Ejemplo:
Dinámica de gases

Computational physics 1
Yachay Tech University

Wladimir E. Banda Barragán

2022

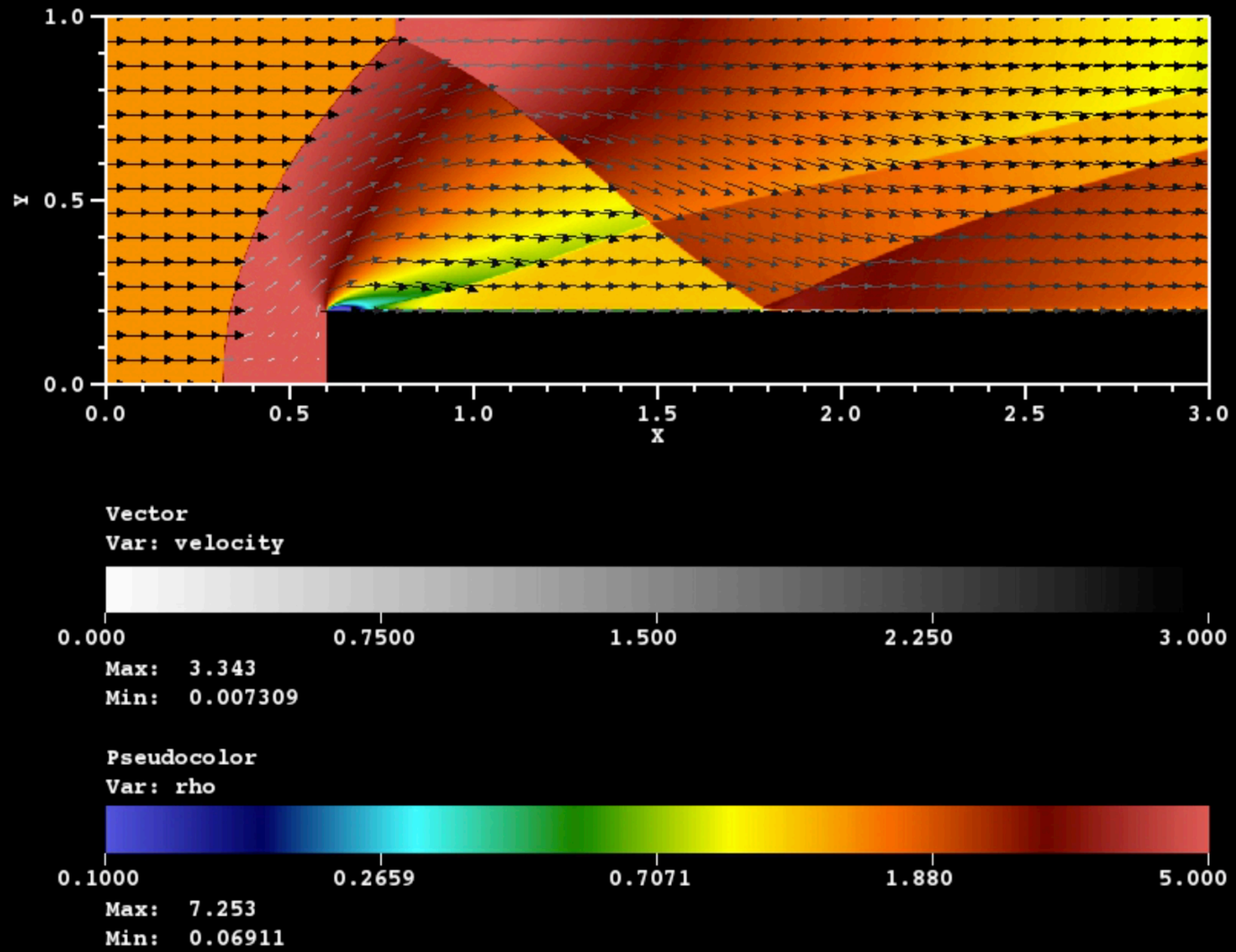
Créditos: https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1141.html

Hidrodinámica

¿Qué estudia la hidrodinámica?

