

Solutions aux exercices d'*Algebra: Chapter 0* de Paolo Aluffi¹

Oussama Ouanane

21 décembre 2023

1. <https://github.com/waywardasc/algebra-chapter0>

Table des matières

1	Préliminaires : Théorie des ensembles et catégories	2
1	Théorie naïve des ensembles	3
2	Fonctions entre ensembles	3
3	Catégories	5

Chapitre 1

Préliminaires : Théorie des ensembles et catégories

1 Théorie naïve des ensembles

Exercice 1.1. On définit "l'ensemble" $R = \{x \mid x \notin R\}$. Supposons d'abord que $x \in R$, alors par définition de R , on a que $x \notin R$. Supposons maintenant que $x \notin R$, alors de même, par définition de R , $x \in R$. Dans les deux cas, on a à la fois $x \in R$ et $x \notin R$. Paradoxe.

Exercice 1.2. Soit \sim soit une relation dans un ensemble S . Soit $[a]_\sim, [b]_\sim$ des éléments distincts de S/\sim . On remarque que ces deux éléments ne sont pas vides puisque $a \in [a]_\sim$ et $b \in [b]_\sim$ par réflexivité de \sim . Supposons que $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$, alors il existe $x \in S$ tel que $x \in [a]_\sim$ et $x \in [b]_\sim$ i.e. $x \sim a$ et $x \sim b$.

- Pour tous $x_a \in [a]_\sim$, on a $x_a \sim a$ et $a \sim x$, d'où par transitivité, $x_a \sim x$. On en déduit que $x_a \sim b$ par transitivité et réflexivité de \sim . On en déduit que $x_a \in [b]_\sim$ et donc $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$.
- Pour tous $x_b \in [b]_\sim$, on a $x_b \sim b$ et $b \sim x$, d'où par transitivité, $x_b \sim x$. On en déduit que $x_b \sim a$ par transitivité et réflexivité de \sim . On en déduit que $x_b \in [a]_\sim$ et donc $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$.

On a alors que $[a]_\sim = [b]_\sim$. Les éléments de S/\sim sont alors distincts deux à deux. On sait par définition que $\bigsqcup_{[a]_\sim \in S/\sim} [a]_\sim \subseteq S$. Soit $x \in S$, alors $x \in [x]_\sim$, or $[x]_\sim \in S/\sim$, donc $x \in \bigsqcup_{[a]_\sim \in S/\sim} [a]_\sim$ et $S = \bigsqcup_{[a]_\sim \in S/\sim} [a]_\sim$. Autrement dit, que S/\sim forme une partition de S .

Exercice 1.3. Direct.

Exercice 1.4. On a 5 partitions possibles de $\{1, 2, 3\}$. Dès lors 5 relations d'équivalence peuvent être définies sur cet ensemble.

Exercice 1.5. Sur $S = \{1, 2, 3\}$, on définit

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}.$$

On voit que R est réflexive, symétrique mais n'est pas transitive car $1R2$ et $2R3$ mais on n'a pas $1R3$. On aurait alors $S/R = \{\{1, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3\}\}$ qui n'est pas une partition de S .

Exercice 1.6. Soit \sim la relation sur \mathbf{R} définie par $x \sim y \iff x - y \in \mathbf{Z}$.

- Soit $x \in \mathbf{R}$, on a $x - x = 0 \in \mathbf{Z}$, d'où $x \sim x$.
- Soit $x, y \in \mathbf{R}$, supposons que $x \sim y$, alors $y - x = (-1)(x - y) \in \mathbf{Z}$, d'où $y \sim x$.
- Soit $x, y, z \in \mathbf{R}$, supposons que $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbf{Z}$, d'où $x \sim z$.

La relation \sim est donc une relation d'équivalence, on a $\mathbf{R}/\sim = \{[x]_\sim \mid x \in [0, 1[\}$. Raisonnement analogue pour la deuxième relation.

2 Fonctions entre ensembles

Exercice 2.1. On considère $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, on considère

$$\begin{aligned} \Omega_S &= \{(f(s_1), \dots, f(s_n)) \mid f : S \rightarrow S \text{ bijective}\} \\ &= \{(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in S_n\} \end{aligned}$$

où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Dès lors, $|\Omega_S| = n!$, on en déduit qu'il existe $n!$ fonctions bijectives de S à S .

