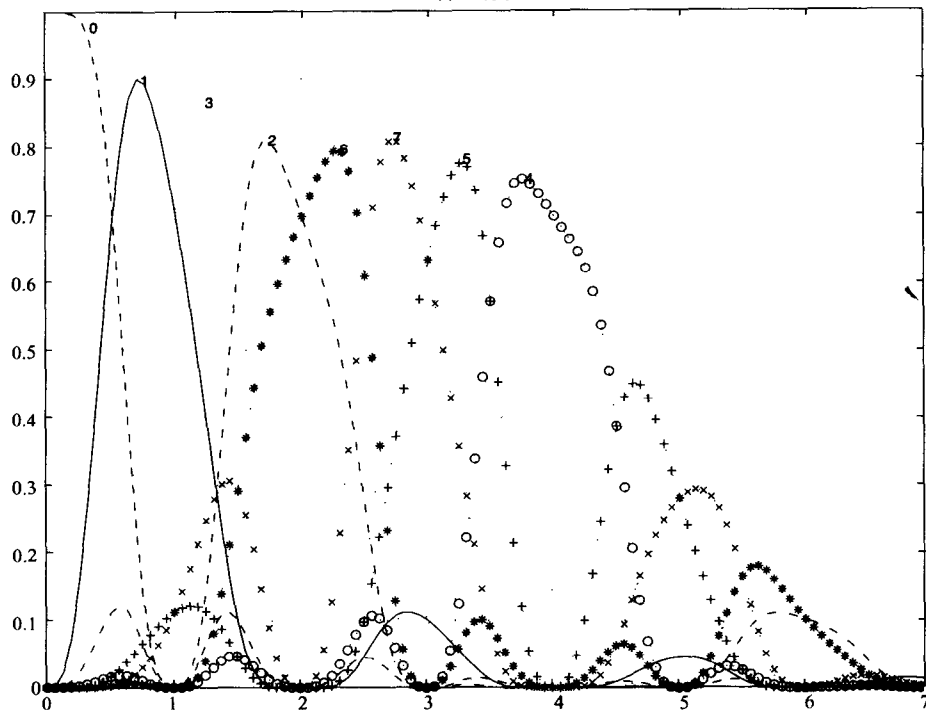


图 9.5 Daubechies3 小波包的幅度频谱

## 9.2 小波包算法

与小波算法相同,小波包分解树使用两个平行滤波通道,具有同样的分解模块,先进行滤波后进行 2 抽取( $\downarrow 2$ ),树中的任何系数集可以由这些模块来处理。在小波分解树中,对于不同分辨率  $s$  图 7.9 中被处理的仅仅是逼近系数集 $\{a\}$ ,而小波系数集 $\{w\}$ 是算法的输出。在小波包分解中,小波系数集 $\{w\}$ 也由同样的模块来处理生成小波包系数集 $\{\pi\}$ 。从图 9.6 知道,对  $N$  个系数的每个集合通过分解模块处理后可以得到长度为  $N/2$  的两个系数集。如果用  $m$  个分辨率来处理原始系数集,则系数集的数目是  $2^m$ ,当  $m = 2$  时的小波包树如图 9.6 所示。

记录分解算法中小波包系数的索引是重要的。为了实现完全重构,若系数集已经由  $h_0[n]$  与 ( $\downarrow 2$ ) 处理,则所得结果应该由  $g_0[n]$  和 ( $\uparrow 2$ ) 来进行处理,对于  $h_1[n]$  和  $g_1[n]$  采用同样的次序。例如,如果我们首先由  $h_0[n]$  和 ( $\downarrow 2$ ) 处理数据集,接着由  $h_1[n]$  和 ( $\downarrow 2$ ) 来处理,得到的信号必须先由 ( $\uparrow 2$ ) 和  $g_1[n]$  处理,然后由 ( $\uparrow 2$ ) 和  $g_0[n]$  进行处理实现完全重构。因此,利用小波包进行信号处理要求准确记录数字滤波器与采样率变化的不同次序。

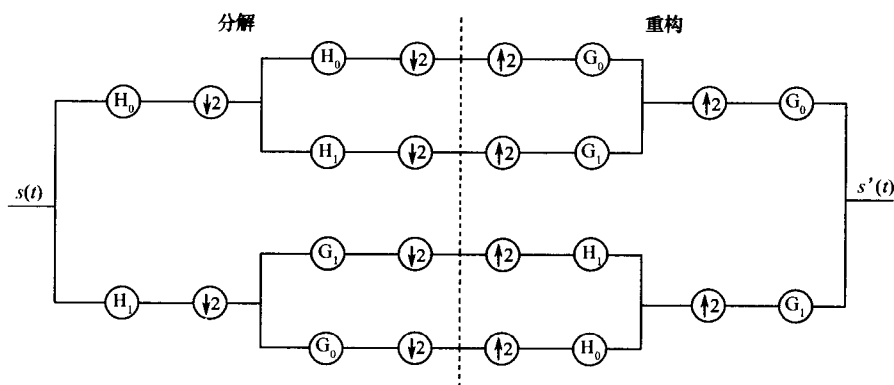


图 9.6 小波包分解与重构框图

## 9.3 阈值处理

阈值处理是小波信号处理中最通用的处理工具之一,它广泛应用于去噪、信号与图像压缩,而且有时也用于信号识别。这里我们考虑 3 个简单的阈值法<sup>[3]</sup>:①硬阈值处理;②软阈值处理;③百分率阈值处理。基于应用来选择阈值处理方法,我们将简单地讨论每一种方法。

### 9.3.1 硬阈值处理

硬阈值通常称为门限值。如果一个信号(或系数)的值低于给定的值,则被设置为 0,即

$$y = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \geq \sigma \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } |x| < \sigma \text{ 时} \end{cases} \quad (9.5)$$

式中, $\sigma$ 是阈值或门限值。硬阈值的图形表示如图 9.7 所示,图形是非线性的且在  $x = \sigma$  不连续。

### 9.3.2 软阈值处理

软阈值被定义为

$$y = \begin{cases} \text{sgn}(x)f(|x| - \sigma), & \text{当 } |x| \geq \sigma \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } |x| < \sigma \text{ 时} \end{cases} \quad (9.6)$$

一般来说函数  $f(x)$  是线性函数(给定斜率的直线,如图 9.8 所示),然而 3 阶或 4 阶样

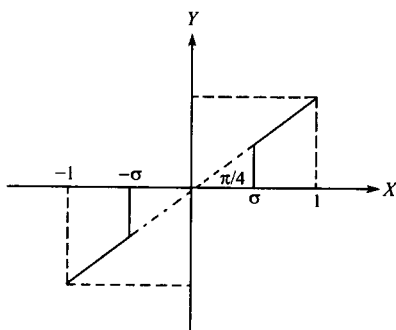


图 9.7 硬阈值处理

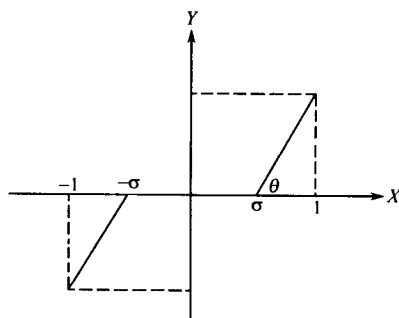


图 9.8 软阈值处理

条曲线可以有效地使用大于  $\sigma$  的加权值。在一些信号压缩中,使用阶数  $m > 2$  的二次样条曲线对压缩率有一定的影响。

### 9.3.3 百分率阈值处理

在某些应用中,比如图像压缩,点的定额已经分配给压缩文件,设置一定比例的小波系数为 0 更加有利于满足定额要求。在这种情况下,阈值  $\sigma$  的设置基于系数的直方图和系数的总数目,一旦确定了阈值  $\sigma$ ,则阈值的作用与硬阈值相同。

### 9.3.4 实现

硬阈值、软阈值和百分率阈值处理方法的实现十分简单:一个简单的方法是用每个系数的幅值减去阈值,如果差是负值则将系数设置为 0;如果差是正值则保持系数不变。利用斜率为 1 的线性函数来实现软阈值处理,阈值处理的准则是:

$$y = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)(|x| - \sigma), & \text{当 } |x| - \sigma \geq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } |x| - \sigma < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (9.7)$$

## 9.4 抑制干扰

雷达信号处理中通常使用的是 Wigner-Ville 分布和非线性时间—频率分布,尽管它们是非线性变换,但其好处是线性调频信号在时间—频率平面上表现为一条直线(参见第 4 章),然而多分量信号的非线性分布可能会产生高幅值掩盖信号的干扰。这个例子是 Wigner-Ville 分布分解和小波包拟制干扰的结合<sup>[4]</sup>,取具有干扰的信号,利用最佳基选择将其分解为最优的频带<sup>[2]</sup>,然后将 WVD 分解应用于每个小波包信号,在重构之前删除分布中的交叉项。这个方法既保持了 WVD 高的分辨率,而且还将交叉项的影响减小到最少。

从时间—频率分析的观点来看,对于每个  $j \in \mathbf{Z}$ ,规范正交小波  $\psi$  生成  $L^2(\mathbf{R})$  的规范正交基  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ ,子族  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$  不仅是  $W_j$  的规范正交基,而且还是第  $j$  个倍频程频带  $H_j = (2^{j+1}\Delta_\psi^\dagger, 2^{j+2}\Delta_\psi^\dagger]$  内提取局部信息的时间—频率窗,这里  $\Delta_\psi^\dagger$  是小波的均方根带宽。不同于小波,其频带  $H_j$  的宽度随着频率范围而增加,而小波包能够把较高频率倍频程分解为更好的频率分辨率,这里  $\Delta_\psi^\dagger$  是  $\hat{\psi}$  相对于正频率区域  $(0, \infty]$  的标准差,已经在第 4 章讨论过。设  $\{\mu_n\}$  是一个小波包族,对应于 8.1 节所定义的某个规范正交尺度函数  $\mu_0 = \phi$ ,则对于  $n \in \mathbf{Z}^+$ ,子空间族  $U_0^n = \langle \mu_n(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z} \rangle$  由  $\{\mu_n\}$  生成且  $W_j$  能够被表示为

$$W_j = U_0^{2^j} \oplus U_0^{2^j+1} \oplus \cdots \oplus U_0^{2^{j+1}-1} \quad (9.8)$$

此外,对于每个  $m = 0, \dots, 2^j - 1$ ,和  $j = 1, 2, \dots$ ,函数族

$$\{\mu_{2^j+m}(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\} \quad (9.9)$$

是  $U_0^{2^j+m}$  的规范正交基,因此第  $j$  个频带  $H_j$  被分成  $2^j$  个子频带:

$$H_j^m, m = 0, \dots, 2^j - 1 \quad (9.10)$$

当然,  $U_0^{2^j+m}$  在式(9.8)中的规范正交基在子频带  $H_j^m$  内给出了时间局部化。任何函数  $s(t) \in L^2(\mathbf{R})$  都有表示:

$$s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2^j-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{j,m} \mu_{2^j+m}(t-n) = \sum_{j,m} s_{j,m}(t) \quad (9.11)$$

式中,  $d_n^{j,m} = \langle s(t), \mu_{2^j+m}(t-n) \rangle$ , 而且分量:

$$s_{j,m}(t) = \sum_n d_n^{j,m} \mu_{2^j+m}(t-n) \quad (9.12)$$

表示信号  $s(t)$  在第  $j$  个频带内第  $m$  个子频带的成分。

让我们将多成分信号的 WVD 重新写成:

$$\text{WVD}_s(t, f) = \sum_{j,m} \text{WVD}_{s_{j,m}} + 2 \sum_{j,m,k,n, m \neq n, j \neq k} \text{WVD}_{s_{j,m}, s_{k,n}}(t, f) \quad (9.13)$$

等式(9.13) 将传统的 WVD 分成两部分, 式(9.13) 中的第一部分求和表示信号项或称为自项, 而第二部分求和表示分量之间的交叉项。在每个子频带中被认为是干扰, 通过消除这些干扰, 可以得到小波包基交叉项消除表示(WPCDR) 为

$$\text{WPCDR}_s(t, f) = \sum_{j,m} \text{WVD}_{s_{j,m}}(t, f) \quad (9.14)$$

WPCDR 实际上给出了信号分量在每个子频带内的自 WVD, 因此它是非常有效的, 也许它是分析多分量信号最佳的选择。此外, WPCDR 能够有效地实现分解和表示并且具有计算上的优越性。

最佳基的选择

等式(9.8) 实际上是当  $k = j$  时下列等式的特殊情形:

$$W_j = U_{j-k}^k \oplus U_{j-k}^{k+1} \oplus \cdots \oplus U_{j-k}^{2^{k+1}-1} \quad (9.15)$$

等式(9.15) 意味着第  $j$  个频带  $H_j$  能够被分成  $2^k$  ( $k = 0, 1, \dots, j$ ) 个子频带:

$$H_j^{k,m}, m = 0, \dots, 2^k - 1 \quad (9.16)$$

频率轴的均匀划分和小波的对数划分是两个极端情形, 分别在式(9.16) 中取  $k$  的值为  $j$  和 0。实际上, 允许  $k$  在  $H_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) 中变化使得子频带与信号的局部频谱适应(或匹配), 从而得到信号的最佳表示或最佳基, 通过最小化整体代价函数或熵能够得到最佳基。特别地, 文献[2] 中使用的下列算法可以得到合适的频率子频带或等价的最佳基:

$$\tilde{H}_j^{k,m} = \begin{cases} H_j^{k,m}, & \text{若 } E(H_j^{k,m}) < E(H_j^{k+1,2m}) + E(H_j^{k+1,2m+1}) \\ \tilde{H}_j^{k+1,2m} \cup \tilde{H}_j^{k+1,2m+1}, & \text{其他} \end{cases} \quad (9.17)$$

式中  $\tilde{H}_j^{k,m}$  表示合适的频率子频带;  $E(H_j^{k,m})$  表示信号限制到  $H_j^{k,m}$  时的局部频谱的熵。

尽管基于最小熵的最佳基对于语音信号分割是有用的, 但在我们的情形下是无效的, 因为组合分布造成干扰, 将算法修改为

$$\tilde{H}_j^{k,m} = \begin{cases} H_j^{k,m}, & \text{若 } \text{Var}(H_j^{k,m}) < \sigma \\ \tilde{H}_j^{k+1,2m} \cup \tilde{H}_j^{k+1,2m+1}, & \text{其他} \end{cases}$$

式中  $\text{Var}(H_j^{k,m})$  表示局部频谱的方差;  $\sigma$  表示阈值。这个算法的思想是, 当局部频谱集中性好或方差较小时使用较窄的分析频带; 而当局部频谱扩展或方差较大时应该使用较宽的频带。另外, 由于频谱旁瓣中幅值的增加可能会导致深层产生一些不好的效果, 因此最佳基通常在第三层与第四层之间得到。

一旦选择好最佳基, 信号很容易被表示为

$$s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2^j-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{j,k,m} \mu_{2^j+m}(2^{j-k}t - n) = \sum_{j,m} s'_{j,m}(t) \quad (9.18)$$

式中  $d_n^{j,k,m} = \langle s(t), \mu_{2^j+m}(2^{j-k}t - n) \rangle$  且

$$s'_{j,m}(t) = \sum_n d_n^{j,k,m} \mu_{2^k+m}(2^{-k}t - n) \quad (9.19)$$

具有最佳基选择的 WPCDR 由下式确定：

$$\text{WPCDR}_s(t, f) = \sum_{j,m} \text{WVD}_{s'_{j,m}}(t, f) \quad (9.20)$$

我们将这个算法应用于由正弦信号和线性调频信号组成的二分量信号。当与 WVD 比较时(参见图 9.9),同一信号的 WPCDR 如图 9.10 所示,干扰被抑制。图 9.11 表明具有最佳基选择的 WPCDR 在时间—频率平面会产生最高的分辨率。

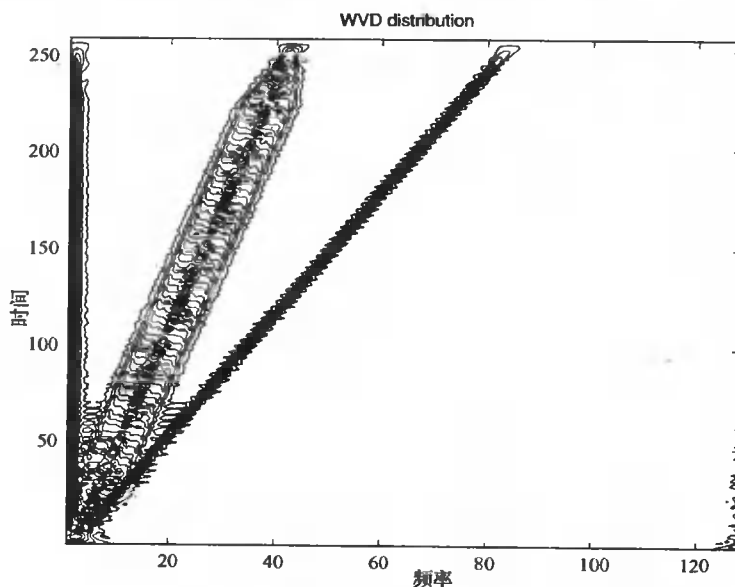


图 9.9 二分量信号的 WVD(经 Wiley 同意允许从文献[4]重印)

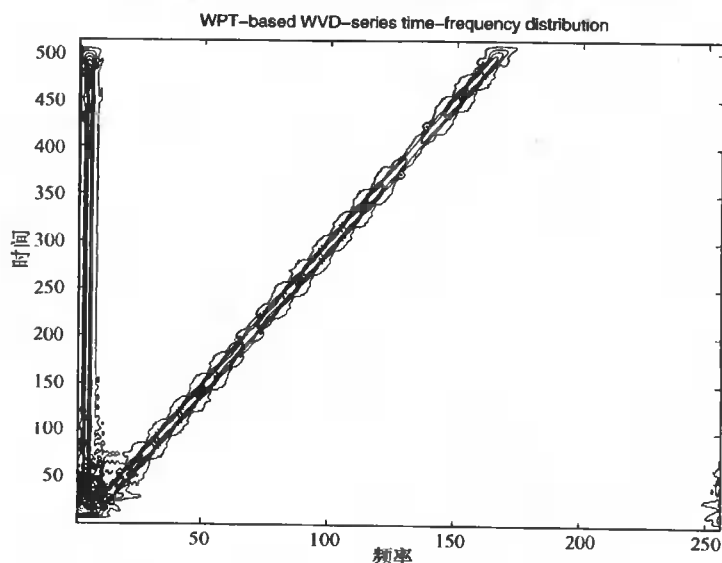


图 9.10 二分量信号的 WPCDR(经 Wiley 同意允许从文献[4]重印)

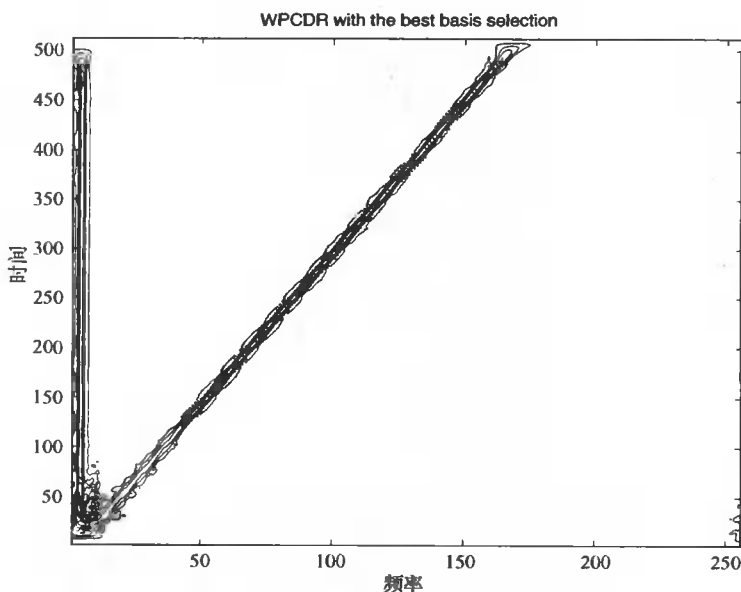


图 9.11 二分量信号的最佳基 WPCDR(经 Wiley 同意允许从文献[4]重印)

## 9.5 故障轴承特征的识别

### 9.5.1 声音信号的模式识别

近年来,声音信号识别已经受到很大关注,能够应用于利用声纳特征识别船只、根据心脏声音诊断心肺、在工厂里安全预警和消除噪声、火车车轮不同类型轴承故障的识别等。声音信号识别的基本目标是从声音特征库中识别声音信号模式,实际上所有的声音特征模式是统计意义下的性质而且它们还是高度非平稳的。为了成功地识别信号,利用小波提取信号特征具有很大的潜力。

为了可靠地识别声音模式,每个模式都必须有一个由不同特征构成的特征矢量的集合,这些特征矢量来自于不同的模式,利用训练识别算法(比如人工神经网络(ANN))的一个特别事件的许多数据集来得到。经过训练得到特征矢量后,它们被储存在数据库中用来与未知事件的特征矢量进行比较。

在这个例子中<sup>[5]</sup>,我们应用小波技巧与 ANN 来识别火车车轮轴承中几个不同类型的故障。为了报道的目的,我们给出了已知轴承缺陷数据集的声音信号及其频谱(参见图 9.12)。

美国铁路协会(AAR)提供给我们 E-型和 F-型两种规格轴承故障产生的 18 种不同的声音信号,每个数据集大约 0.5Gbit,采样率大于 260kHz,每个轴承在两种不同负载的条件下进行实验,而且车轮的旋转相当于 30m/h 到 80m/h 的火车速度。在所有情况下,每个数据集仅有 25%用于训练特征矢量,得到的识别算法如图 9.13 所示。

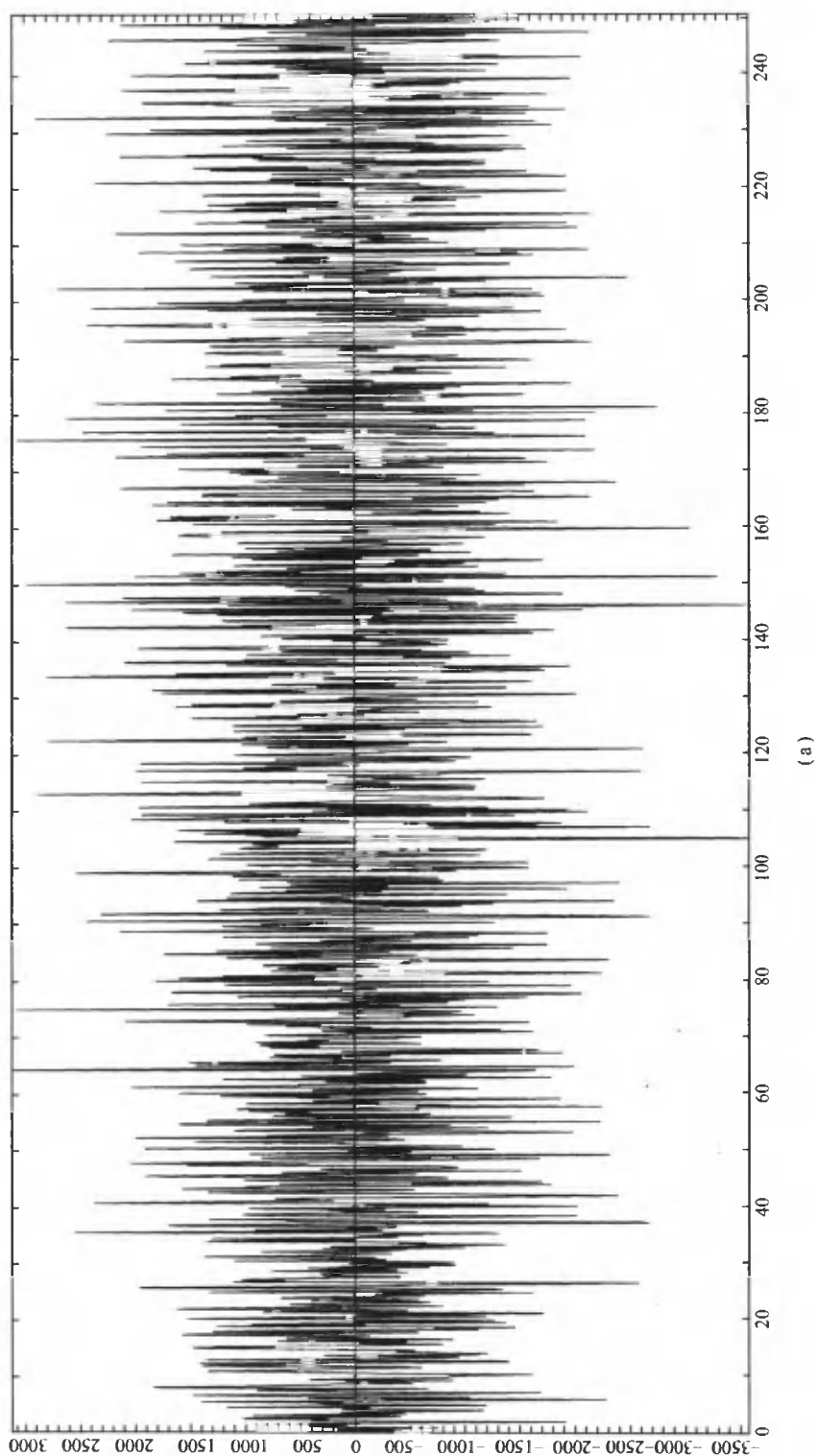
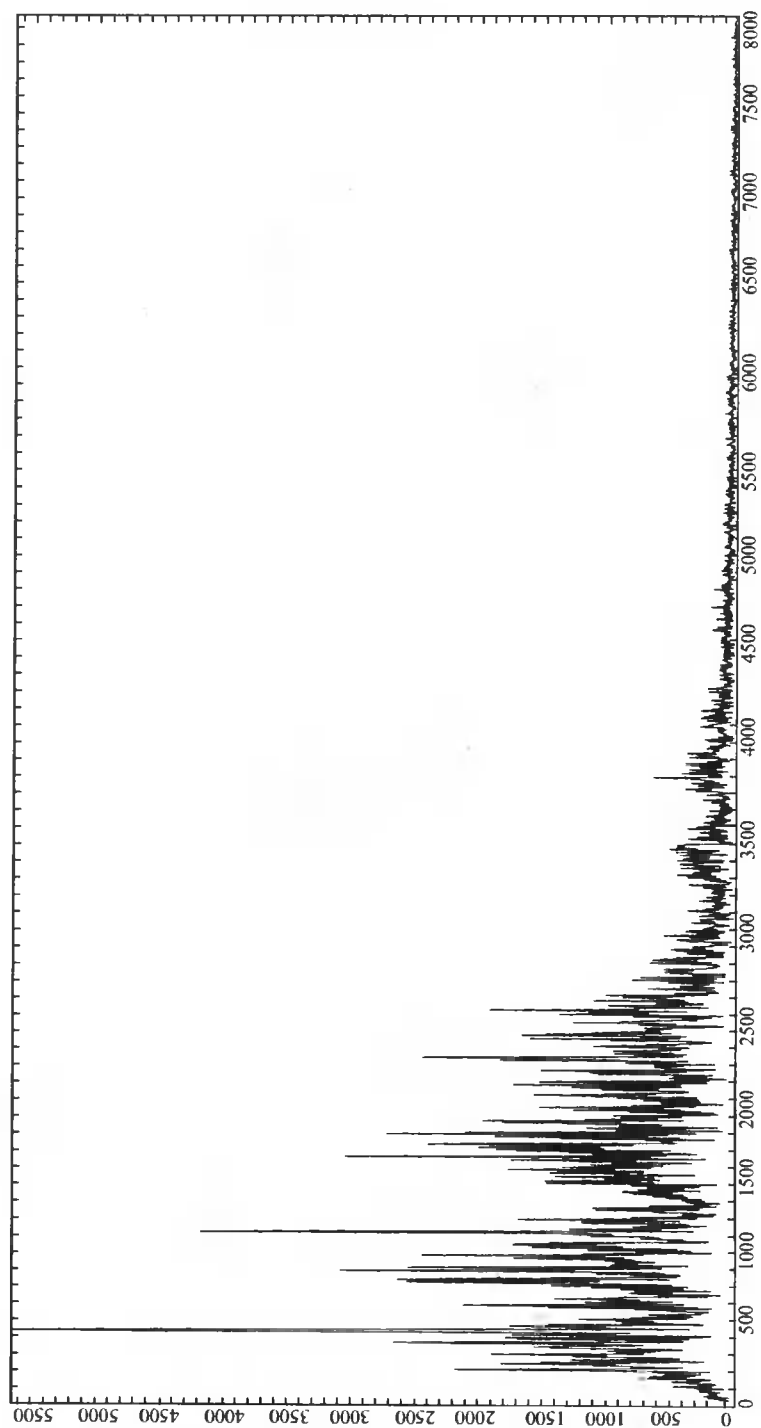


