Solutions aux exercices d'*Algebra: Chapter 0* de Paolo Aluffi[1]

Oussama Ouanane

21 décembre 2023

1. https://github.com/waywardasc/algebra-chapter0

Table des matières

1 Préliminaires : Théorie des ensembles et catégories **2**
1 Théorie naïve des ensembles 3
2 Fonctions entre ensembles 3
3 Catégories 5

Chapitre 1

Préliminaires : Théorie des ensembles et catégories

1 Théorie naïve des ensembles

Exercice 1.1. *On définit "l'ensemble" $R = \{x \mid x \notin R\}$. Supposons d'abord que $x \in R$, alors par définition de R, on a que $x \notin R$. Supposons maintenant que $x \notin R$, alors de même, par définition de R, $x \in R$. Dans les deux cas, on a à la fois $x \in R$ et $x \notin R$. Paradoxe.*

Exercice 1.2. *Soit $\sim$ soit une relation dans un ensemble S. Soit $[a]_\sim, [b]_\sim$ des élements distincts de $S/_\sim$. On remarque que ces deux éléments ne sont pas vides puisque $a \in [a]_\sim$ et $b \in [b]_\sim$ par réflexivité de $\sim$. Supposons que $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$, alors il existe $x \in S$ tel que $x \in [a]_\sim$ et $x \in [b]_\sim$ i.e. $x \sim a$ et $x \sim b$.*

- *Pour tous $x_a \in [a]_\sim$, on a $x_a \sim a$ et $a \sim x$, d'où par transitivité, $x_a \sim x$. On en déduit que $x_a \sim b$ par transitivité et réflexivité de $\sim$. On en déduit que $x_a \in [b]_\sim$ et donc $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$.*
- *Pour tous $x_b \in [b]_\sim$, on a $x_b \sim b$ et $b \sim x$, d'où par transitivité, $x_b \sim x$. On en déduit que $x_b \sim a$ par transitivité et réflexivité de $\sim$. On en déduit que $x_b \in [a]_\sim$ et donc $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$.*

On a alors que $[a]_\sim = [b]_\sim$. Les éléments de $S/_\sim$ sont alors distincts deux à deux. On sait par définition que $\bigsqcup_{[a]_\sim \in S/_\sim} [a]_\sim \subseteq S$. Soit $x \in S$, alors $x \in [x]_\sim$, or $[x]_\sim \in S/_\sim$, donc $x \in \bigsqcup_{[a]_\sim \in S/_\sim} [a]_\sim$ et $S = \bigsqcup_{[a]_\sim \in S/_\sim} [a]_\sim$. Autrement dit, que $S/_\sim$ forme une partition de S.

Exercice 1.3. *Direct.*

Exercice 1.4. *On a 5 partitions possibles de $\{1, 2, 3\}$. Dès lors 5 relations d'équivalence peuvent être définies sur cet ensemble.*

Exercice 1.5. *Sur $S = \{1, 2, 3\}$, on définit*

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}.$$

On voit que R est réflexive, symétrique mais n'est pas transitive car $1R2$ et $2R3$ mais on n'a pas $1R3$. On aurait alors $S/_R = \{\{1, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3\}\}$ qui n'est pas une partition de S.

Exercice 1.6. *Soit $\sim$ la relation sur $\mathbf{R}$ définie par $x \sim y \iff x - y \in \mathbf{Z}$.*

- *Soit $x \in \mathbf{R}$, on a $x - x = 0 \in \mathbf{Z}$, d'où $x \sim x$.*
- *Soit $x, y \in \mathbf{R}$, supposons que $x \sim y$, alors $y - x = (-1)(x - y) \in \mathbf{Z}$, d'où $y \sim x$.*
- *Soit $x, y, z \in \mathbf{R}$, supposons que $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbf{Z}$, d'où $x \sim z$.*

La relation $\sim$ est donc une relation d'équivalence, on a $\mathbf{R}/_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in [0, 1[\}$. Raisonnement analogue pour la deuxième relation.