Fluidos

Movimiento



Túnel de viento

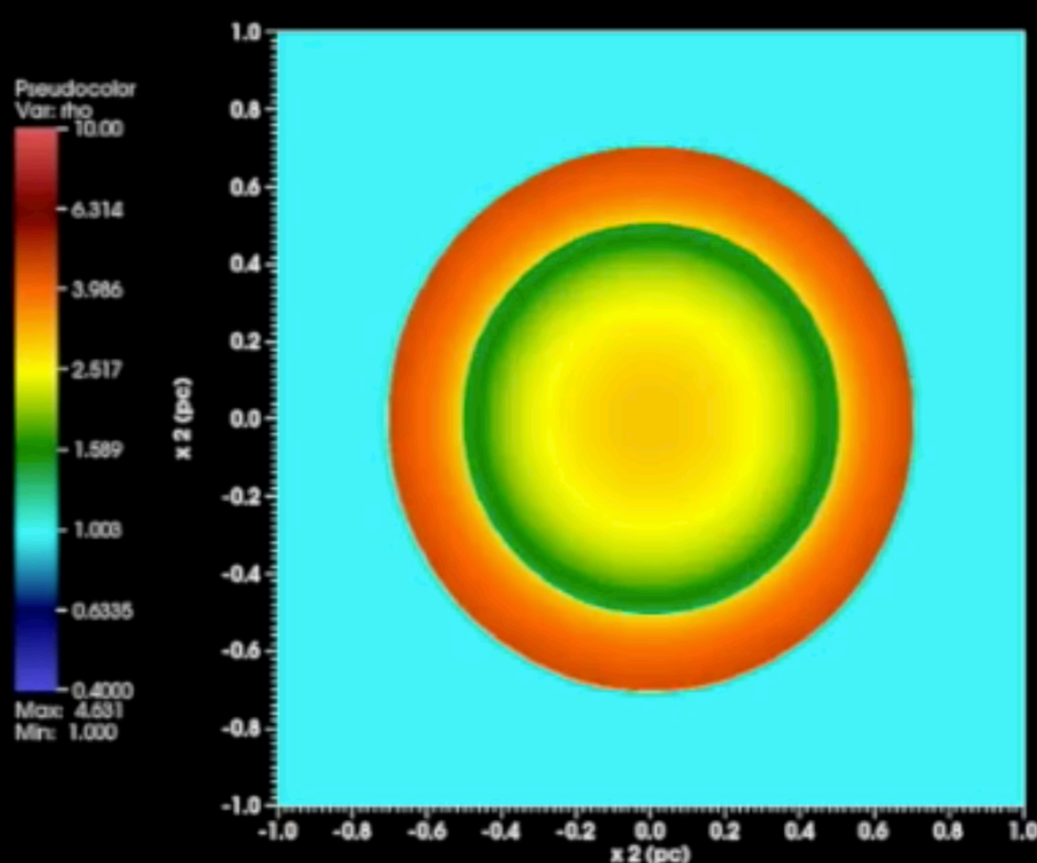
Magneto-hidrodinámica

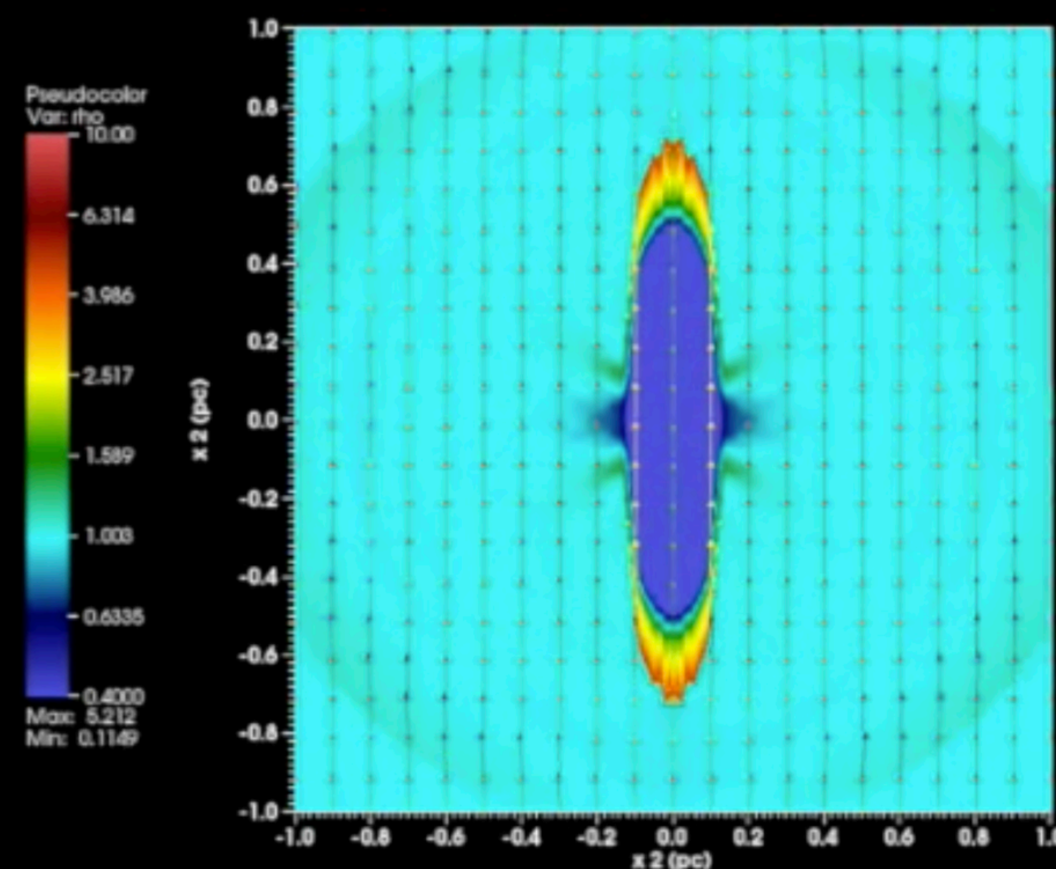
¿Qué estudia la magneto-hidrodinámica?

Campos magnéticos

Fluidos

Movimiento



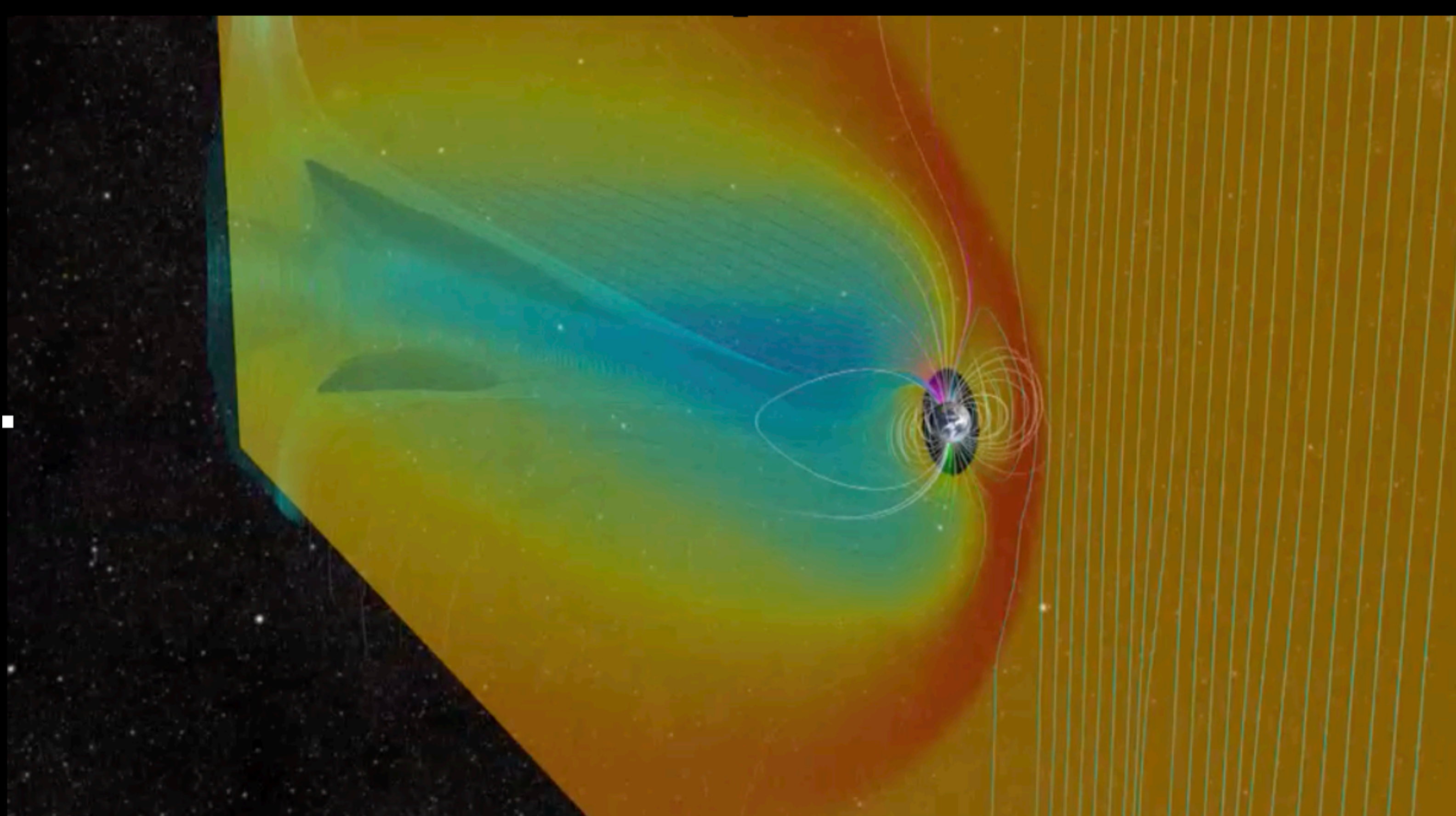


OAQ (2016)

Entonces…

Magneto-hidrodinámica (MHD) del Medio Interestelar (ISM)

Es el estudio de la dinámica (i.e. movimiento) de plasmas en la presencia de campos magnéticos.



