DG method for 1D Advection Equation

강신후 작성, 김기환 정리

04/14/12

1 Problem

지배방정식

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

경계조건

$$x \in [0, L], \quad t \in [0, T] \tag{2}$$

$$u(x,t) = u(x \pm nL, t), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

초기조건

$$u(x, t=0) = g(x) \tag{4}$$

2 DG method with modal form

Discontinuous Galerkin method

Basis function으로 Legendre polynomial P_l을 이용한다.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \bigoplus_{e=1}^{ne} u^e(x,t) \\ &= \bigoplus_{e=1}^{ne} \sum_{l=0}^{np} \tilde{u}_l^e(t) P_l^e(x) \end{aligned} \tag{5}$$

이후 Σ는 생략한다.

Piecewise Legendre polynomial을 weighting function으로 사용하여 Galerkin MWR (Method of Weighted Residual)을 나타내면, 각 element에서

$$\int_{\Omega^e} P_k^e(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \mathrm{d}\Omega^e = 0 \tag{6}$$

각 항별로 정리하면

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e} P_k^e(x)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\Omega^e &= \int_{x_L^e}^{x_R^e} P_k^e(x)\frac{\partial}{\partial t}\left[\tilde{u}_l^e(t)\,P_l^e(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_{x_L^e}^{x_R^e} P_k^e(x)\,P_l^e(x)\,\mathrm{d}x\right)\frac{\partial \tilde{u}_l^e(t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e} P_k^e(x)\frac{\partial f(u)}{\partial x}\mathrm{d}\Omega^e &= \int_{x_L^e}^{x_R^e} P_k^e(x)\frac{\partial f(u)}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= P_k^e(x)\,f(u)\Big|_{x_L^e}^{x_R^e} - \left(\int_{x_L^e}^{x_R^e}\frac{\partial P_k^e(x)}{\partial x}f(u)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned} \tag{8}$$

따라서

$$\left(\int_{x_L^e}^{x_R^e} P_k^e(x)\,P_l^e(x)\,\mathrm{d}x\right)\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial t} + P_k^e(x)\,\hat{f}\Big|_{x_L^e}^{x_R^e} - \left(\int_{x_L^e}^{x_R^e}\frac{\partial P_k^e(x)}{\partial x}P_l^e(x)\,\mathrm{d}x\right)\tilde{f}_l^e = 0 \tag{9}$$

첨자 e는 생략하고, 지역 좌표계로 변환하면

$$\xi = \frac{2}{\Delta_x}\left(x - \frac{x_L + x_R}{2}\right), \quad \xi \in [-1, 1] \tag{10}$$

$$\frac{\Delta_x}{2}\left(\int_{-1}^{1} P_k(\xi)\,P_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial t} - \left(\int_{-1}^{1}\frac{\partial P_k(\xi)}{\partial \xi}P_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\tilde{f}_l + P_k(\xi)\,\hat{f}\Big|_{-1}^{1} = 0 \tag{11}$$

정리하면

$$\boxed{M_{kl}\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial t} - B_{kl}\tilde{f}_l + \Gamma_k = 0} \tag{12}$$

$$\begin{cases} M_{kl} &= \frac{\Delta_x}{2}\left(\int_{-1}^{1} P_k(\xi)\,P_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) = \frac{\Delta_x}{2}\frac{2}{2k+1}\delta_{kl} = \frac{\Delta_x}{2k+1}\delta_{kl} \\ B_{kl} &= \int_{-1}^{1}\frac{\partial P_k(\xi)}{\partial \xi}P_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ \Gamma_k &= P_k(\xi)\,\hat{f}\Big|_{-1}^{1}\end{cases} \tag{13}$$

2.1 B_{kl} 계산

2.1.1 Gauss-Legendre Quadrature

수치적분을 더 효율적으로 정확히 하기 위한 방법이다. 일반적인 Gaussian quadrature는알려진 weighting function $W(x)$를 이용하여 $f(x)$ 적분을 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} W(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i g(x_i) \tag{14}$$

Gaussian-Legendre quadrature에서는 $W(x) = 1$이다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{15}$$

혹은 적분 구간이 다를 때

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right) \tag{16}$$

1. Gauss-Legendre rules

   x_i 종종 'nodes'로 불리며, n-th order Legendre polynomial $P_n(x)$의 근(*root*)이다. x_i 에는 끝점 (-1,1)이 포함되지 않는다. weights w_i는 다음과 같이 주어진다.

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)\left[P_n'(x_i)\right]^2} \tag{17}$$

2. Gauss-Lobatto rules

   노드 x_i 에 끝점 (-1,1)이 포함되며 $\left(1-x^2\right) P_n^{'}(x)$ 의 근(*root*)이다. weights w_i는 다음과 같이 주어진다.

$$w_i = \frac{2}{n(n+1)\left[P_n(x_i)\right]^2} \tag{18}$$

2.1.2 패턴?

Gauss quadrature를 이용하여 B_{kl}을 구해보면 다음과 같은 규칙적인 패턴이 발견된다. 윗첨자는 Legendre polynomial의 차수이다.

$$B_{kl}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{kl}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{kl}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{kl}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{kl}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 2 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 2 & 0 & & & \\ 2 & 0 & 2 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \cdots & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

질문) 만약 B_{kl}이 항상 이런 패턴으로 주어진다면, 굳이 Gaussian quadrature를 사용하여 수치적분을 할 필요가 없지 않은가? 그렇다면 grid point의 위치도 quadrature 규칙 (Legendre 혹은 Lobatto polynomial의 근의 위치)과 상관없이 정할 수 있지 않을까?