2 Fonctions entre ensembles

Exercice 2.1. *On considère $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, on pose :*

$$\begin{aligned} \Omega_S &= \{(f(s_1), \dots, f(s_n))) \mid f : S \to S \text{ bijective}\} \\ &= \{(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in S_n\} \end{aligned}$$

où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Dès lors, $|\Omega_S| = n!$. Or Ω_S est isomorphe à l'ensemble des fonctions bijectives de S à S. On conclut qu'il existe $n!$ fonctions bijectives de S à S.

Exercice 2.2. *Soit $f : A \to B, A \neq \emptyset$. Supposons que f admette une fonction inverse à droite $g : B \to A$. Alors pour tout $y \in f(A)$, il existe $x := g(y) \in A$ tel que $f(x) = y$. Supposons réciproquement que f soit surjective, alors pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Soit $s \in A$ fixé, on définit alors*

$$g : y \in B \mapsto \begin{cases} x \in f^{-1}(\{y\}) & \text{si } y \in Im(f), \\ s & \text{sinon} \end{cases} \in A.$$

On voit que cette fonction n'est pas unique si pour au moins un $y \in Im(f), f^{-1}(\{y\}$ n'est pas un singleton, i.e. f n'est pas injective. Dès lors on a unicité de g si et seulement si f est bijective. L'axiome du choix nous permet de sélectionner un élément x de $f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 2.3. *Soit $f : A \to B$ une bijection, on a alors $f^{-1} \circ f = Id_A$ et $f \circ f^{-1} = Id_B$. Dès lors $(f^{-1})^{-1} = f$ par unicité de la bijection. Soit maintenant $f : A \to B, g : B \to C$ des bijections, alors on a $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_A$ et $f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = Id_B$ par associativité de la composition.*

Exercice 2.4. *Pour éviter un "ensemble d'ensembles" qui ferait apparaître un paradoxe, plaçons-nous dans $E = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$.*

- *Soit $A \in E$, alors $1_A : x \in A \mapsto x \in A$ est une bijection d'inverse 1_A puisque $1_A \circ 1_A = 1_A$.*
- *Soit $A, B \in E$, supposons qu'il existe $f : A \to B$ est une bijection, alors f^{-1} est une bijection de B à A.*
- *Soit $A, B, C \in E$, supposons qu'il existe $f : A \to B, g : B \to C$ des bijections, alors $g \circ f$ est une bijection de A à C.*

Les deuxième et troisième points sont des conséquences de l'exercice précédent.

Exercice 2.5. *Soit $f : A \to B$ une fonction, on dit que f est un épimorphisme si pour tout ensemble Z, pour toutes applications $\varphi_1, \varphi_2 : B \to Z$, si $\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ f$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$. Supposons que f soit surjective, alors pour tout ensemble Z, pour toutes applications $\varphi_1, \varphi_2 : B \to Z$, si $\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ f$ alors pour tout $y \in Im(f)$, on a $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$, donc $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $Im(f)$, mais $Im(f) = B$ puisque f est surjective. D'où f est un épimorphisme. Supposons réciproquement que f soit un épimorphisme, en particulier, on a pour $\varphi_1 : x \in B \mapsto 0 \in \{0, 1\}$ et $\varphi_1 : x \in B \mapsto 1 - 1_{Im(f)}(x) \in \{0, 1\}$. On a pour tout $x \in A, (\varphi_1 \circ f)(x) = (\varphi_2 \circ f)(x) = 0$. Dès lors, on a $\varphi_1 = \varphi_2$, i.e. pour tout $y \in B, y \in Im(f)$.*

Exercice 2.6. *On peut exprimer $f : A \to B$ par son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. On peut créer une flèche pour aller de A à Γ à l'aide de l'application $\varphi : x \in A \mapsto (x, f(x)) \in \Gamma$ et on a alors $(\pi_A \circ \varphi)(a) = a$. Donc φ est une section de π_A.*

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, two heads, "\pi_A"'] \arrow[dr, two heads, "\pi_{\mathrm{Im}(f)}"] & \\ A & & \mathrm{Im}(f) \subseteq B \end{tikzcd}$$