图 9.12 (a) 故障轴承发出的声音信号



(b)

图 9.12 (b)(a) 中语音信号的频谱



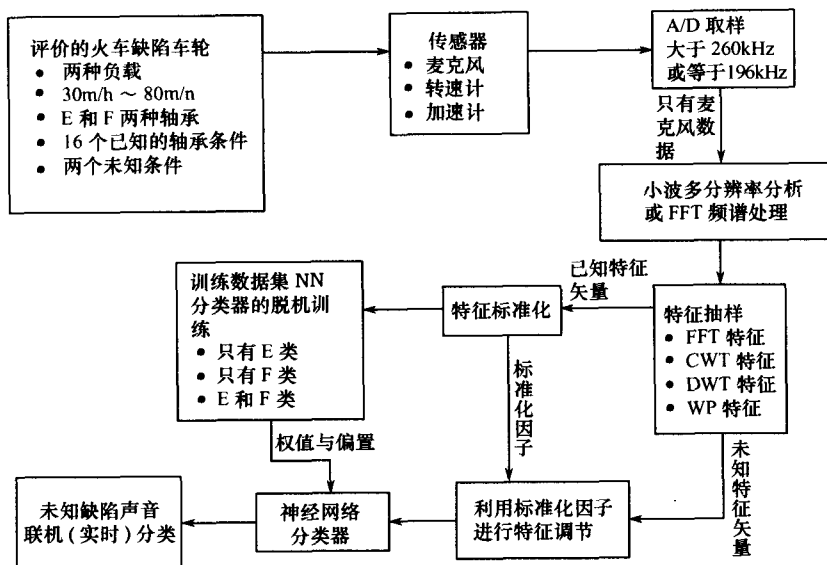


图 9.13 故障轴承检测算法框图

## 9.5.2 小波、小波包及 FFT 的特性

每个训练数据中的样本数为  $2^{12}$ , 下面说明构成特征矢量的每个技巧。

### 1. 小波特征提取

(1) 对信号进行离散小波分解(DWT)直到第 12 级分辨率;

(2) 根据 12 级分辨率中每一级的小波系数和逼近系数, 计算每一个分辨率下系数包含的平均能量, 总共有 13 个子频带(12 个小波子频带和 1 个逼近子频带), 根据它们提取特征, 特征矢量的第  $i$  个元素由下式确定:

$$v_i^{\text{dwt}} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} w_{i,j}^2, \quad i = 1, 2, \dots, 13 \quad (9.21)$$

式中  $n_1 = 2^{11}, n_2 = 2^{10}, n_3 = 2^9, \dots, n_{12} = 2^0, n_{13} = 2^0$ ;  $v_i^{\text{dwt}}$  是一个离散小波变换特征矢量中的第  $i$  个特征元素;  $n_i$  是各个子频带中样本的数目;  $w_{i,j}$  是第  $i$  个子频带的第  $j$  个系数, 因此离散小波变换的特征矢量构成如下:

$$\mathbf{v}^{\text{dwt}} = \{v_1^{\text{dwt}}, v_2^{\text{dwt}}, \dots, v_{13}^{\text{dwt}}\}^T \quad (9.22)$$

### 2. 小波包特征提取

(1) 对第 5 级分辨率进行小波包多分辨率分析得到 32 个子频带, 每个子频带包含 128 个小波包系数;

(2) 根据第 5 级分辨率的每一个子频带, 计算小波包系数所包含的平均能量使得:

$$v_i^{\text{wp}} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} p_{i,j}^2, \quad i = 1, 2, \dots, 32 \text{ 和 } n_i = 128 \quad \forall i \quad (9.23)$$

式中,  $v_i^{\text{wp}}$  是小波包特征矢量中的第  $i$  个特征;  $n_i$  是每一个子频带中样本的数目;  $p_{i,j}$  是第  $i$  个子频带中的第  $j$  个小波包系数。小波包特征矢量表示如下:

$$\mathbf{v}^{\text{wp}} = \{v_1^{\text{wp}}, v_2^{\text{wp}}, \dots, v_{32}^{\text{wp}}\}^t \quad (9.24)$$

### 3. 频谱特征提取

为了进行比较,我们也利用传统的 FFT 方法来解决这个问题。下面根据同样的模式构造 FFT 特征矢量。

(1) 根据  $2^{12}$  个数据点,计算 FFT 而且只取由  $2^{12}$  个频谱系数表示的正频率信息;

(2) 将频谱分成 32 个带宽相同且互不重叠的频带,根据每个频带计算包含在系数中的平均能量,则特征元素成为:

$$v_i^{\text{fft}} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} s_{i,j}^2, i = 1, 2, \dots, 32 \text{ 和 } n_i = 128 \quad \forall i \quad (9.25)$$

这里  $s_{i,j}$  是第  $i$  个子频带中的第  $j$  个 FFT 系数,所以特征矢量为

$$\mathbf{v}^{\text{fft}} = \{v_1^{\text{fft}}, v_2^{\text{fft}}, \dots, v_{32}^{\text{fft}}\}^t \quad (9.26)$$

在得到特征矢量以后,为了改善识别效果,我们利用特征矢量标准化进一步识别相距更远的矢量,这些矢量用于训练 ANN。在这个 ANN 中有 3 个隐藏的神经元。ANN 的结构和训练的细节已经超出了本书的范围,有兴趣的读者可以参考文献[6]。

### 4. 结果

小波技巧与 ANN 的结合获得令人吃惊的识别结果,利用每个数据集中没有使用(没有训练)的部分,每一类中的每个故障都能够被识别。实际上,多于一个故障的两个未知轴承都能够被识别。尽管传统的 FFT 方法与小波方法大致产生同样的结果,但若遗漏两个故障之一将不能识别未知轴承。如果考虑到 FFT 方法的影响,新的特征抽取法离散小波变换和小波包是相似的。FFT 缺乏时间域信息,因此会遗漏一些更局部的故障。

特征矢量的标准化和调整在训练神经网络的收敛(性)中起着关键作用。如果不进行标准化,网络将不能收敛于期望的网络错误,网络的收敛性会导致偏离而且给真实检验数据进行加权是必要的。3 个隐藏层用于改善收敛性,结果收集在表 9.1 中。

表 9.1 网络对 F、E 及 F 和 E 类轴承的综合性能

值/(%)	FFT	CWT	DWT	WP
F 类轴承				
正确判断	96.06	95.70	92.37	92.87
错误分类	1.67	1.69	4.56	2.49
遗漏	2.26	2.61	3.07	4.64
E 类轴承				
正确判断	95.96	94.16	87.50	93.76
错误分类	1.28	2.35	7.05	2.50
遗漏	2.76	3.50	5.45	3.74
F 和 E 类轴承				
正确判断	95.18	94.22	87.61	92.41
错误分类	0.93	2.35	8.88	3.19
遗漏	3.89	3.42	3.51	4.40

## 9.6 二维小波与小波包

### 9.6.1 二维小波

当输入信号是二维(2-D)信号时,用2-D小波和2-D逼近函数表示信号分量是必要的。对于任何尺度函数 $\phi$ ,而且其对应的小波为 $\psi$ ,利用张量积方法,构造3个不同的2-D小波和1个2-D逼近函数。我们将2-D小波写成:

$$\Psi_{i,j}^{[1]}(x,y) = \phi(x-i)\phi(y-j) \quad (9.27)$$

$$\Psi_{i,j}^{[2]}(x,y) = \phi(x-i)\psi(y-j) \quad (9.28)$$

$$\Psi_{i,j}^{[3]}(x,y) = \psi(x-i)\psi(y-j) \quad (9.29)$$

而且将2-D尺度函数写为

$$\Phi_{i,j}(x,y) = \phi(x-i)\phi(y-j) \quad (9.30)$$

$\Psi_{i,j}^{[1]}(x,y)$ 、 $\Psi_{i,j}^{[2]}(x,y)$  和  $\Psi_{i,j}^{[3]}(x,y)$  都是小波,因为它们满足:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{i,j}^{[k]}(x,y) dx dy = 0 \quad \text{对于 } k = 1, 2, 3$$

三次样条的2-D逼近函数和小波如图9.14所示。在频谱域,每个小波函数和尺度函数在2-D频谱平面上占据不同的部分,4个2-D的频谱分布如图9.15所示。频谱频带标记为低—高(LH)、高—低(HL)、高—高(HH)分别对应于小波 $\Psi_{i,j}^{[M]}(x,y)$  ( $M=1,2,3$ )的频谱,低—低(LL)频带对应于2-D逼近函数。术语低和高涉及到处理滤波器是低

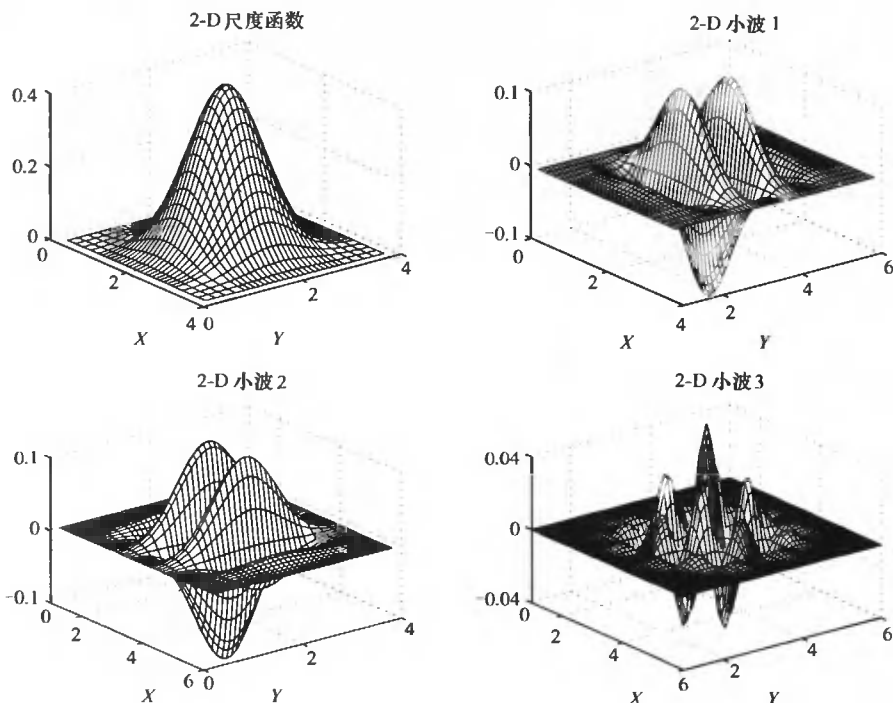


图 9.14 二维尺度函数及对应的小波

通还是高通, 2-D 信号分解导致了熟知的分层金字塔算法。向下采样运算使得每个图像被分解成 4 个子图像, 每个子图像的大小是原图像的四分之一, 灰度图像分层分解的例子如图 9.16 所示。

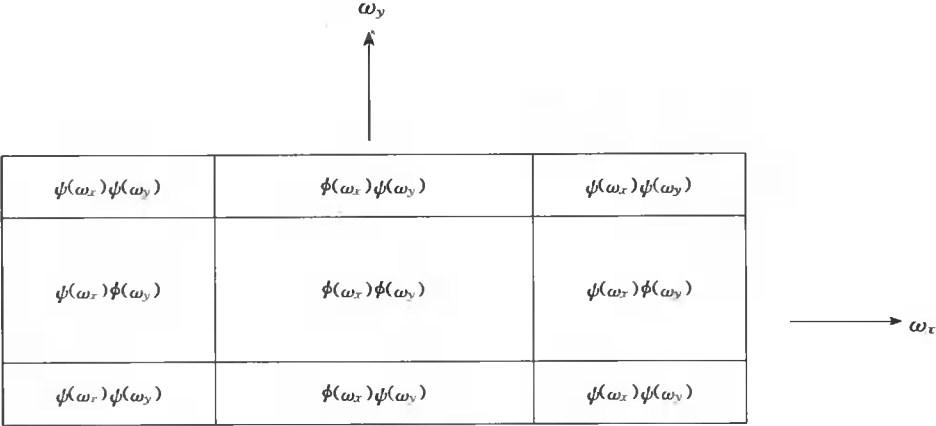


图 9.15 2-D 尺度函数和小波在 2-D 频谱平面所占的区域

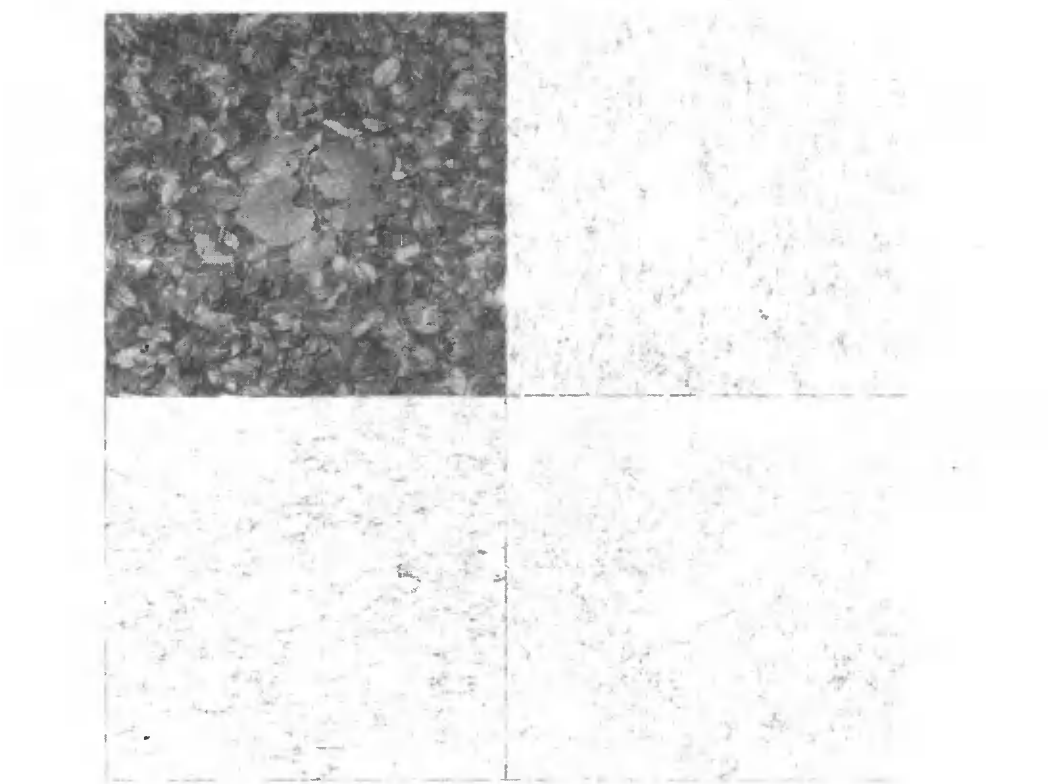


图 9.16 图像的二维小波分解

## 9.6.2 二维小波包

类似于 1-D 的情形,二维小波包是 2-D 小波的细化。用记号  $\mu_k(x)$  表示属于逼近函数  $\mu_0(x) = \phi(x)$  的第  $k$  个小波包,任意两个小波包的张量积生成一个 2-D 小波包,更精确地

$$\mu_{k,l}(x,y) = \mu_k(x)\mu_l(y) \quad (9.31)$$

因此能够选择很多 2-D 小波包构成  $L^2(\mathbf{R})$  的基底来表示信号。例如,在 1-D 情形下,对三级使用二尺度关系导致  $2^3 = 8$  个小波包,包括逼近函数的 LL 分量。取任意两个小波包的张量积,可以得到 64 个不同的 2-D 小波包,包括 2-D 逼近函数:

$$\mu_{0,0}(x,y) = \mu_0(x)\mu_0(y) \quad (9.32)$$

2-D 小波包太多以致无法分别显示。2-D 小波包的两个例子如图 9.17 所示。

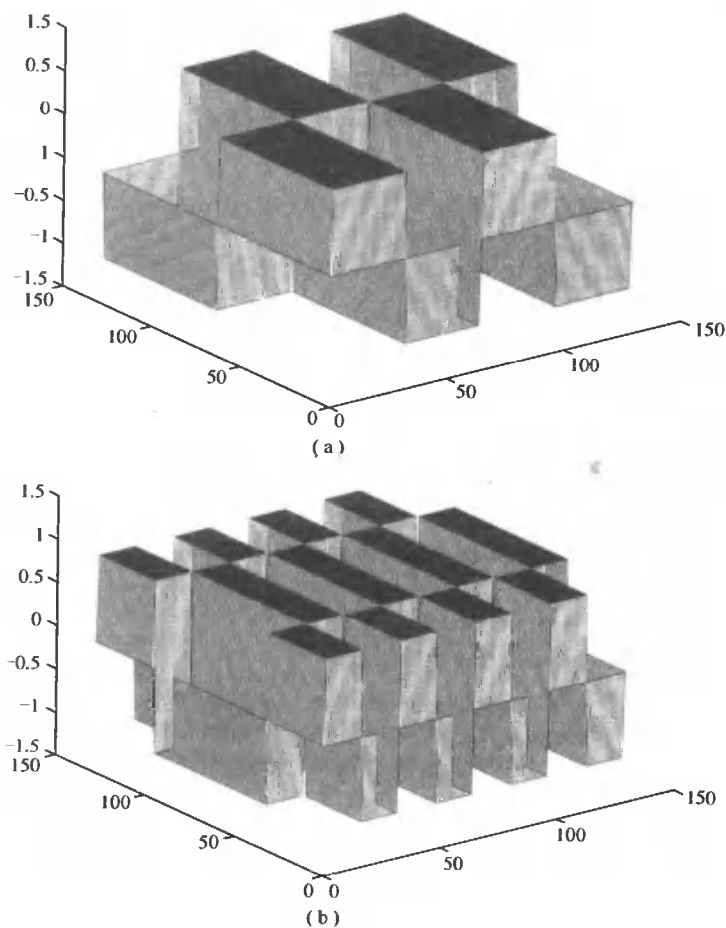


图 9.17 两个 2-D Haar 小波包

## 9.7 二维信号的小波与小波包算法

### 9.7.1 二维小波算法

前几节,我们已经讨论了 2-D 小波是 1-D 尺度函数和小波的张量积。在每个分辨率水平,与一维尺度函数  $\phi$  和小波  $\psi$  对应的是 3 个 2-D 小波和 1 个 2-D 尺度函数,因此小波算法的 2-D 推广是将 1-D 算法应用于 2-D 信号的  $x$  方向和  $y$  方向。让我们考虑一个 2-D 信号,信号值作为一个矩阵。当 2-D 信号是一个图像时,称这些信号值像素值对应于光反射的强度。考虑  $N \times N$  方阵的输入信号  $c^j(m, n)$ ,首先沿着  $x$  轴方向处理信号,也就是说,利用 1-D 分解算法对信号的每一行逐行进行分解。因为向下采样运算,两个组合矩阵是  $N \times N/2$  矩阵,对这些矩阵进行转置,然后再次逐行处理得到 4 个  $(N/2) \times (N/2)$  方阵,即  $c^{j-1}(m, n)$ 、 $d_1^{j-1}(m, n)$ 、 $d_2^{j-1}(m, n)$  和  $d_3^{j-1}(m, n)$ 。 $d$  矩阵的下标对应于 3 个不同的小波,2-D 分解算法如图 9.18 所示。这个过程能够对  $c^j(m, n)$  矩阵(或 LL 分量)重复任意次,而且分解后系数的总数等于最初输入的系数  $N^2$ ,分解的一个例子如图 9.19 所示。

如果没有对系数进行处理,通过重构算法能够准确恢复原始数据,除了用序列  $\{g_0[k], g_1[k]\}$  代替  $\{h_0[k], h_1[k]\}$  之外,这个过程是分解过程简单的逆过程,应该注意,在与输入序列卷积之前应该向上采样。在图 9.20 中,完全重构图像与原始图像相同。

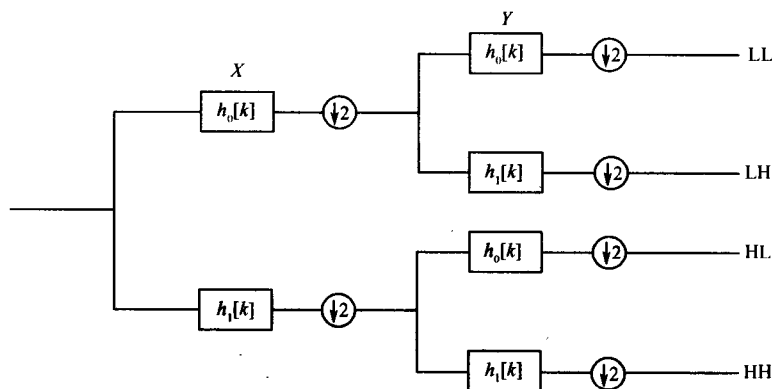


图 9.18 二维小波分解算法框图

### 9.7.2 二维小波包算法

2-D 小波包算法类似于 1-D 的情形,它简单地重复着算法:首先沿着  $x$  轴的方向然后沿着  $y$  轴的方向,不仅 LL 分量(逼近函数分量)进一步分解为图像细节,其他小波分量(LH、HL、HH)也被进一步分解。例如,从大小为  $256 \times 256$  的原始图像开始,这个图像的 2-D 小波分解将导致 4 个  $128 \times 128$  大小的子图像,继续分解可以得到 16 个大小为  $64 \times 64$  的 2-D 小波包子图像。2-D 小波包计算算法并不比 2-D 小波算法困难,但要求按顺序记录  $x$  或  $y$  的方向及处理中使用的滤波器,根据其小波包分量重构图像时必须将次序反过来。一幅图像的 2-D 小波包分解及其重构的例子如图 9.21 和图 9.22 所示。

