

条件付き確率の問題のかいとう

wazakkyd

平成 29 年 4 月 4 日

問 1 黒玉が 2 つ、白玉が 1 つ入った袋 A 、黒玉が 2 つ、白玉が 3 つ入った袋 B 、そして空の袋 C がある。 A 、 B 、それぞれの袋から 1 つずつ玉を取り出し、 C の袋に入れる。その次に C の袋から玉を一つ取り出したときそれが黒玉であった。このとき、それが A に入っていた黒玉である確率を求めよ。

解答

「 C から取り出した玉が黒玉であるとき、それが A に入っていた黒玉」である確率は 「黒玉が出た」という条件のもと、「それが A に入っていたもの」である「条件付き確率」である。

「 A に入っていた」の事象を $fromA$ 、「黒玉」の事象を $Black$ とすると 条件付き確率の表記を使って次のように書ける

$$P(fromA|Black)$$

条件付き確率にまつわる有名な公式の一つ、ベイズの公式から、上の確率は次のように書き換えられる

$$P(fromA|Black) = \frac{P(fromA \cap Black)}{P(Black)}$$

確率 $P(fromA \cap Black)$ は「黒玉が A から C に入る」事象と、「 C から黒玉が出る」事象のそれぞれが同時に起こる確率を意味している。

「黒玉が A から C に入る」確率は、黒玉が 2 個、白玉が 1 個入ってる A の袋から黒玉が出る確率なので

$$P(\text{黒玉が } A \text{ から } C \text{ に入る}) = \frac{2}{3}$$

「 C から黒玉が出る」確率は、二つの玉のうち一つを取り出す確率になるので

$$P(C \text{ から黒玉が出る}) = \frac{1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} P(fromA \cap Black) &= P(\text{黒玉が } A \text{ から } C \text{ に入る}) \times P(C \text{ から黒玉が出る}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

確率 $P(Black)$ は「黒玉が A から C に入る」かつ、「C から黒玉が出る」事象、または「黒玉が B から C に入る」かつ、「C から黒玉が出る」事象のどちらかが起こる事象の起こる確率を意味する (A, B の由来はともかく、C から黒玉がでる確率)。

「黒玉が B から C に入る」事象を $fromB$ とすると、その確率 $P(fromB)$ は、黒玉が 2 個、白玉が 3 個入っている B の袋から黒玉が出る確率なので

$$P(\text{黒玉が B から C に入る}) = \frac{2}{5}$$

「C から黒玉が出る」は $\frac{1}{2}$ なので、

「黒玉が B から C に入る」かつ、「C から黒玉が出る」確率は

$$\begin{aligned} P(fromB \cap Black) &= P(\text{黒玉が B から C に入る}) \times P(\text{C から黒玉が出る}) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

「黒玉が A から C に入る」かつ、「C から黒玉が出る」確率は先ほどと同様 $\frac{1}{3}$ 。「黒玉が A から C に入り、C から黒玉が出る」または「黒玉が B から C に入り、C から黒玉が出る」確率はそれぞれの確率の和となるので、

$$\begin{aligned} P(Black) &= P(fromA \cap Black) + P(fromB \cap Black) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

以上の結果より、C から取り出した玉が黒玉であるとき、「それが A に入っていた黒玉」である確率は

$$\begin{aligned} P(fromA|Black) &= \frac{P(fromA \cap Black)}{P(Black)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

となる。