Exercice 2.2. Soit $f : A \rightarrow B, A \neq \emptyset$. Supposons que f admette une fonction inverse à droite $g : B \rightarrow A$. Alors pour tout $y \in f(A)$, il existe $x := g(y) \in A$ tel que $f(x) = y$. Supposons réciproquement que f soit surjective, alors pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Soit $s \in A$ fixé, on définit alors

$$g : y \in B \mapsto \begin{cases} x \in f^{-1}(\{y\}) & \text{si } y \in \text{Im}(f), \\ s & \text{sinon} \end{cases} \in A.$$

On voit que cette fonction n'est pas unique si pour au moins un $y \in \text{Im}(f)$, $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas un singleton, i.e. f n'est pas injective. Dès lors on a unicité de g si et seulement si f est bijective. L'axiome du choix nous permet de sélectionner un élément x de $f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 2.3. Soit $f : A \rightarrow B$ une bijection, on a alors $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$. Dès lors $(f^{-1})^{-1} = f$ par unicité de la bijection. Soit maintenant $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ des bijections, alors on a $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{Id}_A$ et $f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = \text{Id}_B$ par associativité de la composition.

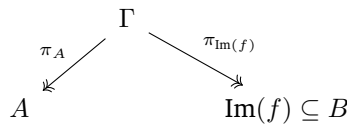
Exercice 2.4. Pour éviter un "ensemble d'ensembles" qui ferait apparaître un paradoxe, plaçons-nous dans $E = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ l'ensemble des parties de \mathbf{R} .

- Soit $A \in E$, alors $1_A : x \in A \mapsto x \in A$ est une bijection d'inverse 1_A puisque $1_A \circ 1_A = \text{Id}_A$.
- Soit $A, B \in E$, supposons qu'il existe $f : A \rightarrow B$ est une bijection, alors f^{-1} est une bijection de B à A .
- Soit $A, B, C \in E$, supposons qu'il existe $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ des bijections, alors $g \circ f$ est une bijection de A à C .

Les deuxième et troisième points sont des conséquences de l'exercice précédent.

Exercice 2.5. Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction, on dit que f est un épimorphisme si pour tout ensemble Z , pour toutes applications $\varphi_1, \varphi_2 : B \rightarrow Z$, si $\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ f$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$. Supposons que f soit surjective, alors pour tout ensemble Z , pour toutes applications $\varphi_1, \varphi_2 : B \rightarrow Z$, si $\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ f$ alors pour tout $y \in \text{Im}(f)$, on a $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$, donc $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $\text{Im}(f)$, mais $\text{Im}(f) = B$ puisque f est surjective. D'où f est un épimorphisme. Supposons réciproquement que f soit un épimorphisme, en particulier, on a pour $\varphi_1 : x \in B \mapsto 0 \in \{0, 1\}$ et $\varphi_2 : x \in B \mapsto 1 - 1_{\text{Im}(f)}(x) \in \{0, 1\}$. On a pour tout $x \in A$, $(\varphi_1 \circ f)(x) = (\varphi_2 \circ f)(x) = 0$. Dès lors, on a $\varphi_1 = \varphi_2$, i.e. pour tout $y \in B, y \in \text{Im}(f)$.

Exercice 2.6. On peut exprimer $f : A \rightarrow B$ par son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. On peut créer une flèche pour aller de A à Γ à l'aide de l'application $\varphi : x \in A \mapsto (x, f(x)) \in \Gamma$ et on a alors $(\pi_A \circ \varphi)(a) = a$. Donc φ est une section de π_A .



Exercice 2.7. On note $\pi_A : (x, f(x)) \in \Omega \mapsto x \in A$. Par définition de fonction, chaque élément de A est associé à un unique élément dans B . Dès lors, π_A est

Exercice 2.8. En posant $f : x \in \mathbf{R} \mapsto e^{2i\pi x} \in \mathbf{C}$, on a $\text{Im}(f) = S^1$ le cercle unité centré en 0 dans le plan complexe. Soit $r, r' \in \mathbf{R}$, supposons que $e^{2i\pi r} = e^{2i\pi r'}$. On aurait alors $2\pi r = 2\pi r' + 2k\pi = 2\pi(r+k)$ avec $k \in \mathbf{Z}$. D'où $r - r' = k$, ou encore, $r - r' \in \mathbf{Z}$. Dès lors, définir $r \sim r' \Leftrightarrow e^{2i\pi r} = e^{2i\pi r'}$ revient à $r \sim r' \Leftrightarrow r - r' \in \mathbf{Z}$. Grâce à l'exercice 1.6, on sait que $\mathbf{R}/\sim = \{[y]_{\sim} | y \in [0, 1[\}$. On a alors

$$\mathbf{R} \longrightarrow \{[y] \sim | y \in [0, 1]\} \xrightarrow{\sim} S^1 \hookrightarrow B$$

On peut définir $A \amalg B$ comme étant l'ensemble $(S \times A) \cup (T \times B)$ où S, T sont des ensembles disjoints. Dès lors pour tous ensembles S, T, S', T' avec $S \cap T \neq \emptyset$ et $S' \cap T' \neq \emptyset$, on a $(S \times A) \cong (S' \times A)$ et $(T \times B) \cong (T' \times B)$, d'où par le résultat ci-dessus, $(S \times A) \cup (T \times B) \cong (S' \times A) \cup (T' \times B)$.