Bow shock

Reconección magnética

Animación tomada de: http://svs.gsfc.nasa.gov/11689

MODELIZACIÓN

Usamos el método científico…

Observamos un fenómeno

↓

Modelamos teóricamente

↓

Comparamos

Predecimos con modelos teóricos

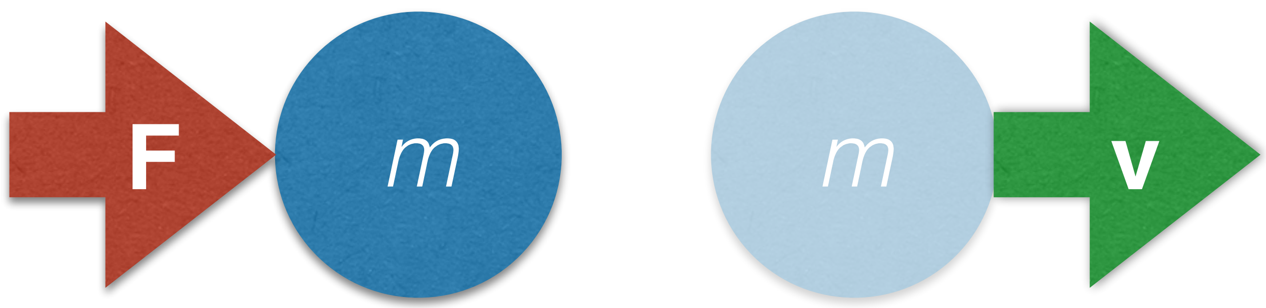
↓

Buscamos el fenómeno

↓

Comparamos

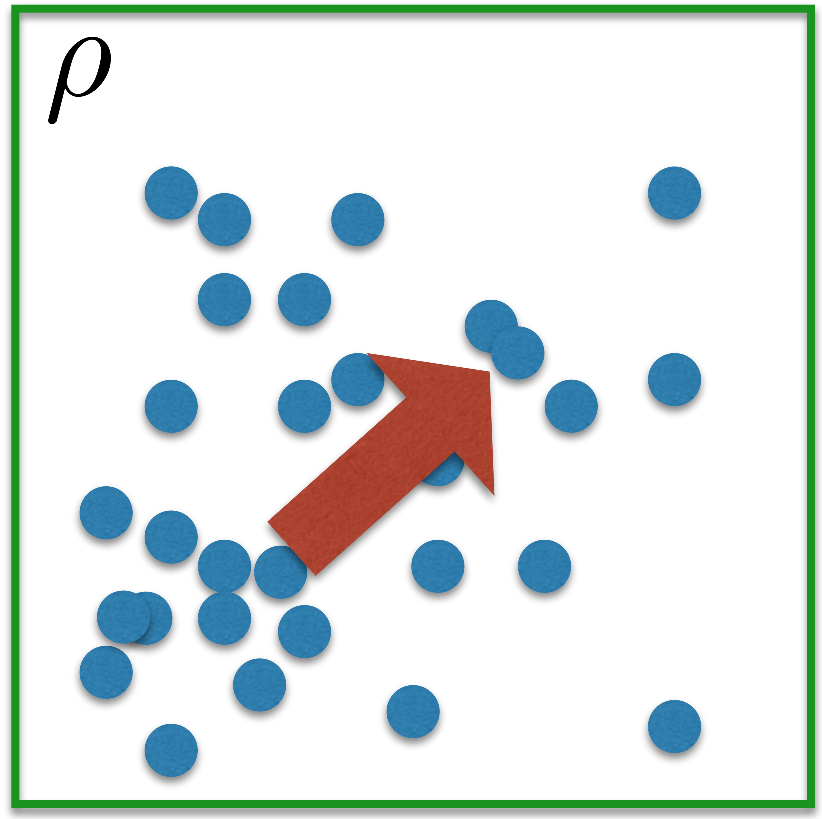
Y ahora modelamos…



Movimiento de un punto de masa:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