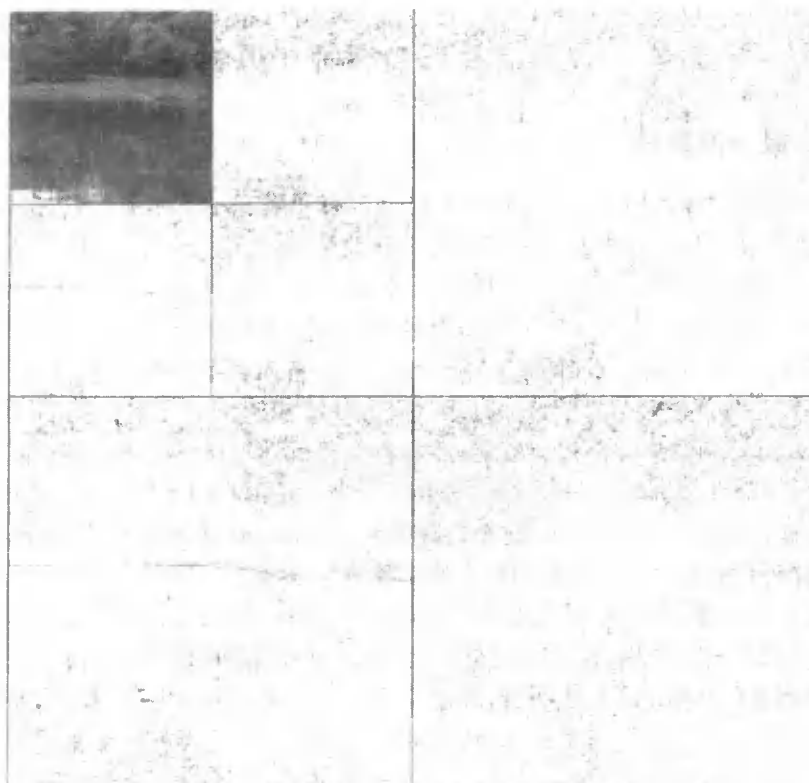


图 9.19 图像的二维分层分解



图 9.20 图像的重构

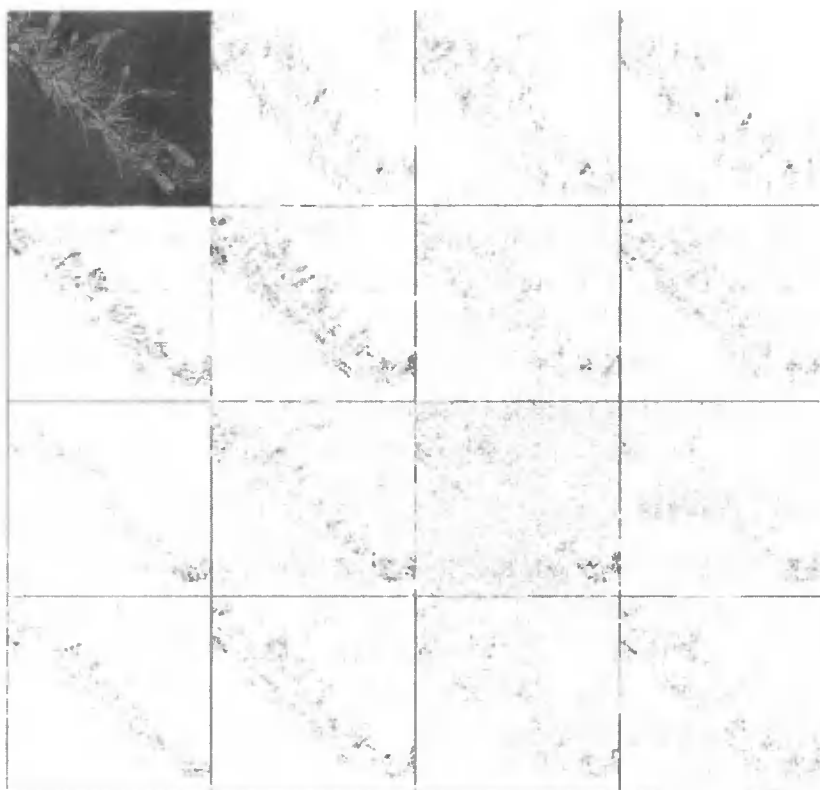


图 9.21 图像的 2-D 小波包分解

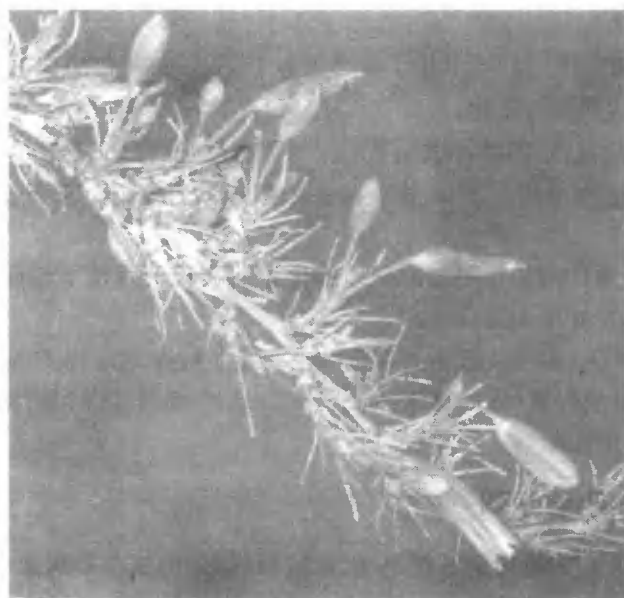


图 9.22 图 9.21 所示小波包分量的完全重构



## 9.8 图像压缩

### 9.8.1 图像编码

文献资料中已经有很多图像压缩编码方案,压缩的基本思想是通过适当地表示图像来缩减每个像素的平均比特数。对很大的医学图像或卫星图像来说,图像压缩是非常必要的,一方面是为了降低存储量,而另一方面是为了提高传输效率。编码策略可以分为无损(可恢复)编码和有损(不可恢复)编码两种类型,无损编码的压缩率通常很低(近似为10或更低)。Huffman编码、游程编码、算术编码、预测编码和比特级编码属于无损编码;有损编码方法可以用许多方法来构造。我们将利用零树算法来说明小波在图像压缩中的应用。

### 9.8.2 小波树编码器

一般来说,树编码器<sup>[7]</sup>使用树结构是为了利用离散小波系数(DWC)在3个空间方向(即HL、LH和HH)之间的相关关系,如图9.23所示。这意味着如果较高分解层的离散小波系数小于给定的阈值,则其子孙小于阈值的可能性最大,因此所有这些不重要的离散小波系数能够用一个符号来编码,编码重要的离散小波系数可能需要更多的比特。为了提高相关离散小波系数位置编码的效率,发展了许多树结构,比如嵌入零树小波、空间定向树和广义自相似性等。

下面简单说明一般树编码器:

(1) 随着阈值的减少按组选择离散小波系数,使得较大的离散小波系数能够较早地被编码;

(2) 首先选择阈值  $T_0 = 2^j$ , 其中  $j$  是小于等于  $\log_2 \max |DWC|$  的大整数,而第  $k$  次阈值为  $T_k = T_0 / 2^k$ , 即均匀量化;

(3) 选择阈值  $T_k$ , 这组离散小波系数  $C_{i,j}$  的所有位置满足  $T_k \leq |C_{i,j}| < T_{k-1}$ , 用树结构对它们编码而且这些编码过的离散小波系数也被附加标记,这个过程被称为主通过(dominant pass);

(4) 通过对  $T_k$  增加附加位更加准确地细化先前在较大阈值下编码的那些  $C_{i,j}$ , 这个过程称为次通过(subordinate pass);

(5) 随着阈值减小,编码离散小波系数的主要零位被存储达到了压缩的目的;

(6) 利用无损熵编码器(比如算术编码器<sup>[8]</sup>),从树编码器得到的编码比特流中比特的数目能够被进一步缩减。

### 9.8.3 嵌入零树小波编码

Shapiro 在文献[9]中提出的零树结构与比特级编码的结合是离散小波变换有效的压缩策略。就图像质量和计算简单性来说,嵌入零树小波(EZW)编码策略在图像编码中是有效的和灵活的。此外,嵌入零树小波图像编码算法生成一个嵌入比特流,按其重要性信息被发送到解码器,重要性是根据缩减多少信息重构图像会失真来进行判断。这种嵌入

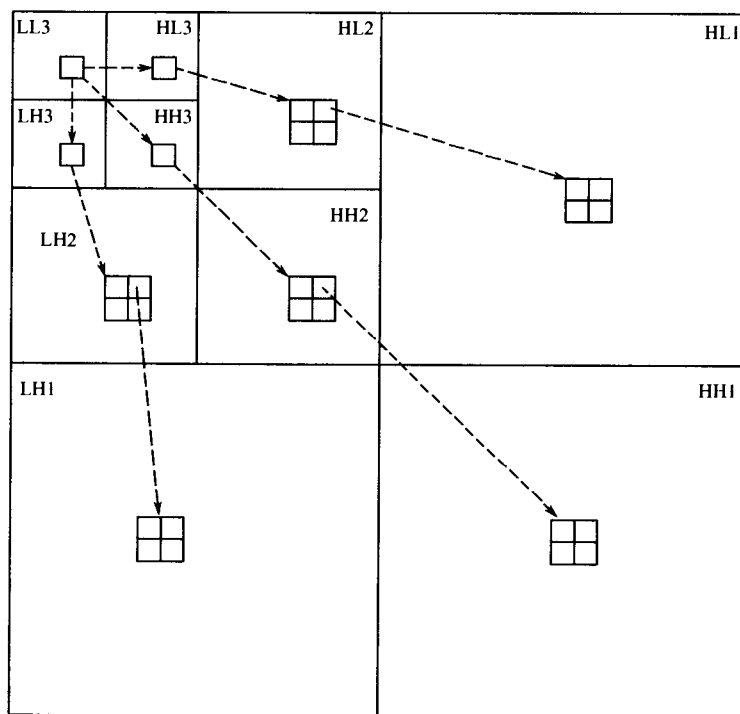


图 9.23 不同分辨率下小波系数间的空间相关关系与父子关系

式技巧有两个重要的优势,首先比特率控制允许在任一点结束编码过程;其次,在密码比特流被破坏甚至质量下降的情况下,能够根据一点重构图像。

作为一个熵编码器,零树编码器利用离散小波系数各层子频带之间的相关关系。在零树中使用 4 个符号 ZTR、POS、NEG 和 IZ。如果离散小波系数及其子孙都不重要,称其为零树根而且用 ZTR 来表示,它是得到大部分压缩的符号;POS 表示重要的正离散小波系数;NEG 表示重要的负离散小波系数;IZ 表示不重要的离散小波变换,但至少有一个重要的子孙,对其子孙编码需要更多的符号,正是这些符号减小了压缩。根据上面的定义,4 个符号中每一个符号平均需要 2bit。对于那些没有一个好的跟踪熵编码器的符号,零树不能得到好的压缩结果。另外,所有的密码符号必须重新排序,使得熵编码器能够成功地压缩它们,这些过程增加了计算负担。

#### 9.8.4 嵌入零树小波举例

我们使用设计合理的例子说明这个过程,它类似于 Shapiro 原始论文[9]中出现的例子。嵌入零树小波是一个逐次逼近算法,重复利用主通过和次通过完成逼近。这个例子的系数映射如下所示。

58	41	-44	-17	-8	13	5	8
29	-47	42	-13	3	4	-1	10
22	-14	25	-9	35	-11	6	7
-9	-11	-16	12	-3	6	14	-1

(续)

-13	2	0	-11	0	-30	15	7
10	-5	9	4	-7	-1	-9	0
-22	4	-13	3	6	-8	11	5
9	-1	9	-12	2	5	9	-3

根据 9.8.3 小节给出的大概步骤,可以得到编码的最大值是  $M=58$ ,最接近的 2 的幂整数  $2^j \geq 58/2=29$  是  $2^5=32$ 。设起始阈值为  $T_0=32=2^5$ ,使用这个阈值并且与主通过的所有系数进行比较,说明如下。

在小波树编码中,不只是系数值需要编码,而且系数的位置也必须让解码器知道。嵌入零树小波利用临近系数映射中系数之间的父子关系记录给定系数的位置。为了降低编码费用,这些关系嵌入在嵌入零树小波编码中。这些关系的最好说明如图 9.23 所示。编码过程如下:

(1)对于第一个主通过阈值设置为 32,编码结果在下列表中给出了说明,我们对每个可编码值分配一个符号。

值	符号	重构值	值	符号	重构值
58	P	48	-16	ZTR	0
41	P	48	12	ZTR	0
29	ZTR	0	-8	Z	0
-47	N	-48	13	Z	0
-44	N	-48	3	Z	0
-17	ZTR	0	4	Z	0
42	P	48	35	P	48
-13	ZTR	0	-11	Z	0
25	ZTR	0	-3	Z	0
-9	ZTR	0	6	Z	0

(2)在第一个主通过完成后,第一个次通过加细编码值,在这个通过中只有那些重要的值(P 和 N)被编码。第一个次通过中的符号 P 说明值位于区间  $(64, 32]$ ,而符号 N 说明值位于  $(-64, -32]$ 。让区间从  $(64, 32]$  变窄到  $(64, 48]$  和  $(48, 32]$ ,次通过加细了这些值。如果值位于较高的区间,次通过附加 1 到编码;如果值位于较低的区间,则附加 0 到编码。6 个重要值现在具有下列编码文件:

系数值	符号	重构值	二进制表示
58	1	56	111010
41	0	40	101001
47	0	40	101111
44	0	40	101100
42	0	40	101010
35	0	40	100011

这完成了两次通过的第一次迭代,使用者应该注意,次通过中如果 1 附加到编码中,

则必须从这个通过中大于阈值的值减去加细量,此时的加细量是 16。例如,对于系数 58 有  $58-32-16=10$  已经由下一次迭代所加细。此外,使用者还应注意系数映射中的编码值现在由零来代替,而且不再根据后面的迭代进行编码。

(3)取阈值  $T_1=16$ ,用第二个主通过重复第一步,根据这个通过可以得到下列编码:

系数值	符号	重构值	系数值	符号	重构值
29	P	24	-11	Z	0
-17	N	-24	-3	Z	0
-13	ZTR	0	6	Z	0
22	P	24	-13	Z	0
-14	ZTR	0	2	Z	0
-9	IZ	0	10	Z	0
-11	ZTR	0	-5	Z	0
25	P	24	-22	N	-24
-9	ZTR	0	4	Z	0
-16	N	-24	9	Z	0
12	ZTR	0	-1	Z	0
-8	Z	0	0	Z	0
13	Z	0	-30	N	-24
3	Z	0	-7	Z	0
4	Z	0	-1	Z	0
5	Z	0	6	Z	0
-8	Z	0	-8	Z	0
-1	Z	0	2	Z	0
10	Z	0	5	Z	0

(4)第二个次通过以所有区间的中点作为分界点,将区间划分为更细的区间,从而得到区间(64,56]、(56,48]、(48,40]、(40,32]、(32,24]和(24,16]。这个通过也更新了先前所有的编码文件,在此通过中比较的值是 8,更新的编码文件为:

系数值	符号	重构值	二进制表示
58	1	60	111010
41	1	44	101001
47	1	44	101111
44	1	44	101100
42	1	44	101010
35	0	36	100011
29	1	28	011101
17	0	20	010001
22	0	20	010110
25	1	28	011001
16	0	20	010000
22	0	20	010110
30	1	28	011110

每次减半阈值来重复通过。如果全部系数都被编码,则得到无损编码,用这种方法达到的压缩率是有限的。先使用嵌入零树小波,然后使用无损熵编码将达到较高的压缩率,使用者在任何时候或当比特预算用完时可以停止编码。我们有一个有损压缩策略,使用者可以控制比特预算,但不能控制压缩率。一个原始图像和根据嵌入零树小波编码恢复的图像如图 9.24 和图 9.25 所示。



图 9.24 嵌入零树小波图像编码的原始图像

### 9.8.5 空间定向树

Said 和 Pearlman 在文献[10,11]中发现了集合分割原理,将零树方法的性能提高到 1.3dB。他们注意到在子频带之间存在空间自相似性,而且当金字塔中沿着同样的空间方向向下移动时,离散小波系数(DWC)期望具有较好的幅值排序。基于这样的观察,被称为空间定向树(SOT)的树结构用于定义等级结构中离散小波系数的空间关系。为了在图像编码中得到较好的效果,Said 和 Pearlman 提出了适合空间定向树的 3 个主要思想:①通过子集分割算法,利用幅值和坐标传递得到变换图像的偏序;②细化比特的有序比特级传递;③不同尺度离散小波系数自相似性的利用。

对于空间定向树<sup>[10~12]</sup>唯一使用的符号是 0 和 1,而且在树的不同部分每个符号具有不同的含义,符号 1 可能表示:①重要的离散小波系数;②重要的负离散小波系数;③四个孩子之一是重要的;④任何子孙都是重要的。符号 0 可能表示:①不重要的离散小波系数;②重要的正离散小波系数;③四个孩子都不重要;④所有子孙都不重要。为了沿着不同尺度保持空间定向树,使用如下 3 个列表:

(1)LIS:不重要集的列表,它是进一步跟踪的树根,而且为了得到更好的适应性,A 型与 B 型树根被交替使用;



图 9.25 压缩率为 30 : 1 的解码图像

(2)LIP:不重要像素的列表,它不是当前的树根而是 LSP 候选者离散小波系数的列表;

(3)LSP:重要像素的列表,它是已经被编码而且要被进一步细化离散小波系数的列表。

### 9.8.6 广义自相似树

基于空间定向树构造了广义自相似树(GST)编码算法,它能够处理任何尺寸和任何灰度级的图像<sup>[13]</sup>。在广义自相似性中,利用具有边界反射技巧的小波分解/重构算法能够实现完全重构。对于二进制图像,广义自相似性编码器的分析显示的结果比得上原始空间定向树编码器;而对于非二进制图像甚至还超过空间定向树。

## 9.9 微钙化点检测

早期乳腺癌的主要症状是在乳房上存在一个或更多的钙化点。尽管乳腺癌是致命的,如果在早期阶段肿块能够被发现并被切除,女性将获得最高的生存机会,因此用最小误诊率微钙化检测进行乳腺癌筛查是重要的。微钙化是乳腺组织中钙磷酸盐氢氧化物较小的沉淀物,直径从 0.05mm 到 1.0mm 不等,在负趋光 X 射线照片上出现光斑<sup>[14]</sup>,它们的大小和形状是多样的而且被嵌入在不同密度的组织结构中,检测它们将是困难的<sup>[15]</sup>。

美国的健康保障计划中,乳腺癌筛查是主要强制推广的项目之一。然而,即使依照 ACR 制定的部分标准,也将会产生巨大的数据要求放射学家来解释,因此人为误差漏诊的比例能够达到 20%<sup>[16]</sup>。如果设计和构建一个计算机辅助诊断(CAD)算法,它将指出

乳腺癌中需要进一步详细诊断筛查的可疑区域,帮助放射学家进行二次鉴定。这个实际例子试图说明二维小波金字塔算法与其他图像处理技巧结合在一起,能够识别乳腺癌中的微钙化及局部化可疑区域。

### 9.9.1 CAD 算法的结构

识别签名的成功极大地依赖于从签名中提取的特征,特征越不相同作出正确识别的成功率就越高。微钙化检测和识别中最重要的目标是去除背景噪声和增强待识别的对象。我们使用几个传统的图像处理技巧与小波分解算法一起来实现这个目标。这些算法中的一些决策规则是目标方向,从而依赖于问题,参数的选择通常依赖于待分析的数据。复杂结构和凌乱背景中微钙化点检测的 CAD 算法如图 9.26 所示。这个 CAD 算法中使用的图像处理技巧包括非线性图像增强、小波金字塔和方向图像分解与重构、小波系数域运算、黑像素去除、常数故障预警率(C-FAR)自适应阈值、自适应共振理论聚类、故障聚类辨别。

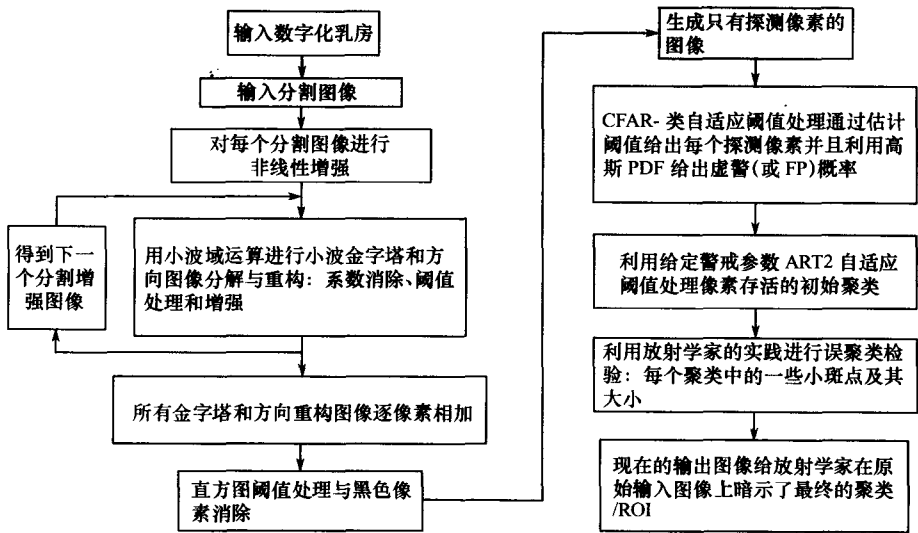


图 9.26 微钙化点检测算法框图

### 9.9.2 图像分割与非线性对比度增强

为了分析简单,我们将乳房图像分割成许多大小相同的子图像。在乳房图像的大小为  $1024 \times 1024$  的情况下,将其分割成大小为  $128 \times 128$  的 64 个子图像。为了说明输入图像的局部重要细节,对每个分割开的子图像分别进行处理使得对比度增强,这一步对于目标检测提供了好的局部化。众所周知,小波对于图像边界的处理好于 DCT,因此我们假设在图像分割过程中没有信息损失,利用三次映射来抑制灰度值低的像素和增强灰度值大的像素。

### 9.9.3 子图像的小波分解

我们利用小波分解算法分解每一个子图像,挑选出子图像的高频分量。在这个应用

中小波有很多种选择,在考察了所有 Daubechies 正交和双正交小波及 Coiflets 之后,因为 Haar 小波的空间域窗是很小的,因此为了更好的空间局部化,我们选择了 Haar 小波。高阶小波趋向于平均,而且为了产生低幅值小波系数模糊了高频信息。

两种小波多分辨分析树分解,金字塔分解与方向分解同时应用于同样的子图像。金字塔多分辨分析只是对每级分辨率(LOR)行和列方向上 LL 子频带的子频带图像进行分解;另一方面,方向多分辨分析只是在一个方向分解图像。这两个多分辨分析树的分解小波系数映射如图 9.27 和图 9.28 所示。

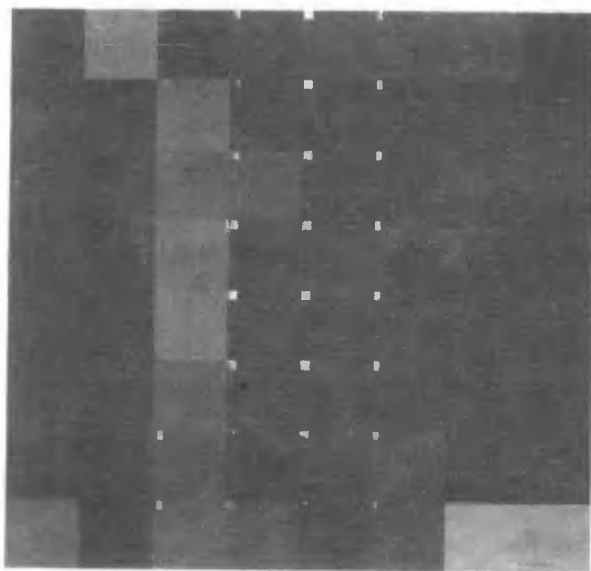


图 9.27 部分乳房 X 射线照片的分层小波分解

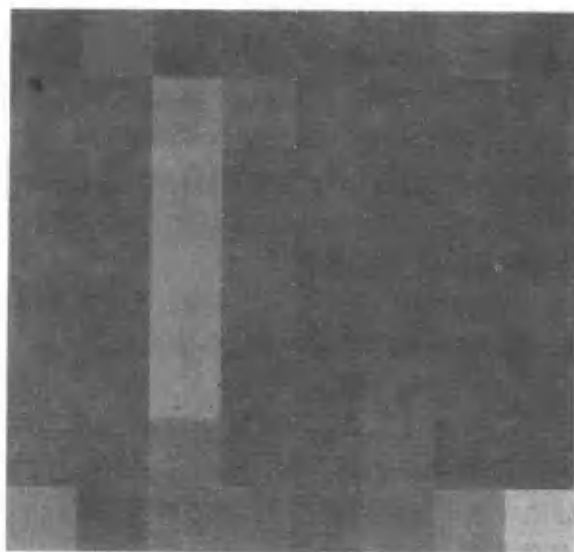


图 9.28 部分乳房 X 射线照片的方向小波分解



### 9.9.4 小波系数域处理

一旦我们得到前一节计算的小波系数,处理这些系数的目的是仅仅保留关于微钙化点和其他高频信息重要的小波系数。处理这些系数包括消除、阈值处理和增强。这些运算没有使用者的界面,必须设置准则和参数来操纵这些运算。

为了保留包含微钙化点和其他高频噪声的高频信息,低分辨率子频带中的小波系数被消除。对于每个分割的子图像,我们计算整体(子图像中的全部小波系数)标准差均值比(GSMR)和局部(子图像一个子频带中的小波系数)标准差均值比(LSMR)是为了去掉包含低频或不重要高频信息的系数。用  $\gamma_{g,k}$  和  $\gamma_{j,k}$  表示根据第  $k$  个子图像的小波系数计算得到的整体标准差均值比和局部标准差均值比,按照下列规则小波系数  $w_{j,k}(\cdot)$  被设置为零:

$$\begin{array}{ll} w_{j,k}(\cdot) = 0 & \text{对于子频带 } j \text{ 中的系数} \\ \text{保留在子频带中进一步处理} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{如果 } \gamma_{g,k} > \gamma_{j,k} \\ \text{如果 } \gamma_{g,k} \leq \gamma_{j,k} \end{array} \quad (9.33)$$

我们利用每个子频带的均值  $\mu_{j,k}$  和标准差  $\sigma_{j,k}$  设置阈值处理和增强的判别准则。判别准则如下:

$$w_{j,k}(\cdot) = \begin{cases} 0, & \text{若 } w_{j,k}(\cdot) \leq \mu_{j,k} + 2.5 \times \sigma_{j,k} \\ \text{abs}\left[\frac{\sigma_{j,k}}{\mu_{j,k}}\right] \times w_{j,k}(\cdot), & \text{其他} \end{cases} \quad (9.34)$$