$$\begin{aligned} |B^A| &= |\{f(x_1), \dots, f(x_{|A|}) \mid f: A \rightarrow B, x_i \in A, i = 1 \dots |A|, x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}| \\ &= \left| \prod_{i=1}^{|A|} B \right| \\ &= |B|^{|A|}. \end{aligned}$$

Exercise 2.11. On pose $\varphi : f \in 2^A \mapsto \{a \in A \mid f(a) = 1\} \in \mathcal{P}(A)$, d'inverse $\varphi^{-1} : B \in \mathcal{P}(A) \mapsto 1_B \in 2^A$.

3 Catégories

- $\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, A) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$, d'où $\text{Id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, A)$.
- Pour tous $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(B, C)$, on a $fg \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, A)$ donc $fg \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, C)$. Dès lors, $g \circ f := fg \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, C)$.
- L'associativité est directement héritée de \mathbf{C} .
- Pour tous $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, B)$, $f \circ \text{Id}_A = \text{Id}_A f$ et $\text{Id}_B \circ f = f \text{Id}_B = f$ par \mathbf{C} .

Exercice 3.2. Si A est fini, alors l'exercice 2.10, $\text{End}_{\text{Ens}}(A) = |A|^{|A|}$.

Exercice 3.3. Soit $a, b \in S$ tel que $\text{Hom}(a, b)$ ne soit pas vide. Alors on a $f \in \text{Hom}(a, b)$ si et seulement si $f = (a, b)$. On a $\text{Id}_a = (a, a)$, puisque $a \sim b$, on a $b \sim a$. Dès lors

$$a \sim b \wedge a \sim a \implies b \sim a \wedge a \sim a$$

mais on a

$$b \sim a \wedge a \sim a \implies b \sim a$$

et

$$b \sim a \implies a \sim b.$$

Par transitivité de l'implication, on obtient

$$a \sim b \wedge a \sim a \implies a \sim b.$$

On a alors $f \text{Id}_a = (a, b) = f$. On raisonne de manière analogue pour montrer que $\text{Id}_b f = (a, b) = f$.

Exercice 3.4. Non car sur \mathbf{Z} , la relation $<$ n'est pas réflexive, donc elle n'est pas une relation d'équivalence. En définissant de la même manière on aurait pas de morphisme identité Id_z dans $\text{Hom}(z, z)$ pour tout $z \in \mathbf{Z}$.

Exercice 3.5. Sur $\mathcal{P}(S)$, la relation \subseteq est une relation d'équivalence.

Exercice 3.6. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{N})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{N})$, alors on sait que la multiplication AB est bien définie, en particulier, $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{N})$. On a $A \in \text{Hom}_{\vee}(n, m)$ si et seulement si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{N})$ et $B \in \text{Hom}_{\vee}(p, n)$ si et seulement si $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{N})$.

Supposons que $G \in \text{Hom}(s, t)$ et $H \in \text{Hom}(t, u)$, on définit alors $G \circ A = HG \in \mathcal{M}_{u,s}(\mathbf{N})$ i.e. $G \circ A \in \text{Hom}_{\vee}(s, u)$.

Exercice 3.7. Soit \mathbf{C} une catégorie et $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$. On définit \mathbf{C}_A la catégorie telle que :

- $\text{Obj}(\mathbf{C}_A) = \{\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Z) \mid Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})\}$
- Pour $A \xrightarrow{f} Z, A \xrightarrow{g} Z' \in \text{Obj}(\mathbf{C}_A)$, on pose $\text{Hom}(f, g) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, Z')$.
- Pour $A \xrightarrow{f} Z \in \text{Obj}(\mathbf{C}_A)$, on pose $\text{Id}_f = \text{Id}_Z \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, Z)$.
- Soit $A \xrightarrow{f} Z, A \xrightarrow{g} Z', A \xrightarrow{h} Z'' \in \text{Obj}(\mathbf{C}_A)$, soit $Z \xrightarrow{\sigma} Z' \in \text{Hom}(f, g)$ et $Z' \xrightarrow{\tau} Z''$, on pose $\tau\sigma : Z \xrightarrow{\tau \circ \sigma} Z''$.
- L'associativité est héritée de \mathbf{C} .
- Pour $A \xrightarrow{\sigma} Z \in \text{Hom}(f, g)$ (avec $A \xrightarrow{f} Z, A \xrightarrow{g} Z'$), on a $\sigma \text{Id}_f = \sigma \text{Id}_Z = \sigma$ et $\text{Id}_{g'}\sigma = \text{Id}_{Z'}\sigma = \sigma$ par \mathbf{C} .

Exercice 3.8.