2.2 Numerical Flux $\hat{f}$

numerical flux는 인접한 element를 연결해 준다.

$\hat{f}_1$은 인접한 두 element $(e, e+1)$를, $\hat{f}_{-1}$는 element $(e-1, e)$를 연결하는 numerical flux로 정의하자.

그리고 e element flux의 좌극한을 f_1^-, 우극한을 f_1^+라고 하면,

- Upwind numerical flux

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= f_1^- = P_l\left(1\right)\tilde{f}_l^e = \sum_l \tilde{f}_l^e \\ \hat{f}_{-1} &= f_{-1}^- = P_l\left(1\right)\tilde{f}_l^{e-1} = \sum_l \tilde{f}_l^{e-1} \end{aligned} \tag{20}$$

- Central numerical flux

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \tfrac{f_1^- + f_1^+}{2} &= \frac{1}{2}\left(P_l\left(1\right)\tilde{f}_l^e + P_l\left(-1\right)\tilde{f}_l^{e+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_l \left(\tilde{f}_l^e + \left(-1\right)^l \tilde{f}_l^{e+1}\right) \\ \hat{f}_{-1} &= \tfrac{f_{-1}^- + f_{-1}^+}{2} &= \frac{1}{2}\left(P_l\left(1\right)\tilde{f}_l^{e-1} + P_l\left(-1\right)\tilde{f}_l^{e}\right) = \frac{1}{2}\sum_l \left(\tilde{f}_l^{e-1} + \left(-1\right)^l \tilde{f}_l^{e}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

$P_l(1)$과 $P_l(-1)$은 다음과 같다.

$$\begin{cases} P_l\left(1\right) & = 1 \\ P_l\left(-1\right) & = \left(-1\right)^l P_l(1) = \left(-1\right)^l \end{cases} \tag{22}$$

식 (20), (21)을 식 (13)에 대입하면, e element에서 Γ_k^e는

- Upwind numerical flux

$$\begin{aligned} \Gamma_k^e &= P_k(1)\hat{f}_1 - P_k(-1)\hat{f}_{-1} \\ &= \sum_l \tilde{f}_l^e - (-1)^k \sum_l \tilde{f}_l^{e-1} \end{aligned} \tag{23}$$

- Central numerical flux

$$\begin{aligned} \Gamma_k^e &= P_k(1)\hat{f}_1 - P_k(-1)\hat{f}_{-1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_l \left(\tilde{f}_l^e + (-1)^l \tilde{f}_l^{e+1}\right) - (-1)^k \left[\frac{1}{2}\sum_l \left(\tilde{f}_l^{e-1} + (-1)^l \tilde{f}_l^e\right)\right] \end{aligned} \tag{24}$$

2.3 Transformation between physical and spectal domains

Modal DG에서는 $u(x,t) \leftrightarrow \tilde{u}(t)$ 변환이 필요하다. 변환 과정이 번거롭긴 하지만 식 (13)의 M_{kl}이 spectral domain에서 diagonal matrix가 되는 장점이 있다. 변환 방법은 Legendre polynomial의 orthogonality를 이용한다. 식 (5)의 각 element 에서

$$u^e(x,t) = \tilde{u}_l^e(t) P_l^e(x) \tag{25}$$

양 변에 Legendre polynomial을 곱해주면

$$\int_{x_L^e}^{x_R^e} P_k^e(x)\, u^e(x,t)\,\mathrm{d}x = \left(\int_{x_L^e}^{x_R^e} P_k^e(x)\, P_l^e(x)\,\mathrm{d}x\right) \tilde{u}_l^e(t)$$

첨자 e는 생략하고, 지역 좌표계로 변환하면

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_x}{2}\left(\int_{-1}^{1} P_k(\xi)\, u(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi\right) &= \frac{\Delta_x}{2}\left(\int_{-1}^{1} P_k(\xi)\, P_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\tilde{u}_l(t) \\ \int_{-1}^{1} P_k(\xi)\, u(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi &= \frac{2}{2k+1}\delta_{kl}\tilde{u}_l(t) \end{aligned}$$

따라서

$$\tilde{u}_l(t) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} P_l(\xi)\, u(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi \tag{26}$$

Vandermonde matrix를 이용하면 보다 간단하게 변환할 수 있다.

$$\begin{cases} u_j &= V_{jk}\tilde{u}_k \\ \tilde{u}_j &= V_{jk}^{-1} u_k \end{cases} \tag{27}$$

$m \times n$ Vandermonde matrix는 다음과 같다.

$$V_{jk} = \alpha_j^{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_{\mathbf{3}} & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \cdots & \alpha_m^{n-1} \end{bmatrix} \tag{28}$$

2.4 Runge-Kutta method for temporal differentiation

Initial value problem이 다음과 같이 주어졌을 때,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0 \tag{29}$$

RK4 method는 다음과 같다.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{30}$$

$$t_{n+1} = t_n + h \tag{31}$$

$$\begin{cases} k_1 & = hf(u_n, t_n) \\ k_2 & = hf\left(u_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}h\right) \\ k_3 & = hf\left(u_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}h\right) \\ k_4 & = hf(u_n + k_3, t_n + h) \end{cases} \tag{32}$$