在小波系数映射完成之后,我们利用剩余的子频带系数重构图像。重构图像具有用白色斑点表示微钙化点和高频小斑点噪声的黑背景。为了区分微钙化点与噪声,我们使用直方图阈值处理和消除黑色像素。

### 9.9.5 直方图阈值处理和黑色像素消除

由于重构图像也包含与微钙化点无关的信息,我们必须滤出这些错误信息。直方图阈值需要给定灰度尺度  $g_{\text{peak}}$  直方图的峰值,我们用公式表示下列阈值处理规则:

$$\begin{array}{ll} v_r(x, y) = 0, & \text{如果 } v_r(x, y) \leq (g_{\text{peak}} + 1) + 0.5 \times \sigma_{rc} \\ v_r(x, y) \text{ 保持不变以便进一步处理} & \end{array} \quad (9.35)$$

式中  $\sigma_{rc}$  和  $\mu_{rc}$  是重构图像中所有非零( $nz$ )个像素的标准差和均值;而  $v_r(x, y)$  是重构图像中  $(x, y)$  位置上的像素值。这一步之后, CAD 算法用空间连贯的方式把两个图像加起来构成包含着所有微钙化点信息的组合图像。

现在重新考虑原始图像。由于在一个 8bit(256 级)线性灰度级中微钙化点像素密度大于 137,利用这个信息用公式将消除黑色像素的阈值表示如下:

$$\begin{array}{ll} v_r(x, y) = 0, & \text{若 } v_r(x, y) = 0 \\ v_r(x, y) = 0, & \text{若 } v_r(x, y) \neq 0 \text{ 且 } u(x, y) \leq \mu_{\text{org}} + 0.5 \times \sigma_{\text{org}} \\ v_r(x_{rc}, y_{rc}) = v_r(x, y), & \text{若 } v_r(x, y) \neq 0 \text{ 且 } u(x, y) > \mu_{\text{org}} + 0.5 \times \sigma_{\text{org}} \end{array} \quad (9.36)$$

式中  $\mu_{\text{org}}$  和  $\sigma_{\text{org}}$  是原始输入乳房 X 射线照片非零像素的均值和标准差;而  $u(x, y)$  是原始图像中  $(x, y)$  位置上的像素值。

在黑色像素被设置为零以后,潜在微钙化点区域(PMR)在增强的图像中被识别出来;非零像素的位置表示微钙化点可能的位置,这些位置被作成  $5 \times 5$  像素潜在微钙化点

区域的中心。为了将潜在微钙化点区域的数目缩减到容易处理的程度,这些潜在微钙化点区域中的每一个必须通过 CFAR 类检测器。CFAR 的作用类似于概率辨别器,保留较高概率的潜在微钙化点区域以便进一步分析,因此  $5 \times 5$  像素区域的作用类似于一个窗,用它建立一个自适应规则来确定作为一个微钙化点的概率。为了估计 CFAR 的阈值,需要潜在微钙化点区域的均值和标准差、先验概率分布以及期望的虚警率。CFAR 更详细的理论超出本书范围,有兴趣的读者可以参阅文献[17]。

### 9.9.6 参数 ART2 聚类

利用警戒因子为  $\rho_v$  或 25 个像素的 ART(adaptive resonance theory 见文献[5])构成可疑区域,在这个实例中,我们选择搜索区域对应于  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$  的区域,有大约  $50 \times 50$  个图像像素。一旦完成初始聚类,每个聚类必须进行虚警识别检验。每个聚类至少有 3 个微钙化点,单个的大小不超过  $5 \times 5$  个像素。如果初始聚类不满足这个准则,则可以断定它是一个正误识(FP)聚类,从可疑区域列表中将其删除。

### 9.9.7 结果

我们已经将这个 CAD 算法应用于 322 个乳房 X 射线照片,这些 X 射线照片来源于英格兰 MIAS 微小乳房 X 射线测定数据库,确实发现了 150 个可疑区域和 1834 个虚警以及 37 个不确定区域。将算法得到的结果与活性组织检查结果(来自于数据集)进行比较,所有 31 个正确位置(TP)被正确识别,有一个负误识,有 119 个正误识。根据灵敏度, CAD 算法达到了 87% 到 97% 的正确性。根据 FP 的数目,每个图像达到 0.35 个到 5 个,每个图像具有 0.04 个到 0.26 个 FN,这些结果有利于与其他 CAD 算法以及从放射群体统计得到的结果进行比较。原始的乳房 X 射线照片及其算法输出如图 9.29 和图 9.30 所示。

## 9.10 多载波通信系统

多载波调制是传递数据的原理,将数据流划分成几个平行的比特流,使其每一个具有更低的比特率,这些子流中的每一个调制一个独立的载波,图 9.31 显示了多载波通信系统(MCCS)的发射机框图。一系列平行的缓冲器将信息序列划分为  $N_f$  比特帧,每帧中的  $N_f$  比特被分成  $M$  组,第  $i$  组分配  $n_i$  比特使得:

$$\sum_{i=0}^{M-1} n_i = N_f \quad (9.37)$$

将多载波调制看成  $M$  个独立信道是方便的,每个操作有相同的符号率  $1/T$ ,每个信道中的数据由不同的子载波调制。用  $S_i, i = 0, \dots, M-1$  表示子信道的信号输入,为了调制  $M$  个子载波,我们使用正交基  $\Phi = \{\phi_k\}_{k=0}^{M-1}$  使得:

$$\langle \phi_m, \phi_l \rangle = \epsilon \delta_{m,l}$$

### 9.10.1 OFDM 多载波通信系统

正交频分复用(OFDM)是 MCCS 的特殊形式,具有稠密的空间子载波和叠加频谱。

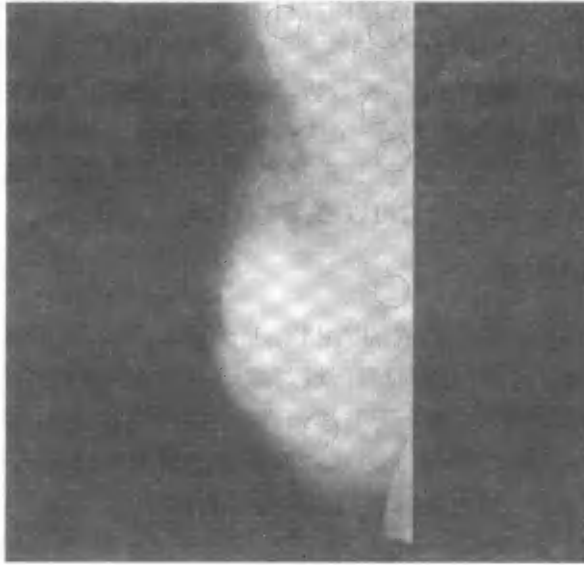


图 9.29 部分乳房 X 射线照片聚类检测

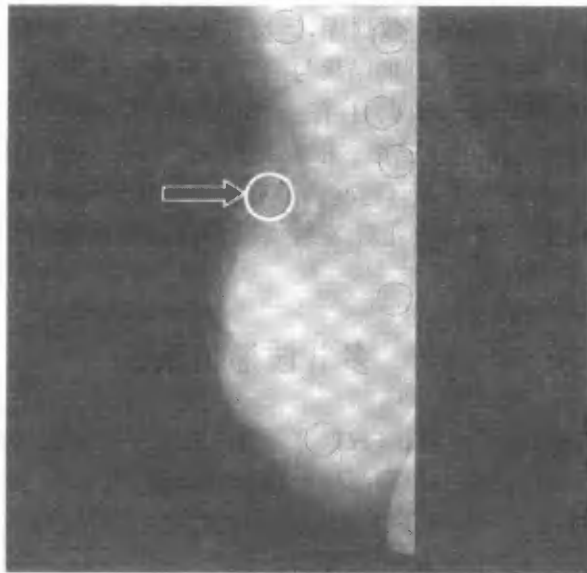
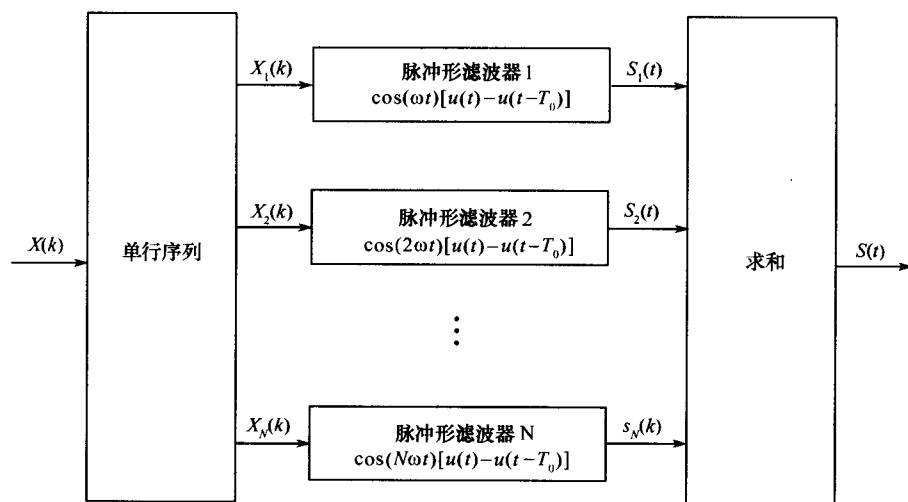


图 9.30 聚类检测与真实位置的比较

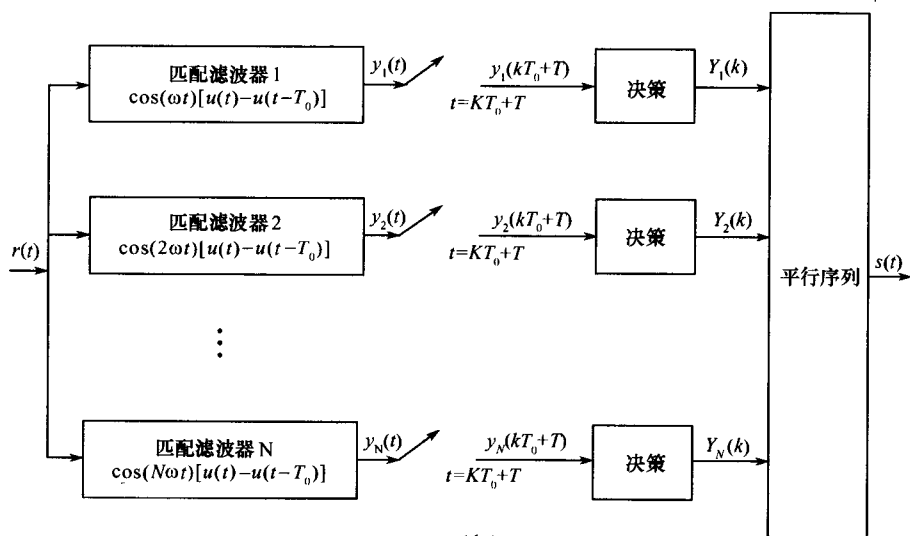
它不使用陡峭带通滤波器完全分离独立子载波的频谱,作为替代选择正交频分复用时间域波形使其满足相互正交性,即使子载波频谱可能重叠。正交频分复用对于时间域脉冲干扰是强健的归功于其长符号时间趋向于平均输出效果。如果高频错误出现在信道中,则正交频分复用子载波可能失去它们的相互正交性,如图 9.31 所示操作原理是简单的。在几个子载波上传输数据,子载波的频谱可能重叠,但能够保证相互之间的正交性。这些子载波被相加在一起通过信道传输。在信道的接收器端,接收信号被并行发送到每个子信道的匹配滤波器,在对信号作出判决之前,匹配滤波器的输出被采样,一般来说每个子

信道使用二进制相移键控(BPSK)策略<sup>[18]</sup>表示信号。

当信道的性能较好而且没有造成频率扩散时,比特错误率( $P_e$ )很小,信道中的噪声可能会产生缺陷。另一方面,当信道参数的时间变差导致频率扩散存在时,则  $P_e$  会增大。相位颤抖和接收频率偏置会引起信道间的干扰,从而降低  $P_e$ 。



( a )



( b )

图 9.31 多载波通信系统

(a) 传输器; (b) 接收器。

## 9.10.2 小波包基 MCCS

用小波包基代替正交频分复用中使用的正弦或余弦函数,小波包基 MCCS 使用不同的小波包作为时间域波形。如果逼近函数  $\phi$  生成  $L^2(\mathbf{R})$  空间中的规范正交集,则对应的

小波包是正交的。现在子载波是小波包,而且接收器中的匹配滤波器被相应地设计(参见图 9.32)。对于子载波来说,由于存在大量小波包可供选择,经过试验选择小波包使得它们的频谱非常接近于正交频分复用的频谱,在此条件下,我们能够对这两个系统之间的结果进行合理的比较。

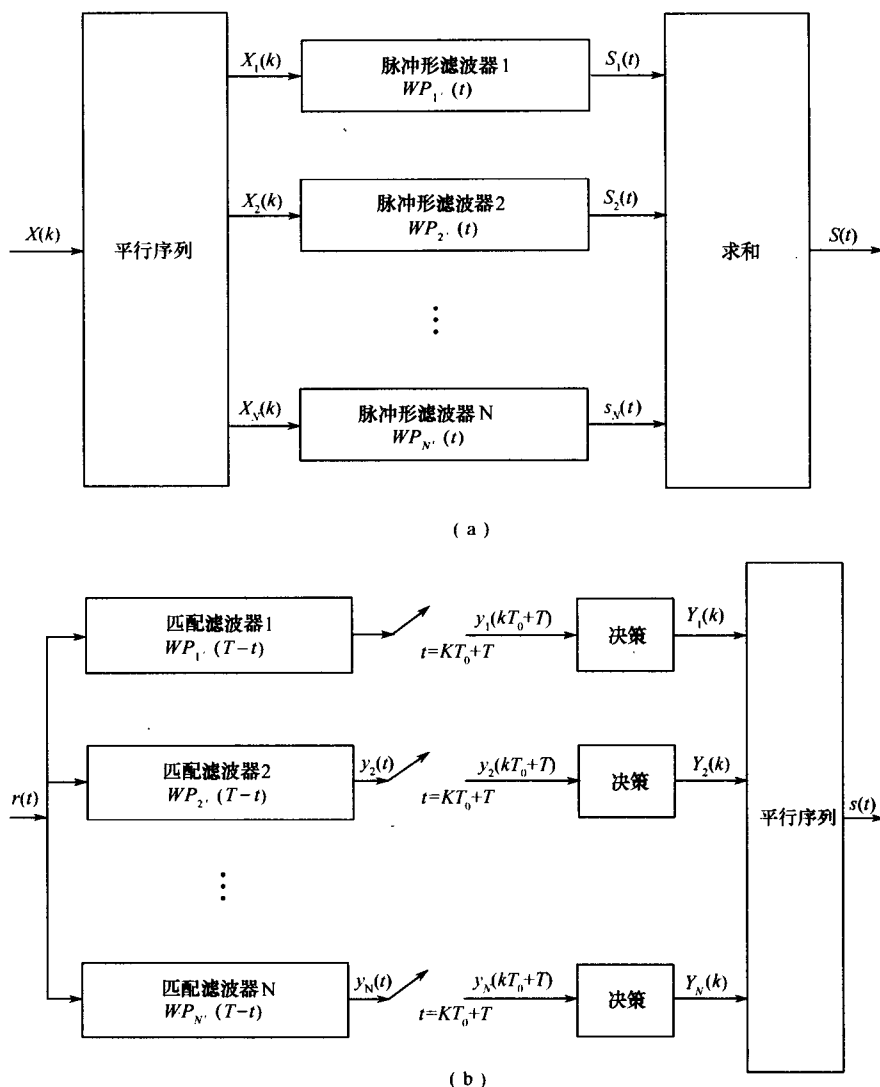


图 9.32 多载波通信系统

(a) 传输器; (b) 接收器。

图 9.33 中的曲线表示每秒  $P_c$  的矢量符号。如果没有任何频率偏置,则所有系统的性能几乎是相同的。当频率偏置达到 10% 时,小波包的系统性能比正交频分复用好一些;当系统允许频率偏置为 25% 时,小波包系统的性能远远好于正交频分复用。特别地, Daubechies  $D_3$  正交小波包系统似乎是最好的,比较两种系统中子载波的频谱,它们非常相似,然而利用小波包的最优集系统能够达到最好的性能,同时还研究了迭代法和分析法。

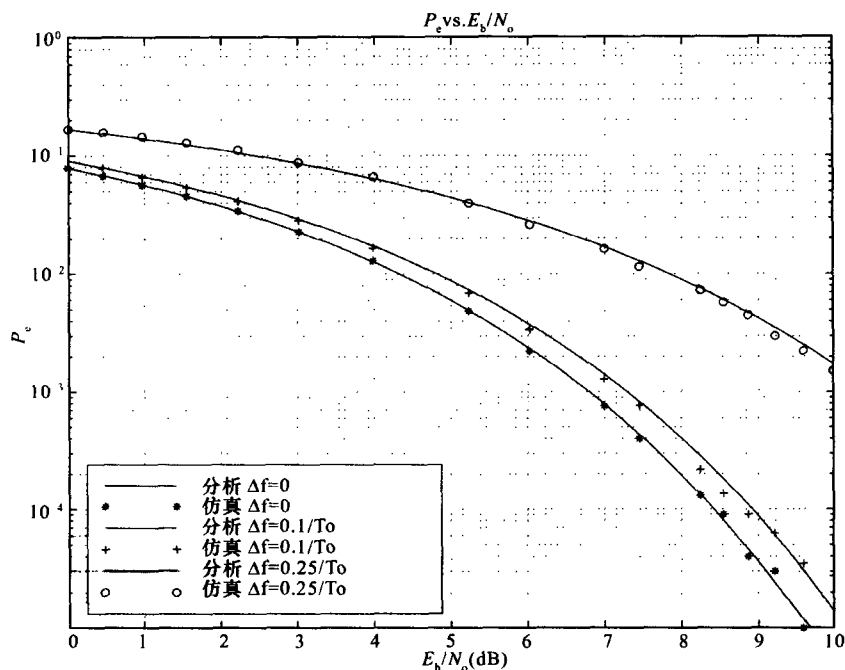


图 9.33 不同频率偏置 D-3 小波包多载波通信系统的错误概率与信噪比

## 9.11 三维医学图像可视化

医学图像可视化对于计划治疗和手术变得越来越普遍。由不同仪器获取的医学图像是二维灰度级信号,根据 2-D 切片重构的 3-D 图像对于 3-D 空间中对象的表面和位置提供了更多的信息。医学团体不断利用通信和信号处理中的最新技术,用于提高诊断的准确性和改善治疗方案。通过远距离放射学,现在外科医师对生活在偏远地区的患者进行诊断和制定治疗方案已经成为可能。传输患者感染区域的 2-D 图像,根据重构的 3-D 图像专家组能够对疾病做出准确诊断已经成为可能。妨碍这项工作进展的问题包括:

(1)大存储要求 3-D 数据集占据巨大的存储空间,而且存储的数据容易恢复是一个重要问题;

(2)低传输率对于电话线或 ISDN 线来说,信道的带宽较小,因此传输速度较慢;

(3)低速图像重构恢复算法是复杂的,而且操纵这些巨大的数据集将花费时间。

我们使用 3-D 小波分解和重构算法对 3-D 数据集进行压缩。利用小波对感兴趣区域(ROI)进行体积压缩的好处是:

(1)根据高度相关的 3-D 图像数据的频谱空间局部化表示来重构图像,即使在高的压缩率下也会产生更自然的和非人工的 3-D 可视化;

(2)变换在空间域和频率域的局部特性允许数据的兴趣区域进行传输。

### 9.11.1 三维小波和算法

类似于二维小波,离散立体数据的三维小波分解能够通过滤波运算来实现,如图 9.34 所示。

在一个单独的 3-D 水平小波变换后,立体数据将被分解成 8 块,如图 9.35 所示。  
3-D 立体能够使用

$$a^{j+1}(x, y, z) = \sum_{n, m, l} a_{n, m, l}^j \phi(2^j x - n, 2^j y - m, 2^j z - l)$$

来近似,其中  $\phi(x, y, z) = \phi(x)\phi(y)\phi(z)$  而  $a_{n, m, l}^j$  是尺度函数系数。我们能够在分辨率  $2^j$  通过增加 3-D 小波函数来增加细节:

$$\begin{aligned} & \sum_{n, m, l} [(\omega_1^j)_{n, m, l} \psi^1(2^j x - n, 2^j y - m, 2^j z - l)] + \\ & (\omega_2^j)_{n, m, l} \psi^2(2^j x - n, 2^j y - m, 2^j z - l) + \\ & (\omega_3^j)_{n, m, l} \psi^3(2^j x - n, 2^j y - m, 2^j z - l) + \\ & (\omega_4^j)_{n, m, l} \psi^4(2^j x - n, 2^j y - m, 2^j z - l) + \\ & (\omega_5^j)_{n, m, l} \psi^5(2^j x - n, 2^j y - m, 2^j z - l) + \\ & (\omega_6^j)_{n, m, l} \psi^6(2^j x - n, 2^j y - m, 2^j z - l) + \\ & (\omega_7^j)_{n, m, l} \psi^7(2^j x - n, 2^j y - m, 2^j z - l) \end{aligned} \quad (9.38)$$

式中  $\omega_1^j$  到  $\omega_7^j$  是小波系数。通过增加上面所罗列的一些细节,我们能够重构任意精度原始 3-D 函数的体积。

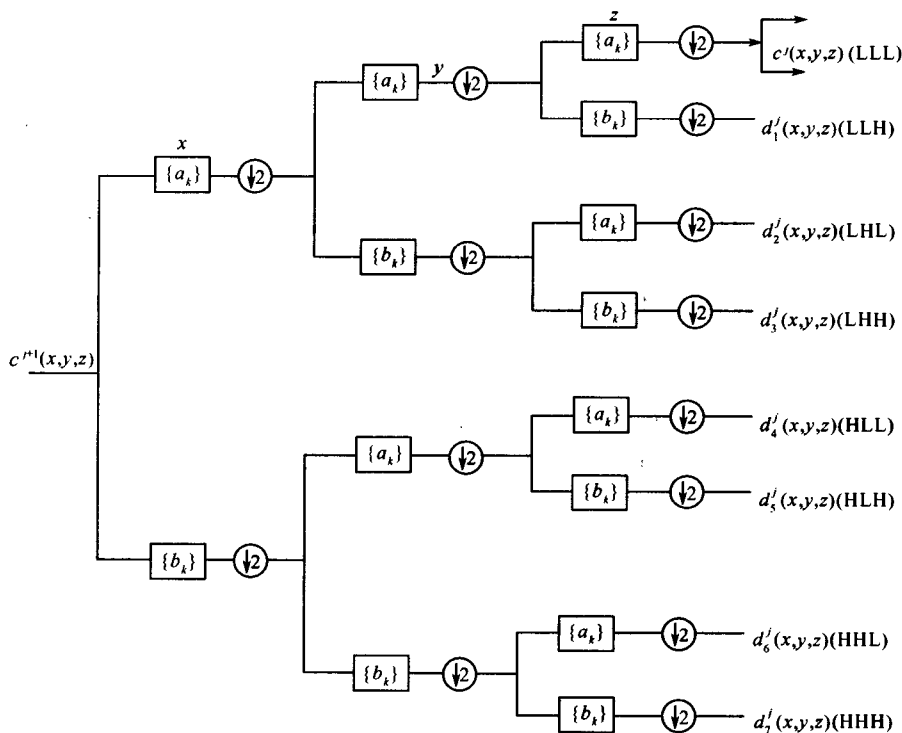


图 9.34 三维分层小波分解算法框图

### 9.11.2 绘制方法

绘制是使用计算机生成图像的过程。在数据可视化中,绘制的目标是将数值数据变换为图解数据或者图解原始事物。传统的技巧假设,当绘制一个对象时,用可见光可以看

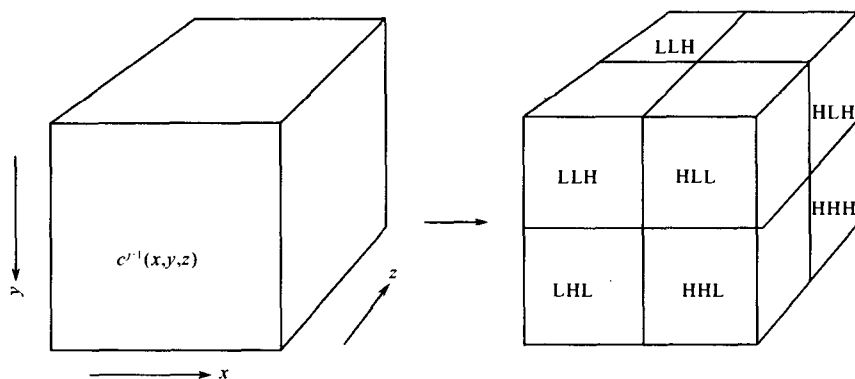


图 9.35 标记在 8 个不同卦限中的小波系数集

见表面和它们的相互作用。然而,常见的对象比如云和雾是半透明的,光通过它们时会发生散射。因此为了准确绘制,我们必须考虑对象内部性质的变化。

当我们使用曲面绘制技巧绘制一个对象时,我们用曲面描述点、线、三角形、多边形或曲面样条等数学模型对象,对象内部无法用曲面表示进行描述。

标量数据立体可视化的主要进展之一是 Lorensen 和 Cline<sup>[19]</sup>中的前进式三次算法。这个技巧及其高维推广的基本假设是周线仅仅能够用有限的方式穿过方格。构造一个实例表格,罗列一个方格所有可能的拓扑状态,在方格点给出标量值的组合。拓扑状态的数目依赖于方格顶点的数目和一个顶点关于周线值所能够具有的内外关系的数目。一个顶点被认为位于周线内部,如果其标量值大于周线的标量值,标量值小于周线值的顶点则说其位于周线的外部。例如,如果一个方格有 4 个顶点,而每个顶点或者在周线的外部或者在周线的内部,则周线穿过方格有  $2^4=16$  种可能的方式。对于正方形方格有 16 种组合,但是根据优化对称性这些能够被缩减为 4 种情形(参见图 9.36)。一旦选择了正确的情形,周线一方格边沿交叉的位置能够使用插值来计算。算法处理完一个方格,然后移动或前进到下一个方格,在所有方格被全部访问完之后,周线将被完成。(注意:图 9.36 中的虚线表示周线模糊)