Para un medio continuo (e.g. un fluido):
Definimos la densidad de masa, ρ

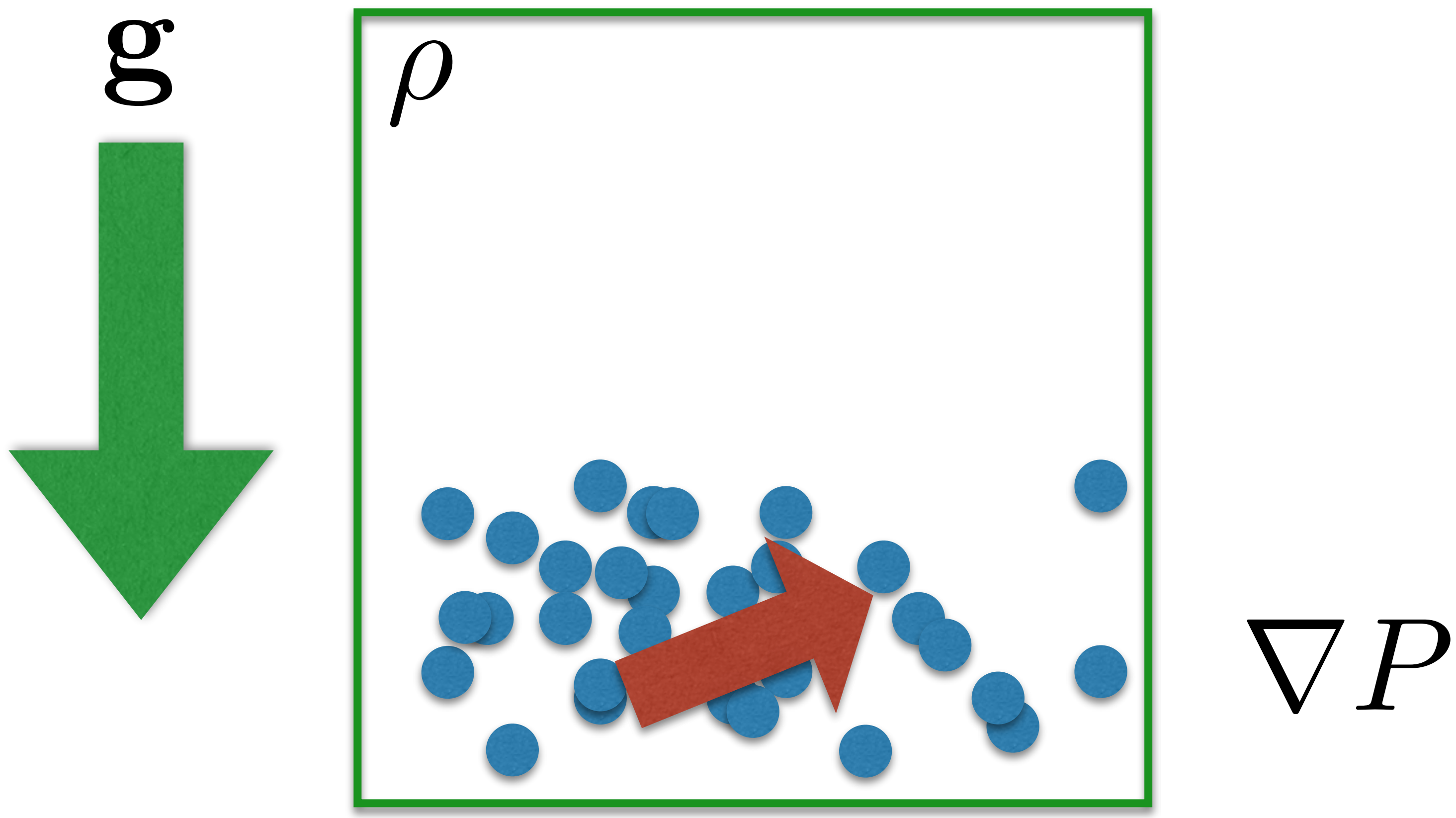


∇P

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\mathrm{v}}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{v}} = -\nabla \mathbf{P}$$

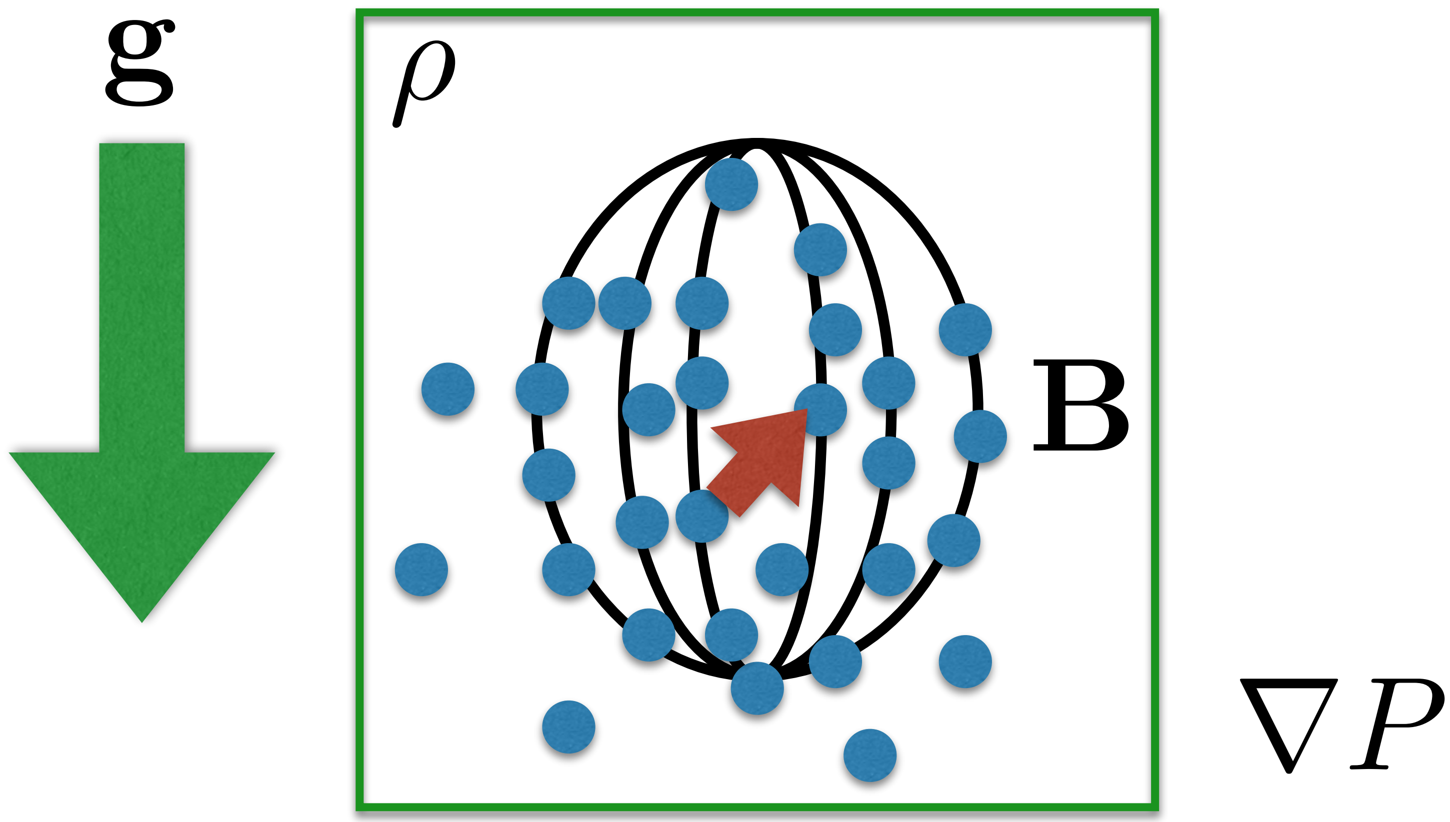
Para un medio continuo (e.g. un fluido):



$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\rm v}$$

$$\mathbf{F}_{\rm v} = -\nabla \mathbf{P} + \rho\, \mathbf{g}$$

Para un medio continuo (e.g. un fluido):