Exercice 2.7. *On note $\pi_A : (x, f(x)) \in \Omega \mapsto x \in A$. Par définition de fonction, chaque élément de A est associé à un unique élément dans B. Dès lors, π_A est injective. De même, π_A est surjective à partir du moment où A est le domaine de f. Dans ce livre on ne fait pas de distinction entre fonction et application, dès lors A est le domaine de f donc π_A est toujours surjective.*

Exercice 2.8. *En posant $f : r \in \mathbf{R} \mapsto e^{2i\pi r} \in \mathbf{C}$, on a $Im(f) = S^1$ le cercle unité centré en 0 dans le plan complexe. Soit $r, r' \in \mathbf{R}$, supposons que $e^{2i\pi r} = e^{2i\pi r'}$. On aurait alors $2\pi r = 2\pi r' + 2k\pi = 2\pi(r + k)$ avec $k \in \mathbf{Z}$. D'où $r - r' = k$, ou encore, $r - r' \in \mathbf{Z}$. Dès lors, définir $r \sim r' \Leftrightarrow e^{2i\pi r} = e^{2i\pi r'}$ revient à $r \sim r' \Leftrightarrow r - r' \in \mathbf{Z}$. Grâce à l'exercice 1.6, on sait que $\mathbf{R}/_\sim = \{[y]_\sim | y \in [0, 1[\}$. On a alors*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, "f"] & \{[y]_\sim | y \in [0,1[\} \arrow[r, "\sim"] & S^1 \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

Exercice 2.9. *Supposons que $A' \cong A''$ et $B' \cong B''$ avec A', B' disjoints et A'', B'' disjoints. Il existe alors des fonctions $f : A' \to A'', g : B' \to B''$ bijectives. On construit alors $h : x \in A' \cup B' \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A', \\ g(x) & \text{si } x \in B' \end{cases} \in A'' \cup B''$. Cette fonction est bien définie puisque A', B' sont disjoints. La fonction h est bijective par construction, on a $h^{-1} : y \in A'' \cup B'' \mapsto \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{si } x \in A'', \\ g^{-1}(y) & \text{si } x \in B'' \end{cases} \in A'' \cup B''$.*
On peut définir $A \amalg B$ comme étant l'ensemble $(S \times A) \cup (T \times B)$ où S, T sont des ensembles disjoints. Dès lors pour tous ensembles S, T, S', T' avec $S \cap T \neq \emptyset$ et $S' \cap T \neq \emptyset$, on a $(S \times A) \cong (S' \times A)$ et $(T \times B) \cong (T' \times B)$, d'où par le résultat ci-dessus, $(S \times A) \cup (T \times B) \cong (S' \times A) \cup (T' \times B)$.

Exercice 2.10. *Soit A, B deux ensembles finis, on a*

$$\begin{aligned} |B^A| &= |\{\{f(x_1), ..., f(x_{|A|})\} \mid f : A \to B, x_i \in A, i = 1 \dots |A|, x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}| \\ &= \left| \prod_{i=1}^{|A|} B \right| \\ &= |B|^{|A|}. \end{aligned}$$

Exercice 2.11. *On pose $\varphi : f \in 2^A \mapsto \{a \in A \mid f(a) = 1\} \in \mathcal{P}(A)$, d'inverse $\varphi^{-1} : B \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \mapsto 1_B \in 2^A$.*

3 Catégories

Exercice 3.1. *Soit $A, B, C \in Obj(\mathbf{C}^{op})$, on a*
- *$Hom_{\mathbf{C}^{op}}(A, A) = Hom_{\mathbf{C}}(A, A)$, d'où $Id_A \in Hom_{\mathbf{C}^{op}}(A, A)$.*
- *Pour tous $f \in Hom_{\mathbf{C}^{op}}(A, B), g \in Hom_{\mathbf{C}^{op}}(B, C)$, on a $fg \in Hom_{\mathbf{C}}(C, A)$ donc $fg \in Hom_{\mathbf{C}^{op}}(A, C)$. Dès lors, $g \circ f := fg \in Hom_{\mathbf{C}^{op}}(A, C)$.*
- *L'associativité est directement héritée de **C**.*

— *Pour tous* $f \in Hom_{\mathbf{C}^{op}}(A,B), f \circ Id_A = Id_A f$ *et* $Id_B \circ f = f Id_B = f$ *par* **C**.