图 9.36 正方形的内外关系其顶点数值比设定的阈值高或低

○=小于感兴趣的等值点;●=大于感兴趣的等值点。

概括起来,前进式算法按如下步骤进行:

- (1)选择一个方格;
- (2)计算方格每个顶点的内外状态;
- (3)用分离的比特存储每个顶点的二进制状态创建一个索引;
- (4)利用索引查找方格在实例表格中的拓扑状态;
- (5)对实例表格中的每个边界计算周线的位置。

### 9.11.3 兴趣区域

由于小波在频率域和空间域的局部化特性,只要在需要的区域增加细节就能够实



现兴趣区域的细化。图 9.37 显示了原始图像中的兴趣区域和二级小波分解域中的兴趣区域,所以小波可能是一个有用的压缩工具,因为原始图像首先能够由低通系数重构的图像来逼近,其次通过传输兴趣区域中适当的高通系数,则其细节能够被单独地存储到兴趣区域。利用 3-D 小波算法绘制这个体积的结果如图 9.38 至图 9.40 所示。

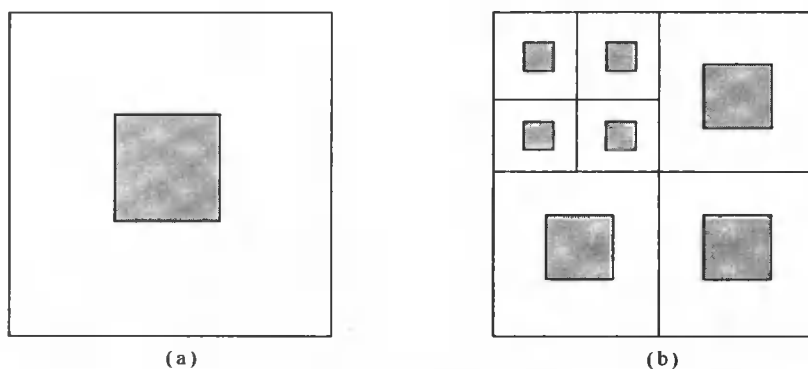


图 9.37 兴趣区域:  
(a)在原始图像中; (b)在子图像中。

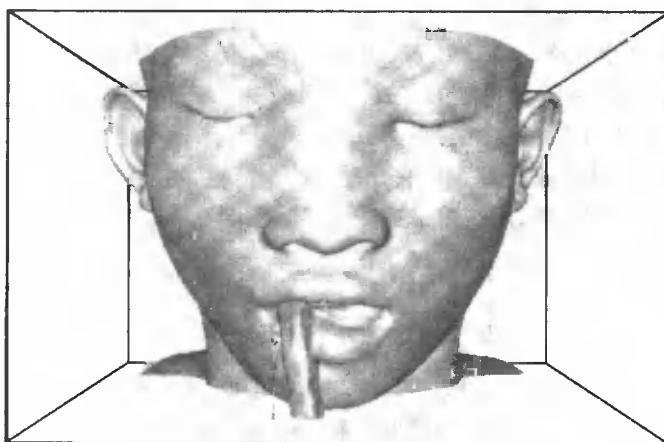


图 9.38 利用等曲面前进三次算法对  $64 \times 64, 8\text{bit}$  图像 93 张切片的多分辨分析绘制

#### 9.11.4 总结

3-D 小波分解和重构算法对于 3-D 图像可视化是有用的。利用兴趣区域方法提高了绘制算法的速度而且实现了数据压缩。

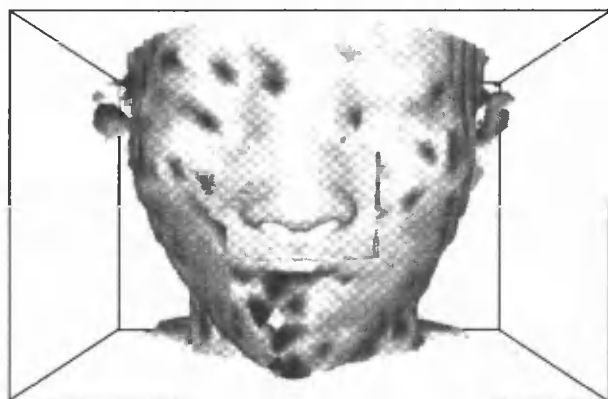


图 9.39 除了兴趣区域(头的鼻子部分)之外的低分辨率绘制

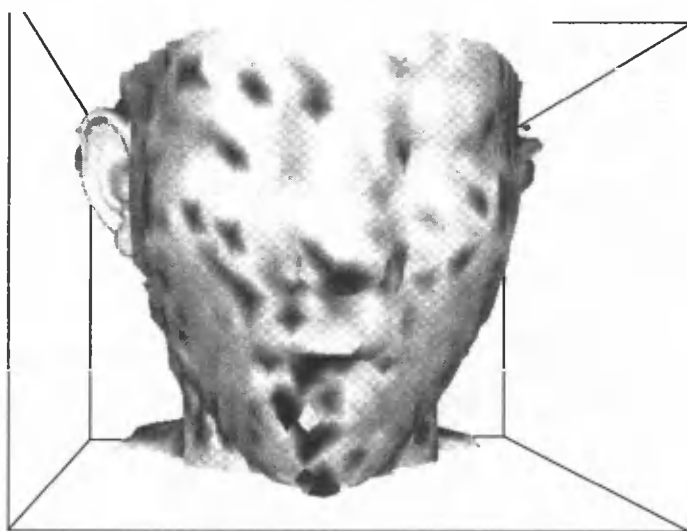


图 9.40 除了兴趣区域(头的左边耳朵部分)之外的低分辨率绘制

## 9.12 计算机程序

### 9.12.1 二维小波算法

```
%
% 程序 algorithm2D.m
%
% 利用 Daubechies 小波( $m = 2$ )分解与重构  $256 \times 256$  图像。把函数值作为起
```

始%系数。

% 试验图像

```
picture = 256 * ones(256);  
for i = 1:256  
    picture(i,i) = 0;  
    picture(i,257 - i) = 0;  
end  
image(picture)  
title('原始图像')
```

% 分解和重构滤波器

```
g0 = [0.68301;1.18301;0.31699;-0.18301];  
k = [0;1;2;3];  
g1 = flipud(g0).*(-1).^k;  
h0 = flipud(g0)/2;  
h1 = flipud(g1)/2;
```

% 分解过程

% 第一层分解

```
for k = 1:256  
    s = [0;0;picture(:,k);0;0];  
    x = conv(s,h0);  
    a = x(1:2:length(x)); % 向下采样  
    x = conv(s,h1);  
    w = x(1:2:length(x)); % 向下采样  
    C(:,k) = [a;w];  
end
```

```
for k = 1:256+8  
    s = rot90([0 0 C(k,:),0 0],3);  
    x = conv(s,h0);  
    a = x(1:2:length(x)); % 向下采样  
    x = conv(s,h1);  
    w = x(1:2:length(x)); % 向下采样  
    CC(k,:) = rot90([a;w]);  
end
```

```

LL = CC(1:132,1:132);
HL = CC(133:264,1:132);
LH = CC(1:132,133:264);
HH = CC(133:264,133:264);

figure(2)

axes ('位置' ,[0.1 0.5 0.3 0.3])
image (LL)
title('LL')
axes('位置',[0.5 0.5 0.3 0.3])
image(LH)
title('LH')
axes('位置',[0.1 0.1 0.3 0.3])
image(HL)
title('HL')
axes('位置',[0.5 0.1 0.3 0.3])
image(HH)
title('HH')

clear C
clear CC

% 第二层分解

for k = 1:132
    s = LL(:,k);
    x = conv(s,h0);
    a = x(1:2:length(x)); % 向下采样
    x = conv(s,h1);
    w = x(1:2:length(x)); % 向下采样
    C(:,k) = [a;w];
end

for k = 1:128+8
    s = rot 90(C(k,:),3);
    x = conv(s,h0);
    a = x(1:2:length(x)); % 向下采样

```

```

x = conv(s,h1);
w = x(1:2:length(x)); % 向下采样
CC(k,:) = rot 90([a;w]);
end

LL_LL = CC(1:68,1:68);
HL_LL = CC(69:136,1:68);
LH_LL = CC(1:68,69:136);
HH_LL = CC(69:136,69:136);
clear C
clear CC

% 重构过程

% 第二层重构

s = [LL_LL LH_LL;HL_LL HH_LL];
for k = 1:136
    x = zeros(136,1);
    x(1:2:136) = rot 90(s(k,1:68),3);
    y = zeros(136,1);
    y(1:2:136) = rot 90(s(k,69:136),3);

    x = con(x,g0)+ conv(y,g1);
    C(k,:) = rot 90(x(4:length(x)-4));
end

s = C;
clear C

for k = 1:132
    x = zeros(136,1);
    x(1:2:136) = s(1:68,k);
    y = zeros(136,1);
    y(1:2:136) = s(69:136,k);

    x = conv(x,g0)+ conv(y,g1);
    C(:,k) = x(4:length(x)-4)
end

```

```

LL_rec = C;
clear C

% 第一层重构

s = [LL_rec LH; HL HH];
for k = 1:264
    x = zeros(264,1);
    x(1:2:264) = rot 90(s(k,1:132),3);
    y = zeros(264,1);
    y(1:2:264) = rot 90(s(k,133:264),3);
    x = conv(x,g0)+ conv(y,g1);
    C(k,:) = rot 90(x(4:length(x)-4));
end

s = C;
clear C

for k = 1:260
    x = zeros(264,1);
    x(1:2:264) = s(1:132,k);
    y = zeros(264,1);
    y(1:2:264) = s(133:264,k);

    x = conv(x,g0)+ conv(y,g1);
    C(:,k) = x(4:length(x)-4);
end

picture_rec = C(3:258,3:258);

figure(3)
image(picture_rec)
title('重构图像')

```

### 9.12.2 小波包算法

```

%
% 程序 waveletpacket.m
%

```

```

% 利用 Daubéchies 小波(m = 2)对函数的小波包分解与重构。把函数值作为起
% 始系数。
%

% 信号

v1 = 100;    % 频率
v2 = 200;
v3 = 400;
r = 1000;    % 采样率

k = 1:100;
t = (k-1)/r;
s = sin(2*pi*v1*t) + sin(2*pi*v2*t) + sin(2*pi*v3*t);

% 分解与重构滤波器

g0 = [0.68301;1.18301;0.31699;-0.18301];
k = [0;1;2;3];
g1 = flipud(g0).*(-1).^k;
h0 = flipud(g0)/2;
h1 = flipud(g1)/2;

% 分解过程

% 第一层分解

x = conv(s,h0);
a = x(1:2:length(x));    % 向下采样
x = conv(s,h1);
w = x(1:2:length(x));    % 向下采样

% 第二层分解

x = conv(a,h0);
aa = x(1:2:length(x));
x = conv(a,h1);
aw = x(1:2:length(x));

x = conv(w, g0);

```

```

wa  = x(1:2:length(x));
x   = conv(w,g1);
ww  = x(1:2:length(x));

% 重构过程

% 第二层重构

x   = zeros(2 * length(aa),1);
x(1:2:2 * length(aa)) = aa(1:length(aa));
y   = zeros(2 * length(aw),1);
y(1:2:2 * length(aw)) = aw(1:length(aw));
x   = conv(x,g0) + conv(y,g1);
a_rec = x(4:length(x)-4);

x   = zeros(2 * length(wa),1);
x(1:2:2 * length(aw)) = wa(1:length(wa));
y   = zeros(2 * length(ww),1);
y(1:2:2 * length(ww)) = ww(1:length(ww));
x   = conv(x,h0) + conv(y,h1);
w_rec = x(4:length(x)-4);

% 第一层重构

y   = zeros(2 * length(w_rec),1);
y(1:2:2 * length(w_rec)) = w_rec(1:length(w_rec));
x   = zeros(2 * length(a_rec),1);
x(1:2:2 * length(a_rec)) = a_rec;

x   = conv(x,g0);
y   = conv(y,g1);
y   = x(1:length(y)) + y;
s_rec = y(4:length(y)-4);

```

## 参 考 文 献

- [1] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Ser. Appl. Math. 61. Philadelphia: SIAM, pp. 326, 1992
- [2] R. R. Coifman and M. V. Wickerhauser. Entropy-Based Algorithms for Best Basis Selection, IEEE Trans. Inform. Theory, 38(2), pp. 713-718, 1992.



- [3] B. Vidakovic' and P. Müller. Wavelets for Kids. Durham, N. C. : Institute of Statistics and Decision Sciences. Duke University, 1991.
- [4] M. Wang and A. K. Chan. Wavelet-Packet-Based Time-Frequency Distribution and its Application to Radar Imaging. *Int. J. Numer. Model. : Electron. Networks Devices Fields*, 11, pp. 21—40, 1998.
- [5] H. C. Choe. Ph. D. Dissertation. Texas A&M University, College Station, Texas, 1997.
- [6] D. K. Kil and F. B. Shin. Pattern Recognition and Prediction with Applications to Signal Characterization. Woodbury, N. Y. : American Institute of Physics Press, 1996.
- [7] T. F. Yu, Ph. D. Dissertation. Texas A&M University, College Station, Texas, 1997.
- [8] M. Rabbani and P. W. Jones. Digital Image Compression Techniques, Vol TT7. Bellingham, Wash. : SPIE Press, 1991.
- [9] J. M. Shapiro. Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients, *IEEE Trans. Signal Process.* , 41 (12), pp. 3445—3462, 1993.
- [10] A. Said and W. A. Pearlman. Image Compression Using a Spatial — Orientation tree, *IEEE Int. Sym. on Circuit and Systems*, pp. 279-282, 1993.
- [11] A. Said and W. A. Pearlman. A New, Fast, and Efficient Image Coded Based onn Set Portioning in Hierarchical Trees, *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.* , 6, pp. 243-250, 1996.
- [12] A. Said. An Image Multiresolution Representation for Lossless and Lossy Compression, *IEEE Trans. Image Process.* , 5, pp. 1303—1310, 1996.
- [13] N. W. Lin, D. K. Shin. T. F. Yu, J. S. Liu, and A. K. Chan, The Generalized Self—Similarity Tree Coder, Technical Report. College Station, Texas; Wavelet Research Laboratory, Texas A&M University, 1996.
- [14] M. E. Peters, D. R. Voegeli, and K. A. Scanlan. in Breast Imaging, R. L. Eisenberg (Ed. ). New York: Churchill Livingstone, 1989.
- [15] R. N. Strickland and H. I. Hahn. Wavelet Transforms for Detecting Microcalcification in Mammograms, *IEEE Trans. Med. Imaging*, 15, pp. 218—229, 1996.
- [16] D. A. McCandless, S. K. Rogers, J. W. Hoffmeister, D. W. Ruck, R. A. Raines, and B. W. Suter. Wavelet Detection of Clustered Microcalcification, *Proc. SPIE Wavelet Appl.* , 2762, pp. 388—399, 1996.
- [17] P. P. Gandhi and S. A. Kassam. Analysis of CFAR Processors in Nonhomogeneous Background, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* , 24(4), pp. 427—445, 1988.
- [18] J. G. Proakis and M. Salehi. Communication Systems Engineering, Upper Saddle River, N. J. : Prentice Hall, 1994.
- [19] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes; A high Resolution 3-D Surface Construction Algorithm, *Comput. Graphics*, 21(4), pp. 163—169, 1987.

## 第 10 章 小波在边值问题中的应用

到目前为止,讨论的所有应用都是处理时间域、频谱域和时间—频谱域特定的函数(信号、图像等)。我们已经看到函数的小波基时间—尺度分析能够提供重要的额外信息,而这些额外信息通过时间域或者频率域分析不可能得到。通常遇到的另一类问题是解边界值问题(BVP),在比边值问题中函数是未知的,只知道它们的一些性质和感兴趣区域中某些点上的函数值。这一章,我们讨论小波在这类问题中的应用。

电子工程中研究的许多现象在数学上能够用二阶偏微分方程(PDE)来描述。偏微分方程的一些例子是 Laplace 方程、Poisson 方程、Helmholtz 方程和 Schrödinger 方程等。这些方程中的某些可能会有解析解,但不是所有感兴趣的情形。通常,这些偏微分方程能够被转化为积分方程,而积分方程引起人们关注的特征之一是边界条件是固有的,因此不必从外部应用<sup>[1]</sup>,而且解在数学上的存在性和唯一性用积分形式更容易处理。

用微分方程或者积分方程表示的物理现象能够被看作一个作用在未知函数上生成已知函数的算子。这一章将涉及到线性算子,借助完备基将线性算子方程被转化为线性方程组,然后求解未知系数。用于解偏微分方程的有限元和有限差分技巧会导致稀疏矩阵和带状矩阵,但积分方程几乎总是导致稠密矩阵,一个例外情形是当选择的基函数,恰好是算子的特征函数时用此基函数来表示未知函数。

对于边值问题,小波的两个主要性质是分层性和消失矩性质。由于小波的分层(多分辨率)性,小波在不同分辨率下是相关的,这个性质使得小波适合于解偏微分方程中的多网格法。此外,消失矩性质在将积分方程生成的稠密矩阵稀疏化的过程中是有吸引力的,借助消失矩性质某些阶函数的积分为零。

完整地说明小波在积分方程和微分方程中的应用已超出本章的范围,我们的目的是给读者提供一些小波对边值问题应用的初步理论和结果,而更多的细节可以在给出的文献中找到。在电子学工程中,经常遇到积分方程,因此我们将强调其小波解,给出通常遇到的几个积分方程的例子。解积分方程的第一步,也是最重要的一步是将积分方程变换为线性方程组,讨论了生成矩阵方程的惯用基方法和小波基方法,这两种方法属于一般的矩量法(MoM)范畴。我们称基于惯用基(脉冲、三角的、分段正弦等)的方法为惯用矩量法,而基于小波基的方法为小波矩量法。给出了一些数值结果来说明小波基技巧的好处,我们还讨论了有界区间上的小波。解积分方程的一些技巧,对于微分方程也是有用的。本章最后,我们简单描述小波在偏微分方程中的应用并且给出参考文献,读者在相关文献中能够发现更多的信息。

### 10.1 积分方程

考虑下面的第一类型积分方程:

$$\int_a^b f(x')K(x, x')dx' = g(x) \quad (10.1)$$

其中  $f$  是未知函数而积分核  $K$  和函数  $g$  已知。根据积分核和积分限, 这个方程被叫做不同的名字, 比如 Fredholm 积分方程、Volterra 积分方程、卷积积分方程和 Weiner-Hopf 积分方程等。实际上, 此类积分方程时常出现<sup>[2]</sup>。比如, 在逆问题中, 人们的目的是根据  $g$  的泛函形式所表示的已知数据集重建函数  $f$ , 出现了第一类积分方程。在一些电磁散射问题中, 金属表面上的电流分布与入射场有关, 入射场是以 Green 函数作为积分核的第一类型积分方程的形式。注意到解  $f$  等价于找到  $g$  关于积分核  $K$  的逆变换。特别地, 若  $K(x, x') = e^{-j\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}$ , 则  $f$  正是  $g$  的逆傅里叶变换。假定方程(10.1)有唯一解, 虽然我们只是讨论了第一类型积分方程的解, 但很容易将其推广到第二类型积分方程<sup>[3,4]</sup> 和高维积分方程<sup>[5]</sup>。

作为式(10.1)的例子, 考虑用 TM(横磁)平面波照射无限长金属圆柱体, 如图 10.1 所示。把表面电流分布与入射场联系起来的积分方程能够用强制边界条件表示为

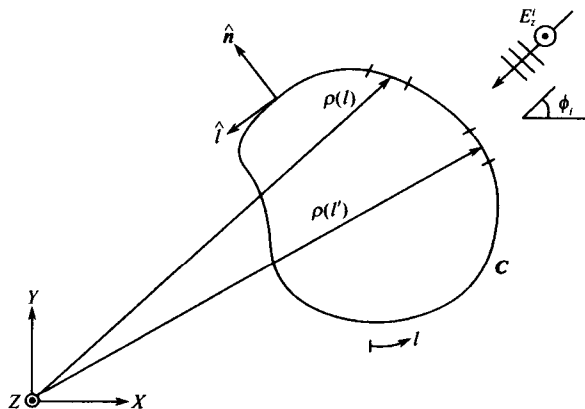


图 10.1 用横磁平面波照射无限长金属圆柱体的截面

$$\hat{n} \times \mathbf{E}(\rho) = \hat{n} \times [\mathbf{E}_i(\rho) + \mathbf{E}_s(\rho)] = 0, \quad \rho \in S \quad (10.2)$$

式中  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{E}_i$  和  $\mathbf{E}_s$  分别表示全电场、入射电场和散射电场,  $S$  表示圆柱体的表面。对于 TM 平面波入射场:

$$\mathbf{E}_i = \hat{z}E_z^i, \quad \mathbf{H}_i = \hat{l}H_l^i, \quad \mathbf{J} = \hat{z}J_{sz} \quad (10.3)$$

同往常一样, 这里  $\mathbf{H}_i$  是入射磁场; 而  $\mathbf{J}$  是圆柱体表面的感应电流。积分方程将电流、入射场和 Green 函数联系在一起:

$$J\omega\mu_0 \int_C J_{sz}(l')G(l, l')dl' = E_z^i(l) \quad (10.4)$$

其中

$$G(l, l') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}[k_0 |\rho(l) - \rho(l')|] \quad (10.5)$$

而且  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  表示波长,  $E_z^i$  是入射电场的  $z$ -分量,  $H_0^{(2)}$  是第二类型 0 阶 Hankel 函数。这里积分围道已经关于弦长被参数化, 场分量  $E_z^i$  能够被表示为

$$E_z^i(l) = E_0 \exp[jk_0(x(l)\cos\phi_i + y(l)\sin\phi_i)] \quad (10.6)$$

式中,  $\phi_i$  是入射角。

显然方程(10.4)是方程(10.1)的形式。我们的目的是对于未知的电流分布  $J_{sz}$  求解

方程(10.4)和计算雷达截面积(RCS)。雷达截面积由下式给出:

$$\frac{\text{RCS}}{\lambda_0} = k_0 \rho \frac{|E_z^s|^2}{|E_z^i|^2} = \frac{\eta_0^2 k_0^2}{8\pi} |F_\phi|^2 \quad (10.7)$$

其中  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  是已知常数,而且

$$F_\phi = \int_C \exp[jk_0(x(l')\cos\phi + y(l')\sin\phi)] J_{sz}(l') dl' \quad (10.8)$$

一个细的完全传导带的散射如图 10.2(a) 所示,可以得到一个类似于式(10.4)的方程。对于这种情况我们有:

$$\int_{-h}^h J_{sy}(z') G(z, z') dz' = E_y^i(z) \quad (10.9)$$

式中  $G(z, z')$  由式(10.5)来确定。

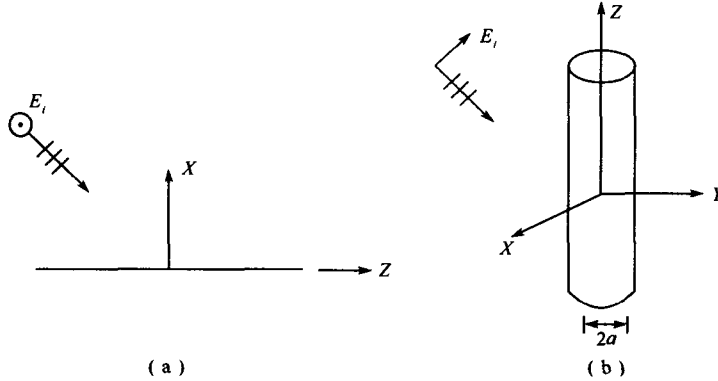


图 10.2 (a) 用横磁波照射薄半波长长金属带;  
(b) 用平面波照射长为  $\lambda/2$  和厚为  $\lambda/1000$  的细金属线

作为最后的例子,考虑如图 10.2(b) 所示的细金属线的散射。这里金属线上的电流与入射场的相关关系为

$$\int_{-l}^l I(z') K_w(z, z') dz' = -E^i(z) \quad (10.10)$$

其中积分核  $K_w$  由下式确定:

$$K_w(z, z') = \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon_0} \frac{\exp(-jk_0 R)}{R^5} [(1 + jk_0 R) \times (2R^2 - 3a^2) + k_0^2 a^2 R^2] \quad (10.11)$$

$$E^i(z) = E_0 \sin\theta \exp(jk_0 z \cos\theta) \quad (10.12)$$

在 Pocklington 方程的积分微分形式中,交换积分与微分的次序同时利用约化核距离  $R = [a^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ ,可以得到此积分核,其中  $a$  是金属线的半径<sup>[6]</sup>。

解任何积分或微分方程时第一步是将方程转化为矩阵方程,然后求解未知系数。让我们重新将方程(10.1)写成  $L_K f = g$  的形式,其中

$$L_K f = \int_a^b f(x') K(x, x') dx' \quad (10.13)$$

目标是将方程(10.1)转化为矩阵方程:

$$A c = b \quad (10.14)$$

式中  $A$  是一个二维矩阵,有时称为阻抗矩阵; $c$  是未知系数的列矢量; $b$  是相对于  $g$  的列矢

量。计算时间主要依赖于得到与求解方程(10.14)的方法。下面几节,我们将使用惯用基函数和小波基函数表示未知函数。

## 10.2 矩 量 法

文献[7]中的矩量法可能是求解电磁学方程使用最广泛的技巧。在惯用的矩量法中,将积分边界近似离散化为许多段,然后利用具有未知系数的已知基函数展开未知函数。这些基可能是扩展到整个长 $[a, b]$ 的整体域(整个域),或者可能只是覆盖一小段区间的局部域(子域),也许是两者的结合。最后,用同样的或不不同的函数检验所得到的方程,从而得到线性方程组而其解给出未知系数。