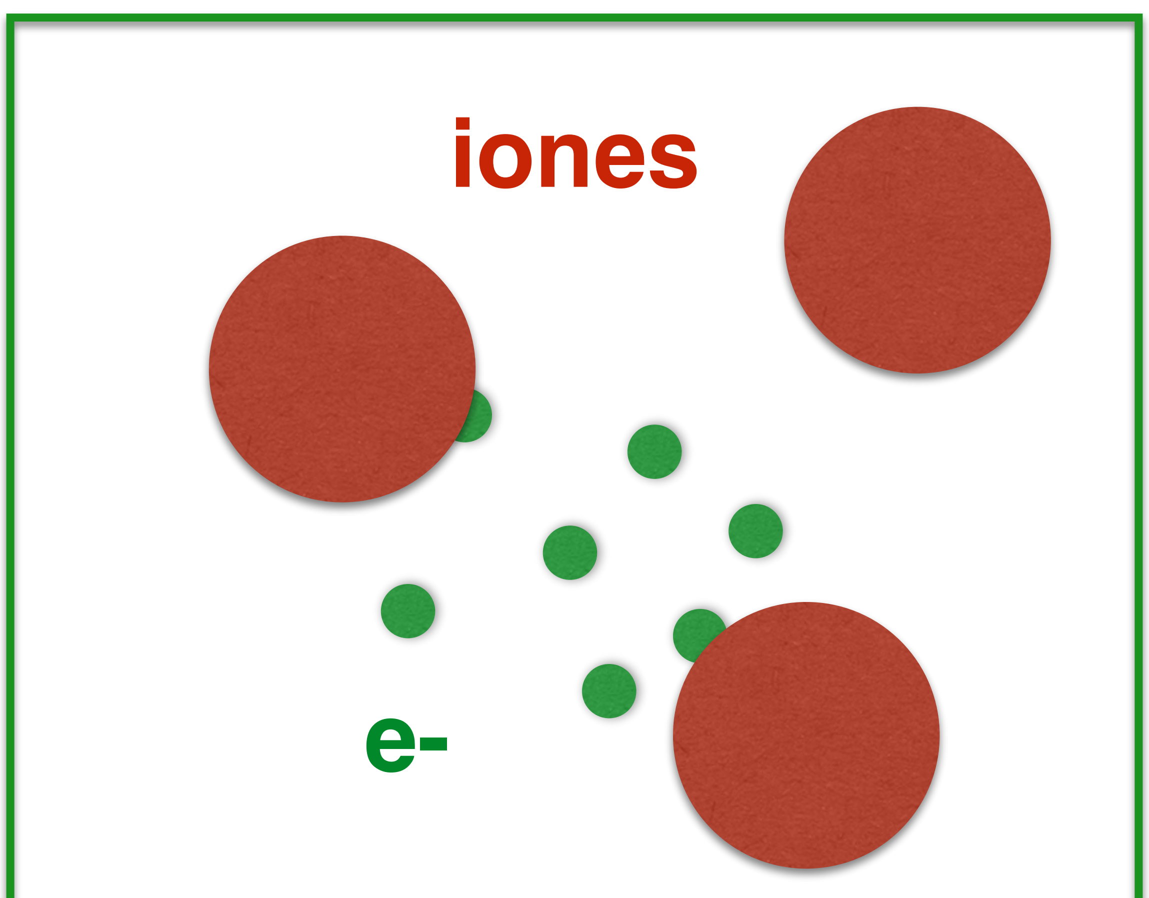
$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\mathrm{v}}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{v}} = -\nabla \mathbf{P} + \rho\,\mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Entonces… Conservación de Momentum:

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \rho\,\mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}}$$

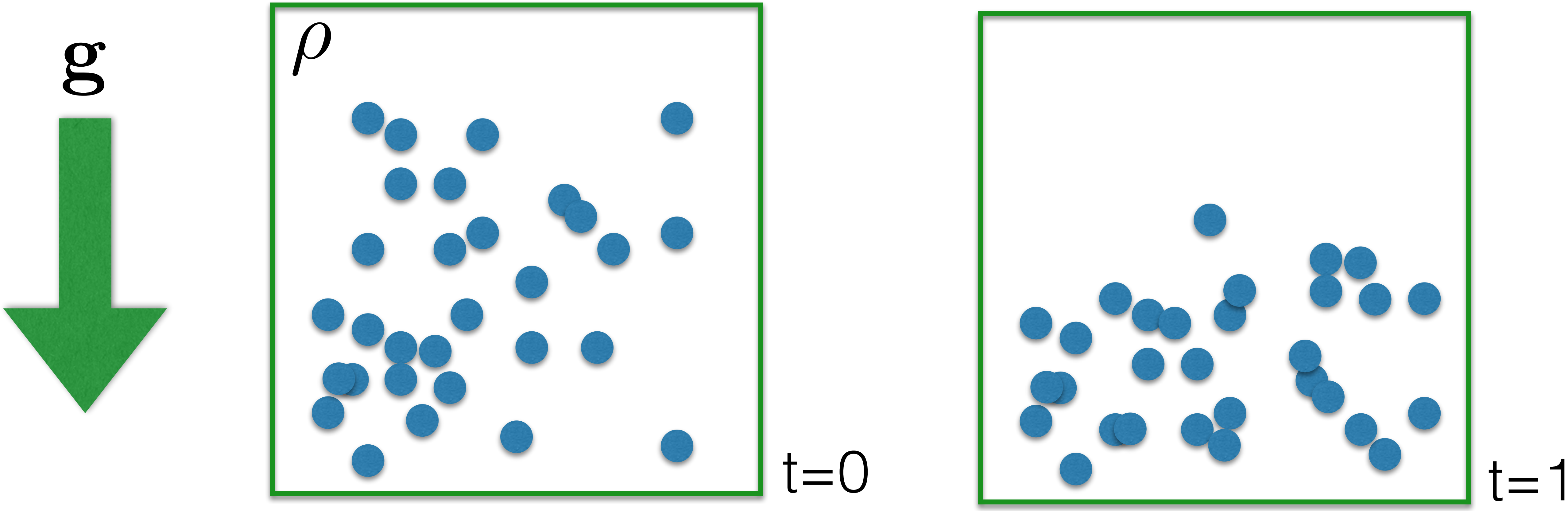
IMPORTANTE:
En MHD, los iones y electrones son tratados como <u>un solo fluido.</u>



Electrones llevan la corriente y "perciben" B.

Iones llevan la inercia.

Tenemos que cerrar el sistema de ecuaciones…



Ecuación de Continuidad:

Conservación de Masa

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho v)}$$

Fuerza de Lorentz

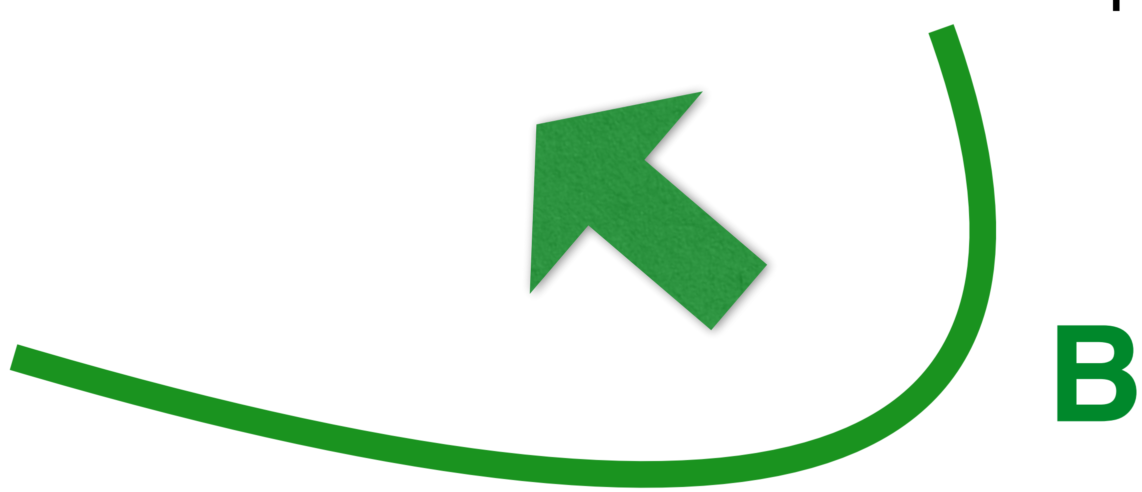
$$\mathbf{F_L} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

Ley de Ampere para bajas frecuencias.

$$\mathbf{F_L} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\,\mathbf{B} - \nabla\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{B^2}\right)$$

Tensión magnética

Presión magnética



Línea de campo actúa como un elástico.