Exercice 3.2. *Si* A *est fini, alors l'exercice 2.10,* $End_{\mathbf{Ens}}(A) = |A|^{|A|}$.

Exercice 3.3. *Soit* $a, b \in S$ *tel que* $Hom(a,b)$ *ne soit pas vide. Alors on a* $f \in Hom(a,b)$ *si et seulement si* $f = (a,b)$*. On a* $Id_a = (a,a)$*, puisque* $a \sim b$*, on a* $b \sim a$*. Dès lors*

$$a \sim b \wedge a \sim a \implies b \sim a \wedge a \sim a$$

mais on a

$$b \sim a \wedge a \sim a \implies b \sim a$$

et

$$b \sim a \implies a \sim b.$$

Par transitivité de l'implication, on obtient

$$a \sim b \wedge a \sim a \implies a \sim b.$$

On a alors $f Id_a = (a,b) = f$*. On raisonne de manière analogue pour montrer que* $Id_b f = (a,b) = f$.

Exercice 3.4. *Non car sur* **Z***, la relation* $<$ *n'est pas réflexive, donc elle n'est pas une relation d'équivalence. En définissant de la même manière on n'aurait pas de morphisme identité* Id_z *dans* $Hom(z,z)$ *pour tout* $z \in \mathbf{Z}$.

Exercice 3.5. *Sur* $\mathcal{P}(S)$*, la relation* $\subseteq$ *est une relation d'équivalence.*

Exercice 3.6. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{N})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{N})$*, alors on sait que la multiplication* AB *est bien définie, en particulier,* $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{N})$*. On a* $A \in Hom_{\vee}(n,m)$ *si et seulement si* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{N})$ *et* $B \in Hom_{\vee}(p,n)$ *si et seulement si* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{N})$.
Supposons que $G \in Hom(s,t)$ *et* $H \in Hom(t,u)$*, on définit alors* $G \circ A = HG \in \mathcal{M}_{u,s}(\mathbf{N})$ *i.e.* $G \circ A \in Hom_{\vee}(s,u)$.

Exercice 3.7. *Soit* **C** *une catégorie et* $A \in Obj(\mathbf{C})$*. On définit* $\mathbf{C}_A$ *la catégorie telle que :*

— $Obj(\mathbf{C}_A) = \{Hom_{\mathbf{C}}(A,Z) \mid Z \in Obj(\mathbf{C})\}$
— *Pour* $A \xrightarrow{f} Z, A \xrightarrow{g} Z' \in Obj(\mathbf{C}_A)$*, on pose* $Hom(f,g) = Hom_{\mathbf{C}}(Z,Z')$.
— *Pour* $A \xrightarrow{f} Z \in Obj(\mathbf{C}_A)$*, on pose* $Id_f = Id_Z \in Hom_{\mathbf{C}}(Z,Z)$.
— *Soit* $A \xrightarrow{f} Z, A \xrightarrow{g} Z', A \xrightarrow{h} Z'' \in Obj(\mathbf{C}_A)$*, soit* $Z \xrightarrow{\sigma} Z' \in Hom(f,g)$ *et* $Z' \xrightarrow{\tau} Z''$*, on pose* $\tau\sigma : Z \xrightarrow{\tau \circ_{\mathbf{C}} \sigma} Z''$.
— *L'associativé est héritée de* **C**.
— *Pour* $A \xrightarrow{\sigma} Z \in Hom(f,g)$ *(avec* $A \xrightarrow{f} Z, A \xrightarrow{g} Z'$*), on a* $\sigma Id_f = \sigma Id_Z = \sigma$ *et* $Id_g \sigma = Id_{Z'} \sigma = \sigma$ *par* **C**.

Exercice 3.8.