未知函数  $f(x)$  能够被写成:

$$f(x) = \sum_n c_n \Lambda_n(x) \quad (10.15)$$

式中 $\{\Lambda_n\}$ 构成基函数的完全集。为了精确表示  $f(x)$ ,我们可能需要上述级数中的无限项,然而,实际中对于给定的可接受误差有限项将是充分的。将  $f(x)$  的级数表示代入原方程(10.1),可以得到:

$$\sum_{n=1}^N c_n L_K \Lambda_n \approx g \quad (10.16)$$

我们假设  $N$  充分大使得上面的表示是精确的。在式(10.16)的两端取与权函数或试验函数 $\{\xi_m; m = 1, \dots, M\}$ 的内积,可以得到线性方程组:

$$\sum_{n=1}^N c_n \langle \xi_m, L_K \Lambda_n \rangle = \langle \xi_m, g \rangle, m = 1, \dots, M \quad (10.17)$$

也可以写成矩阵形式:

$$[A_{nm}][c_n] = [b_m] \quad (10.18)$$

其中

$$A_{nm} = \langle \xi_m, L_K \Lambda_n \rangle, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N$$

$$b_m = \langle \xi_m, g \rangle, \quad m = 1, \dots, M$$

矩阵方程的解给出了系数 $\{c_n\}$ ,从而可以得到积分方程的解。两种主要选择的试验函数是:① $\xi_m(x) = \delta(x - x_m)$ ,其中 $x_m$ 是定义域中的离散化点;② $\xi_m(x) = \Lambda_m(x)$ 。前一种情形的方法称为点匹配法(point matching method);而后一种方法通常称为 Galerkin 方法。前一段中的算子  $L_k$  能够是任何线性算子,既可以是微分算子也可以是积分算子。

## 10.3 小 波 方 法

惯用基(局部或整体)直接应用于积分方程时一般会导致一个稠密矩阵 $A$ ,因此,线性方程组的反演和最后求解很费时间。后面几节将会清楚为什么惯用基给出稠密矩阵而小波基生成稀疏矩阵,即使我们利用定义域的非均匀离散化,惯用矩量法是在单一的水平上在函数的定义域(比如 $[a, b]$ )中逼近未知函数。另一方面,小波矩量法具有潜在的多水平性质。

Beylkin 等人在文献[8]中首先提出了小波在稀疏化积分方程中的应用。Alpert 等人在文献[3]中利用波状基函数求解二阶积分方程。在电子工程中,小波已经用于解电磁散

射和传输线问题中所产生的积分方程<sup>[5,9~23]</sup>,下面简单描述小波在求解积分方程中的4种不同的途径。

### 10.3.1 快速小波算法的使用

在这个方法中,利用基函数比如三角函数经过惯用矩量法得到阻抗矩阵  $\mathbf{A}$ ,然后利用小波将这个矩阵变换为稀疏矩阵<sup>[9,10]</sup>。考虑由小波形成的矩阵  $\mathbf{W}$ 。原始矩量法阻抗矩阵到新的小波基的变换为

$$\mathbf{WAW}^T(\mathbf{W}^T)^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{Wb} \quad (10.19)$$

能够被写成:

$$\mathbf{A}_w \cdot \mathbf{c}_w = \mathbf{b}_w \quad (10.20)$$

式中  $\mathbf{W}^T$  表示矩阵  $\mathbf{W}$  的转置。新的小波变换线性方程组是:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_w &= \mathbf{WAW}^T \\ \mathbf{c}_w &= (\mathbf{W}^T)^{-1}\mathbf{c} \\ \mathbf{b}_w &= \mathbf{Wb} \end{aligned} \quad (10.21)$$

解矢量  $\mathbf{c}$  由下式确定:

$$\mathbf{c} = \mathbf{W}^T(\mathbf{WAW}^T)^{-1}\mathbf{Wb}$$

对于正交小波来说有  $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}^{-1}$ ,而且变换式(10.19)是酉相似变换。文献[9,10]已经证明阻抗矩阵  $\mathbf{A}_w$  是稀疏的,这样便极大地缩减了反演时间。利用离散小波变换(DWT)算法能够得到  $\mathbf{A}_w$  而且最终得到解矢量  $\mathbf{c}$ 。

### 10.3.2 小波的直接应用

将小波应用于积分方程的另一个方法是直接应用小波,也就是说,在使用 Galerkin 方法之前,首先在最低水平将未知函数表示为几个水平(尺度)的小波和尺度函数的叠加。

让我们按照尺度函数和小波函数展开方程(10.1)中的函数  $f$ :

$$f(x) = \sum_{s=s_0}^{s_u} \sum_{k=K_1}^{K(s)} w_{k,s} \psi_{k,s}(x) + \sum_{k=K_1}^{K(s_0)} a_{k,s_0} \phi_{k,s_0}(x) \quad (10.22)$$

这里应该指出小波  $\{\psi_{k,s}\}$  本身构成完全集,所以未知函数能够完全根据小波来展开。然而,为了在展开式中只有有限项,式(10.22)中必须包含尺度函数部分,换句话说,因为  $\{\psi_{k,s}\}$  的带通滤波器特性,所以随着尺度参数  $s$  值变小能够成功地提取未知函数的低频成分,但由于  $\phi_{k,s_0}$  的低通滤波器特性将会保持原始信号的最低频率成分或粗逼近。

在式(10.22)中,  $s_0$  的选择由小波的阶来约束,而  $s_u$  由问题的物理特性确定。根据右手规则,在涉及电磁散射的应用中应该选择最高尺度  $s_u$  使得  $1/2^{s_u+1}$  不超过  $0.1\lambda_0$ 。

将式(10.22)所给出的  $f$  展开式代入方程(10.1),而且将所得方程用同样的展开函数集检验,这个结果给出线性方程组:

$$\begin{bmatrix} [A_{\phi,\phi}] & [A_{\phi,\psi}] \\ [A_{\psi,\phi}] & [A_{\psi,\psi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_{k,s_0}]_k \\ [w_{n,s}]_{n,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_z^i, \phi_{k',s_0} \rangle_{k'} \\ \langle E_z^i, \psi_{n',s} \rangle_{n',s} \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

其中

$$[A_{\phi,\phi}] = \langle \phi_{k',s_0}, (L_K \phi_{k,s_0}) \rangle_{k,k'} \quad (10.24)$$

$$[A_{\phi, \psi}] = \langle \phi_{k', s_0}, (L_K \psi_{k, s_0}) \rangle_{k', n, s} \quad (10.25)$$

$$[A_{\psi, \phi}] = \langle \phi_{n', s'}, (L_K \psi_{k, s_0}) \rangle_{k, n', s'} \quad (10.26)$$

$$[A_{\psi, \psi}] = \langle \phi_{n', s'}, (L_K \psi_{n, s}) \rangle_{n, s, n', s'} \quad (10.27)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (10.28)$$

$$(L_K f)(x) = \int_a^b f(x')K(x, x')dx' \quad (10.29)$$

在式(10.23)中,  $[\psi_{n, s}]_{n, s}$  是一个一维矢量, 不应该与二维矩阵混淆, 这里对于固定的  $s$  值指标  $n$  首先变化。

我们能够解释惯用矩方法的稠密性和小波矩方法的稀疏性。事实上与小波不同, 本书中所讨论的尺度函数不具有消失矩性质, 因此对于两个脉冲或三角形函数  $\phi_1$  和  $\phi_2$  (惯用矩方法的基而且适合于作为尺度函数), 即使对于非重叠的支撑  $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$ , 由于  $L_K \phi_2$  不是很小, 因此  $\langle \phi_1, L_K \phi_2 \rangle$  也不是很小。另一方面, 根据消失矩性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi_m(t) dt = 0, \quad p = 0, \dots, m-1 \quad (10.30)$$

如果将局部视为某阶多项式函数与小波整体发生的变化抵消, 则积分为 0。远离奇异点, 积分核通常具有局部多项式性质, 因此对于非重叠的支撑, 积分比如  $(L_K \psi_{n, s})$  与涉及小波的内积都是很小的。

由于其整体正定性, 尺度函数对函数具有平滑或减小变化的作用。光滑作用能够被理解如下, 如果让两个脉冲函数做卷积, 两个脉冲函数不连续但都是正的, 所得到的函数是一个连续的线性  $B$  样条。类似地, 如果卷积两个线性  $B$  样条, 则可以得到二次连续可微三次  $B$  样条。与这些类似, 函数  $L_K \phi_{k, s_0}$  比积分核  $K$  本身要光滑。此外, 根据多分辨分析的性质可以得到:

$$\langle \phi_{k, s}, \psi_{l, s'} \rangle = 0, \quad s \leq s' \quad (10.31)$$

积分  $\langle \phi_{k', s_0}, (L_K \psi_{n, s}) \rangle$  和  $\langle \psi_{n', s'}, (L_K \phi_{k, s_0}) \rangle$  非常小。

尽管对角占优, 但矩阵中的分块矩阵  $[A_{\phi, \psi}]$  与对角线上的值相比通常没有非常小的值。在惯用矩量法的情形, 所有矩阵元素是  $\langle \phi_{k', s}, (L_K \phi_{k, s}) \rangle$ , 因此没有阈值使得这种矩阵是稀疏的。在小波矩方法的情形,  $[A_{\psi, \psi}]$  的元素占了矩阵很少的一部分 (对于线性样条是  $5 \times 5$  而对于三次样条为  $11 \times 11$ ), 而其余元素值的大小与最大元素相比是很小的, 所以大量数目的元素能够设置为 0 而不会影响解的估计。

### 10.3.3 频谱域小波

在前面各章中, 我们已经使用了时间(空间)域小波。在前一节, 利用小波的局部支撑和消失矩性质得到了积分方程的稀疏矩阵表示。在某些应用中, 特别是电磁问题的频谱域方法, 频谱域小波可能是非常有用的。每当我们根据时间域基函数展开未知函数和在频谱域进行数值计算面临问题时, 应该考察时间—频率窗的乘积以确定使用特别基函数的效率。因为三次样条和相应的半正交小波的时间(空间)频率(波数)窗乘积几乎是最理想的, 出现在传输线间断问题中的二重积分能够被有效地估计。在这一节, 我们考虑一个来自于传输线间断的例子, 以此来说明频谱域中小波的用途。

传输线的结构如图 10.3 所示。本章的目的不是用积分方程表示这些结构, 表示的细

节读者可以参考文献[5,24,25],可以得到积分方程:

$$\int \Delta(k_x, k_y) \hat{f}_y(k_y) \hat{\phi}_k(-k_y) dk_x dk_y = 0 \quad (10.32)$$

其中

$$\Delta(k_x, k_y) = \hat{G}_{yy}(k_x, k_y) J_0^2(k_x d) \begin{cases} \cos^2 k_x p \\ \sin^2 k_x p \end{cases} \quad (10.33)$$

式中  $G_{yy}$  是适当的 Green 函数;  $\cos^2 k_x p$  和  $\sin^2 k_x p$  分别是奇偶模式。函数  $\hat{f}_y(k_y) \hat{\phi}_k(k_y)$  表示电磁流  $y$  相关基函数的傅里叶变换。为了得到任何无穷传输线的传播常数  $k_y$ , 我们假设所有场和电流分布与  $e^{-jk_y y}$  具有同样的  $y$  相关。对于这种情形, 容易得到:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{HM}(k_x, k_{ye}) dk_x = 0 \quad (10.34)$$

由于隙缝(带)的横向尺寸与波长相比是很小的, 只是因为基本模式我们假设电流分布是连续的。几乎间断性除了由基本模式引起的整域基函数外, 子域基函数被用于展开未知电流(磁的或电的)是为了解释由不连续性产生的高阶模式所引起的偏离。我们使用 3 个不同子域基函数的集合: ①分段正弦曲线(PWS); ②三次 B 样条; ③三次 B 样条与相应半正交小波的结合。

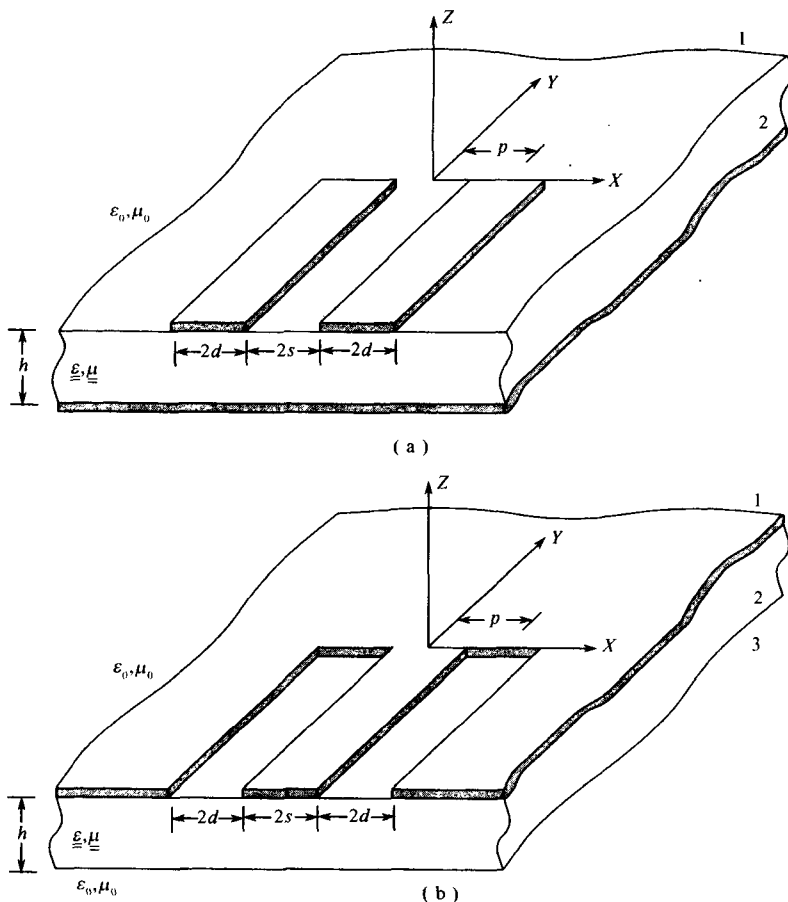


图 10.3 (a) 开耦合微带; (b) 单轴衬底的短路耦合隙缝线



对于情形(1)和(2),电流的纵向变差为

$$f_y(y) = s_i(y) \pm \Gamma s_r(y) + \sum_{k=0}^K a_k \phi_k(y) \quad (10.35)$$

其中  $K > 0$  而且正负号分别应用于带形传输线结构(图 10.3(a)) 和隙缝传输线结构(图 10.3(b))。理想状态下,反射系数  $\Gamma$  的值应该是 1,但是我们将看到  $|\Gamma| < 1$  表明这个终端的伪特性,如图 10.3 所示。整域函数  $s_i$  和  $s_r$  分别表示入射波和反射波,给定如下:

$$s_i(y) = \cos k_{ye} y U\left(-y - \frac{\pi}{2k_{ye}}\right) - j \sin k_{ye} y U(-y) \quad (10.36)$$

$$\hat{S}_i(k_y) = \left[ \exp\left(-j \frac{\pi k_y}{2k_{ye}}\right) - j \right] \times \left\{ \frac{k_{ye}}{k_y^2 - k_{ye}^2} + j \frac{\pi}{2} [\delta(k_y - k_{ye}) - \delta(k_y + k_{ye})] \right\} \quad (10.37)$$

$$s_r(y) = \cos k_{ye} U\left(-y - \frac{\pi}{2k_{ye}}\right) + j \sin k_{ye} y U(-y) \quad (10.38)$$

$$\hat{S}_r(k_y) = \left[ \exp\left(-j \frac{\pi k_y}{2k_{ye}}\right) + j \right] \times \left\{ \frac{k_{ye}}{k_y^2 - k_{ye}^2} + j \frac{\pi}{2} [\delta(k_y - k_{ye}) - \delta(k_y + k_{ye})] \right\} \quad (10.39)$$

式中  $k_{ye}$  是基本模式的传播常数;而  $U(y)$  是 Heaviside 函数,通常定义为

$$U(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad (10.40)$$

分段正弦曲线情形的子域基函数  $\phi_k$  为

$$\phi_k(y) = \cap [y + \tau(k+1)] \quad (10.41)$$

$$\cap(y) = \begin{cases} \frac{\sin k_{ye}(\tau - |y|)}{\sin k_{ye}\tau}, & |y| \leq \tau \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10.42)$$

$$\hat{\phi}_k(k_y) = e^{-j\tau(k+1)k_y} \frac{2k_{ye}}{k_y^2 - k_{ye}^2} \times \frac{\cos k_{ye}\tau - \cos k_y\tau}{\sin k_{ye}\tau} \quad (10.43)$$

具有  $0 < \tau < \pi/2k_{ye}$ 。对于 B 样条的情形:

$$\phi_k(y) = N_4 \left( \frac{y}{\tau} + k + 4 \right) \quad (10.44)$$

$$\hat{\phi}(k_y) = \tau e^{-j(k+2)k_y\tau} \left[ \frac{\sin(k_y\tau/2)}{k_y\tau/2} \right]^4 \quad (10.45)$$

对于基函数的第三种选择,对  $f_y(y)$  有下列表示:

$$f_y(y) = s_i(y) \pm \Gamma s_r(y) + \sum_{s=s_0}^0 \sum_{n=0}^{N(s)} w_{n,s} \psi_{n,s}(y) + \sum_{k=0}^{K(s_0)} a_k \phi_{k,s_0}(y) \quad (10.46)$$

其中  $N(s), K(s_0) \geq 0, s_0 \leq 0$ , 而且

$$\phi_{k,s} = N_4 \left( \frac{2^s y}{\tau} + k + 4 \right) \quad (10.47)$$

$$\psi_{k,s} = \psi_4 \left( \frac{2^s y}{\tau} + k + 7 \right) \quad (10.48)$$

$$\hat{\psi}_{k,s}(k_y) = \frac{\tau}{2^s} \exp \left[ -j \frac{(2k+7)k_y \tau}{2^{s+1}} \right] Q \left( \frac{k_y \tau}{2^s} \right) \left[ \frac{\sin(k_y \tau / 2^{s+2})}{k_y \tau / 2^{s+2}} \right]^4 \quad (10.49)$$

$$Q(k_y) = \frac{1}{2520} \left( \cos \frac{3k_y}{2} - 120 \cos k_y + 1191 \cos \frac{k_y}{2} - 1208 \right) \times \sin^4 \frac{k_y}{4} \quad (10.50)$$

$\phi_{k,s}$  和  $\psi_{k,s}$  的定义与前几章使用的定义稍微有点不同。分段正弦曲线、三次样条和三次样条小波时间—频率窗的乘积分别为 0.545、0.501 和 0.505。注意到线性样条的时间—频率窗的乘积是 0.548, 因此, 前面讨论的二重积分在两种情形下计算时将花费大约同样的时间。

前面描述的基函数 Galerkin 方法的应用将会导致一个线性方程组, 该方程组的解给出了反射系数  $\Gamma$  的期望值。对于前两个可以得到:

$$\begin{bmatrix} [A_{p,1}] & [A_{p,q}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \\ [c_k] \end{bmatrix} = [B_p] \quad (10.51)$$

其中在三次样条的情形下, 矩阵元素取下列形式:

$$A_{p,1} = 2\tau k_{ye} \int_0^\infty \int_0^\infty \Lambda^{\text{HM}}(k_x, k_y) \left[ \frac{\sin(k_y \tau / 2)}{k_y \tau / 2} \right]^4 \times \frac{\cos[(p+1-\pi/2k_{ye}\tau)k_y \tau] + j \cos[(p+1)k_y \tau]}{k_y^2 - k_{ye}^2} dk_x dk_y \quad (10.52)$$

$$A_{p,q} = 2\tau^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Lambda^{\text{HM}}(k_x, k_y) \left[ \frac{\sin(k_y \tau / 2)}{k_y \tau / 2} \right]^8 \times \cos[(p-q+1)k_y \tau] dk_x dk_y \quad (10.53)$$

其中  $p = 1, \dots, M+1$  和  $q = 2, \dots, M+2$ 。分段正弦曲线的矩阵元素能够用类似的方法得到。在这两种情形下, 可以得到:

$$A_{p,q} = A_{q-1,p+1}, p = 1, \dots, M+1 \quad (10.54)$$

$$A_{p,q} = A_{p-1,q-1}, p = 2, \dots, M+2; q = 3, \dots, M+2 \quad (10.55)$$

这表明矩阵的主要部分具有对称性和 Toeplitz 特性。

对于不连续性问题, 我们发现第三种表示式(10.46) 不比第二种表示具有更多的优势。与散射问题不同, 未知函数的定义域可能是几个波长长, 对于大多数不连续性问题未知函数的定义域近似为一个波长。由于不连续性的影响, 电流的分布是局部的。与散射问

题相比,不连续问题中矩阵的大小通常比较小,因此,实现矩阵的稀疏化可能不是主要问题。另一方面,在不连续问题中与每个矩阵相联系的频谱积分通常会占用大量的 CPU 时间,利用三次样条能够实现这些积分的快速计算。由于三次样条的衰减性,它要比分段正弦曲线更好[见式(10.43)和式(10.45)]。对于反射系数数值计算结果的细节,读者可以参考文献[5,24,25]。

### 10.3.4 小波包

最近,利用离散小波包(DWP)相似性变换得到的矩阵稀疏化程度比利用标准小波得到的矩阵稀疏化程度更高<sup>[21]</sup>,证明了离散小波包方法比某些快速多极方法给出了更快的矩阵矢量乘法。

在标准小波分解过程中,我们首先将给定的函数映射到充分高分辨率的子空间  $V_M$  得到逼近系数  $\{a_{k,M}\}$  (参见第 7 章),然后根据  $\{a_{k,M}\}$  计算逼近系数  $\{a_{k,M-1}\}$  和小波系数  $\{w_{k,M-1}\}$ 。继续这个过程,也就是说,根据  $\{a_{k,M-1}\}$  得到较低尺度  $M-2$  的系数,这样一直进行下去。在这个策略中,只是对任何尺度  $j$  下的逼近系数  $\{a_{k,j}\}$  进行处理,而小波系数保持不变。在小波包分解过程中小波系数也被处理,与标准的分解策略相比,这个策略中的频带将被进一步分解,因此小波包策略将会导致更高程度的稀疏性。

## 10.4 区间小波

前几章我们描述了定义在实直线上的小波和尺度函数。如果我们利用这些函数直接展开积分方程中的未知函数,则某些尺度函数和小波将超出积分区域,因此必须要有明确的边界条件。在信号处理中,这些小波的使用在边界附近导致了不期望的跃变(参见图 8.8 ~ 图 8.10),通过周期化尺度函数(文献[26;第 9.3 节])能够避免这个困难:

$$\phi_{k,s}^p = \sum_l \phi_{k,s}(x+l) \quad (10.56)$$

其中上标  $p$  意味着周期的情形。类似地可以得到周期小波。容易证明,如果  $\hat{\phi}(2\pi k) = \delta_{k,0}$ , 这对于尺度函数一般是正确的,则  $\sum_k \phi(x-k) \equiv 1$ 。最后的关系式与第 5 章讨论过的单位分解一样,把最后的关系应用于式(10.56),则能够证明  $\{\phi_{k,0}^p\} \cup \{\phi_{k,s}^p: s \in Z^+ = \{0,1,2,\dots\}, k = 0, \dots, 2^s - 1\}$  生成  $L^2([0,1])$ 。

在文献[18 ~ 20]中已经使用了周期小波的思想,然而与文献[26,第 10.7]所讨论的一样,除非周期尺度函数和周期小波逼近的函数也是周期的,否则在边界仍然存在边界问题。因此,我们得到了解释边界效应的不同方法,应用了文献[23,27,28]中专门为有界区间  $[0,1]$  所构造的紧支撑半正交样条小波。获得区间小波的其他方法在文献[29,30]已经讨论过。

如同在第 5 章所讨论过的一样,在结点之间用分段多项式将它们连结起来能够构造单结点序列样条,用这种方法可以得到某些阶的整体光滑性。例如,考虑结点序列  $\{0,1,2,3,4\}$ ,用这个序列我们能够构造三次样条( $m=4$ )。在结点之间用 4 阶多项式连结,例如  $[0,1], [1,2], \dots$ , 而且在 1,2 和 3 处将它们连结起来致使得到的函数(三次样条)属于  $C^2$ ,

即其二阶导数在 $[0, 4]$ 中是连续的。一般来说 $m$ 阶基数 $B$ 样条属于 $C^{m-2}$ 。然而,如果我们有多重结点,比如说 $\{0, 0, 1, 2, 3\}$ ,则多重结点时在结点处的光滑性会降低。容易证明在 $r$ —重结点处光滑性将降低 $r-1$ 。在边界点 $0$ 和 $1$ 处,结点结合起来且构成多重结点。然而,在区间内结点是单的,所以光滑性不受影响。

对于 $s \in \mathbb{Z}^+$ , 设 $\{t_k^s\}_{k=-m+1}^{2^s+m-1}$ 是结点序列,在 $0$ 和 $1$ 具有 $m$ 重结点而在单位区间内具有单结点,也就是说

$$\begin{aligned} t_{-m+1}^s &= t_{-m+2}^s = \cdots = t_0^s = 0 \\ t_k^s &= k2^{-s}, k = 1, \cdots, 2^s - 1 \\ t_{2^s}^s &= t_{2^s+1}^s = \cdots = t_{2^s+m-1}^s = 0 \end{aligned} \quad (10.57)$$