Ecuación de Inducción de Faraday:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

Restricción de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

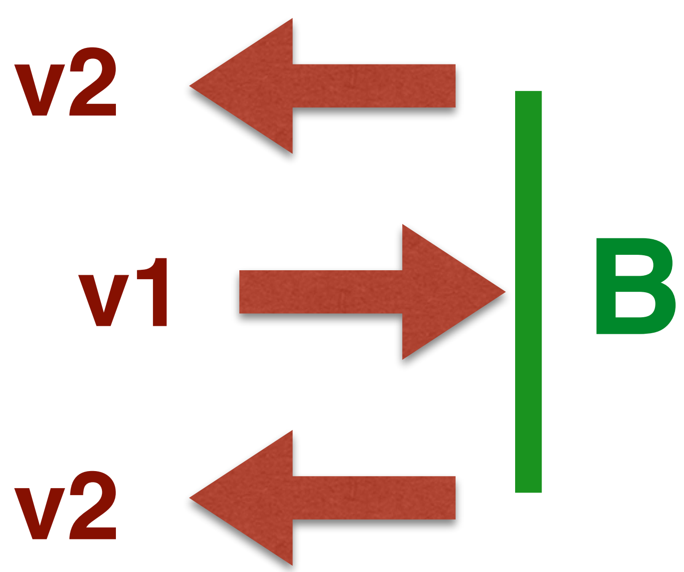
Ley de Ohm

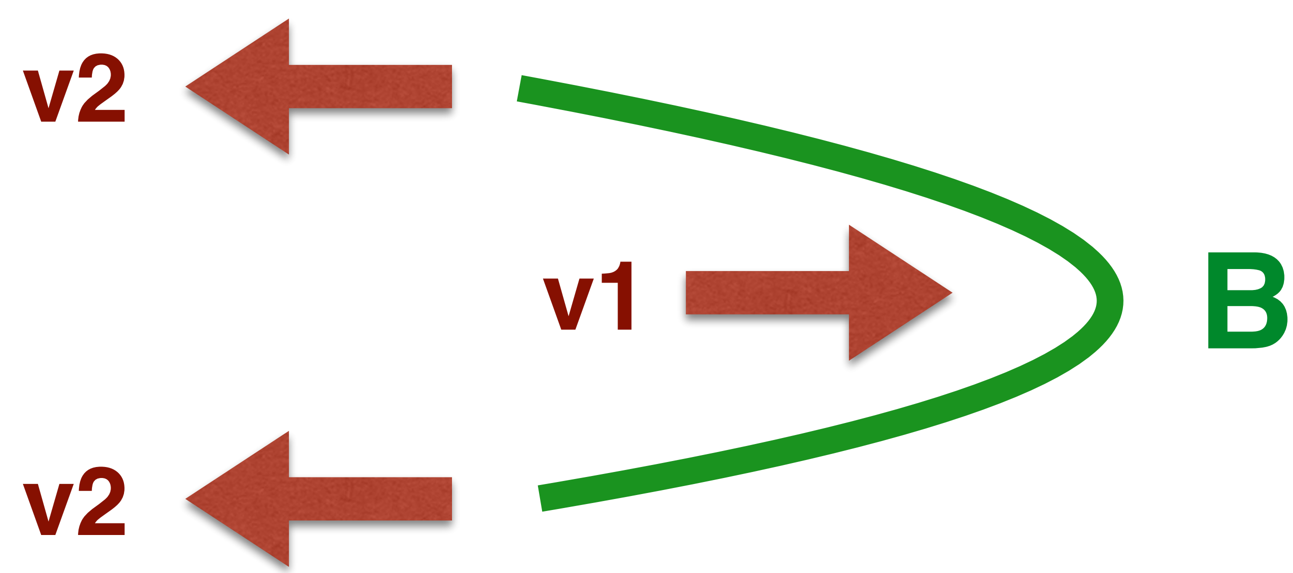
$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \, \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

MHD ideal implica que las líneas de campo magnético están “congeladas” en el plasma (Teorema de Alfvén).

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$





i.e. las líneas de campo se mueven con el plasma.

MHD Ideal

Alfvén 1942 (Navier-Stokes + Maxwell)

B induce corrientes que crean fuerzas.
Estás fuerzas cambian **B.**

Aplicable a:
Fluidos/plasmas con alta conductividad y alta frecuencia de colisiones.

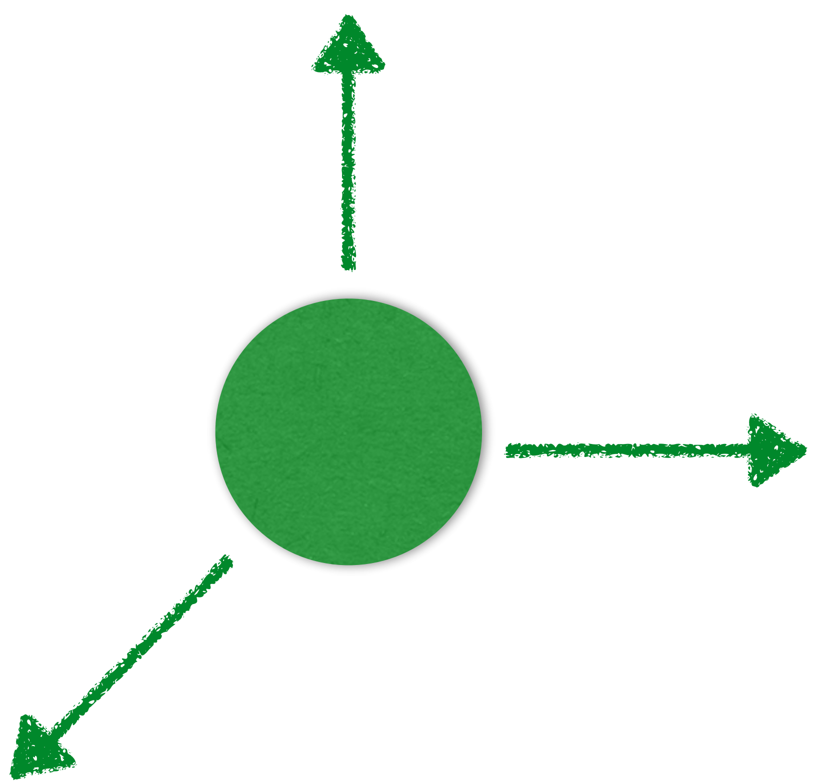
¿Es esto válido?