对于结点序列式(10.57),我们定义 $B$ 样条( $m \geq 2$ )为<sup>[31, 第108页]</sup>:

$$B_{m,s,k}(x) = (t_{t+m}^s - t_k^s) [t_k^s, t_{k+1}^s, \cdots, t_{k+m}^s]_t (t-x)_+^{m-1} \quad (10.58)$$

其中 $[t_k^s, \cdots, t_{k+m}^s]_t$ 是 $(t-x)_+^{m-1}$ 关于 $t$ 和 $(x)_+ = \max(0, x)$ 的第 $m$ 阶均差,小波能够从相应的样条尺度函数得到。我们没有深入研究有界区间尺度函数和小波的构造细节,而是在10.9节给出其明确的表达式,有兴趣的读者可以在文献[23, 27, 28]中找到细节。

内(没有多重结点) $B$ 样条的支撑占有 $m$ 段,而相应的半正交小波占有 $2m-1$ 段。对于任何尺度 $s > 0$ ,离散化步长 $1/2^s$ 将 $[0, 1]$ 划分为 $2^s$ 个小区间。因此,要想至少得到一个内小波,下面的条件必须满足:

$$2^s \geq 2m - 1 \quad (10.59)$$

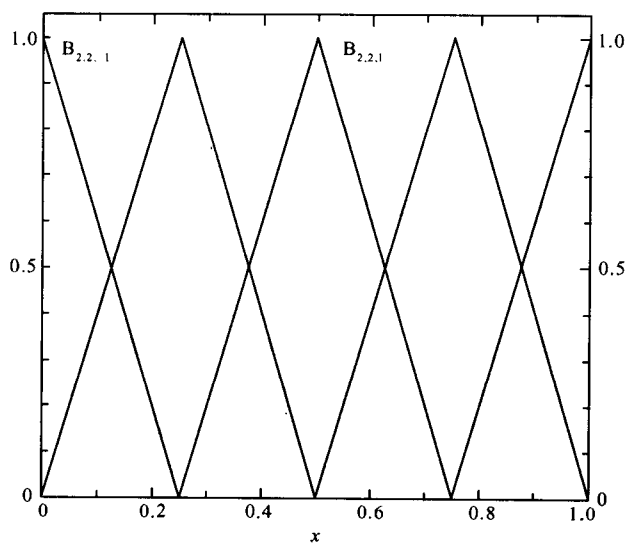
设 $s_0$ 是满足条件式(10.59)的尺度,对每个 $s \geq s_0$ ,让我们定义 $m$ 阶尺度函数 $\phi_{m,k,s}$ 为

$$\phi_{m,k,s}(x) = \begin{cases} B_{m,s_0,k}(2^{s-s_0}x), & k = -m+1, \cdots, -1 \\ B_{m,s_0,2^s-m-k}(1-2^{s-s_0}x), & k = 2^s-m+1, \cdots, 2^s-1 \\ B_{m,s_0,0}(2^{s-s_0}x-2^{-s_0}k), & k = 0, \cdots, 2^s-m \end{cases} \quad (10.60)$$

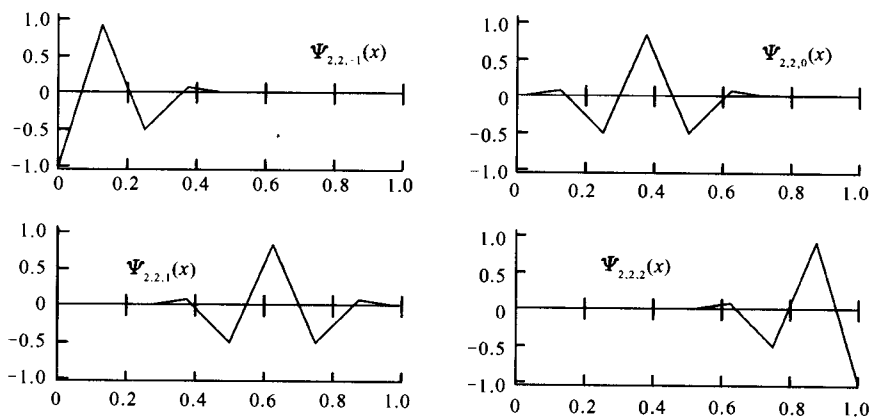
而小波 $\psi_{m,k,s}$ 为

$$\psi_{m,k,s}(x) = \begin{cases} \psi_{m,k,s_0}(2^{s-s_0}x), & k = -m+1, \cdots, -1 \\ \psi_{m,2^s-2m+1-k,k_0}(1-2^{s-s_0}x), & k = 2^s-2m+2, \cdots, 2^s-m \\ \psi_{m,0,s_0}(2^{s-s_0}x-2^{-s_0}k), & k = 0, \cdots, 2^s-2m+1 \end{cases} \quad (10.61)$$

内尺度函数( $k = 0, \cdots, 2^s-m$ )和小波( $k = 0, \cdots, 2^s-2m+1$ )与非边界情形时相同。在 $0$ 和 $1$ 存在 $m-1$ 个边界尺度函数和小波,而且存在 $2^s-m+1$ 个内尺度函数和 $2^s-2m+2$ 个内小波。图10.4显示了尺度 $s=2$ 和 $m=2$ 时的所有尺度函数和小波。 $m=4$ 和 $s=3$ 时的所有尺度函数如图10.5(a)所示,而图10.5(b)只是给出了 $x=0$ 附近对应的边界小波和一个内小波。简单地平移第一个内小波能够得到其余的内小波,而 $x=1$ 附近的边界小波是 $x=0$ 附近小波的镜像像。



(a)



(b)

图 10.4 (a)[0,1] 上的线性样条( $m=2$ ) 尺度函数; (b)[0,1] 上的线性样条小波  
(下标分别表示样条的阶( $m$ )、尺度( $s$ ) 和位置( $k$ ))(经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印))

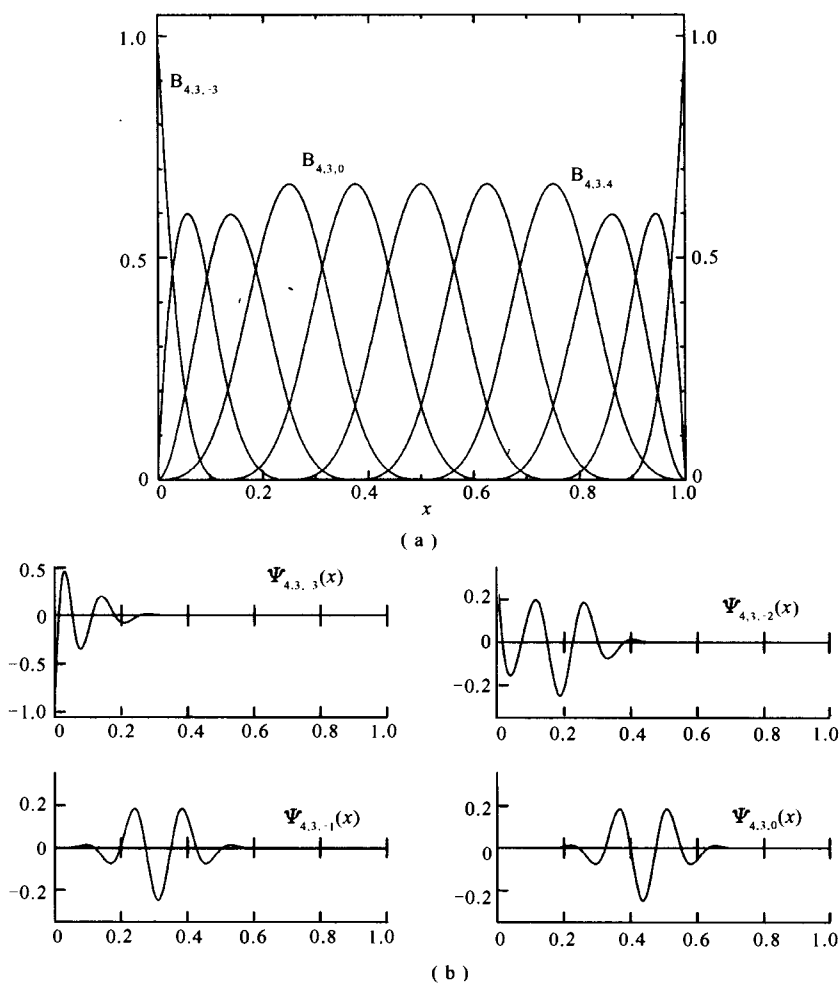


图 10.5 (a) $[0,1]$  上的三次样条( $m=4$ );(b) $[0,1]$  上三次样条小波  
(下标分别表示样条的阶( $m$ )、尺度( $s$ )和位置( $k$ ))(经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印))

## 10.5 稀疏度和误差修正

本节研究的目标是阈值处理矩阵元素对稀疏度的影响和解的误差。阈值处理是指设置幅值小于某个正数  $\delta$  ( $0 \leq \delta < 1$ ) 的那些矩阵元素为 0,  $\delta$  被称为阈值参数,它是矩阵中最大元素的倍数。

设  $A_{\max}$  和  $A_{\min}$  是式(10.23)中矩阵的最大元和最小元。对于固定的阈值参数  $\delta$ ,定义相对误差  $\epsilon_\delta$  为

$$\epsilon_\delta = \frac{\|f_0 - f_\delta\|_2}{\|f_0\|_2} \times 100 \quad (10.62)$$

和稀疏度  $S_\delta$  为

$$S_\delta = \frac{N_0 - N_\delta}{N_0} \times 100 \quad (10.63)$$

上面的  $f_\delta$  表示当设置幅值小于  $\delta A_{\max}$  的元素为 0 时从式(10.23)得到的解,类似地  $N_\delta$  是阈值处理后剩余元素的总数。显然,  $f_0(x) = f(x)$  且  $N_0 = N^2$ , 其中  $N$  是未知数。如果我们利用 10.4 节的区间小波求解方程(10.1), 则式(10.23)中的未知数  $N$  不依赖于  $s_0$ , 这个数  $N$  是:

$$N = 2^{s_0+1} + m - 1 \quad (10.64)$$

表 10.1 给出了惯用矩量法与小波矩量法矩阵中最大元与最小元相对幅值的理想值。正如所期望的, 因为其高阶消失矩性质, 三次样条小波给出了较高的比率  $A_{\max}/A_{\min}$ 。

表 10.1 惯用矩量法与小波矩量法矩阵中最大元与最小元的相对幅值( $a = 0.1\lambda_0$ )

	惯用矩量法	小波矩量法( $m = 2$ )	小波矩量法( $m = 4$ )
$A_{\max}$	5.377	0.750	0.216
$A_{\min}$	1.682	$7.684 \times 10^{-8}$	$8.585 \times 10^{-13}$
比率	3.400	$9.761 \times 10^6$	$2.516 \times 10^{11}$
来源:经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印			

假设经过阈值处理运算矩阵中的  $[A_{\psi,\psi}]$  不受影响, 这是一个非常合理的假设, 而且能够证明:

$$S_\delta \leq \left[ 1 - \frac{1}{N} - \frac{(2^{s_0} + m - 1)(2^{s_0} + m - 2)}{N^2} \right] \times 100 \quad (10.65)$$

其中  $N$  由式(10.64) 来确定。

正如前面所提到过的[参见式(10.64)], 未知总数不依赖于最低尺度  $s_0$  的离散化。但是, 根据式(10.65), 随着  $s_0$  的减小,  $S_\delta$  的上限将会增加, 因此, 最好选择  $s_0 = \lceil \log_2(2m-1) \rceil$ , 其中  $\lceil x \rceil$  表示大于或等于  $x$  最小的整数。

## 10.6 数值实例

这一节我们给出一些在 10.1 节所描述的散射问题的数值举例。对于带状金属线的数值结果能够在文献[14] 中找到。小波对于电磁问题更多的应用, 读者可以参阅文献[22]。

在文献[23] 中对圆柱面情形求解矩阵方程。图 10.6 和图 10.7 利用线性和三次样条对不同尺寸的柱面显示了表面电流分布的情况。将小波矩量法所得结果与惯用矩量法所得结果进行了比较。为了得到惯用矩量法的结果, 我们使用三角函数展开未知电流分布和检验所得到的方程。惯用矩量法的结果已用级数解进行了检验<sup>[32]</sup>。图 10.8 给出了线性和三次样条情形的雷达截面, 惯用矩量法与小波矩量法的结果非常一致。

$\delta$  对解的误差和矩阵稀疏性的影响如图 10.9 所示。对于线性样条误差幅度快速增长, 图 10.10 显示了应用惯用矩量法得到的典型矩阵, 元素上较黑的颜色表示较大的幅度。对于  $\delta = 0.0002$ , 线性样条的矩阵元素如图 10.11 所示。在图 10.12 中, 我们给出了三次样条的阈值矩阵( $\delta = 0.0025$ ), 矩阵的  $[A_{\psi,\psi}]$  部分几乎是对角化矩阵。图 10.13 给出了线性样条和三次样条逐点误差的概念。

值得指出的是不管矩阵的大小如何对其进行阈值处理将不受影响, 在线性样条的情形下只有  $5 \times 5$  矩阵, 而在三次样条的情形下只有  $11 \times 11$  矩阵, 参见图 10.11 和图 10.12 的左上角, 在很大程度上没有造成解的误差并且能够保证矩阵中大量元素为 0。

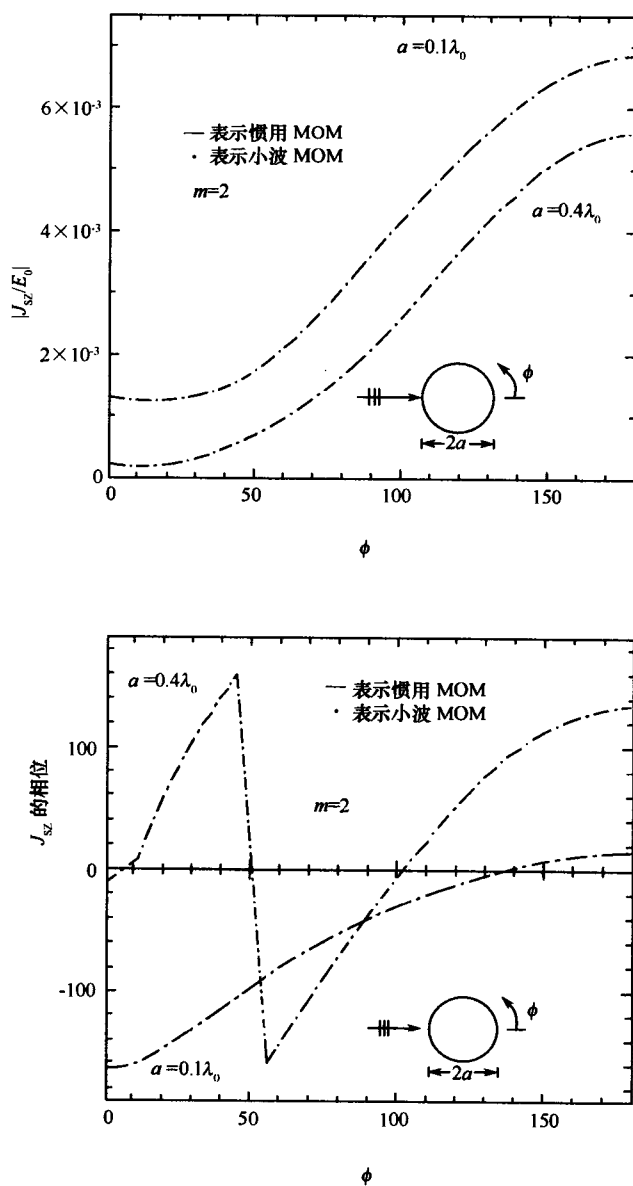


图 10.6 利用线性样条小波矩量法与惯用矩量法金属柱面上表面电流分布的幅度和相位(经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印)



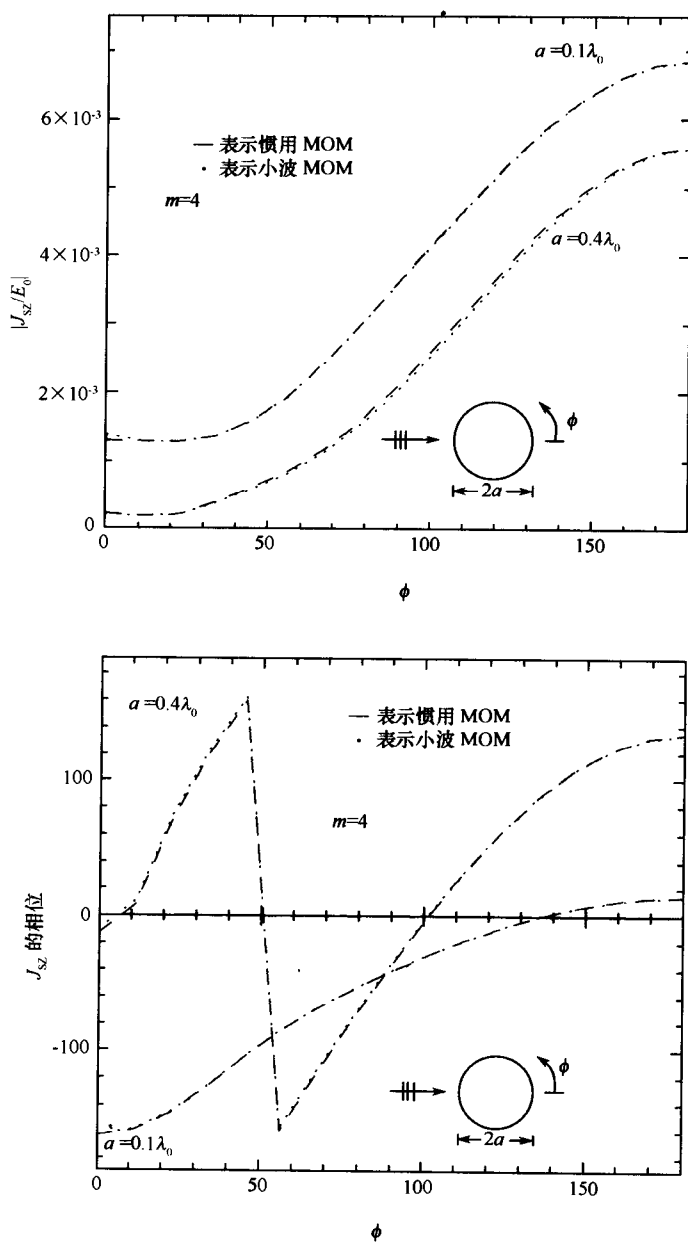


图 10.7 利用三次样条小波矩量法与惯用矩量法计算金属柱面上表面流分布的幅度和相位

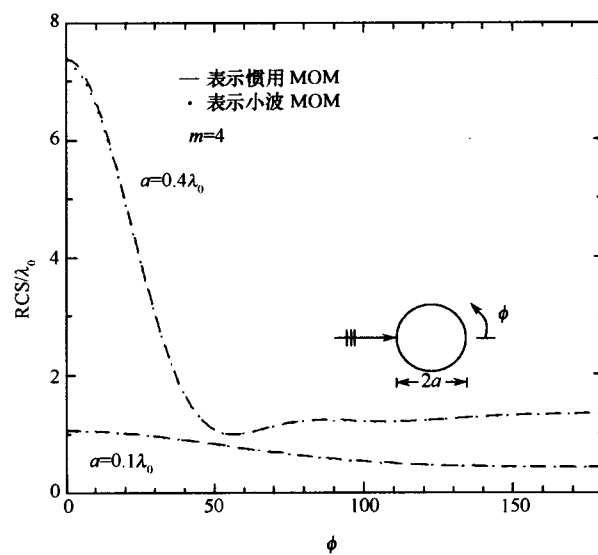
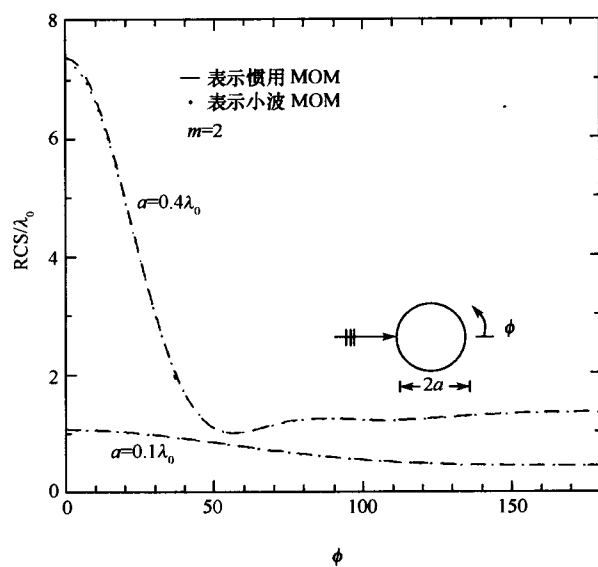


图 10.8 利用线性( $m=2$ )和三次( $m=4$ )样条小波矩量法与惯用矩量法计算金属柱面的雷达截面

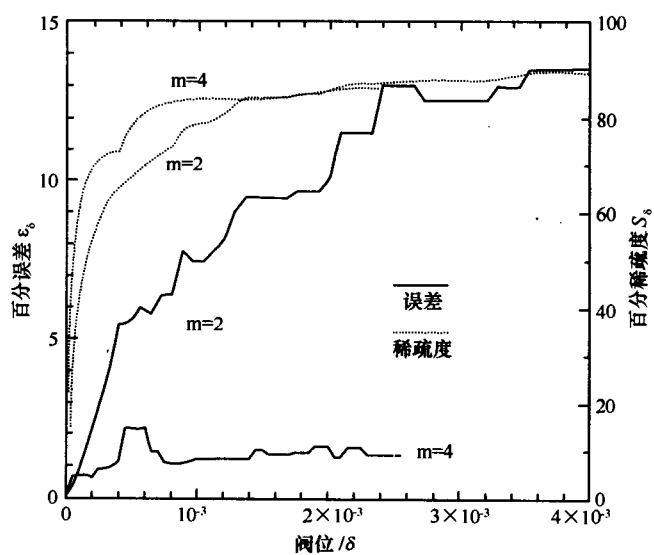


图 10.9 表面电流分布作为阈值参数  $\delta$  的函数解的误差  
(经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印)

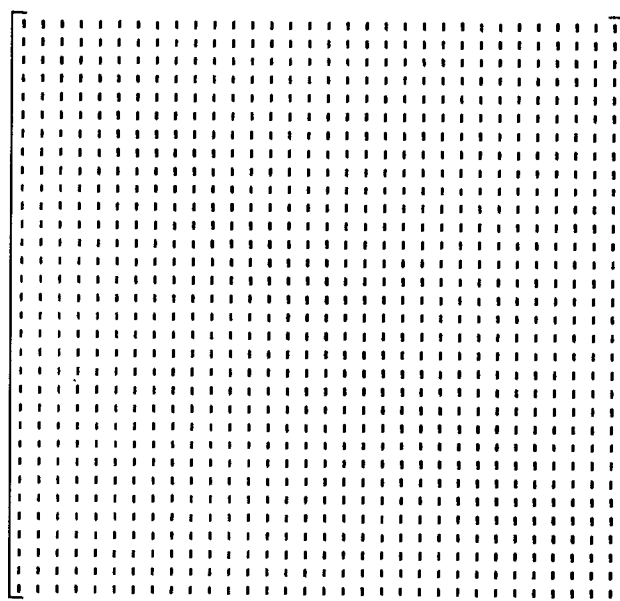


图 10.10 利用惯用矩量法得到矩阵元素的典型灰度图，  
较黑的颜色表示较大的幅度

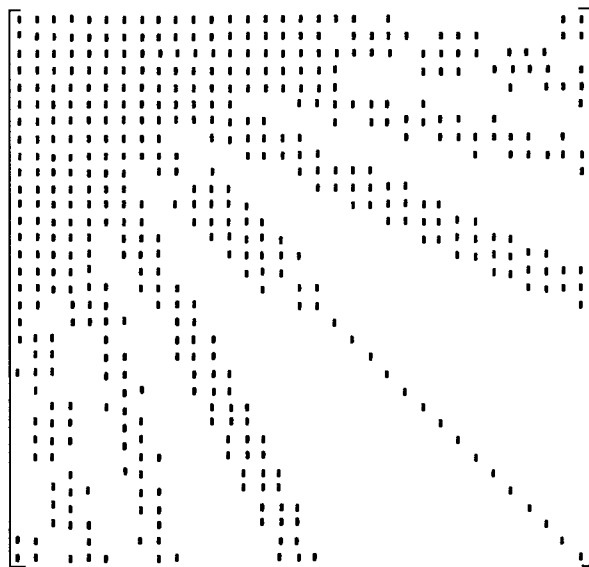


图 10.11 利用线性小波矩量法得到矩阵元素的典型灰度图,较黑的颜色表示较大的幅度(经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印)

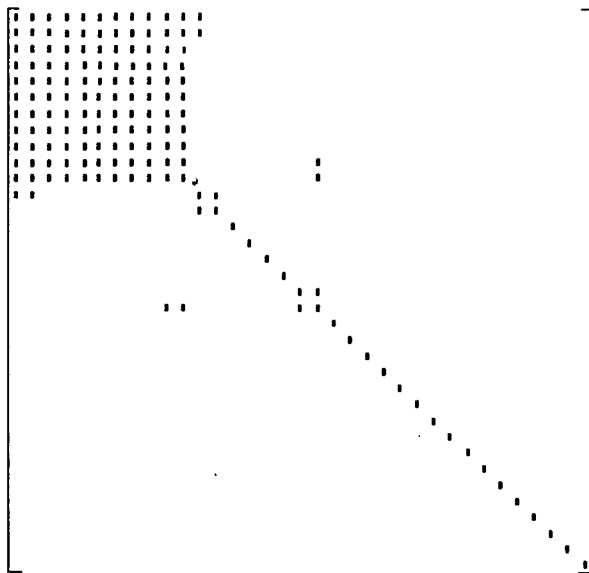


图 10.12 利用三次样条小波矩量法得到矩阵元素的典型灰度图,较黑的颜色表示较大的幅度(经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印)

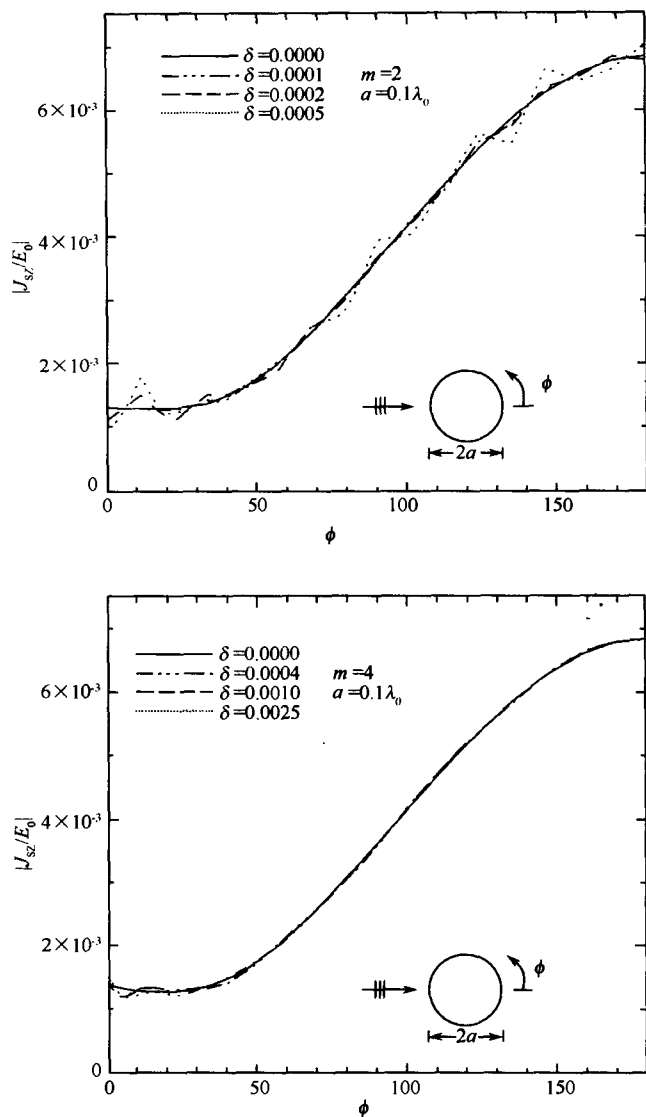


图 10.13 对不同阈值参数  $\delta$  的值, 使用线性 ( $m=2$ ) 样条小波和三次 ( $m=4$ ) 样条小波矩量法计算表面电流分布的幅度

## 10.7 半正交小波与正交小波

半正交小波与正交小波用于求解积分方程, 文献[14] 对其优缺点进行了对比研究。由于正交小波变换的西相似性质将保持原始阻抗矩阵  $A$  的条件数  $\kappa$  不变, 而半正交小波不具有这样的性质, 因此为了收敛到期望解, 变换的矩阵方程需要更多的迭代。矩阵的条件数在不同情形下的一些初步结果在表 10.2 中<sup>[17]</sup> 进行了对比。

直接利用小波求解积分方程时, 半正交小波最吸引人的特性之一是可得到这种小波的闭型表示, 大部分连续正交小波不能写成闭型。应该注意与信号处理中通常处理离散信号、分解和重建序列不同, 在边值问题中通常必须计算任何给定点小波函数和尺度函数的

值。表 10.3 和表 10.4<sup>[14]</sup> 对带状和细金属线情形的计算时间和稀疏度进行了比较。

表 10.2 使用半正交小波变换和正交小波变换对阻抗矩阵条件数的影响。利用脉冲基函数生成原始阻抗矩阵

基和变换	未知数	倍频程水平	$\delta$	$S_\delta$	$\epsilon_\delta$	条件数 $\kappa$	
						阈值前	阈值后
脉冲和没有	64	NA	NA	0.0	$2.6 \times 10^{-5}$	14.7	—
脉冲和半正交	64	1	$7.2 \times 10^{-2}$	46.8	0.70	16.7	16.4
脉冲和正交	64	1	$7.5 \times 10^{-3}$	59.7	0.87	14.7	14.5

表 10.3 对于样条、半正交和规范正交基函数每个矩阵元素 CPU 时间的比较

	金属线	金属板
样条	0.12s	$0.25 \times 10^{-3}s$
半正交小波	0.49s	0.19s
正交小波	4.79s	4.19s

来源:经 IEEE 同意允许从文献[14] 重印

前几章已经讨论过半正交小波是对称的,所以具有广义线性相位,它是函数重建中一个重要的因素。众所周知<sup>[26,第8.1节]</sup>,不存在对称或反对称、实值、连续和紧支撑正交尺度函数和小波。最后,在使用小波求解频谱域问题时,正如前面所讨论的需要考察基的时间—频率窗乘积。半正交小波方法非常接近于时间—频率窗乘积的最优值 0.5。例如,三次样条小波的时间—频率窗乘积是 0.505,已经证明随着正交小波光滑度的增加,时间—频率窗的乘积趋向于  $\infty$ <sup>[33]</sup>。

表 10.4 对于半正交小波与规范正交小波阻抗矩阵的稀疏度  $S_\delta$  和相对误差  $\epsilon_\delta$  的比较

散射器 / 倍频程水平	未知数			稀疏度 $S_\delta$		相对误差 $\epsilon_\delta$	
	半正交	正交	阈值 $\delta$	半正交	正交	半正交	正交
金属线 / $j = 4$	29	33	$1 \times 10^{-6}$	34.5	24.4	$3.4 \times 10^{-3}$	$4.3 \times 10^{-3}$
			$5 \times 10^{-6}$	48.1	34.3	3.9	$1.3 \times 10^{-3}$
			$1 \times 10^{-5}$	51.1	36.5	16.5	$5.5 \times 10^{-2}$
金属板 / $j = 2,3,4$	33	33	$1 \times 10^{-4}$	51.6	28.1	$1 \times 10^{-4}$	0.7
			$5 \times 10^{-4}$	69.7	45.9	4.7	5.2
			$1 \times 10^{-3}$	82.4	50.9	5.8	10.0

来源:经 IEEE 同意允许从文献[14] 重印

10.8 微分方程

常微分方程(ODE) 能够被表示为

$$Lf(x) = g(x), x \in [0,1]$$
 (10.66)

其中

$$L = \sum_{j=0}^m a_j(x) \frac{d^j}{dx^j} \quad (10.67)$$

并且满足一些适当的边界条件。如果系数 $\{a_j\}$ 与 $x$ 无关,则能够通过傅里叶分析方法很容易得到方程的解,然而,在变系数常微分方程和偏微分方程(PDE)中,一般使用有限元或有限差分型方法。

在惯用有限元方法(FEM)中使用局部基表示未知函数,然后根据 Galerkin 方法得到方程的解,Galerkin 方法类似于前几节描述过的方法。一般利用迭代法,比如 Jacobi 方法求解微分算子得到稀疏的带状刚性矩阵。

惯用有限元方法的缺点之一是刚性矩阵的条件数以 $O(h^{-2})$ 来增长,其中 $h$ 是离散化步长,因此迭代技巧的收敛变慢,而且解对矩阵中元素较小的扰动变得比较敏感。如果考虑迭代技巧中误差如何随着迭代而减少,比方以 Jacobi 方法为例,我们发现在前几次迭代中误差快速减小,随后误差减小的速度变慢<sup>[34, pp. 18-21]</sup>。由于迭代过程对于误差的高频部分具有平滑作用,因此这种方法被称为高频法(high-frequency methods),一旦误差的高频部分被清除,收敛会变得非常慢。最初的几次迭代以后,如果我们用较粗的网格重新离散化频率域,这将有利的较低的频率,从而加快收敛速度,这就导致了多重网格法。

为了克服惯用方法的困难,人们提出了多重网格法或分层法<sup>[34-50]</sup>。这个技巧实现了光滑法(Jacobi 型)的几个迭代,中间解和操作体现了粗网格的特点。在粗网格中解决问题,然后通过插值返回到较细的网格,通过粗网格与较细网格之间的往复能够加快收敛性。已经证明基于小波的多水平方法对于椭圆型 PDE 来说,条件数与离散化步长无关,更精确地说, $\kappa = O(1)$ <sup>[45]</sup>。多重网格法涉及的内容太多以致无法在本章讨论,有兴趣的读者参考本章最后提供的参考文献。

小波的多分辨率分析也被应用于发展方程<sup>[49,50]</sup>。在演化问题中,空间与时间的离散化与获得稳定的数值方案有关,时间步长必须根据最小空间离散化来确定,这就使得计算十分复杂。在文献[50]中提出了空间—时间自适应方法,利用小波局部地调节空间—时间的离散化步长。

## 10.9 样条与小波的表达式

对于 $k = -m+1, \dots, 0$ 和 $m = 2, 4$ ,我们给出尺度函数 $B_{m,0,k}(x)$ 和小波 $\phi_{m,k,0}(x)$ 的公式。用 $2^0 x$ 代替 $x$ 而且相应地定标区间就能够得到在尺度 $s_0$ 下的公式:

$$B_{m,-m+1,0}(x) = \begin{cases} (1-x)^{m-1}, & x \in [0,1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10.68)$$

$$B_{2,0,0}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 2-x, & x \in [1,2) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10.69)$$

除了 $B_{4,-3,0}$ 以外表 10.5 中给出了三次样条尺度函数的公式, $B_{2,-1,0}$ 和 $B_{4,-3,0}$ 的公式能够从式(10.68)得到。表 10.6 到表 10.8 也给出了小波公式,函数在表中所给的区间外为 0,空白位置表示函数在区间内为 0。

本书描述的尺度函数和小波也能够根据其 Bernstein 多项式的表示计算而得到(见文

献[51,第4.4节;52,pp. 11—13]),然而,这里给出的公式是直接的而且容易实现。

表 10.5 不同  $k$  值的三次样条尺度函数  $B_{4,k,0}[6 \times B_{4,k,0}(x) =$

$$\sum_{i=0}^3 a_i x^i]; a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ 属于不同的区间}$$

区 间	$k = -2$	$k = -1$	$k = 0$
$[0, 1)$	$0, 18, -27, 21/2$	$0, 0, 9, -11/2$	$0, 0, 0, 1$
$[1, 2)$	$12, -18, 9, -3/2$	$-9, 27, -18, 7/2$	$4, -12, 12, -3$
$[2, 3)$		$27, -27, 9, -1$	$-44, 60, -24, 3$
$[3, 4)$			$64, -48, 12, -1$

来源:经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印

表 10.6 不同  $k$  值的线性样条小波  $\psi_{2,k,0}[6 \times \psi_{2,k,0}(x) = a_0 + a_1 x];$

$$a_0, a_1 \text{ 属于不同的区间}$$

区 间	$k = -1$	$k = 0$
$[0.0, 0.5)$	$-6, 23$	$0, 1$
$[0.5, 1.0)$	$14, -17$	$4, -7$
$[1.0, 1.5)$	$-10, 7$	$-19, 16$
$[1.5, 2.0)$	$2, -1$	$29, -16$
$[2.0, 2.5)$		$-17, 7$
$[2.5, 3.0)$		$3, -1$

来源:经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印

表 10.7 对于  $k = -3, -2$  的三次样条小波  $\psi_{4,k,0}[5040 \times \psi_{4,k,0}(x) =$

$$\sum_{i=0}^3 a_i x^i]; a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ 属于不同的区间}$$

区 间	$k = -3$	$k = -2$
$[0.0, 0.5)$	$-5,097.9058, 75,122.08345,$ $-230,324.8918, 191,927.6771$	$1,529.24008, -17,404.65853,$ $39,663.39526, -24,328.27397$
$[0.5, 1.0)$	$25,795.06384, -110,235.7345,$ $140,390.7438, -55,216.07994$	$96.3035852, -8,807.039551,$ $22,468.15735, -12,864.78201$
$[1.0, 1.5)$	$-53,062.53069, 126,337.0492,$ $-96,182.03978, 23,641.5146$	$-37,655.11514, 104,447.2167,$ $-90,786.09884, 24,886.63674$
$[1.5, 2.0)$	$56,268.26703, -92,324.54624,$ $49,592.35723, -8,752.795836$	$132,907.7898, -236,678.5931,$ $136,631.1078, -25,650.52030$
$[2.0, 2.5)$	$-31,922.33501, 39,961.3568,$ $-16,550.59433, 2,271.029421$	$-212,369.3156, 281,237.0648,$ $-122,326.7213, 17,509.11789$
$[2.5, 3.0)$	$8,912.77397, -9,040.773971,$ $3,050.25799, -342.4175544$	$184,514.4305, -195,023.4306,$ $68,177.47685, -7,891.441873$
$[3.0, 3.5)$	$-904,776, -222,127/6$	$-88,440.5, 77,931.5, -22,807.5, 2218$
$[3.5, 4.0)$	$32/3, -8, 2, -1/6$	$21,319.5, -16,148.5, 4,072.5, -342$
$[4.0, 4.5)$		$-11,539/6, 1,283.5, -285.5, 127/6$
$[4.5, 5.0)$		$125/6, -12.5, 2.5, -1/6$

来源:经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印



表 10.8 对于  $k = -1, 0$  的三次样条小波  $\psi_{4,k,0}[5040 \times \psi_{4,k,0}(x) = \sum_{i=0}^3 a_i x^i]$ ;  $a_0, a_1, a_2, a_3$  属于不同的区间

区 间	$k = -1$	$k = 0$
$[0.0, 0.5)$	$-11.2618185, 68.79311672,$ $-242.2663844, 499.28435$	$0, 0, 0, 1/6$
$[0.5, 1.0)$	$330.8868107, -1,984.098658,$ $3,863.517164, -2,237.904686$	$8/3, -16, 32, -127/6$
$[1.0, 1.5)$	$-9,802.095725, 28,414.84895,$ $-26,535.43044, 7,895.077856$	$-360.5, 1,073.5, -1,057.5, 342$
$[1.5, 2.0)$	$75,963.58449, -143,116.5114,$ $87,818.80985, -17,516.97555$	$8,279.5, -16,206.5, 10,462.5, -2,218$
$[2.0, 2.5)$	$-270,337.7867, 376,335.5451,$ $-171,907.2184, 25,770.69585$	$-72,596.5, 105,107.5, -50,194.5,$ $7,891.5$
$[2.5, 3.0)$	$534,996.0062, -590,065.0062,$ $214,653.0021, -25,770.66691$	$324,403.5, -371,292.5, 140,365.5,$ $-17,516.5$
$[3.0, 3.5)$	$-633,757.5, 578,688.5,$ $-174,931.5, 17,516.5$	$-844,350,797,461, -249,219,$ $77,312/3$
$[3.5, 4.0)$	$455,610.5, -355,055.5,$ $91,852.5, -7,891.5$	$4,096,454/3, -1,096,683,291,965,$ $-77,312/3$
$[4.0, 4.5)$	$-191,397.5, 130,200.5,$ $-29,416.5, 2,218$	$-1,404,894,981,101, -227,481,$ $17,516.5$
$[4.5, 5.0)$	$41,882.5, -25,319.5,$ $5,098.5, -342$	$910,410, -562,435,115,527,$ $-7,891.5$
$[5.0, 5.5)$	$-10,540/3, 1,918, -349,127/6$	$-353,277.5, 195,777.5, -36,115.5,$ $2218$
$[5.5, 6.0)$	$36, -18, 3, -1/6$	$72,642.5, -36,542.5, 6,124.5, 6,124.5, -342$
$[6.0, 6.5)$		$-5,801.5, 2,679.5, -412.5, 127/6$
$[6.5, 7.0)$		$343/6, -24.5, 3.5, -1/6$
来源:经 IEEE 同意允许从文献[23] 重印		

## 参 考 文 献

- [1] G. B. Arkkén and H. J. Weber. Mathematical Methods for Physicists. San Diego: Academic Press, 1995.
- [2] G. M. Wing. A Primer on Integral Equations of the First Kind. Philadelphia: SIAM, 1991.
- [3] B. K. Alpert, G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. Wavelet-like bases for the Fast Solution of Second-Kind Integral Equations, SIAM J. Sci. Comput. 14, pp. 159—184, 1993.
- [4] J. Mandel. On Multi-Level Iterative Methods for Integral Equations of the Second kind and Related Problems, Numer. Math. , 46, pp. 147 — 157, 1985.
- [5] J. C. Goswami. An Application of Wavelet Bases in the Spectral Domain Analysis of Transmission line Discontinuities, Int. J. Numer. Model. , 11, pp. 41—54, 1998.
- [6] J. H. Richmond. Digital Solutions of the Rigorous Equations for Scattering Problems, Proc. IEEE, 53, pp. 796—804, August 1965.

- [7] R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. New York: IEEE Press, 1992.
- [8] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast Wavelet Transform and Numerical Algorithms I, *Commun. Pure Appl. Math.*, 44, pp. 141–183, 1991.
- [9] R. L. Wagner, P. Otto, and W. C. Chew. Fast Waveguide Mode Computation Using Wavelet—Like Basis Functions, *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 3, pp. 208–210, 1993.
- [10] H. Kim and H. Ling. On the Application of Fast Wavelet Transform to the Integral—Equation of Electromagnetic Scattering Problems, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, 6, pp. 168–173, March 1993.
- [11] B. Z. Steinberg and Y. Leviatan. On the Use of Wavelet Expansions in Method of Moments, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 41, pp. 610–619, 1993.
- [12] K. Sabetfakhri and L. P. B. Katehi. Analysis of Integrated Millimeter—Wave and Submillimeter—Wave Waveguides Using Orthonormal Wavelet Expansions, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 42, pp. 2412–2422, 1994.
- [13] B. Z. Steinberg. A multiresolution Theory of Scattering and Diffraction, *Wave Motion*, 19, pp. 213–232, 1994.
- [14] R. D. Nevels, J. C. Goswami, and H. Tehrani. Semi—Orthogonal Versus Orthogonal Wavelet Basis Sets for Solving Integral Equations, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 45, pp. 1332–1339, 1997.
- [15] Z. Xiang and Y. Lu. An Effective Wavelet Matrix Transform Approach for Efficient Solutions of Electromagnetic Integral Equations, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 45, 1332–1339, 1997.
- [16] Z. Baharav and Y. Leviatan. Impedance matrix compression (IMC) Using Iteratively Selected Wavelet Basis,, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 46, pp. 226–233, 1997.
- [17] J. C. Goswami, R. E. Miller, and R. D. Nevels. Wavelet Methods for Solving Integral and Differential Equations, in *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, J. H. Webster (ed.). New York: John Wiley & Sons, to Appear in February 1999.
- [18] B. Z. Steinberg and Y. Leviatan. Periodic Wavelet Expansions for Analysis of Scattering from Metallic Cylinders, *IEEE Antennas Propag. Soc. Symp.*, 20–23, June 1994.
- [19] G. W. Pan and X. Zhu. The Application of fast Adaptive Wavelet Expansion Method in the Computation of Parameter Matrices of Multiple Lossy Transmission Lines, *IEEE Antennas Propagat. Soc. Symp.*, 29–32, June 1994.
- [20] G. Wang, G. W. Pan, and B. K. Gilbert. A Hybrid Wavelet Expansion and Boundary Element Analysis for Multiconductor Transmission Lines in Multilayered Dielectric Media, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 43, pp. 664–675, March 1995.
- [21] W. L. Golik. Wavelet Packets for Fast Solution of Electromagnetic Integral Equations, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 46, pp. 618–624, 1998.
- [22] Special Issue on Wavelets in Electromagnetics, *Int. J. Numer. Model. Electron. Networks, Devices Fields*, 11, 1998.
- [23] J. C. Goswami, A. K. Chan, and C. K. Chui. On Solving First—Kind Integral Equations Using Wavelets on a Bounded Interval, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 43, pp. 614–622, 1995.
- [24] J. C. Goswami, A. K. Chan, and C. K. Chui. Spectral Domain Analysis of Single and Couple Microstrip Open Discontinuities with Anisotropic Substrates, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 44, pp. 1174–1178, 1996.
- [25] J. C. Goswami and R. Mittra. Application of FDTD in Studying the end Effects of Slot Line and Coplanar Waveguide with Anisotropic Substrate, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 45, pp. 1653–1657, 1997.
- [26] I. Daubeuchies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS—NSF Ser. Appl. Math. 61, Philadelphia: SIAM, 1992.
- [27] C. K. Chui and E. Quak. Wavelets on a bounded interval, in *Numerical Mathematics Approximation Theory*, Vol. 9, D. Braess and L. L. Schumaker (eds.). Basel: Birkhäuser Verlag, 1992, pp. 53–75.
- [28] E. Quak and N. Weyrich. Decomposition and Reconstruction Algorithms for Spline Wavelets on a Bounded In-

- terval, *Appl. Compu. Harmon. Anal.*, 1,(3), pp. 217–231, June 1994.
- [29] A. Cohen, I. Daubechies, and Vial. Wavelets on the Interval and Fast Wavelet Transform, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1, 1, pp. 54–81, December 1993.
  - [30] P. Auscher. Wavelets with Boundary Conditions on the Interval, in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui (ed.). San Diego, Calif.: Academic Press, 1992, pp. 217–236.
  - [31] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. New York: Springer—Verlag, 1978.
  - [32] R. F. Harrington. *Time—Harmonic Electromagnetic Fields*. New York: McGraw—Hill Bosh Company, 1961.
  - [33] C. K. Chui and J. Z. Wang. High—order Orthonormal Scaling Functions and Wavelets Give Poor Time—Frequency Localization, *傅里叶 Anal. Appl.*, pp. 415–426, 1996.
  - [34] W. Hackbusch. *Multigrid Methods and Applications*. New York: Springer—Verlag, 1985.
  - [35] A. Brandt. Multi—level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems, *Math. Comput.*, 31, pp. 330–390, 1977.
  - [36] W. L. Briggs. *A. Multigrid Tutorial*. Philadelphia: SIAM, 1987.
  - [37] S. Dahlke and I. Weinreich, Wavelet—Galerkin Methods: An Adapted Biorthogonal Wavelet Basis, *Constr. Approx.*, 9, pp. 237–262, 1993.
  - [38] W. Dahmen, A. J. Kurdila, and P. Oswald (eds.). *Multiscal Wavelet Methods for Partial Differential Equations*. San Diego, Calif.: Academic Press, 1997.
  - [39] H. Yserentant. On the Multi—Level Splitting of Finite Element Spaces, *Numer. Math.*, 49, pp. 379–412, 1986.
  - [40] J. Liandrat and Ph. Tchamitchian. Resolution of the 1D Regularized Burgers Equation Using a Spatial Wavelet Approximation, *NASA Report, ICASE*, No. 90–83, December 1990.
  - [41] R. Glowinski, W. M. Lawton. M. Ravachol, and E. Tenenbaum, Wavelet Solution of Linear and Nonlinear Elliptic, Parabolic, and hyperbolic, and Hyperbolic Problems in one Space Dimension, in *Computing Methods in Applied Science and Engineering*, R. Glowinski and A. Lichnewsky (eds.), Philadelphia: SIAM, 1990, pp. 55–120.
  - [42] P. Oswald. On a Hierarchical Basis Multilevel Method with Nonconforming P1 Elements, *Numer. Math.*, 62, pp. 189–212, 1992.
  - [43] W. Dahmen and A. Kunoth, Multilevel Preconditioning, *Numer. Math.*, 63, pp. 315–344, 1992.
  - [44] P. W. Hemker and H. Schippers. Multiple Grid Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second kind, *Math. Comput.*, 36, January 1981.
  - [45] S. Jaffard. Wavelet Methods for Fast Resolution of Elliptic Problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 29, pp. 965–986, 1992.
  - [46] S. Jaffard and Ph. Laurecot. Orthonormal Wavelets, Analysis of Operators, and Applications to Numerical Analysis, in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui (ed.). Boston: Academic Press, 1992, pp. 543–601.
  - [47] J. Xu and W. Shann. Galerkin—Wavelet Methods for Two—Point Boundary Value Problems, *Numer. Math.* 63, pp. 123–144, 1992.
  - [48] C. Guerrini and M. Piraccini. Parallel Wavelet—Galerkin Methods Using Adapted Wavelet Packet Bases, in *Wavelets and Multilevel Approximation*, C. K. Chui and L. L. Schumaker (eds.). New Jersey: World Scientific, 1995, pp. 133–142.
  - [49] M. Krumpholz and L. P. B. Katehi. MRTD: New Time—Domain Schemes Based on Multiresolution Analysis, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 44, pp. 555–571, 1996.
  - [50] E. Bacry, S. Mallat, and G. Papanicolaou. A Wavelet Based Space—Time Adaptive Numerical Method for Partial Differential Equations, *Math. Model. Numer. Anal.*, 26, pp. 793–834, 1992.
  - [51] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets*. San Diego, Calif.: Academic Press, 1992.
  - [52] C. K. Chui. *Multivariate Splines*. CBMS—NSF Ser. Appl. Math. 54, Philadelphia: SIAM, 1988.

## 内 容 简 介

本书深入浅出地介绍了小波理论、算法及其应用,着重介绍了多分辨分析、小波的构造、Mallat 算法、小波包算法、滤波器组算法、小波裂缝检测、小波故障轴承特征识别、小波图像压缩技术、小波微钙化点检测技术、小波多载波通信技术,以及小波多分辨率在三维医学图像可视化和边值问题等方面的应用。利用基函数对信号最基本的表示来系统地讨论信号处理中所面临的问题,而不是从抽象的数学角度花费精力证明定理和发展算法。将数学概念通过图形来展示,使得小波作为理论方法和解决问题的实用方法易于读者自学和接受。

本书可以作为相关专业本科生和研究生的教材,也可以供从事相关领域研究与应用的专业人员参考。