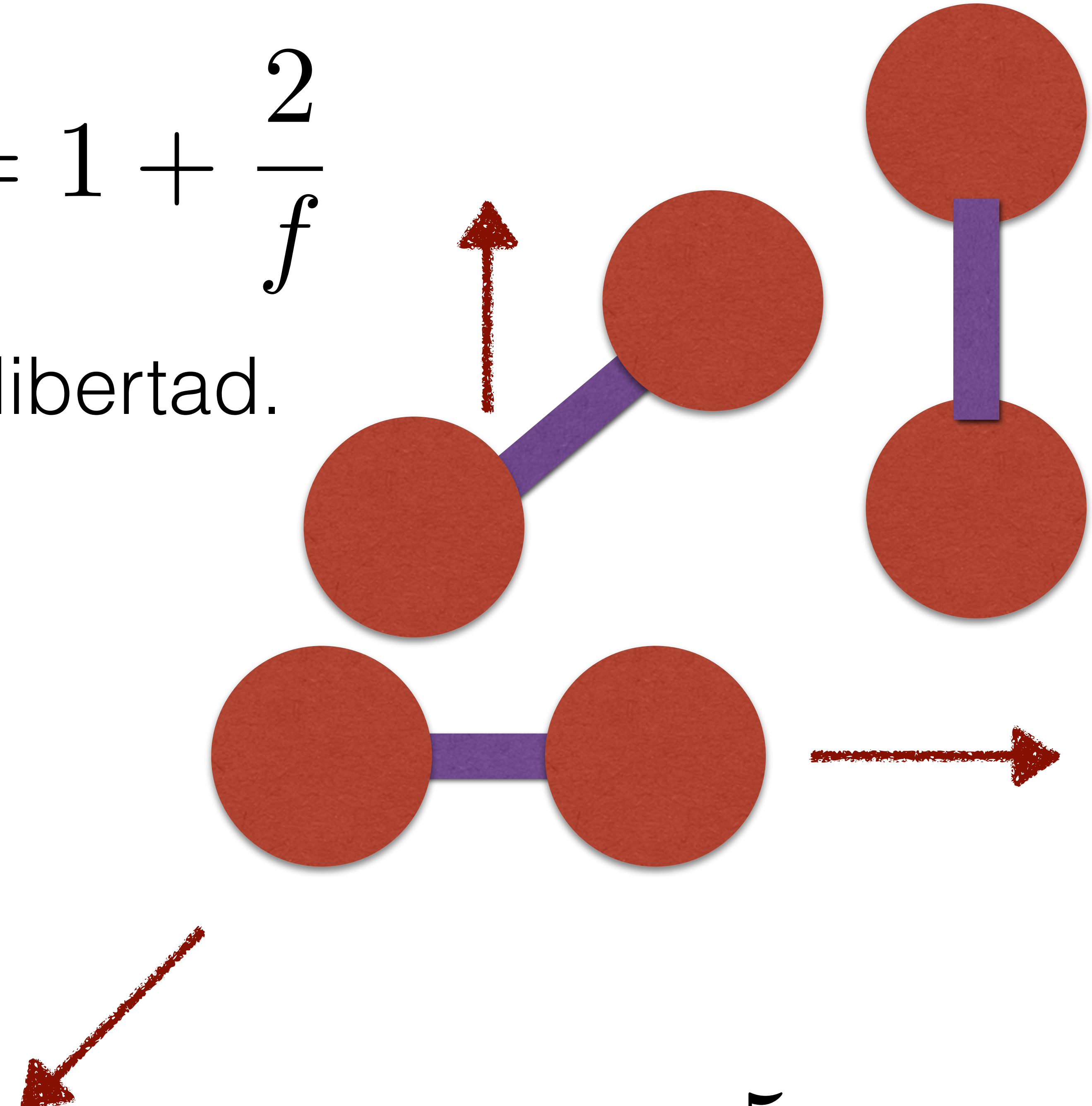
Sí, en gases astrofísicos.

MHD es una confiable primera aproximación.

Índice politrópico: $\gamma = 1 + \frac{2}{f}$

f = número de grados de libertad.





Gas monoatómico $f = 3 \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$

Gas biatómico $f = 5 \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5}$

Ecuación de Estado (Gas Ideal):

$$P = nk_BT$$

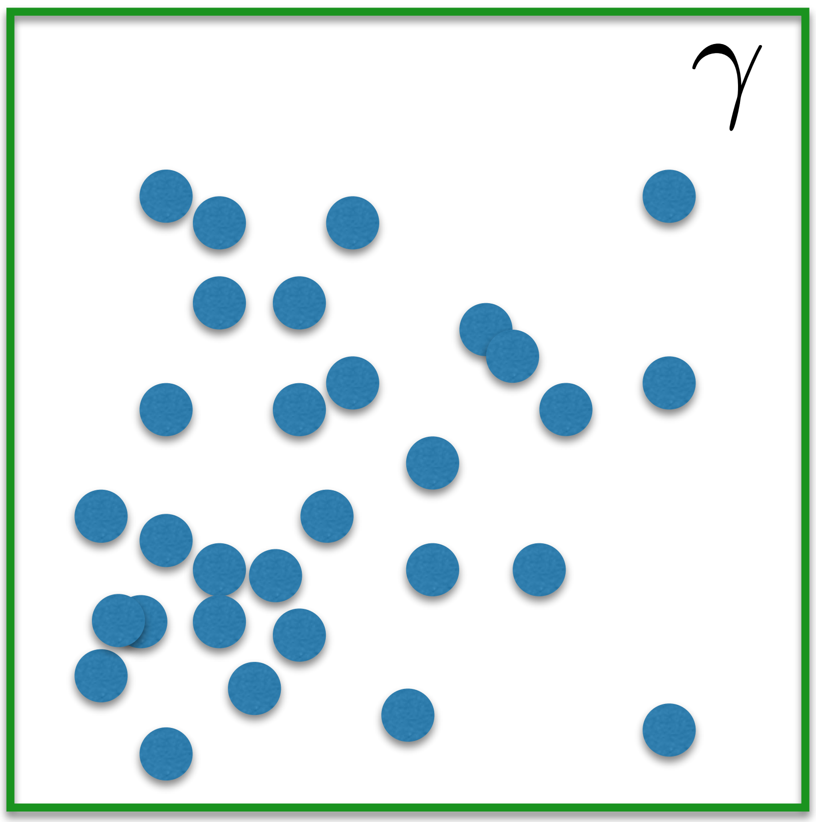
Densidad de energía interna:

$$U = \frac{f}{2}nk_BT = \frac{nk_BT}{\gamma - 1} = \frac{P}{\gamma - 1}$$

Densidad específica de energía interna

$$\epsilon = \frac{U}{\rho} = \frac{P}{\rho\,(\gamma - 1)} \Rightarrow \boxed{P = (\gamma - 1)\rho\epsilon}$$

Tenemos que cerrar el sistema de ecuaciones…

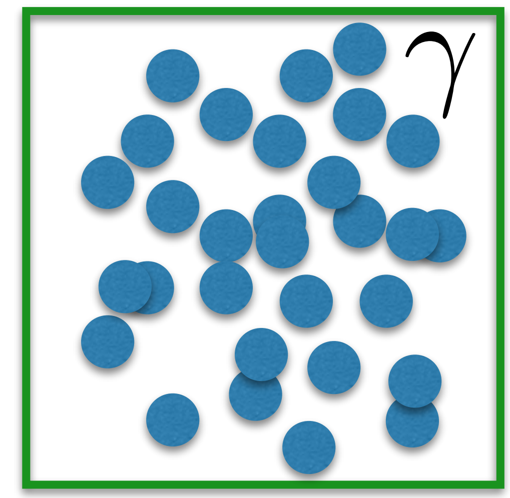


t=0

$$V_1 < V_0$$

$$\rho_1 > \rho_0$$

$$P_1 > P_0$$



t=1

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0$$

Entonces….

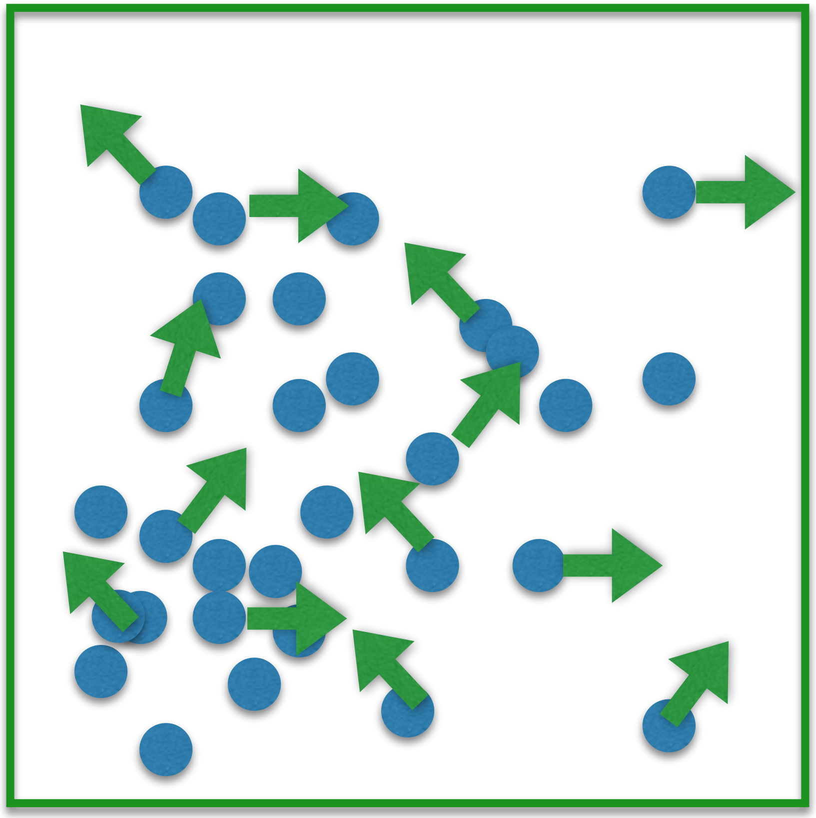
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

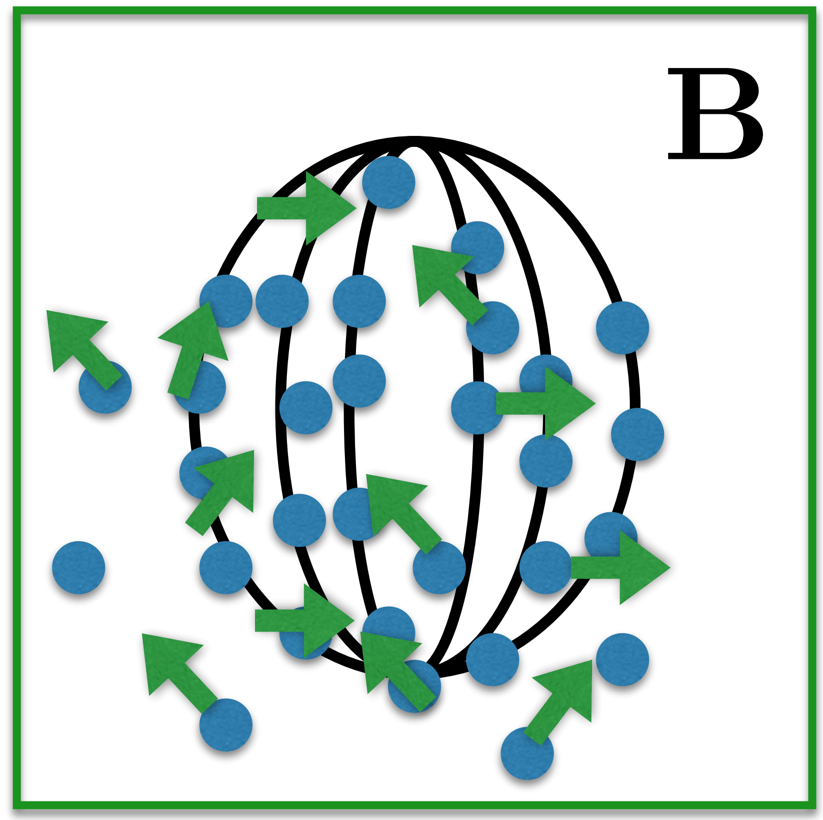
Conservación de la energía.

Densidad de Energía, E:



$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Densidad de Energía, E:



$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2$$

$$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{P}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v}$$

Conservación de la energía:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla\cdot\left[(E + P + \frac{1}{2}B^2)\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B})\right] = \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}}$$

En resumen, llegamos a ecuaciones matriciales:

Hidrodinámica		Magneto-hidrodinámica
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \boldsymbol{v}] = 0,$	Masa	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \boldsymbol{v}] = 0,$
$\frac{\partial [\rho \boldsymbol{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{I}P] = 0,$	Momento	$\frac{\partial [\rho \boldsymbol{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}P] = 0,$
$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P)\,\boldsymbol{v}] = 0,$	Energía	$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P)\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B})] = 0,$
—	Inducción	$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0,$

donde: $P = P_{\rm th} + (P_{\rm mag})$ con $P_{\rm mag} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{B}|^2$

$E = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 + (\frac{1}{2}|\boldsymbol{B}|^2)$, con ϵ siendo la energía interna.

Ecuación de Estado

$$P_{\rm th} = P_{\rm th}(\rho, \epsilon) = (\gamma - 1)\,\rho\epsilon$$